三重大学教育学部研究紀要　第44巻　教育科学（1993）　17－49頁

# 児童・生徒の直観的能力に関する研究（Ｉ）

## ── 直観的能力は指導によって向上するか、その可能性について ──

蟹　江　幸　博　・　奥　　　　招

# A Study on the Intuitional Ability

Yukihiro Kanie ・ Syo Oku

## 0　序

本論文の発端は筆者の一人、蟹江（以下筆者Ｋと記す）がある初等的な幾何の問題に出会ったことにある。その問題の解法を発見することとその解法を教えることは多少の知識と数学的訓練と幾分かの閃きがあれば可能だったが、その解法を自分自身で発見する能力を育成するにはどうしたら良いかと考えるに至ってしばし茫然となってしまった。

筆者Ｋも幾何学者の一人であるが、問題を突きつけられても正しい直観を持つのにかなりの時間を要した。それは、これまでの標準的な数学教育においてはその直観が養われなかったことにならないだろうか。

そこで、この種の直観は不必要だと考えるのか、この種の直観を要請する特別のメニューを作るべきだと考えるのか、これまでの算数・数学教育でも少し工夫すれば得られるはずだと考えるのかというように態度が別れるところである。

筆者Ｋは第三の立場に沿って、初等・中等教育に携わる人々への提言として、“幾何的直観と対称性”［２］と題する論文を用意している。

本論文は論文［２］が数学教育においてどのような意義を持ちうるのかに視座を置いて、論文［２］が提案していることが実行可能であるかという問題を中学校に新しく導入された課題学習のなかの議論として再現させようとするものである。この意図については、筆者奥（以下Ｏ）が分担する。

尚、記述に先立ち用語について規定と若干の補足をしておきたい。まず、「幾何」の用語は、現在の数学教育においては高等学校で初めて登場するが、「図形」とは幾何の「内容」の一つであると理解した上で、本論では幾何の用語に統一した。また、記述の分担については、下記１，２節を筆者Ｋ、３，４節を筆者Ｏが担当した。

## 1　ある問題との出会い

### 1．1　問題とその周辺

筆者Ｋを嘆かせた問題との出会いについて述べよう。

筆者Ｋは最近アーサー・Ｃ・クラークのＳＦ［１］を読んだ。1912年4月14日氷山に衝突して大西洋に沈んだ豪華客船タイタニック号を浮上させようとする、意図、経済効率、実現可

能性などを追求したＳＦである。ＳＦそのものは今の問題ではないが、タイタニック号を引き上げるのに協力するコンピュータ学者の夫婦の一人娘エイダの天才を際立たせる挿話として、ある初等的な幾何の問題が提出されている。

天才は、初等教育の熟練者にとっても見出され難いどころか、その芽を摘まれかねないといった設定になっているので、少し状況を説明しておこう。

夫婦はそれぞれ極めて高く評価される国際的な学者で数学的才能にも恵まれており、その一人娘に付けたエイダという名前はコンピュータ創世記に燦然と光り輝くレディ・ラブレイス（詩人バイロンの娘でもある）の名前である。尚、エイダ＝Adaという名前は彼女にちなんである高級コンピュータ言語の名前にもなっている。親の過度の期待を表わすためにクラークが選んだ名前なのであろう。

エイダが６才になる頃には、夫妻の友人たちが「２項定理ぐらいは発見しても良さそうだが」と冗談を言うほどに期待されたが、一向に数学的才能を発揮しない。これがどんな冗談かは少し数学史を知っていないといけない。19世紀最大の数学者ガウスの少年期のエピソードとしてあまりにも有名である。ガウスの通っていた小学校の教師がある時忙しくて、教室で雑用がしたいために生徒に直には出来ないだろうと思う問題を出した。$1+2+3+4+\cdots+99+100$ を求めよ。教師が黒板に問題を書き、椅子に座った途端に少年ガウスは手を挙げて正解を答えた。嘘だろうと思った教師はむしろガウスを叱ったという。しかしガウスは黒板の問題の下に $100+99+\cdots+4+3+2+1$ と書き、上下を足して、$101\times100\div2=5050$ と答えたという。出来すぎた話でかなりの脚色があるかも知れないが、初等的に示すことの出来る高度に見える数学的事実を若き天才が初等的に発見するという物語は、数学だけでなく自然科学の天才達の神話に多く登場するパターンである。数学的才能の早期の開花を期待されつづけるのは本人にとっても可成のプレッシャーだっただろう。

成績も全Ａを取るのは絵画・粘土細工だけで、算数はＤという成績で、母親の嘆きは娘がそんな成績も気にしていない（ように見える）ことで更に深まっていた。父親は娘が幸せである程度の成績をとっていれば今は充分で、将来は芸術家になるかも知れないと考えていたが、母親はあくまでも天才型の子供にさせたいと思っていた。

エイダが９才になったある日、学校から帰され泣きながら両親の部屋に入ってくる。校長の手紙によれば、不服従の罪で停学にするとのこと。手紙に添付された標準的（と彼らがいう）視覚テストをしたところ、エイダは20題中19問題を解いたのに、極めて簡単（だと教師側が思った）問題を間違えた。その問題を間違ったのはエイダだけで、悪いことに、教師が間違いだと指摘してもエイダは間違っていることをきっぱりと否定したのである。印刷した答えを見せても、間違いを認めず他のみんなが間違っていると主張した。クラスの規律を守るために停学処分にしたが、親から良く言い聞かせてやってくれという内容であった。

アメリカでは公教育があまり信頼されていないというせいでもあるのか、この学校は私立なのであろうが、それにしてもアメリカの学校の校長はすごい権限を持っているものだと感心してしまった。

感心したのは筆者Ｋの無知に依るものらしいが、それはともかく、父親は娘を納得させるために厚紙で図形を作ろうとする。母親は、父親のしようとすることは対症療法で、病気の原因ではないので、自分が正しいと言い張る理由を突き止めるためには、精神科医に診てもらうべきだとまで言う。アメリカが病んでいる所為なのか、民主主義の行き詰まりなのか、両親が過

度に知的で良心的な対応をしていると言うべきなのかは分からないし、論じたい訳でもない。

算数・数学教育の議論なので、ここで問題を説明しておこう。二つの小問に分かれていて、

1．二つの同じ正四面体があります。側面は全部で八つあるがみな同じ正三角形です。二つの面を選んで合わせて得られる立体には面が幾つあるでしょう？
2．辺の長さが等しい正四面体とピラミッドがあります。ピラミッドは底面が正方形で側面は正三角形です。両方の立体の面は合わせて九つあります。二つの三角形の面を合わせて得られる立体には面が幾つありますか？

というものである。 美しく着色された図形があるというのだから、問題には下のような図に色刷りされてでもあるのだろう。

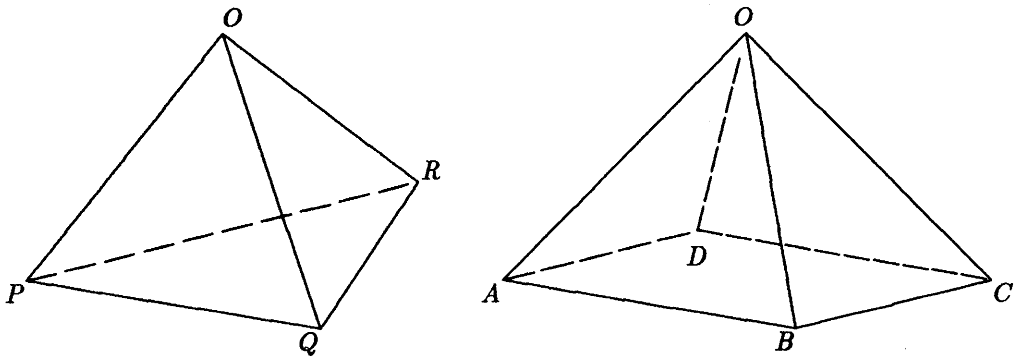



**図 1．正四面体とピラミッド**

最初の問は易しい。二つの面を合わせて新しい立体を得ようとすれば、その二つの面は消えて、４＋４－２＝６、と面の数は6になる。エイダだって間違えはしない。

しかしそれなら、二つ目の問だって易しい。面が減るのは合わせた二面なのだから、４＋５－２＝７、と面の数が7になる筈だ。皆そう思う。印刷物を見せたとあるから、出題者もそう思い、学校の先生もそう思い、数学的才能が豊かだと自負のあるエイダの両親もそう思う。

しかし、エイダはそうは思わない。誰がどのように説得しても納得しない。

父親は厚紙で作った正四面体とピラミッドをそれぞれ掌の上に乗せて回してみる。それを見ていてもやはり、面の数は7になるとしか考えられない。母親に対して娘の行状を嘆きながら、二つの立体を合わせてみる。父親は、言葉を無くし、茫然とその立体を見る。面の数は5しかないのだ。

“確かに5面になる。それでも頭の中に思い浮かべることは出来ない。”エイダを呼び、この立体を見せながら、娘に尋ねる。“何故こうなるって分かったんだい？ ”

エイダは、父親が何故興奮しているのか、いぶかしげに答える。“だって、ほかにはなりようがないんだもの。”

父親は、図形認識においてラマヌジャンにも匹敵する天才を目の当たりにしていると悟り、夫婦とも大いに喜ぶことになる。

### 1．2　数学者の解決への過程（迷い道）

恥を忍びつつ、筆者Ｋのその後を報告しよう。エイダと比べて何と生彩のないことか。

筆者Ｋはこのエピソードを読んだとき、本当だとは思えなかった。ＳＦゆえの、興味本位のでっち上げかとも思った。しかし、作者のクラークという人の性格から、満更嘘でもあるまいという気もした。どっちつかずに思いながら、少し考えてみた。どうしてもエイダの言うようにはなりそうな気がしない。ならないとも言えないが、なるという根拠が思い浮かばない。

その日たまたま大学に出かけ、2，3の同僚にこの問題を話してみた。“どう思う？7つじゃないことってありそうに思えるかい？”

皆面倒くさいのか、分からないのか、“わからんな”としか言わない。

模型を作ればはっきりするのは分かっているが、不精者の筆者はもう一人訊いてからにしようと、幾何学者Ｔ氏の研究室に向かった。

“どう思う？7つじゃない、なんて起こりそうに思えるかな？”

“んーん、分からんな。”

筆者は面倒臭くなってしまった。“良いよ。成り立たない！7つに決まってる！証明してしまえばいいんだ。”と言って、黒板で証明を始めることにした。

上の図でその証明を再現しよう。表面に現れる三角形はすべて長さが等しい正三角形だから合同で、どれとどれを合わせても同じだから、△$OQR$を△$OAD$に重ね合わせることにしよう。得られる立体を$X$と呼ぼう。面の数が7つでなくなることがあるとすれば、何処かの面と面が延長すれば同じ平面になることにならねばならないが、今の図では△$OPQ$と△$OAB$が同じ面をなす以外には考えられない。正四面体$OPQR$にもピラミッド$OABCD$にも対称面がいくつかあるが、面を合わせて得られた立体$X$では同じ平面になるものがある。この平面$\alpha$は、正四面体$OPQR$では頂点$O$から底面$PQR$への垂線と、頂点$P$から底辺$QR$への垂線を含む平面であり、ピラミッド$OABCD$では頂点$O$から底面$ABCD$への垂線と、$AD$の中点と$BC$の中点を結ぶ直線を含む平面である。従って立体$X$も平面$\alpha$に関して対称である。

それゆえ、△$OPQ$と△$OAB$が同じ面をなすのなら、△$OPR$と△$ODC$が同じ面をなすことになる。

正四面体をなすのだから、△$OPQ$と△$OPR$のなす面は直線$OP$で交わっている。それゆえ、△$OAB$と△$ODC$のなす面は直線$OP$で交わっていることになる。

今後はピラミッドのもう一つの面対称を使う。ピラミッド$OABCD$は、頂点$O$から底面$ABCD$への垂線と、$AB$の中点と$CD$の中点を結ぶ直線を含む平面$\beta$に関して対称である。

従って、△$OAB$と△$ODC$のなす面は△$OQR$を△$OBC$に重ね合わせたとしたときの線分$OP$で交わることになる。区別するためこの線分を$OP'$を書くことにしよう。線分$OP$の平面$\beta$に関する対称像である。

