三重大学教育学部研究紀要　第45巻　教育科学（1994）　15－30頁

数学教育における数学者の役割 ── 試み ──

蟹　江　幸　博

Roles of Mathematicians in Education of Mathematics

Yukihiro KANIE

1　始めに－TOSMとは

数学教育において数学者が果たすべき又果たすことの出来る役割とは何かということを大上段に議論しようとする訳ではない。教員養成の教育学部に長年勤めてきた数学者として、大学で学生に数学を教えるだけでなく、算数・数学教育の現状に対して何等かの具体的な意味ある貢献をする必要を感じるようになった。そして、何かしらの行動を起こすべきときであると思うことや、またその実践のために何が出来るかを具体的に考えてみようとした試みについて述べてみたい。

個人としての数学教師がどう振る舞っても解決し得ない多くの困難な問題に、教え子たちは教育現場で直面している。それらの問題の中で、教師になってからの学生たちの専門性のアフターケアなら我々にも出来そうではあるが、それ以外には数学者のなしうることはないのだろうか。

長く教育学部で教鞭をとっている数学者には同じ思いを持つものも少なくない。そこで、福井大学の黒木哲徳氏、岐阜大学の中馬悟朗氏と筆者の３人が、数学者のなしうる役割を少しでも現実的に実行していくものとして、TOSMグループを結成した。結成の経緯と活動については次節に譲ることにして、まず考え方を述べておくことにしよう。

TOSMはTeaching of School Mathematicsの頭文字をとったもので、“トスム”と読むことにしている。ではTOSMは何をするものかと尋ねられても、現在ある教育改良運動や、数学教育学者の活動形態と同じような大掛かりなことは出来ない相談だし、目指そうと思っているわけでもない。TOSMとは現在のところ、グループの３人が行っている共同作業の象徴である。算数・数学教育への数学者としてなしうる貢献は何かを考え、出来ることを実行していくことが目的だという以外にはなく、具体的な活動を通して訴えつづけていくしかないと思っている。

数学者の役割というスローガンを内に抱いているとはいえ、我々は、算数・数学教育が学校教育全体の中でメジャーな位置を占めねばいけないと、アプリオリに思っている訳ではない。しかし、人間の文化を作り継承し伝播し発展させるための手段として重要な「言葉」の問題（国語）と、人間外部の問題、例えば自然の成り立ち・運行・構造などを理解し、人間の側の問題に翻訳する「言葉」の問題（算数・数学）は、初等・中等教育の中で際立って重要な位置にあると思われる。

小中学校の（特に大学時代に数学を専攻しなかった）教師に訊いてみると、算数・数学が一

番教えやすいと思っている人が多いようである。それでも、どう教えやすいのかとか、教えやすさを表わす例を挙げるようになど詳しく訊いてみると、必ずしも教える内容の理解が伴っている訳ではないようだ。

人間にとっての世界の構造・論理と自然本来の構造・論理は同じではない。例えば、1+1=2を説明しようとすることだって容易なわけではない[1]。勿論1+1=2という等式自体を自明であると、言えない訳ではない。言っても良いのである。しかし、1+1=2という言い方を成り立たせている理由・根拠があり、むしろその方が重要であって、これは容易に説明できる性質のものではないのである。そしてそのことの困難さが、先々の時点での学習困難の根底に潜み、未熟な教師の取り除き得ない障害になることがあるのである[2]。

小学校で教えている算数はそれ自体数学とは言えず、身の回りに起こる諸現象を理解し、推測し、対処するための技術であると言ったほうが良い。大まかに言えば、基礎的な技術は数学的なものと言ってよいが、いわゆる文章題は応用技術ということになる。

数学の内的な理論構造を理解した上で、それを応用するのだという立場が取れるものなら、算数の指導はこれほどたやすいものはないし、他教科出身の教師が算数・数学を教えるのが容易であると思う理由でもある。しかし、小中学校の算数・数学の指導で本質的なのはその逆のプロセスである。

身の回りに起こる現象は偶発的な揺らぎによって簡潔な理解を拒んでいるが、局面を限定したり、対象の特徴を的確に把握したりすることによって、何らかの理論的構造が背後に隠れていることを納得させ、基本的な数学的事実・構造を児童・生徒の心の中に少しずつ確立していくことはできるだろう。実は、このことが要求されているのである。この指導で何より重要で困難な点はそのような明確な構造が現象の背後に存在しうるのだということを納得させることである。これが一番難しい。それが済んでさえすれば各自の心の中に構築されているその構造の良否が問題になるだけで、それについては適宜修正していけばよいだけである。繰り返して言えば、背後の構造について教えることより、背後に構造があり得ることを教える（納得させる）ことの方がはるかに難しいのである。