△$OAB$と△$ODC$のなす面は直線$OP$と$OP'$で交わっている。二つの平面が二本の直線で交わっていれば、元々同じ平面でなければならない。ピラミッドの向かい合う側面が同じ面であるはずはないので矛盾である。これは正四面体とピラミッドの面を重ね合わせたとき、どこかの面が一致すると仮定したことによるのだから、面が偶然一致することは有り得ない。よって、面の数は7であり、クラーク氏はでっち上げを行った。

極めて明快な証明に見える。証明できて良いのかなとも思ったが、すっきりもした。Ｔ氏と苦笑いを交わして、“困ったね”と言いながら彼の研究室を出た。

ドアを閉めた瞬間、“あれっ、証明にギャップがあるぞ”と気付いた。上の証明で本質的に使われていることは、二本の直線が平面を定めるということだ。しかし、より厳密にいうと、一点で交わる二本の直線か、二本の平行線（無限遠点で交わっていると思ってよい）は、それを含む平面を一意的に定めるということである。

上の例でいうと、対称面$\alpha$，$\beta$は確かに直交する二本の直線で指定してあるので良いが、直線$OP$と$OP'$は点$O$で交わるのだが本当に二本なのかは確かめられていないのである。これが一本であったら、つまり、$OP$の延長上に点$P'$があったら、上の証明は成り立たない。$POP'$が一本の直線ということは、この直線が底面$ABCD$に平行だということになるのだが、そうなるように思わなかったが、そうなっても良いかも知れない。なっても不思議はないな。

ここまでくれば、逆にそうなることを証明できるかもしれないと思うし、証明してみようとも思う。やってみれば、実は易しい証明があるのだ。模型を作ってみれば誰でも思いつくほど易しい証明である。

図2のようにピラミッド$OABCD$を二つ並べてみる。二つの頂点$O$と$O'$を結んでやると、四面体$OO'BC$が得られる。分かりにくいかも知れない。別の言い方をしよう。

図2のようにピラミッドを並べれば、$\triangle OAB$と$\triangle O'BB'$が同じ面であり、$\triangle ODC$と$\triangle O'CC'$が同じ面であることは疑問の余地がない。だからその二つの面を延長すれば、辺$BC$の上方に有界な領域が得られるが、これは四面体であり、更に見えている辺はみな等しいことから正四面体になる。

言い換えれば、ピラミッド$OABCD$に正三角形$OO'BC$をくっつけるとき、$\triangle OAB$と$\triangle OO'B$は同じ平面をなすことになる。

あーあ、俺は幾何学者だったのかという嘆きが口をつき、エイダの涙が不条理な社会に対する怒りだったことに気が付く。クラークさん、ごめんなさい、である。

図2を一度でも思い浮かべたことがあれば、また知識として知っていればこの問題を間違えることはないだろう。予備知識がないのに（？）そうなることを“知っていた”エイダの空間的な幾何的直観は天性のものか、それともエイダはそれまでに空間図形に対しても色々と“空想”したことがあって、馴染みの世界だったのだろうか。絵画・粘土細工の成績が良かったという伏線は、後者を暗示しているというべきかも知れない。

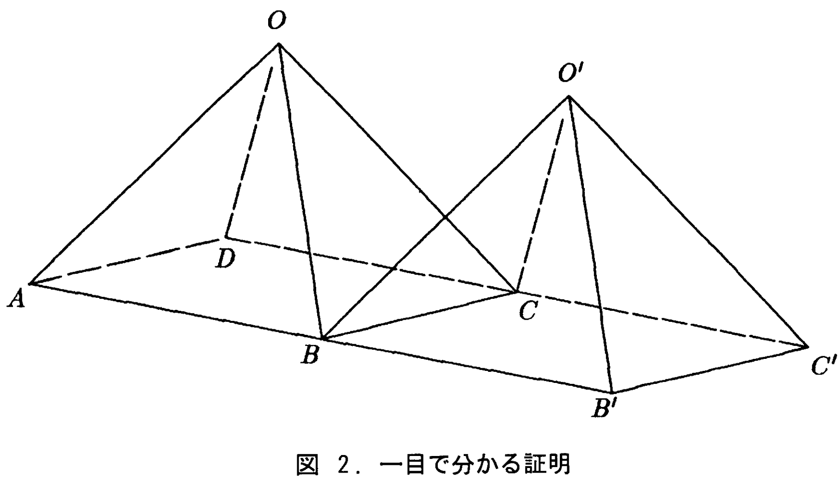



**図 2. 一目で分かる証明**

今更ピアジェを持ち出すまでもなく基本的な数学的概念と言えど、成長のある時期に獲得していくものであろう。現在の学校教育ではある意味で、教科教育の整備が行き届きすぎているのではないだろうか。児童・生徒の成長に必要な要素をすべて教科の項目の中に入れることは出来るはずもないが、すべてを盛ろうとする努力が行きすぎたあまり、隠れたファクターと言うべきものを許容しにくい環境にあるのではないだろうか。

たとえどんなに優れた教科書であっても、眼前の児童・生徒にとって必要十分なものとは言えないものであることに現場の教師は意を用いるべきだし、不足している部分を随時臨機に補う努力をしなければならない。

目標を達成しようとする方法・手段についても、そして目標そのものについても余りに統制されすぎている。人はもっと多様なのである。多様な人格と才能を多様なまま受け入れ伸ばしていかなければならない。取りあえずのフロンティアを失った人類にとって、均一化することは種の絶滅を生みかねない。

多様な指導法を臨機に採用できるためには、教えるべき教科の内容の多様なあり方を知っておくこと、また多様な指導法を日頃から考えておくことが重要である。

論理的操作や計算力などは指導しやすい。指導できたかどうかは、児童・生徒の答えを見ればすぐに分かる。しかし、直観は指導しにくい。掛け算の九九のように何度も繰り返させれば出来るようになるというものではない。誤った直観を持ったときそれを訂正するのはもっと難しい。何故分かってくれないのか、身悶えするほどのもどかしさを感じても、分からないものには分からない。しかし、その場を良く見れば、分からないのでなくて、分かろうとしていないということが多いようだ。分かろうとしていない児童・生徒に分かろうという気持ちにさせるのはどうしたら良いだろうか。

幾何的直観は数学的事実の裏付けがあるから、誤っていれば、論理的に誤っていることを示すことが出来る。直観の歪みを論理が訂正することの出来る極めて稀な人間の営為なのだ。それゆえ幾何的直観を如何に正しく持つことが出来るか、間違った直観を如何にして訂正することが出来るかという問題は大きな意義があるだろう。

さて今の場合に戻って考えてみよう。

エイダの問題は確かに簡単な解答があった。図2を見て、それでも事実を疑う人は少ないだろう。しかし、なりそうもないなと思っていたその誤った直観は正されるだろうか。

筆者Kの誤った証明の$OP$と$OP'$が何故一直線になるのか、分からない、乃至、分かることの出来ない人も多いのではないだろうか。元の筆者Kの直観では、ピラミッドの正方形の面を水平面として、$OP$は$O$から見て下がっているような気がしてならなかった。

予備知識なしにこの問題を聞いた同僚の殆どは同じ様に感じたらしい。筆者Kは今何通りもの証明、直観的なもの、論理的なものを持っているので、その間に直観がリセットされてしまっている。前にはどんな違和感があったのか、忘れてしまいそうなほどである。

これから何通りもの説得をしてみる。どの辺りで直観が訂正されていくかを自分で確かめてみるのも面白いのではないだろうか。うまく実験が構成出来れば面白い論文になるかも知れないが、心理学者の助けが要りそうだ。

さて、$OP$が水平であることはある意味では当たり前だった。図1のピラミッドをじっと見ていて、$\triangle OAB$と$\triangle OCD$の二つの面の交線を考えることだったのだと気がつけば、対称性から交線が水平になるのは明らかだったのだ。

しかしこう考えられるのは直観が正しくなってからのような気がする。勿論これで変わった人もあるだろうが。

厳密に論理的にやってみようと決心すると、決心しただけでかなり直観が回復する気がするのはおかしなものだ。

厳密にやろうとすると、一度に二つの面をくっつけようとせず、順序立ててする気がしてくる。図1の正四面体はその侭ではくっつかない。せめて図3のように辺 $QR$ を下にして立ててやることを考える。

図3の左で立っている正四面体を見たときそれでもう直観が正されたと思う人もいるだろう。

折角ここまでやったから厳密にしたいと思えば、このまま正四面体をずらしてきても△ $OAD$ にピタッと合うとは言えないので、まず辺の $QR$ と $AD$ を合わせてそれから辺 $QR$ の周りに回転して△ $OAD$ と合わせることにする。

図3の新しい点 $S, T, I, J, L$ はそれぞれ辺の中点で、$K$ は $O$ から正方形 $ABCD$ への垂線の足であり、正方形の中心（重心でもある）である。

現れるすべての辺の長さは同じだから、この長さを $a$ としておこう。

立体 $X$ と平面 $\alpha$ との交わりは四辺形 $OPTL$ になる。$OP=TL=a$ であるし、$PT=OL$ であることは側面となっている正三角形がみな合同なことから分かる。必要ならピタゴラスの定理を使えば、$PT=\frac{\sqrt{3}}{2}a=OL$ であることも分かる。二組の対辺が等しいから四辺形 $OPTL$ は平行四辺形であり、特に $OP$ は $TL$ と平行である。

この事は又直接に、△ $OPT$ と△ $TLO$ が合同であり、従って $\angle POT=\angle LTO$ であることからも分かる。

直線 $OP$ が水平面に平行であることが分かったが、これで直観の歪みが取り除かれるだろうか？そういう人もいるだろうが、多くの人は、証明を得ただけではなかなかそれまでの直観は改められない。

三角形の合同定理は何かを証明するのには良くても、納得させるのには適していないこともある。

納得し易くするには少し示すものを変えてやるとよい。長さを求めるのが更に面倒にもみえるが、四辺形 $OSTK$ で $OS=\frac{a}{2}=TK$, $OK=\frac{\sqrt{2}}{2}a=ST$ であることからも分かる。この時は

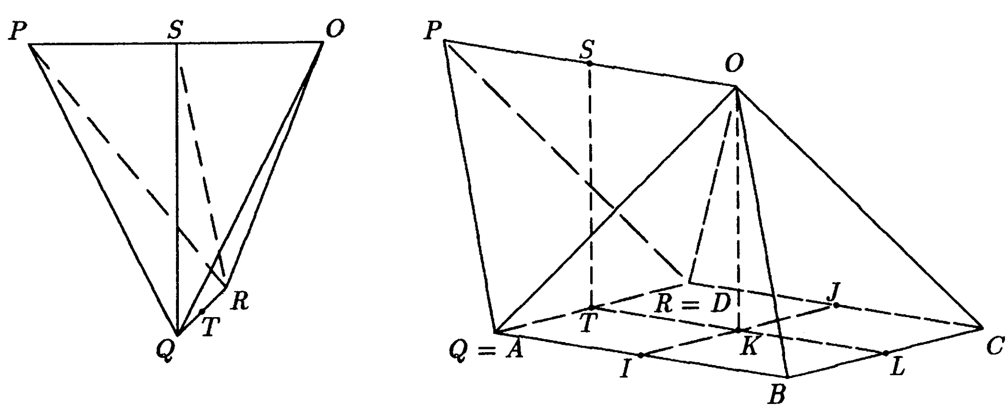



**図 3. 水平の証明**

更に$\angle OKT = \angle OST$=直角であることも分かるので、直線$OP$の高さが一定という感じが出て直観は随分と宥められるだろう。

直観が歪んだ理由は次の小節で触れることにしよう。直観が宥められたと言っても、立体$X$が五面であることが証明出来たわけではない。直線$OP$が水平だからといって、$\triangle OPQ$と$\triangle OAB$が直線$OQ$の所で折れ曲がっていないということが示せてはいないのだ。

きちんと示すためには面角の知識が要る。平面$\alpha$と$\beta$の交線$\ell$上に任意に点$O$を取り、平面$\alpha$上に$O$を通り直線$\ell$に垂直な直線$OP$を引く。平面$\beta$上にも$\ell$への垂線$OQ$を引く。二直線$OP$と$OQ$の成す角の大きさ$\theta$が交線$\ell$上の点$O$の取り方に依らず、これを二平面$\alpha$と$\beta$の成す面角の大きさという。

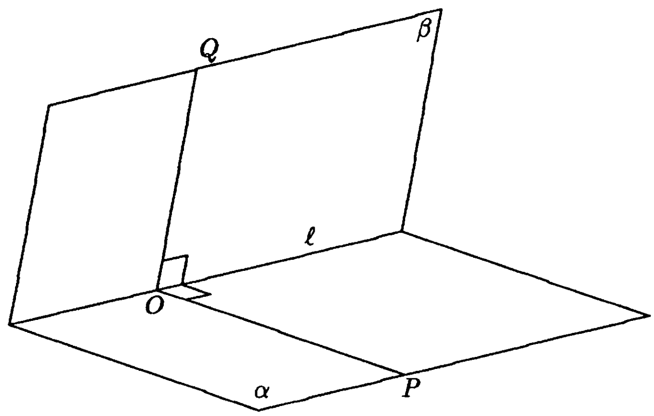



**図 4．面角の大きさ**

面角の大きさ$\theta$が$0°$や$180°$のときは二平面$\alpha$と$\beta$は一致するし、$\theta=90°$のときは二平面$\alpha$と$\beta$は直交するという。直交するとき、平面$\alpha$上の$O$を通る任意の直線は$OQ$と直交するし、平面$\beta$上の$O$を通る任意の直線は$OP$と直交することになる。

さて、$\triangle OPQ$と$\triangle OAB$同じ面をなすことを示すには、直接的に$\triangle OPQ$の面と$\triangle OAB$の面との面角が$180°$であることを示す方針と、$\triangle OPQ$の面と$\triangle OAB$の面の水平面との面角が等しいことを示す方針の二つがある。

まず直接に示してみよう。図3で立体$X$を見ることにする。交線$OQ=OA$上に適当な点を選ばねばならないが、対称性から線分$OQ$の中点$H$を取るのがよいだろう。$H$を通り、直線$OQ$の垂直な平面$\gamma$を考えると、$\gamma$は正四面体$OPQR$の対称面になっており、その交わりは$\triangle PHD$になっている。更にピラミッド$OABCD$との交わりが$\triangle HBD$になっている。平面$\gamma$上でこの二つの三角形が辺$HD$で隣り合っている。折れ線$PHD$が実は直線であること、つまり点$H$での隣り合う角の和が$180° = \pi$（ラジアン）を示せばよい。これが問題の二つの平面の面角だから。

予断を持つといけないので二つの三角形を少し離して描いておく。$\angle PHD = \phi$，$\angle BHD$ $\phi$と書くことにする。$\phi + \phi = \pi$を示せばよい。

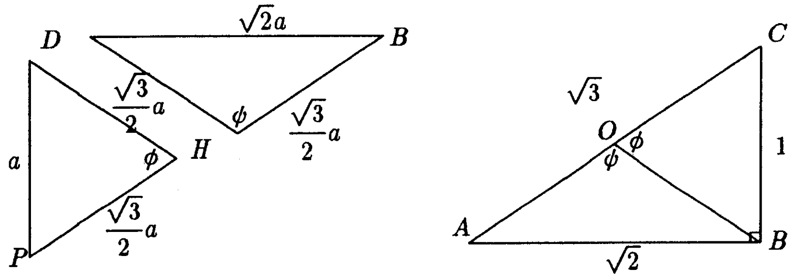



**図 5．面角の計算**

図5に現れる線分の長さはすべて分かっている。$PD=a, PH=DH=BH=\frac{\sqrt{3}}{2}a, BD=\sqrt{2}a$である。だから△$DHP$と△$DHB$の形が決まってしまうので、どのようにして示してもよい。三角関数を使ってみるなら、余弦定理

$$PD^2=PH^2+DH^2-2PD\times DH\cos\phi,\ BD^2=BH^2+DH^2-2BH\times DH\cos\psi$$

をそれぞれの三角形に使えばよい。値を入れてしまえば$a$は幾つであっても$\cos\phi=-\cos\psi=\frac{1}{3}$となる。従って、$\phi+\psi=\pi$である。

これでも良いが、関数を使ったらしくもっときちんとしろと言うなら次のようにやるしかない。三角形の内角だから、$0<\phi$，$\psi<\pi$という制限があって、$0<\sin\phi$，$\sin\psi\leq 1$であるから、このサインの値は等しい。だから$\cos\phi+\cos\psi=0$，$\sin\phi=\sin\psi$であり、加法定理を使えば$\cos(\phi+\psi)=\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi-\cos^2\phi-\sin^2\phi=-1$となり、$\phi+\psi=180°$であることが分かる。

三角関数を使うのが嫌なら、図5の右の辺の長さが1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$の直角三角形を考えればよい。斜辺$AC$の中点を$O$とし、$B$と結べば、$OA=OB=OC=\frac{\sqrt{3}}{2}$となり、辺の比が同じだから、問題の三角形と相似になり、$\angle COB=\phi$，$\angle AOB=\psi$となり、元々直線角$=180°=\pi$を分けただけのものだから、$\phi+\psi=\pi$であることが分かる。

この証明だとついでに$\angle PDB=$直角が証明できたことになる。図5でなら余り不思議に思わないかも知れないが、図3で考えれば、$OC$と$B'C$が直交していることになる。不思議な感じがしないでもない。

面の一致についてのこの証明は確かに立派な証明で、正々堂々正面から障壁をぶち抜いたという感じのする証明ではあるが、無理矢理承服させられたという気もしないではない。線分$OQ$のところで折れ曲がっていないのもなんだか偶然で今にもまた折れそうな気がする人も居るかもしれない。

もう一つの方針で示した方が何だか対称性が高そうな、何か偶然の作用があっても大丈夫のような気がするのはどうしてだろう。それはともかく証明をしよう。

△$OAB$と水平面との面角は$\angle OIJ$を測ればよい。$JI$と交線$AB$が垂直であることは明らかで、$OI$と$AB$が垂直であることは$OK$が水平面に垂直であることと三垂線の定理による。

$\triangle OPQ$ と水平面との面角は $\angle SQR$ を測ればよい。$OP$ の水平性の証明で注意したように、$ST$ も水平面に垂直であるから、$SQ$, $RQ$ が交線$AB$に直交している。

ところが $\triangle SQR$ と $\triangle OIJ$ は共に上の方針の証明で使った $\triangle PHD$ と合同な二等辺三角形になる。従って $\angle SQR = \angle OIJ = \angle HPD = \frac{\pi - \phi}{2}$ となって、証明が終わる。

どの証明も準備ばかり長くて、証明が始まると、途端に終わってしまうのが不満の人もいるかも知れないが、そんなものなのである。概念や感覚をきちんとすることの方が実際の証明よりも大変だし重要なのだ。

この証明は図2の精神に近いので安心感がある。この精神は、$\triangle OIJ$ を底面とする無限に長い直三角柱を順に正四面体とピラミッドで分割していくという点にあった。

高い対称性を持つ大きな図形を何等かの規則的な仕方で分割することによって、求める正四面体とピラミッドがくっついた形のものを得ることが出来たのであった。これと同じ様にした一目で分かる別の証明がある。

長さが倍のピラミッドを考える（図6)。ピラミッドの各辺の中点を取り、それが頂点になるように元の大きさのピラミッドをはめ込んでいく。中央で、ピラミッドの上下を反対にしたものがあることに注意すれば、六つのピラミッドが自然にはまり込み、四つの残った領域は四面体で、辺の長さがみな同じであることから互いに合同な正四面体であることがすぐに分かる。

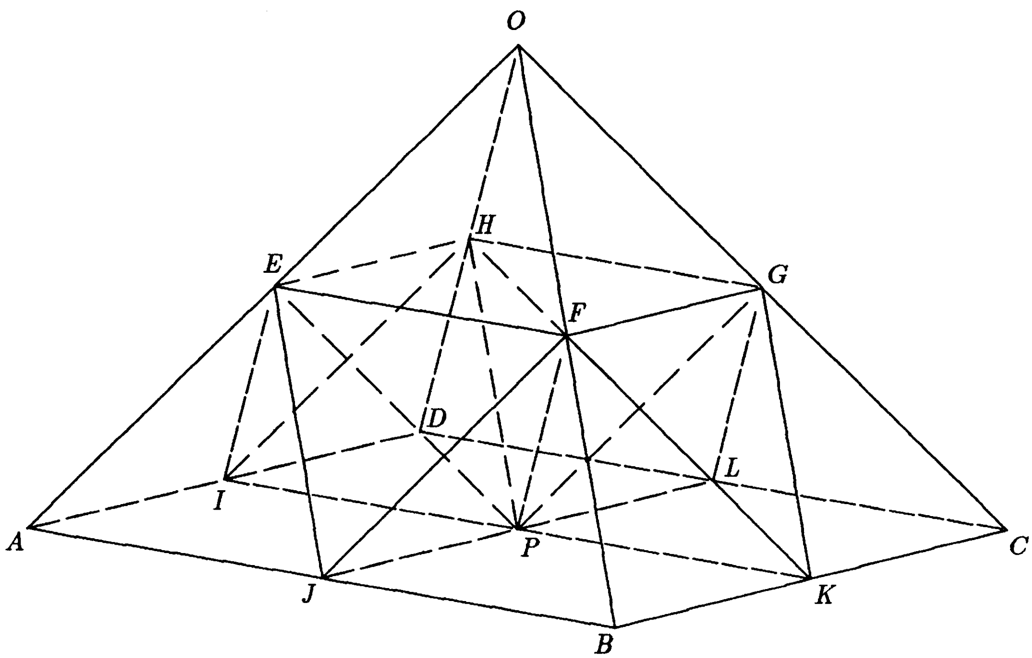



**図 6. 長さ半分のピラミッドと正四面体でピラミッドを分割する**

相似比が1：2なら体積比が1：8だということを使えば、辺の長さが同じのピラミッドと正四面体の体積の比が$\frac{1}{8-6}:\frac{1}{4}=2:1$であることが分かる。更に上下反対のピラミッドとその上のピラミッドを合わせたものが正八面体であるので、辺の長さが同じ正四面体と正八面体の体積の比が 1:4 であることも分かったことになる。

同じことでも色んな角度から考えていくのは副産物もあって、決して損にはならないことを児童・生徒にも知って貰いたいものである。

### 1．3　直観が歪んだ理由

ところで直観が歪んだ心理的な理由がある筈で、それは一体何なのだろうか。

面角の定義の図4を見ても変な感じがしなかっただろうか。$OP$ は $O$ で $\ell$ に垂直であり、$OQ$ も $O$ で $l$ に垂直だと書いてあるがそんな風には見えない。実際に直交する二直線もそれが作る平面に垂直な方向から見なければ、直交しているようには見えないのだ。平面だって無限に続いているのだから、輪郭を書こうと思っても書くことは出来ない。そこで平面はその上に描いた大きな長方形で代表することになっている。二枚の平面の交わりの図4を描くときには、その輪郭線は交線に直交しているか平行であるように置いた図の投影図であるという暗黙の了解があるのだ。従って直角に見えている角度は直角ではなく、直角は直角には見えないという逆説が成り立っている。

それだけならまだその様に思えば良いのだが、実は正四面体とピラミッドを描いた図1にも、誤解を生む、つまり直観を歪めてしまう原因が隠れている。この2つの図は、実際には正四面体やピラミッドの投影図には決してならないような形のものなのだが、多少変なのは当たり前で観念として図を見ているつもりなら、それぞれの図単独にはその立体の投影図だとして何の違和感も感じないだろう。立体の投影図を実際に幾つも描いたことのある読者なら、違和感を感じることもあるだろうが。

しかし、あまり正確にある角度からの投影図を描くと、却ってその立体に見えないことがあるのだ。見る角度によって、得られる投影図は全く印象の異なるものもあるのである。その幾つかの角度からの投影図での特徴を混在させて描いた方が、元の立体を想像させやすくすることがあるのである。実際に教師が黒板で描く図や、教科書などの図にも結構こういう図が多いのである。（これを一概に悪いと言っているのではない。教育的効果を考えれば止むを得ない場合もあるだろう。）そして、これが立体の直観が育たない理由の一つなのだ。

これじゃ幾何をやってるんじゃなくて、ピカソばりの抽象画を教えてるのかという非難をしたくなるかも知れない。だから直観だけでやらずに、きちんと論理的にやらねばならないのだ。正四面体とピラミッドの図1でも、各辺の長さが同じだとか、角度がどうなっているかさえ間違えずにいられたら、少々図がまずくても何の問題もないことが多い。