それでは、小学校での指導が「円滑に」行われているようにみえるのは何故だろうか？
その理由は多くの場合、学校で教えられるよりも以前にそうした構造の存在が子供の心の中に準備されているからではないだろうか[3]。つまり、子供が既に知っていることを教えているので、子供を教えることができたと思っているに過ぎないのではないだろうか？従って、何かの事情でそうした準備が出来ていない子供がいたとしても[4]、そうであること（準備のないこと）を発見することも難しいし、たとえそれに気付いてもどう指導したら良いか分からないという状況が生じるのであろう。

そんなとき、どうしてこんなことが分からないだろうと嘆くのではなく、そうした簡単に見

---

[1] こんな小難しいことを言い出すから数学者に算数・数学教育は任せられないという声が聞こえてきそうであるが、偏見を捨てて議論を聞いて欲しい。TOSMでは、小学校教師養成課程での数学（三重大学では小専数学と呼んでいる）の教科書を準備中である。

[2] 相撲でいうところの“三年先の稽古”。

[3] 例えば、幼児に数を詠ませる（いち、にぃ、さん、しぃ、ごぉ、…などと数を言わせること）という習慣（家庭学習）は、自然数の順序、大小、また自然数相互の距離、10進構造、そして何よりも自然数がそれぞれ弁別可能な名前を持っていることを了解させる。“その次は？”という疑問を持つことによって、可能的無限への予感さえ感じさせているかも知れない。

[4] 例えば帰国子女や外国人などでは珍しくない事情かも知れない。

えるものほど（子供の心の中に準備がない場合にはだが)、指導するのが困難なものであることを了解すべきである。技術的に高度なものを教えるのがむしろ簡単であるのは、既に構造の存在を知っている段階だから、“やり方”だけを問題にしても（基礎的な学習が済んでいれば）何とかなるということである。

小学校低学年で算数を教えることは、プロメテウスの壮挙にも似て、永遠に続く、不毛にもみえるほど達成の困難な、しかし偉大な事業であることを認識して欲しい[5]。まずそうした認識を持って欲しいし、また持ったとして、実践する概念・方法を見出すのは容易でなく、それを模索している教師に対して、出来る限りの援助をしたいというのもTOSMグループ結成の動機でもある。

近年初等中等教育における教科間民主主義により、国語や算数・数学教育の相対的な役割の低下が見られる。しかし、他教科に比べて基本的であるが故に、はるかに指導力に専門性や確固とした理念が要求されるし、児童・生徒の側から見ても短期間に修得・習熟が困難である事実は変わらない。

そうした中で数学を愛する数学者としては、事態を黙視していることが許されないと感じている。感じてそして行動しようとした。次節に述べるようなアクションプランを持っているし、幾つかは実行もしている。

我々は何か目新しい教育運動を起こそうとしているのではないし、奇を衒った独自性を主張したい訳でもない。ただ一つ、我々が掲げているスローガンがある。

「当たり前のことを当たり前に」

普通すぎるかも知れない。強く主張するようなことでもないだろう。我々は、何かしらの教育の方法やスタイルが他のものより優れているとかいないとかということは論じない。素材を提供することはあっても、どう料理するかは個々のケースによって違うだろうし、また違わなくてはならない。それは、現場でその時その時に応じて選択されねばならないことである。当たり前の教育がなされるようにと、それだけのことを願って、現場の教師の多くの悩みや苦しみが、数学にかかわる部分だけではあるが、解決されるように努力したいと思っているのである。

2　TOSMグループ結成の経緯と活動

1992年秋の日本数学会の会場で、数人の数学者と個別に数学教育への関心を語り合った。算数教育への理論的実験的な試みを語るものもいれば、教育学部教官として送り出す教師たちの資質について反省を込めつつ憂えるものもいた。

何度も語り合ったテーマではあったが、具体的な対応に責任を持てないことから、言いっぱなしの議論になるのが常だったが、この秋は少し違っていた。筆者が「ともかく何かやろう、一人一人別々にじゃなく」と言い出し、その呼び掛けに何人かが賛同してくれた。