しかし今はこの二つの立体を合わさないといけないので同時にこの二つの立体を見ることになるのだが、△ $PQR$ も水平面上に置く限り、同時にこのように見える角度はないのである。ここでも少し、ピカソだったのだ。

この図を見ていると、△$OQR$ は回転軸 $QR$ の周りにかなり回さないと △ $OAD$ に重なりそうになく思え、$OP$ は $O$ から見て水平よりも高くなっていくように見える。

この図では二つの立体の高さは同じ様に見えるだろうが、多少とも立体図形のことを知っている人は、正四面体の高さの方がピラミッドの高さよりも高いことを知っている。

ピラミッド$OABCD$の高さは、既に求まっていて、$OK=\frac{\sqrt{2}}{2}a$である。

また正四面体$OPQR$の高さは$O$から$PT$への垂線として実現されていて、$h=\sqrt{\frac{2}{3}}a$となることが分かる。

かなり、正四面体の方がピラミッドより背が高く、尖った感じになる。この感じからいくと、$OP$は$O$から見て水平よりも低くなっていくように感じる。(かなり高いなどと曖昧なことを言わなくても、$\frac{2}{\sqrt{3}}$倍高いと言えばよいのだが、$\frac{4}{3}$倍は分かってもその平方根倍という感覚はなかなか掴みにくいものだ。)

こうなると、この二つの感じ方のどちらが正しいだろうかという疑問は自然に感じられても、そのどちらでもないかも知れないとはなかなか思いにくいものなのだ。直線$OP$が水平であるという直観は、そうなるという何等かの保証がないと、働かなくても不思議はないのであった。

## 2　幾何的直観とその指導可能性

我々の住むこの社会の価値観は極めて多様になり、国際化の進む中異なった文化基盤を持つ人々との意思の疎通も重要な課題である。それらに必要なあらゆる知識を初等・中等教育の中で身に付けさせようとしても、時間的余裕も指導する側の能力も十分とは言えない。

未知の情況に遭遇したときもそれなりの身の処し方が可能になるためには、少ない知識から物事の本質的な構造を正しく掴み取る能力が必要となる。足らない知識をすべて補わねば理解できないという態度でなく、少ないどんな知識を得れば正しい理解により近付くことが出来るかというような効率的な知識の獲得法が必要となる。

複雑で多岐に亘る物事を直観的に見通す能力、またその理解が間違っているなら事態の進行の中で間違った理解に気付き訂正出来る能力、それがどのような分野に於いても求められるものであろう。

しかしこのような直観力を養成しようと努力することに多大の困難を覚えるのは、何かしらの指導や学習の成果として直観力が養成されたかどうかを判定することが難しいからではないだろうか。努力目標が定かでないことに、人は力を注ぐことが出来ないものだ。

その点幾何的直観は、向上したかどうかが比較的容易に判定出来ると思われる。それを判定するテストも出来なくはないように思われるが、幾何的直観の能力を分析して一つ一つに点数を与えるようなテストは、却って直観力の養成を阻害する可能性があるだろう。

さて、実際の学習過程において、幾何的直観の名で語られるのは一体何なのであろう。何であるかを一言で規定は出来ないが、例えば命題の証明における適切な補助線を引くことの出来る能力はその代表的なものの一つであろう。確かに図の中に描かれてない証明に役立つ線を思いつく瞬間を観察していたとすれば、直観以外の何者でもないように感じられるだろう。この事を例として幾何的直観について考えてみよう。

### 2．1　「補助線を引くこと」を例にして

補助線を思いつくという行為の中で、実際にどういうことが起こっているのだろう。問題となっている図をじっと見つめていると、自然に補助線が浮き上がって見えてくるのだろうか。こういうことがあれば直観力が優れていると思われるだろう。もしかすると天才ならそういうことがあるかも知れないが、筆者Kの経験からすると少し違うようだ。

問題となっている図をじっと見る。じっと見ていると、網膜にか脳の視覚中枢にか、線や点が少しずつ焼き付けられる。そこで色々な線を引いてみる。初めのうちは実際に紙の上の図上に引いてみるのがよいが、慣れてくると、脳の中に焼き付けられた写真（というより写真の乾板）の上に引くことが出来るようになる。

線を引くと新しい図形が見えてくる。それまでに見えていた図形に合同な図形や相似な図形、また何か見慣れた別の図形が見えてくることがある。それら新しく見えてきた図形が補助線を引く前には思いもよらないものだったら、占めたもの。大抵はその線で決まりだ。

しかし、新しい線を引いても目を惹くような新しい図形が出来なかったら（ここで“出来なかったら”が問題ではなく、“面白い図形に気が付かなかったら”ということが問題である場合も多いのだが）、その補助線は諦めて、別の線を引くことになる。この時重要なのは、前に試した補助線の候補は完全に消しておかないといけない。だから実際に紙の上に描くのは不経済ということになる。紙の上で補助線を引いた場合は、もう一度別の場所に問題の図を描き直した方が良いと思う。今度の補助線も駄目で、駄目だと分かってから、前に引いた補助線の方が有望だったことに気付くかも知れないから。

頭の中でなら線は何度でも引き直すことが出来る。前に試して諦めた線でも、何度でも引き直すことが出来る。そうこうするうちに段々と、補助線として有力な候補が見えてくる。問題の図を脳内のフィルムに強く焼き付けておくことが重要で、思考の力で引く線は脳のフィルムの上で少し薄くなる、というより、少し薄く引くことが出来る。有望な線でなければ取り替えることになるから、原図で引かれている線とは違うほうが良いが、筆者Kの脳は精巧に出来ていないせいか、原図と違う色で引くことは出来たことがない。実用上は多少薄めに引ければよく、それが出来れば、頭の中で描いたり消したりがうまくゆく。

上達の秘訣を一つ披露しよう。いわば、心を無にして、引くことの出来るすべての線を次々に引いてみる。線を引くとき出来るだけ予断をせず、可能な線を描いては消し、描いては消すのである。そうすると自然に有望だと思う線を引く回数が増えてくる。自然にと言っても、本当はうそで、心を無にしすぎてはいけない。目標、つまり何を示すために補助線を引こうとするのかを忘れはいけないのだ。原図と目標をしっかりと心に捉えて、可能なあらゆる（過程としての）補助線を引いていく。補助線を引くたびに、目標との距離を測って（この測り方が問題ですが）、近そうな線は少し濃くしてやる。これをすばやくやると、残像の原理が働いて、正しい（とそのとき感じている）補助線が、脳の中で焼き付けられ、目の前に浮かび上がってくる。

結局、補助線が自然に浮かび上がってくる理屈を述べただけじゃないかという非難が聞こえてくるようだ。確かにそれはそうなのだが、“天才は99％の汗と１％のひらめき”というエジソンの言葉（実際にはこうは言わなかったらしいが）を確認するのはいいことだというだけでなく、このように過程を分解してみることで、実際の学習に於いても指導可能な方法が考えられないかと思ったからである。幾つか考えられると思うが、思いつくまま、一つの方法を提案してみよう。

最初の段階の方法としては、問題の図をいくつも描いておき、可能なあらゆる補助線を一つずつの図に描きこみ、それらを並べてみる（同時に見ることが出来るようにすることが大事）。その問題を解くことが可能な段階の生徒になら、多分これで、どれが有望かが分かるはずだと思う。分かれば、その各々の図で、やれることをやれば良い。

分からない場合が問題だ。その時には、その各々の図（原図にある補助線を描き込んだもの）の中に、線を引いたことによって新しく出来た図形は何かと考えさせる。そして、その新しい図形を考えることが目標に向かって一歩前進しているかどうかを考えさせる。目標に近付いたことがすぐには分からないなら、取り敢えずその図は捨てて次の図でやってみる。用意した図を一通りやってみれば、有望そうなのが幾つか見つかることもあれば、一つも見つからないこともあるだろう。

有望なのが複数見つかると言うことは、裏を返せば、どれがよいのかの決め手がないということでもある。その場合には更に一歩を進めねばならない。幾つかの候補をじっと見て、何度も何度も見比べてみる。

一つも見つからないときも同様で、一つ一つの図をもっと丹念に見直しする必要がある。そして最後に、考えている図ですべての補助線の可能性が尽きているかを考えてみる。

いちいち違った図を描く手間が大変だと思えば、少し手軽な方法もある。原図をボールペンのような消しゴムで消えないもので描き、補助線の候補をくっきりと見えて消しやすい柔らかめの芯の鉛筆で描くことにすれば便利だろう。

更に手軽な方法としては、少しぐらい擦っても汚れないようなもので、例えばボールペンとか硬めの芯の鉛筆などで原図を描いておき、補助線を引く代わりに透明な（セルロイドのような材質の）定規を置くだけで済ますことも出来るだろう。

### 2．2　隠れた対称性

ところで、一番重要な要素でありながら、どうしたら良いのか明言しなかったことがある。それにいらだちを感じている読者もあるだろう。それは、目標への近さをどのように測るかということである。ある状態が他の状態よりも目標に近付いているとどうしたら感じられるのか？今の補助線の場合でも、線を引いて原図に新しい図形が生まれたとして、まず、そのことに気が付かなければならない。その為には、新しく生まれている図形を予め知っている必要がある。問題の解決に必要な、ある典型的な、若しくは対称性の高い図形を知っているとか、また原図にある或る図形と新しい図形との間の何かしら特徴的なかかわり方（例えば、合同・相似であるとか、点と点とを結んだだけのつもりが別の直線と平行だったとかいうこと）を知っているとか推測できるとかいったことが必要となるのである。

このような能力は、一言で言うならば、“隠れた対称性”を見出す能力ということになるのではないだろうか。

隠れた対称性を見出す能力を養うには、まず高い対称性を持つものに慣れることが必要だろうし、更には対称性の多様さを知っていることも必要であろう。

筆者Ｋは現在準備中の論文［2］で対称性の指導に関する提言を行っている。その内容は次の小節で述べるが、その前に一言断っておく必要があるようだ。

この節で述べたような補助線の引き方の指導に対する提案にしても、そのままの形では現実的な提案として受け入れ難いであろう。多くの生徒の心の中で起きる多様な状態に対して、一人の教師が同時に対応することの難しさもあるだろうし、何より時間が掛かりすぎる点が問題だと思う。更に、これらの作業をやりとおすにはかなりの集中力が必要で、そうした集中力の無さこそが問題であって、生徒の集中力をつけるのが先ではないかという議論もあながち不当なものだとは言えないだろう。

しかし、筆者の提案や議論は、そのままの形で現場で実行されることを期待しているのではない。そのほんの一部でも、現実の指導の役に立つ形で取り入れて欲しいと思っているだけである。教師が期待するようには生徒は理解してくれないものだ。十分すぎるほどの準備をしていったつもりでも分かってくれない生徒はいるだろう。生徒に失望する前に、しかし生徒が理解できなかった原因が、教師すら理解していない問題そのものの困難さにあるかもしれないと考えて欲しいのである。

だから通常の指導には必要がないほど、問題について数学的にまた認識論的に議論をしてみるつもりである。問題によってはくど過ぎると思われる議論もあるけれど、くどいなと感じたら一度目はその部分は読み飛ばせばいい。くど過ぎるほどの議論がある場合には、問題の根底にそれほどの問題があるのだなと思ってくれるだけでもいい。生徒がその部分を理解してくれないとき、生徒の無能さゆえでなく、問題の複雑さや深さのせいだと思うことが出来れば、生徒を見る教師の眼が優しくなってくれるかも知れない。そんな思いが、このような議論を敢えてする理由の一つなのである。

### 2．3　対称性の指導について

論文［2］では、対称性について直接指導に供することの出来る教材の形を採っている訳ではないが、対称性の指導の現状や可能性について論じている。

まず、対称性について現在、高校までを含めた学校教育でどのような指導がなされているのかを考えてみたが、その指導は体系的でないばかりでなく、基礎的事実に於いても適切とは言えないように思われた。

教えられている内容に即しながら、出来るだけ体系的に対称性についての教材を組み立ててみることにした。教えられている図形・幾何的教材はほとんど平面図形だし、立体図形の対称性については触れられているものもないので、まず平面図形の対称性について述べた。

対称性について述べるというような切り口では現場で応用できそうにないので、初等教育で通念となっている対称性の高さについて考えてみた。“対称性の高い図形”とは何だと考えているのかである。それも抽象的に過ぎる問かも知れない。

“どんな図形が対称性が高い”と思われているのかという問になら答えられるだろう。その問の答えとして上がりそうな候補は、正多角形か円であろう。

点対称、線対称、回転対称がそれらの図形には考えられる。例として正三角形、正方形、正六角形を描いてみる。

確かにこれらの図形には極めて特別な点や直線があって、それに関する対称性を持っている。それが各多角形の中でこれらの図形を正多角形と呼ぶ由縁でもあるのだ。辺の長さがすべて等しく、（内）角の大きさがすべて等しい多角形というよりも深い意味があるのだ。

例えば三角形には五心と呼ばれるものがある。内心、外心、垂心、重心、傍心である。それらの幾つかがたまたま一致するようなことがあれば、その程度に応じて“良い”三角形と言うことになるだろう。しかしこの“良い”というのはまた判定が難しいが、元々三角形の内部にはない傍心を除いた4種類の点が正三角形ではすべて一致してしまうのである。正三角形は極めて“良い”三角形ということになる。でもこれでは“良さの度合”が測れない。

最初はこのように定性的でもよいが、対象を細かく見つめようとすれば何等かの意味で定量的になる方がいい。また、理解の深さも測りやすい。

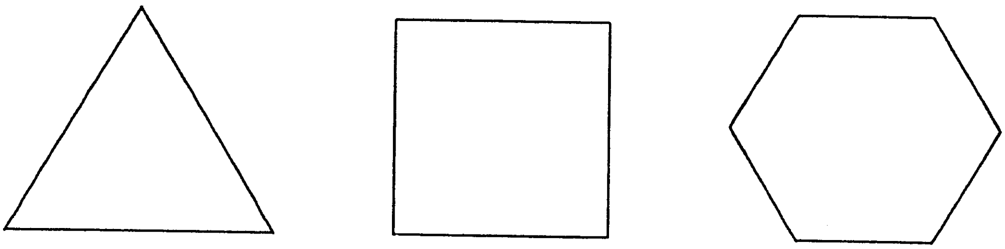


図 7．正多角形 n＝3，4，6

そこでそれを対称性の高さで測ることを提案するのである。そして対称性の高さとはその図形に関する対称変換の多さということにするのだ。

それでは対称変換とは何だと思うべきかということだが、それについては［2］で詳しく述べてある。結論だけ言えば、今の場合、平面の合同変換のことである。数学的には等長変換、つまり長さを変えない変換のことになる。

普通例えば正三角形の対称性を論ずるとき、重心に関する点対称、重心の周りの回転対称、頂点と重心を結ぶ直線に関する線対称が問題になる。これは三角形の四心が一致することに対応しているのだが、対称性があるとはその対称性に応じた運動を図形に施し、元の図形に重なることだと説明される。

この説明で納得する児童・生徒は問題ないのだが、この説明では納得しないものも多いのではないだろうか。

“図形を動かせば重ねようとする図形はなくなっちゃうし、元の図形をそのままに置いておくなら動かす図形は元の図形とは違う図形だということになるじゃないか。”授業中にこのような不満を述べる児童・生徒がいたら教師はどう反応するだろうか。

発問した児童・生徒が良く出来るタイプなら、「変なことを言って他の子が迷うようなことを言わないで」というかも知れないし、出来の悪いタイプなら「そんなことばかり考えているから、勉強が出来ないのよ」と言うかも知れない。恐らくは（残念ながら）まったく聞こえなかったように無視してしまうことも多いのではないだろうか。

出来るタイプの子は、もしかすると天才へと伸びていく芽を摘まれたかも知れないが、多くはニヤニヤしながら内心教師の無能を笑いながら許してくれ、余り影響は残らないのかも知れない。しかし、出来の悪いタイプの子にとって、この程度の発言をするだけでも可成の努力を要することで、それなりに一生懸命考えた成果であって、それを頭ごなしに叱られることで立ち直れない傷を負うかも知れない。

しかし問題はこうした児童・生徒の心理的な問題に止まらない。上の疑問を持つのはまったく正当なことだからである。その詳細も［2］にあるが、重要なことは、図形を動かすという操作をその図形に対してだけ行うことにするのなら決して この種の疑問を解消できないということである。動かしていく間に図形は変わるかも知れない。つきたての餅を運ぶときのように。

運動は平面全体の変換として認識されねばならないのである。そしてそう思ったとき、回転対称はまだしも線対称は認識しにくいものであることが分かる。それは何より、線対称変換が平面の運動では実現できないことによる。

対称性の多さで図形の“善し悪し”を判定しようというとき、問題にしている図形だけでは区別しにくいこともある。そこで今の対称性を仮に図形の内部対称性と呼び、更に別の対称性を考えることにする。平面を合同な図形を埋め尽くすという問題を考える。平面全体に広がったパターンとして考えるとき、平面の合同変換でそのパターンが変わらないものもあり得る。それをそのパターンの対称変換と呼ぶ。この対称変換は群を作る。この群の大きさをこのパターンの対称性の大きさを判定するものと考える。

例えば同じ正三角形でも異なるパターンを作れば、パターンの対称変換群も異なり、対称変換群の大きさも異なる。

図形の内部対称性は、それをパターンの対称性として実現できるようなパターンを作ることが出来る。図形の対称性の高さは、出来るだけ大きな対称変換群を持つパターンを作れることで判定すればよい。また、出来る対称変換群の多様さで測ることも出来る。

エイダの問題の２次元版は同じ長さの辺を持つ二つの多角形をその辺で合わせたとき辺の数がどんな多角形になるかという問題だが、一般に元の図形の持っている対称性より、くっつけた図形の対称性は減る。これは部分パターンの対称性の問題に帰着する。

時には偶然が作用して元の図形の対称性よりはるかに強い対称性が回復することがある。このようなことは多くの例と共に［２］で論じてある。更に、その様な事情を児童・生徒自ら処理しうる教材として、三角定規を取り上げ、多様で広範囲に広がる問題群を色々な角度から提案している。以下の筆者Oの議論の中にもあるように、これに近いことは色々な人々によって提案されてきている。

しかし、［２］で提案していることは、そこで作り上げられる幾何学模様を単に模様として扱うばかりでなく、もっと定量的な取り扱いをすることにある。そしてそのことによって、児童・生徒自らが問題を作り、解答を作り上げていくことも可能にするし、児童・生徒の理解の深さをある程度測ることが出来るようにもしている。

筆者Kは［２］をどのような形で世に問うべきか、つまり数学教育界の研究論文とすべきか、初等教育に携わる人々への啓蒙の書とすべきか、もっと広く世に問うべきかを悩んでいる。しかしながら、中学校の課題学習の教材として、又高等学校の自由な教材として活用できるような形のものを［２］を元に作っていきたいと考えている。

## 3　数学教育と直観力の育成

### 3．1　学習指導要領にみる目標

算数・数学教育の目的の一つは、数・量・図形についての知識や技能を身につけさせることにあるが、それを通して論理的な思考力を伸ばすことにも価値がおかれている。

では、前節での数学者Kの所説における幾何的直観力は、今日の学校教育のなかでどのように位置づけられているのであろうか。その点について、先の論理的な思考力との関連で述べると理解しやすい。

“… 論理的な思考というと、論理の輪をつなげながら着実に思考を進めることだと考えられている。したがって、論理的な思考力を養おうとすると、そのような思考

を経験させればよいと考えられがちである。しかし、ただ単に論理の輪をつなげるだけでは、目的とするものに到達するとは限らない。…全体の方向・見通し、それぞれの考えの全体における関係、大まかな筋などを把握出来ていることが肝心である。これが直観の役割である。論理的な思考力を伸ばそうとするとき、ともするとそのことが忘れられがちであるが、直観と論理は互いに働きかけあい、初めて有効に働く。”[1]

すなわち、今日の学校教育の目標論からみれば、直観は論理との関わりにおいて議論され、前節のような直観そのものへの力点は欠落しているといっても過言ではない。そのことは、小学校に限定された議論でもない。今次の教育課程の改善における基本方針としての「情報化などの社会の変化に対応し、論理的な思考力や直観力の育成を重視する観点から、様々な事象を考察する際に、見通しをもち、筋道を立てて考え、数理的に処理する能力と態度の育成を一層充実するようにする。」や中学校の具体的な改善事項のなかでの、

“図形についての操作や作図を重視し、これらを通して図形に対する直観的な見方や考え方と論理的に推論することとの関連を図り、論証の意義をより明確に理解できるようにする。”[2]

という表現においても垣間見ることができる。つまり、こうした直観と論理の関わり方は最近の学校教育に一貫した考え方である。たとえば、昭和52年に告示された学習指導要領においても、「図形に対する直観や洞察は、図形の性質の根底にある本質的なものを見抜くことであって、論理的な思考力に裏打ちされたものであると同時に、それを導くはたらきをすることもある。」のように論理との関連において、意義が論じられている。では、幾何的直観とは学校教育と本当に交錯しないのであろうか。この問題については歴史的にみてみると、一つの解が用意されている。

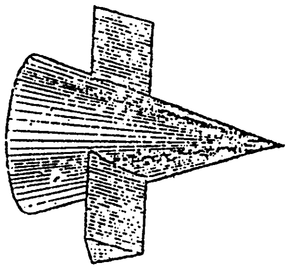
わが国の数学教育のあゆみのなかで、上記の幾何的直観と同一ではないが、その近似概念としての「全体的直覚」を標榜し、数学教育を再考しようとした時代があった。その意味では、上記の所説は十分に今日および将来の学校教育の目標と内容と関わる論点を含んでいる。以下において、この全体的直覚に視座をおいて論じ、あわせて、数学者の発想が今日の数学教育に与えうる意義を付与したい。

### 3．2　全体的直覚の概念

ここでは、次の問題を中心に論ずる。

問題[3]

右の図のように交わっている直円錐と三角柱の三面図を書き、それらの表面の交線はどんな形であるかを調べよ。



---

[1] 奥田真丈他監修［3］p. 20
[2] 奥田真丈他監修［4］p. 17
[3] 中学校理数科用『数学』［14］p. 8

こうした一連の問題は、戦前の旧制中学校4年つまり今日の高校一年の指導内容であり、「立体図形の表現」のなかの例である。こうした問題の解決を通して、当時の数学教育の目標は全体的直観力の育成に主眼があった。そしてこの概念については、当時の「国民学校令施行規則」に明記されている。

“分析的論理的ニ考察スル力ヲ養フト共ニ、全体的直覚的ニ把握スル態度ヲ重ンズベシ”[4]

まず、この意義について補足しておくと、

“空間認識の直観的能力は、ごく幼少期において既にかなり発達するものであると言われている。勿論、それは未だ何ら分析的な思考作用を交えないもので、素朴な姿の全体的直覚的な姿にすぎない。・・しかるに、このような全体的直覚的な把握の能力は、いつになっても空間認識の根本にあって、将来思考がすすみ、分析的論理的な色々の考察が行われるようになっても、それらの考察が一体になって空間認識としての生きた働きをなしうるためには背後からそれらを統率する直観的把握の能力が必要である。”[5]

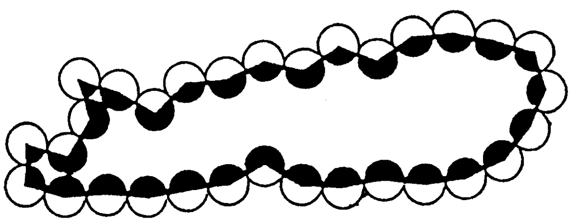
とあるように、空間認識についての発達段階と直観の役割について論じられている。また

“近時和算に関する研究が進むにつれ、昔の和算家が驚くべき理法を会得していたことが明らかになりつつある。彼らは分析的論理的には不得意であったかも知れないが、全体的直覚的に把握するの能力に優れていたためにこの成果を示したものと考えられる。西洋の数学、科学の輸入以来、これらは分析的論理的にのみ会得すべきものの様に誤解せられ、その進歩発達が著しきにもかかわらず、独創的の発明発見に乏しきは、寧ろ日本人の長所たる全体的直覚的把握の修練を忘れた結果であるともいわれよう。”[6]

つまり、「和算家の好んで用いた研究の方法は幾何学的直観による直覚的な方法と特殊な機能推理の方法で・・」と述べられているように、今日的な用語としての幾何学的直観の近似概念として議論してよいと考える。そのことを和算の代表的な問題の一つである次の問題で説明しよう。

問題[7]