そのうちの何人かでグループとしての行動を始めようとし、またグループとしてのアイデンティティーを確立するため、12月の初めに福井大学の黒木研究室に集まることにした。実際に

[5] この認識が現場の教師にも、教育を受ける側の子供を取り巻く環境にも欠けている。それを認識してもらうことが出来るように、算数の背後にある数学的風景を詳述した教科書を準備している。

集まったのは岐阜大学の中馬氏と筆者だけだった。数学者として算数・数学教育に対して何が出来るか、という問題を考えていくことに合意し、更には考え付いた方法のうち実行可能なものは一つ一つ実行していくことを決めたのである。また関心はあってもみなそれぞれに忙しいのだから、これ以上無理には同志を募らず、やれるだけの人数で、やれることをやっていこうという合意ができた。TOSM の名前が決まり、TOSM グループが結成されたのである。

TOSM グループの最初の事業として何をするかについて、筆者は次のような提案をした。「三重県の教研集会（1992年11月）に助言者として参加した際、小学校の教師らしい方から、廊下の立ち話で、ある問題を尋ねられた。慌ただしい中だったので余りちゃんとした返事が出来なかったことが心残りでもあったし、子供達との勉強の中で数学的な問題で悩み、それに答えられる人が周りにいなかったり忙しかったりして自分で考える時間の取れない現場の教師が少なからずいるのではないかと思った。教育の荒廃が叫ばれるなか、教科の内容についても良心的に振る舞おうとする現場の人びとに接してうれしい気持ちがして、我々の出来ることでお手伝い出来ることはないだろうかと、その時ふと思ったのである。」

このような埋もれた現場の欲求に応えることが採択され、TOSM ポストを開設することにした。開設の趣旨については、日本数学教育学会誌の News Letter に掲載されたポスト開設の文書を引用しておこう。

****

TOSM ポスト開設－算数・数学教育に関する相談－のお知らせ

下記三大学教育学部数学教室に TOSM ポストを平成５年１月－３月末日まで開設することになりました。TOSM とは Teaching of School Mathematics の略です。教員養成のための学部におります関係上、算数・数学教育に携わっている方々の数学上の悩みの相談の場が欲しいという要望を耳にすることが多く、多少なりともそれに応えようということで数学者の有志三人でこの様な企画を始めてみることにしました。常時相談室を開設できると良いのですが、まだ有志の数も少ないので実行可能な方法が限られますが、出来ることから始めることになりました。途中で止めることなく継続していきたいと思っています。電話相談的なものではありませんので、短期間に全ての解答がなされるというような過大な期待はしないで頂きたいと思います。

相談方法は、住所氏名を記入した返信用の葉書を同封した封書に限らせて頂きます（これを必須の用件とします。書き忘れた場合には返信用葉書を送り返さないことがありますのでご注意下さい)。下記のどのポストに送っていただいても結構ですが、電話でのお問い合わせには応じかねます。

さて、相談に対する返答の方法ですが、内容によっては即答できることもあり、かなりの期間考えなくてはならないことも、考えても分からないこともあるかも知れません。一言で返答できる場合も、何ページもの論文的な形でないと返答できない場合もあるかと思われます。寄せられる相談内容がどのようなものになるか分かりませんので、具体的にはポストを閉めてから三人で相談して返答の方法を考えさせて頂きたいと思います。その方法についての返答は遅くとも夏頃までに返信用葉書にてお知らせするということにしたいと思います。

とりあえず第一回を開設しましたが、今後二回、三回とポストの開設を行っていく予定です。

また、返答の方法について一応の企画もあります。当面三人の所属する県で年に1回程度TOSM相談室を現地で開設し三人が直接相談に応じることも考えています。その他、パネルディスカッションや模擬授業のようなことも可能かと考えています。

また、論文的なスタイルでしか答えようのない問題については、何らかの公的刊行物に発表することで替えさせて頂きたいと思います。

いずれにしましても、どの様な相談にどの様な方法で答えたかという点についてのデータベースを作る予定でいますし、それをどの様にお知らせするかは今の所、不定期に開く予定の相談室の折りにでも配布することを考えています。

私達は、現在並びに将来の数学教育に関して深い関心を持っており、何等かの形で現場の皆様のお役に立てればと考えています。

現在のTOSMポスト

蟹江幸博　三重大学教育学部数学教室　TOSM三重ポスト（事務局）
〒514 津市上浜町1515
黒木哲徳　福井大学教育学部数学教室　TOSM福井ポスト
〒910 福井市文京3－9－1
中馬悟朗　岐阜大学教育学部数学教室　TOSM岐阜ポスト
〒501－11 岐阜市柳戸1－1