左図は、半径が同じ円を任意に繋げたものである。各円の中心を結んでできる多角形と円の共通部分の面積の輪とそれ以外の円の面積の和においてどんな関係があるか。（図において黒塗りの部分の和$I_n$と白い部分の和$O_n$の関係）



結果は、円の個数がいくつであっても、$I_n$＋(円2こ分の面積)＝$O_n$ の関係が成り立つが、

[4] 文部省　[6] p. 135
[5] 前田隆一 [7] p. 229
[6] [6] p. 136
[7]

その解決には $n=3$、4、5…として帰納的に処理するか、 $n=2m$ と $n=2m+1$ の場合について考えるかのいずれかが代表的である。そしてその解決に先立つ和算家の「幾何学的直観による直覚的な方法」と「特殊な帰納推理の方法」が際立っているというのである。勿論、この全体的直覚の概念は、厳密にいえば当時の「数理思想」や「合理創造」の概念にみられる〔数理及び自然の理法を推究する真摯なる精神〕を基礎としていることはいうまでもないが、時代の思想を捨て去っても、今日の学校教育において欠落した視座を指摘しているといってよい。

### 3．3　具体的な指導内容と方法、初等教育の場合

では、こうした全体的直覚の能力の育成については、当時どのような努力がなされたのであろうか。それには、次の教材をてがかりにするとわかりやすい。これは、国民学校の教科書『カズノホン』の（1）の3ページに載せられた内容である。

右図は、一見何の意図もないこの風景であるがここでは教師が画用紙を配って、日の丸の旗を描かせようとしている。そして、

“描く間に、四角、丸、直角、直線などに関する素朴な直観が養われる”[8]

ことを含んでいる。そして、この意図を支える考え方は、次の通りであった。

“空間認識の直観的能力は極く幼少期に於て、既にかなり発達するものであると言われている。勿論、それは未だ何等分析的な思考作用を交えないもので、素朴な姿の全体的直観的な働きに過ぎない。即ち、立体的なものを平面上に表現したり、高次元のものを低次元の要素から構成したりする思考作用が未だ殆ど分化していないことは、幼児の絵や細工を見れば明らかであるが、観点を固定せずに対象に即して自由に観察したり立体的なものを立体的なものとして把握する能力に於ては、大人の及ばぬ素直さ、的確さを示す場合が少なくない。”[9]

それゆえ、低学年の指導に際しても、

“したがって、「カズノホン」使用以前に於ける指導は、児童の生活中に絶えず生起する色々の動機を捉えて、この全体的直観的な把握の能力の芽生えを伸ばしていくようにすればよいのであって、何々の事項をこの時期に教えておかねばならぬというように考えてはならない。教室や校庭で目撃する、色々なものの形、面白い配列、凹凸、曲直、深さ、広さ、高さ、その他動物の運動・動作、こちらの方へ近づいて来る飛行機がしだいに大きく見えて来ることなど、図形的・空間的な色々の事項について、児童の注意を引いたものを、動作に訴へて心ゆくままに観察させてやればよいのである。殊に、いじれるものは、いじらせてやるがよ

---

[8] 文部省［8］p. 20
[9] 奥田［3］p. 6

い。尚、例えば、

座席の前後・右左、下駄箱の上・下、高い木、低い木、一列に（まっすぐに）並ぶ向こうの松の木、こちらの小屋、遠い森、ちかくの畠、隣の人、櫻の木のそば、池の中、池のまわり、丸い石、細長い池、四角な坂

などの事柄を通して、必要な言葉は或程度教えても差支えないが、暗記的、断片的な知識としての言葉の教授に陥らぬことが大切である。一体に言葉を教えることは急がぬ方がよい。”[10]

というのである。

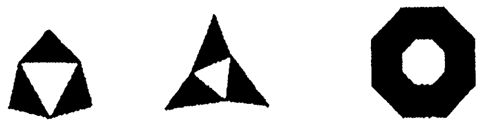
この点に関して、水色表紙教科書の図形教材の選択に関わった前田氏は、自らの基本的考え方として、

“以上のような私の見解に関して、着想としてはおもしろいが、はたしてそれに適する教材が得られるだろうかという疑問を持つ人も多いであろう。なるほど、測ったり、計算したり、何かしら既成の幾何教科書にあるようなことを学習させなければ、数学としての図形指導にはならないという考えに縛られている限りは、そう思われるのもむりはない。そういう立場からは、たとえば「カズノホン」の中にある渦巻きや形集めやメービウスの輪、または水引きやのしのごときものは、算数としての図形教材とは認められないかもしれない。あるいはまた、こういう教材は、個々にはおもしろいが、それがどういう指導の体系をとって発展するかがはっきりしないから、教材としての価値が乏しいという人もあるであろう。なるほど「カズノホン」については、私としては、途中で仕事が変わったため、その教材の高学年への発展を示しえないで終わったが、こういう教材にも、発展の体系が考えられないわけではない。もっとも、図形教材、ことに従来の初等幾何的観念にはまらぬような教材については、数の場合と違って、その発展の体系を、一義的に明確に決めることはできない。何らかの立場を指導原理として、易より難へ配列するよりほかはなく、その配列には多分に任意性があるのはやむをえない。私は、図形の持つ機能に着眼するということも指導原理になりうると思う。”[11]

と述べている。

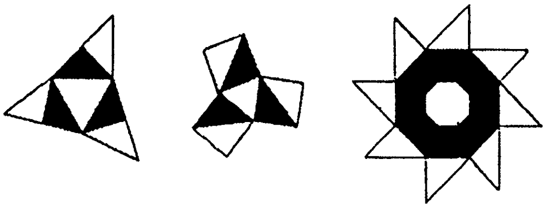
次の例は、『カズノホン』（二）における「色板ならべ」の場面である[12]。

中にすきまができるように
いろいたをならべましょう。



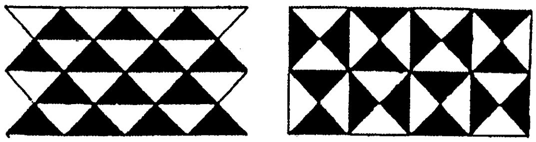
[10] 奥田 [3] p. 7
[11] 前田 [7] pp. 50-51
[12] [9] p. 28

外へいろいろつぎたして、
おもしろいかたちにして
みましょう。



さらには、これにとどまらず今日においてはありふれた内容である「しきつめ」についての子どもの作業をもとりあげている。

いろいたをきれいなもように
しきつめましょう。



ここでは、直角二等辺三角形の同じ大きさの色板を何枚か使って、色々な形を作らせ、その観察をさせることにまず主眼があると考えられるが、教師用教師用書においては、

“形が変化発展していく有り様を観察させることは、空間に関する直覚を大切にしていくうえに大切なことである”[13]

という記述や、

“図形を規則正しく発展させていく仕事であるが、それは無限に拡がりうる場合で、その間にどこまでも同じようにして拡げうるものであるという直覚を得させる”[14]

という点にあり、いずれもこうした形の動的な変化に対する観察眼の育成に主眼があった。

ここに、それまでの単なる数の構成と色板を対応させるといった指導を越えて、新しい視点が提示されていると考える。

### 3．4　教材観

では、こうした考え方の背後にある教材観はどうであったのか。

“自然物、日常生活の器物、建物、その他我々の周囲のあらゆるものは影を持つて居りそれは端然たる形に見えるかと思えば、又微妙に動くというように、千差萬別の様相を示すものである。単に、静止したものの影だけでなく、動くものの影にも関心を向けさせることが大切である。かようにして、形の方面から、事物現象に対する豊かな、且、鋭い眼を養って行くことが本項の目的である。”[15]

とまとめている。

以上の具体例及びその指導を通して、水色表紙教科書における図形観を検討すると、まず、次のように考えられる[16]。

[13] [10] pp. 55－57
[14] [10] p. 61
[15] [7] pp. 47－51
[16] [7] pp. 47－51

1．ユークリッド的図形観の批判

まず、発想の原点においては、算数教育における図形教材の貧弱さを

“図形教材が古い観念に固定して、自由な広い視野に立てない。”[17]

という点に求めている。そして、勿論、ここでのユークリッド的という意味は、

“それは一言にしていえば、静的、個別的（要素的)、有限な図形観である。”[18]

とある。では、この状態からの脱皮の方法は何かについては次のようにいう。

2．自由な広い観点に立つ図形観の必要

ここでは、

“… 長方形や直方体、角すいなどについて、名前を覚えたり、簡潔な観察をしたりするような従来の学習に、子どもらは果たしてどれだけの興味や愛情を感ずるであろうか。”[19]

という認識が先立ち、次の主張をする。

“われわれはまず、図形指導刷新の第一歩として、少なくとも、形に対する興味と愛とを呼び起こすような学習の指導を考えなければならない。

次には、もっと広い視野に立って、日常生活や科学の諸分野に図形がいかに活用されているかを調べ、その基礎的な事項を明らかにすることによって、学習指導の新しい体系を樹立しなければならぬ。日常生活はもちろん、科学のあらゆる分野において、図形による思考、あるいは図形を通しての思考というべき方法が非常に多く使われているにもかかわらず、このような思考法の指導が閑却されている。”[20]

3．動的・連続的な図形観の導入

“静的・個別的なユークリッド的図形観を、どのような方向に打破すべきかということになると、なかなかむずかしい。従来試みられた一つの方向は、解析的な方法を導入することである。しかし、従来の初等平面解析幾何学の対象は、ほとんど直線と二次曲線であり、それらの図形の見方もユークリッドと大差がない。これでは、ただ解析的な方法で証明を試みたというだけのことであって、図形観そのものが変わったことにはならない。したがって、教材の視野が広がらないのである。大事なのは方法ではなくて、図形観そのものの転換である。私は、解析的方法を余り急いで導入する必要はないと考えている。それよりもむしろ、図形的直観力を豊かに、確実にするように、図形に対するいろいろな見方や扱い方を導き入れることが、大切であると思う。結局、それは、動的連続的な図形観を導き入れることである。”[21]

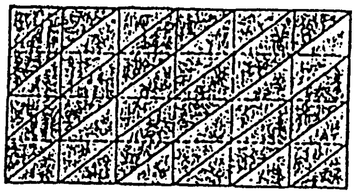
こうした意図のもとで、水色表紙教科書においては、次のような配慮がみられる。

第一は、古い教材に新しい生命を吹き込むことであり、この例としては、次の教材があげられている[22]。

---

17 [7] pp. 47－51　　18 [7] pp. 47－51
19 [7] pp. 47－51　　20 [7] pp. 47－51
21 [8] p. 51　　22 [6] pp. 51－52

右の図と同じような図を
画用紙にかきなさい。
それを筒にまいてごらん
なさい。



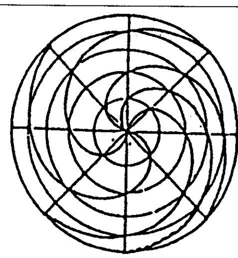
ここでは、

“例えば、平行線の学習のあとで、その紙を巻いて螺旋を作らせるとしたら、ありきたりな平行線の学習が、いかに意味あり精彩ある学習となることであろう。”[23]

という具体的な提示であった。

第二は生活環境における図形を利用することである。そこでは次のような教材がみられる[24]。

青いすじの間に赤いすじ
をもう3本かいてごらん
なさい。

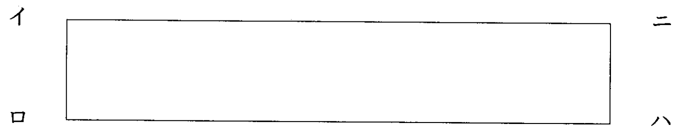


他にも、○自然物の描きだす形　　○おもしろい図形を描き出す道具

などが考察の対象とされている。

第三は、見方によって変わる性質と変わらない性質についての指導である。典型的な教材としては、メビウスの帯についてであり、その意図は次の通りであった。

“紙で環を作ることは、「カズノホン」二、第十九頁でも指導したが、ここでは、普通の環ではなくして、1回ねじってある環を作らせるのである。即ち、下図のような細長い紙に於て、




「イ」と「ハ」と「ロ」と「ニ」が重なるように糊をつけるのである。用紙はなるべく表裏の区別のないものを用いるのがよい。

出来上つた環は、暫らく自由に遊ばせてから、これを真中に鋏を入れて切開くことに導く。そうして、うまく真中から切開くために、その準備として、紙面の中央に線を引かせる。紙面の中央に鉛筆を当て、紙をまわしならがら前頁の図のように、線を引いて行かせるがよい。そうすると、いつの間にか、書きはじめた箇所の裏側へ出ることに気づくであろう。これは児童にとって驚異に違いない。しかし、更に紙をまわ

[23] [12] pp. 51
[24] [11] p. 37

しながら、既に引かれた部分の線を裏側からたどって行くと、遂に書き始めたところへ戻って来る。かようなことは、児童の興味を呼ぶであろう。線が引けたら、それに沿って鋏で切開かせるのであるが、切開く前に、切開くとどうなるかを予想させてから、その予想を実験によって確かめさせるというような建前で指導するのがよい。紙面の真中に、ぐるっと線を引いたのであるから、この線に沿って切って行けば、環が二つに分かれると予想するのが普通であろう。ところが、実際には一つの環になるのであるから、これは、恐らく児童にとって非常な驚異であろう。興味の赴くままに、同様なことを何回か試みさせるがよい。児童は種々観察なすであろう。更に、児童が「二つひねって環にしたら、どんなことになるか。それを真中から切開いたらどうなるか。」などというような研究心を起こすようであったら、各自自由に調べたいことをさせるがよい。”[25]

しかし、いずれにしても、これらの考察は、内容的にはなかなかむずかしいことを含んでいて、児童に理由を考えさせようと仕向けたりすべきではなく、児童の心ゆくままに試みさせることに主眼があった。こうした指導をとおして、空間に関する大切な直観が培われて行くと考えたのである。

## 4　幾何的直観の指導可能性の問題

### 4．1　中等教育における場合、『一種検定教科書』にみる教材

では、次に中等教育における具体的な考え方はどうであったのか。ここでは、昭和10年代のわが国の中等教育における数学教育に登場した『一種検定教科書』[26]の考察を手がかりとし、この教科書の出現の経路、背景、そして意図を明らかにすることによって、それ以前と異なった新しい数学教育の根本理念が提示されると考える。と同時に、そこでの直観力の育成のための意欲が浮き彫りになってくる。

ところで、この教科書については、これまでの先行研究においては、その記述も概括的であって、唯一、稲垣信夫氏の研究がその欠落した文脈を補い、本稿のための先行研究として有意義である。[27]

稲垣氏は、この教科書の数学教育史における意義を次のように要約される。

- その形式と内容において、従来のそれと要目に準拠しているとはいえ、全く一変していること。
- これは、単なる変化ではなく、その底に流れる数学及び数学教育をいかに考えるかという根本概念に起因していること。

ここでは、後者に示唆を求めていることはいうまでもない。尚、この教科書の成立に関する経緯は次の通りであった[28]。

---

[25] ［12］pp. 65－66
[26] ［13］
[27] 稲垣信夫［17］,［18］を参考とした。引用は後者の p. 75
[28] 作成にあたっては『学制百年史』［19］及び『日本科学技術体系』［20］を参考とした。

| | | |
|---|---|---|
| 昭和17年 | （3月） | 中学校、高等女学校教授要目改正－自然科学関係教育内容刷新 |
| | （8月） | 中学校、高等学校短縮案要目決定－中等学校以上の学制改革 |
| 昭和18年 | （1月） | 中等学校令を公布 |
| | （3月） | 中学校規定を制定 |
| | | 中学校教科教授及修練指導要目を制定（教授要目の廃止） |
| | （4月） | 師範学校・中学校における国定教科書の使用 |

そして、教科書の作成にあたっては、上記の年譜に示される通り検定制度から国定制度への推移があった。つまり、昭和16年には「五種検定」が定められ、その翌年3月には新たに「中等学校教科書株式会社」が誕生した。しかし、同年同月の中学校教授要目改正に準拠した教科書はなく、現場は「中学校数学科新教授要目ニヨル教材配当表1）2）」[29]により指導がなされた。いわゆる一種検定教科書が誕生するのは、昭和18年3～4月においてであった。ただし、この教科書は、突然上記のような内容が許可されたわけではなく、制度をふくめた形式的な支えと、小論で問われる実質的な支えとがあり、その2つは、まさに成立へ向けての両輪であった。

まず、日本数学教育会で当時の要目の改正を求める具体的討論を開始するのは、昭和12年のことであった。この年の総会の中学校部会の協議会は「現行中学校数学科教授要目を改正する要なきか」[30]であって、文部省から提示された要目配当表に対する意見が求められた。[31] そして、この配当表の特徴は、旧来の数学の内容を廃し、

| |
|---|
| ・確率統計の導入　・微分積分学の初歩　・座標の考え方　・投影図、投函図の導入 |

などを主たる内容としていた。

しかし、この案は翌13、14年と協議されたが、大会での議決を得ることはあっても、文部省が要目改正に同意するまでには至らなかった[32]。

この時期の文部省の態度は、前田隆一氏の述懐により知ることができる。

> “私は昭和14年8月に文部省にはいったんですが、そのとき私は、局長から、中学校の教科書を国定にするので、準備をしてもらおう。”[33]

すなわち、緑表紙教科書で学んだ児童が、中学校で学ぶ教科書については配慮されていても、教授要目の是非については、昭和14年度の段階では論じられていないのである。

以後、文部省が教授要目等の教育内容についての議論に関与するのは、昭和16年2月のことであった。[34]この時期は、当時の教育審議会の答申に基づき、中等教育改革が具体的に実施され始めたときでもあった。文部省は、理数科の教授要目の改正の立案に対し、まず、日本中等教育数学会の意見を求めた。いわゆる、この時期の招請者は、

[29] [21], pp. 65－79　[30] [22], pp. 266－268　[31] [23], p. 89

[32] 昭和12年の協議題「現行中学校‥」は，翌13年と14年の総会においても議論され，要目改正を働きかけた。

[33] 座談会記録「本会創立時より第二次大戦までのわが国数学教育の思い出を語る」[24], p. 332

[34] [23], p. 171

会長・渡辺孫一郎、

以下、渡辺秀雄、中谷太郎、鍋島信太郎、平野智治、黒田成勝

の各氏であり、3月11日、文部省で会合がもたれた。

つづいて、東京文理大（3月24～27日）広島文理大（3月28～31日）において研究協議会が開催され、文部省は、改正の根本方針を初めて提案し、説明を加えた。しかも、この席上においては、省側の方針に関する質疑にとどまらず、当時の数学教育再構成運動の状況を、東部委員会について田中良運氏が、西部委員会について高崎昇が説明をしている。この状況については、後日、中谷太郎が述べているが、[35] 当時の文部省側の中心人物の一人である塩野直道によれば、次のような様相であった。

“中等学校の数学教育界が、一部進歩的な学者、実際家の熱心な主張にもかかわらず、また、昭和6年の要目が新しい方向に改正されたにもかかわらず、実質的にはなお、旧態依然たるところがあった。…ところが「小学算術」が出るに及んで、中等学校にも大きな衝撃を与え、中等数学改革の気運が高まるに至った。ことに中等数学教育会では、その具体案についての研究がすすめられた。この中等学校の数学を変えるためには、何としても要目の改正が先決条件である。筆者もしばしばこの改正の必要をその筋へ申達したものであるが、取り上げるに至らなかった。ところが、昭和15年「小学算術」が一応完成すると、棄てておくわけにもゆかなくなってきたし昭和16年2月から、これに着手することになった。”[36]

そして、翌17年に入ると、

| | |
|---|---|
| ・1月；要目原案の作成<br>要目調査会の設置と審議 | ・3月；要目改正案の公開<br>要目解決要項（草案）発表 |

の具体的な作業がなされた。この頃の文部省側の動きは、やはり塩野の述懐により知ることができる。

“要目改正にあたっては、中堅の進歩的学者、実際家が起草委員に任命され、数学理科の全体会議だけでも80数回、夜におよぶことも稀でなく、このほかに分科の委員会で案が練られたことはいうまでもない。筆者の20数年の文部省生活でも、かように熱意のこもった会議はほかにあまり特例がない。”[37]

ここに、当時の中等教育の数学教育の改革への意欲を垣間見ることができ、たとえば、

“改正要目は、再構成研究会の要目案と同様に、大正以来の改造運動が積み上げたものに、皇国の道、八紘一宇のレッテルをはったもの”[38]

といった記述とは大きく相違した経緯があったことも事実である。

### 4．2　具体的な教材を通して

では、教材の特色としては、どんな点があげられるだろうか。これまで考察してきた一種検定教科書の中で、特にそれまでの内容と指導法に関して相違する教材を、三平方の定理[39]を例

[35] 中谷太郎［25］, p. 75　　[36] 塩野直道［29］, p. 61

[37]［29］, p. 62　　[38]［29］, p. 75

[39] この他に，この教科書において考察すべき教材は，微積分と三角関数がある。

として述べる。

まず、前述した通り、昭和17年は新しい教授要目が定まっても、教科書の作成が間に合わず「中学校数学科新教授要目ニヨル教材配当案」[40]による指導がなされた。この配当案によれば、この教材について、次のように記されている。

ぴたごらすノ定理[41]

ぴたごらすノ定理ヲ導キ、ソノ広イ応用力ヲ測ル、第一章ノ平方ト平方根トノ連関ヲトリ、平方表、平方根表或ハ計算尺ヲモ入レル

1．船ガ或港ヲ出発シテ南ヘ25浬ソコカラ西ヘ10浬進ンダ。出発港カラドレ程ノ距離ヘ来テイルカ
（縮図法、$\tan\alpha \rightarrow \sin\alpha \rightarrow \dfrac{10}{\sin\alpha}$）

2．直角三角形ノ三辺ノ間ノ関係ハドウカ（特殊ナ場合カラ入リ、定理ヲ数ヘ確カメサセル。ココデハ相似ニヨル証明ヲ予定スル $a^2 = b^2 + c^2$）

3．縦3cm、横4cmノ矩形ガアル。対角線ハ幾cmアルカ
（3，4，5ノ三角形、直角三角形ノ作リ方）

4．．数量ノ対角線ハ幾米アルカ

5．（平方表、平方根表ノ使用）

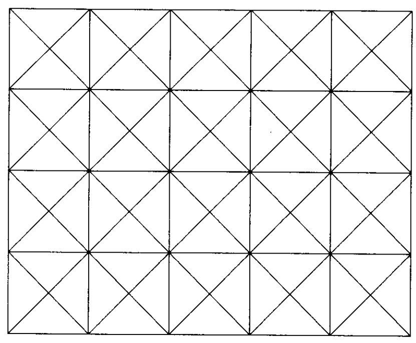
6．座標（3，5）ノ点ト原点トノ距離ハ何程カ

7．一辺ガ20cmノ正三角形ノ面積ヲ求メヨ。
一辺aナル正三角形ノ面積ヲ求メヨ。
$\Delta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 面積公式ト比較

そして、翌年の教科書においては、この構想のもとに次のように取扱われるのである。

三平方ノ定理

次ノ図ハ、正方形ノ格子ニ対角線ヲ入レタ模様デアル。ソノ中ノ一ツノ直角二等辺三角形ニツイテ、各辺ヲ一辺トスル正方形を考ヘテミヨコレラノ面積ノ間ニハドンナ関係ガアルカ。



問1．直角二等辺三角形ノ三辺ノ長サヲソレゾレa, b, cトスルト、コレラノ間ニハドンナ関係ガアルカ

[40] ［21］参照
[41] ［14］, pp. 26－28

直角二等辺三角形ハ直角三角形ノ特別ナモノデアル。特別ナモノニツイテ、アル関係マタハアル性質ガ見出サレタトキニハ、一般ノモノニツイテハドウカトイフ疑問ガ当然起キナクナル

上ニ見出シタト同様ナ関係ガ、一般ノ直角三角形ニモアルカドウカハ、次ノ図形ヲ観察スルトワカルデアロウ。(図略)

………

定理　直角三角形ノ斜辺ノ長サヲｃデ表ハシ、他ノ二辺ノ長サヲａ，ｂで表ハス次ノ関係ガアル

$$a^2 = b^2 + c^2$$

コノ定理ハ、直角三角形ノ最モ大切ナ性質デアッテ、コレヲ三平方ノ定理トイフ[42]

そのことは、前代の指導内容と次のように相違していた[43]。

三角形ノ辺ノ上ノ正方形

「直角三角形ノ斜辺ノ上ノ正方形ハ他ノ二辺ノ正方形ノ和ニ等シ」

仮説：$ABC$ ヲ直角三角形トシ、$BC$ ヲ其ノ斜辺トセヨ

終結：然ルトキハ………

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{ナルベシ}$$

系１。　直角三角形ノ斜辺及他ノ二辺ノ長サヲ表ス数ヲａ及ｂ、ｃトスレバ

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ナリ}$$

第二学年　第３学期　九週（毎朝二時）[44]