相談内容	：	算数・数学教育に関わる数学上の問題
ポスト期間	：	平成5年1月～3月末日
相談方法	：	封書(住所氏名を記入した返信用葉書同封のこと)

****

ポストを開設することについて議論をしていたときには、余り沢山の投書や数学上の問題でない投書が殺到したらどう対処したら良いか分からないという不安の方が強かったのだが、実際に開設してみるとマスコミなどでの宣伝をしなかったせいか、予期していたような反響はない。開設の動機になった問題を除けば、期間内に投函されたと言えるのは、三重大学の数学教育の大学院生からの質問と、筆者の一般数学の講義を聴講している三重県内のある塾の講師からの質問の2つだけであった。

公的に公表した2つの雑誌の場合も実際に掲載された号が読者の手元に届いたのは、日本教育情報学会のNews Letterは2月の中頃で、日本数学教育学会の会誌の方は3月中頃であった。掲載を依頼したのが12月の末だったためで、各々の雑誌の担当者の好意によってもこれ以上早くすることは事実上不可能だった。その時点でポスト開設の時期を変更しても良かったのだが、既に少ないとはいえ色々なルートでポスト開設の文書が流布していることから、変更すれば朝令暮改のそしりを免れず、却ってポストに対する信用をなくすようなことになってはいけないという判断で変更をしなかったのである。

第1回のポストへの投函がこのような結果になった理由は幾つか考えられるが、ポストに対

する需要がないのだとは考えてはいない。ポストへの需要のあるところまでポスト開設の文書が届かなかったこともあろうし、届いたとしても開設期間が短くて、問題を整理して投函する余裕がなかったこともあろう。また、TOSM グループの真意が十分浸透していないこともあっただろう。

浸透の問題に応えるには再度の開設しかないと考え、平成5年7月1日より9月30日の期間、第2回目の開設をした。ポスト開設を知らせる文書は前回よりも広く知らせる態勢を取ったが、数学上の質問は2つだけで、もう一通には文科系志望者が多くなっていることからの数学離れの現状を訴え、文部省の新しいカリキュラムでの数学の目的の設定についての質問であった。

後半のような質問はポストの守備範囲を越えている。そうは言うものの、現場ではむしろこのような質問に答えて欲しいという声が多いというのも予想していたことである。対処の仕方が難しい。ポストへの質問が多ければ、このような問題はポストの守備範囲を越えているので、別の機会にとかシンポジウムの折りにでもと言えばよいのだが、ポストへの投函が少ない現在の所、無視することも難しい。

この種の質問に誠実に対処しようとしても、我々にはデータ不足で答えようもないという面もある。こうした問題は現場において、その現場の情況に即して対応することが望ましく、そうした能力を現場の教師が備えることが出来るようにすることが重要だと思っている。そのために数学者として出来ることは何か、という問題を突きつけられているのだと感じている。これが TOSM グループの今後の大きな課題であることは認識しているが、ポスト自体は数学に直接関る部分だけに限定しておきたい気もする。

また現時点でこの問題に答えるとすれば、社会にとってと個人にとっての数学の重要さや面白さを伝える、クイズでなくパズルでなく、ドリルでなく教科書でない、読みやすく数学的な実力の付く書物を作るということで応えるということになるだろうが、実際にこのような本を書くのは難しい。目指す努力をしてはいるのだが。

なお1回目の開設文書が掲載された2つの雑誌には、2回目のポスト開設の公示の文書も掲載されている。しかし、ポストへの需要はそのような雑誌を読む機会もない現場にこそあるのではないかとも考えて、別の雑誌にも掲載を依頼した。明治図書の『算数教育』『数学教育』、国土社の『数学教室』である。しかし本質的には、長く続けていくということ以外に、今の所解決策は思い当たらない。そのような現場へポストの存在が浸透していく良い方法はないだろうか。

実の所、最初の事業として掲げた TOSM ポストに対する現在まで反響の余りの少なさには、多少の失望を感じないと言えば嘘になるだろう。急ぎすぎるのだとも言われる。こうした問題は一朝一夕に解決されるものでないことは分かっているつもりである。しかし、山を押している我々には、山が動く気配が知りたい。