週　教授事項　　　　　　備考

…………

２　ぴたごらすノ定理

定理　直角三角形ノ斜辺ノ上ノ正方形ハ、他ノ二辺ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ

系　　直角三角形ノ斜辺及ビ他ノ二辺ノ数値ヲソレゾレｃ，ａ，ｂトスルト

$$b^2 = a^2 + c^2,\ a^2 = c^2 - b^2,\ b^2 = c^2 - a^2$$

最後に、教科書の意図とその思想系譜について考察しておきたい。

この教科書のねらいがどこにあるかについて、編纂趣意書では、次のように述べられている[45]。

１．既成ノ数学ノ注入ヲ排シ、事象ニ即シテ生徒自ラ数理ヲ発見スルヨウニ導クコト

２．問題ニハ具体的素材ヲ多クトリ、事象ヲ数学化シ、且ツコレヲ処理スルノ練ヲ重ンズルコト

[42] 定理や公式は，教科書においてすべて小文字でかかれていた。それは，後述される‘要目カス論’の具体化であった。

[43] [27] pp. 183－184　　[44] [28] p. 35

[45] 内容は，Ⅰ．編集趣旨，Ⅱ．総括的注意，Ⅲ．各年要項，Ⅳ．各節注意である。引用はⅠの全文。

3．具体ニ即シテ数理ヲ十分ニ会得セシメ然ル後ニソノ抽象化、形成化ヲ図リ、依ッテ以テ、コレヲ具体的事象ニ自在ニ応用シ得ルヨウ錬磨スルコト
4．事象ノ数学的表現ニ於ケル近似性ノ取扱イヲ重視スルコト
5．用語・記号ノ定義ハ概念ノ完成ヲマツテ与ヘルノヲ原則トスルコト
6．図表ニ関スル操作ヲ重ンジ、関数観念ト連続観念ノ滋養ニ努メルコト
7．作業ヲ重ンジ、直観ヲ的確豊富ニスルコト
8．図形ノ動的ナ面ヲ重視シ、空間図形ノ観察ヲ重ンズルコト
9．直観的ニ明ラカナ事項ハ、スベテ推理ノ基礎トシ、少数ノ公理ニ基ク論理体系ハトラヌコト
10．論理偏重ノ形成偏重ノ嫌アル問題ハ避ケルコト

そして、この趣旨を支える主張は、それより二年前に書かれた次の一文によってみることができる[46]。

……数学ヲ現実ニ使フトイウ場合には、次ノヨウナ性格ガ考ヘラレル

1．如何ナル方法デ解ケルカハ前モッテワカッテイナイ。自分ノモッテイルアラユル武器ヲ総動員シテカカラネバナラヌ
2．問題ハ常ニ複雑シテイル、ソレ故ニ、自分ノ目的ニカナフ様ニ適当ニ仮定ヲ作ッテ数学ノ問題ニ化カナケレバナラナイ
3．従ッテ解決ノ方法ハ色々アリ、ソノ結果モアクマデ近似的デアル
4．数学的ナ解決ハ、今一度現実ト自分ノ問題トノ相関ニオイテ考ヘテミテ、初メテ其ノ解決ニナル

…数学ヲ使ヘル様に為スニハ、コノ様ナ現実ニブツカラセルコトガ必要デアロウソノ様ナ現実ノ問題トシテ如何ナルモノガアルデアロウカ。第一ニ問題ガカナリ複雑デシカモ、ソノ複雑性ガ生徒ニ親シイモノデナケレバナラズ、シカモソノ問題解決ノ意味ガヨクワカルモノデナケレバナラナイ。

しかし、こうした新しい考え方が昭和10年代の半ばに突然に登場したとは考えにくい。前述した通り、この一種検定教科書の成立が、ひとり数学教育者によるものでなく、上述したように、昭和10年代という時代の要請と数学教育内部の発展との共同歩調の結果の所産であると考えてきた。そして、この枠組みのなかで、再三記述した当時の飛躍的な数学の発展を時代の要請とし、数学教育再構成運動とその結果を数学教育内部の発展とみるならば、この2つをつなぐ共通の論理が必要であったはずである。そのことは、別稿において論じた[47]。

### 4．3　今日の数学教育への展望、課題学習との関連

課題学習の意味と位置づけを教育審議会の答申と学習指導要領をてがかりとして述べれば次

[46] [29]
[47] [30]

のようになる。

課題学習の意味とその構想が顕在化するのは、昭和62年12月24日に教育課程審議会から発表された「教育課程の基準の改善のねらい」（答申）においてである。ここではその第2項で「自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる能力の育成を重視すること」をあげ、この方針のもとでの小学校から高等学校までの算数・数学科の「改善の基本方針」では次のように述べられている。

〔……思考の課程を一層重視するために、児童生徒の発達段階に応じた具体的な操作や思考実験などの活動ができるようにするとともに、数理的な処理考察の際に簡潔さ、明瞭さ、的確さなどのよさが分かるようにし、算数・数学を意欲的に学習しようとする態度を育てるよう配慮する。〕

さらに、中学校数学科の「改善の具体的事項」において、

「（ウ）思考の課程を重視するとともに、数学の有用性についての理解を一層深めるために次のように改善する。

ア　各領域の内容を総合したり、日常の事象と関連づけたりした適切な課題による学習を通して思考活動が一層活発に行われることができるようにする。

……

（オ）第3学年における選択教科としての「数学」においては、生徒の特性などに応じ課題学習、作業・実験・調査など発展的、応用的な学習活動等が多様に展開できるようにする。」

そして、平成元年3月15日告示の学習指導要領（中学校数学科）の「第3指導計画の作成と各学年にわたる内容の取扱い」において、次のように規定されている。

「…2）第2学年及び第3学年においては、生徒の主体的な学習を促し数学的な見方や考え方の育成を図るため、各領域の内容を総合したり日常の事象と関連づけたりした適切な課題を設けて行う課題学習を、指導計画に適切に位置づけ実施するものとする。…

……

6）第3学年における選択教科としての「数学」においては、生徒の特性等に応じ、多様な学習活動が展開できるよう、第2の内容について、課題学習、作業、実験、調査などの学習活動を学校において適切に工夫して取り扱うものとする。」

こうして、課題学習の意味とその意義は、中学校における数学教育に大きな影響を及ぼしつつあるのである。

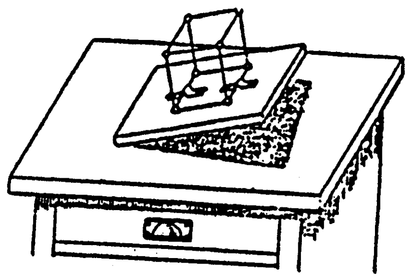
一方、教育現場においても、平成5年4月からの新しい学習指導要領の実施をまえにして、実践研究にとどまらず理論研究においても、課題学習についての研究が盛んになりつつある。

こうした状況のなかに、上記の幾何的直観の育成のための「場」が用意されている。
筆者Oは、こうした状況のなかで、次のような問題を選択して指導内容として整えることで、十分に幾何的直観についての指導の可能性を保障しうると考える[48]。

[48] [16] pp. 31－32

〈問題〉

右ニ示スヨウニ、立方体ノ豆細工ヲ板ノ上ニ置キ、太陽ノ光ニ対スル豆細工ト板トノ関係ヲ種々ニ変ヘテ、影ノ形ノ変化ヲ調ベヨ。



（イ）光線ニ垂直ニ板ヲ置キ、ソノ上ニ豆細工ヲ乗セタ時ノ影ノ形ヲ書ケ。

次ニ、豆細工ヲソノママニシテオキ、板ヲ徐々ニ起シテ影ノ形ノ変化ヲ調ベヨ。

（ロ）光線ニ垂直ニ板ヲ置キ、ソノ上ニ豆細工ノ対角線ヲ垂直ニ立テタ時ノ影ノ形ヲ書ケ。

## 結　語

本論文は、筆者らの「現在の数学教育においては、論理的な思考力の育成のための教材内容の選択と配列は体系的になされているが、直観的な思考力の育成のためのそれは、必ずしも一貫していない」という批判の論理をふまえて、対象を「幾何」に限定をして、まず、次の各点を明確にすることを意図していた。

1．幾何的直観力の概念規定

2．その育成のために「隠れた対称性」への着眼とその意義

そして、この考察は数学者からみた教育における「創造性」の問題を見据えている。ここに、「創造性を養う教育」とは、英語でいうところのWisdom 日本語では「英知」を育むことを目指し、何が本質的か、何が重要かが見通せる人間の育成であると理解すれば、本論文では、その一つとしての直観力をとりあげたことに他ならない。

では、今日の数学教育はこの問題とどのように対峙しているのか、 あるいはしてきたのか。そうした視点でこれまでの数学教育の歩みを概観したとき、戦前のいわゆる昭和10年代のそれは、たしかに前代と異なった画期的な試みがなされた。ここに、当時の様相を可能な限り忠実に提示することの意義があり、その成果は今日的な課題解決に有効であると考える。それゆえに、「数学教育と直観力の育成」をもとにして、今日の数学教育への示唆と可能性を論じた、「課題学習における幾何的直観の指導可能性の問題」を今日的な課題学習との関連で述べることが不可欠であった。

## 参考文献

[1] アーサー・C・クラーク（Arthur C. Clarke）*The Ghost of the Grand Banks, 1990*：グランド・バンクスの幻影(山高昭訳)早川書房(1992)
[2] 蟹江幸博　幾何的直観と対称性、プレプリント
[3] 奥田真丈他監修『新訂　小学校学習指導要領の解説と展開』教育出版（1989）
[4] 奥田真丈他監修『新訂　中学校学習指導要領の解説と展開』教育出版（1989）
[5] 文部省検定済　中学校理数科用『数学』（中学校用 4　第二類）
[6] 文部省『国民学校教則案説明要領及解説』日本放送出版協会（1940）
[7] 前田隆一「カズノホンの図形指導」(『算数教育論』金子書房（1979）所収)
[8] 文部省『カズノホン』(一) 児童用書
[9] 文部省『カズノホン』(二) 児童用書
[10] 文部省『カズノホン』(二) 教師用書
[11] 文部省『カズノホン』(四) 児童用書
[12] 文部省『カズノホン』(四) 教師用書
[13] 文部省検定済　中学校理数科用『数学』(中学校用 1 第一類）(1943)
[14] 文部省検定済　中学校理数科用『数学』(中学校用 1 第二類）(1943)
[15] 文部省検定済　中学校理数科用『数学』(中学校用 2 第二類）(1943)
[16] 文部省検定済　中学校理数科用『数学』(中学校用 3 第二類）(1943)
[17] 稲垣信夫「昭和 10 年代の数学教育運動」埼玉大学紀要 教育学部（教育科学－1）第 27 巻（1978)、29－43
[18] 稲垣信夫「第二次世界大戦下の数学の教科書について」（埼玉大学紀要　教育学部（教育科学－1）第 29 巻(1980)、73－90
[19]『学制百年史』
[20]『日本科学技術体系』
[21] 日本中等教育学会「数学教育」第 24 巻 2 号（1942）
[22] 日本中等教育数学会「日本中等教育数学会会誌」第 19 巻（1937）
[23] 日本中等教育数学会「日本中等教育数学会会誌」第 23 巻（1941)。後に、 下村市郎『文部省中学校・高等女学校数学及理科教授要目解説要項とその趣旨』日本放送協会編として刊行された
[24] 座談会記録「本会創立時より第二次大戦までのわが国数学教育の思い出を語る」 日本数学教育学会会誌 第 46 巻（1964）
[25] 中谷太郎「数学教育再構成について」(『数学教育の発展』所収）(1963)
[26] 塩野直道『数学教育論』啓林館（1970）
[27] 国枝元治『平面幾何学教科書』東京実文館（1923）
[28] 東京高等師範学校附属中学校『数学教授要目』(1935)
[29] 島田　茂『数学教育再構成ノ一ツノ方向』日本数学教育学会誌、 数学教育第 24 巻 1 号（1942）
[30] 奥招 『わが国の数学教育における数理観の転換』(１)（２）三重大学教育学部紀要（1989)──教育科学、(1990)──自然科学