TOSM グループとしての行動に、現実的な意義があるのか、またあらしめることが出来るのか、それが知りたいものである。これまで、我々はまず出来ることから、出来る人だけで始めるという姿勢を取ってきた。しかし、我々が出来ることが、社会の期待や要求と同じである保証はない。また、我々が考えたこと以外に、(数学者として) 我々が貢献できる方法があるかも知れない。

ところで、最初からの企画に、TOSM ポストの解答や解説のために集会 (TOSM 相談室) を開くこともあった。集会を開くなら、この際多くの人と意見を交換し議論し、これからの

TOSM の活動の指針を確立するための提案も得たいし、TOSM グループの活動の原点を考えるものにしたいということになった。このために TOSM シンポジウム福井'93と呼ぶ集会を1993年8月8日に福井大学教育学部で開いた。

テーマは数学と算数・数学教育との接点についてで、蟹江の TOSM の活動の意義を説明する講演の後、岐阜県の小学校、福井県の中学校、三重県の高等学校の教師の方一人ずつとグループの三人との6名をパネラーとして、会場からの質問を受けながらフリー・トーキングをした。30人弱の参加が、初めてのシンポジウムとしては多かったの少なかったのかは分からない。

TOSM に対する要望期待や、現場の教師の実態や算数・数学教育の現状に関する議論を行い、またそれに関するアンケートも行った。そのアンケートはその後、岐阜、三重、福井の三県下の算数・数学の教師の方々にも協力してもらい、データ数もある程度のものになったので、それについての集計や検討は［5］で述べている。三県それぞれの教育事情の違いや教育に対する認識の違いが鮮明に現れて面白い。算数・数学教育の現場を取り巻く環境の普遍性と局所性の問題が浮き彫りにされている。

また今後の可能な TOSM プロジェクトの形態として考えたものは以下のもので、既に実施しているものもあれば、具体的な計画作りには多くの困難が感じられるものもある。

1. 「TOSM ポスト」　今後は常時、年間の半分、1月－3月、7月－9月に開設し、残りの時期には問題の検討や返答の処理に当てる予定。数学上の疑問は本来現場で解決されるのが望ましいものであろうが、多忙を極める教師にとって現実的には困難で、数学者として手伝うことが出来るものとして始めた。

2. 「TOSM シンポジウム」　定期的に開くわけではないが、TOSM の進む道に関する意見を聞く場として必要に応じて開いていく。

3. 「TOSM 学校（中高生対象の数学講座）」　受験数学以外の数学、本来の興味に基づいた数学に関連したテーマで行うもの。学校の休暇を利用した合宿形式で。

4. 「TOSM 相談室（教師対象の巡回相談）」　TOSM ポストに投函するほどの質問ではないが、訊いてみたい、訊いておきたいことなどの質問[6]を受けるために、グループのメンバーが各地を巡回するもの。具体的な実施方法について建設的な意見を求めている。

5. 「TOSM 講座（教師対象の数学講座）」　現場での子供の疑問に答えることが出来るように、また学習困難に陥っている子供のその困難な事情に潜む数学的本質を理解できるように、という点を視野に入れた数学の講座。

6. 「TOSM 出版」　勿論出版社を作る訳ではなく、色々な形での TOSM グループの出版物を作ること。予定しているのは、初等教育の数学教授者養成のための大学における教科

---

[6] ポストに投函する質問は高級なものでなくてはいけないと思う必要はない。むしろ、こんなことを訊くのは恥ずかしいと思うようなやさしく見える質問にも、重要な数学的背景が隠れていることがあるし、そういうことを明らかにしていくことの方が大切かも知れない。

書や中学校の課題学習のための副読本的なパンフレットのシリーズ。

7．「TOSM 推薦図書の選定」 学校に常備するのに適した数学に関する図書のリストの作成。具体的には、初等教育に携わる人の面白い授業のための種本になるものや、より高度の自己教育の指針となるもの、辞書代りに使えるものなどを整理し、さらに内容などのコメントを付けることも考えている。

今の所考え付くのはこの程度だが、どのような件に関しても提案は虚心に聞く用意があり、TOSM ポストで受け付けることにした。

3　TOSM ポストに投函された質問

今の所、具体的な活動として結果があるのは、シンポジウム以外は TOSM ポストだけであるので、ポストに投函された質問について簡単に述べておこう。
まず、質問のリストを挙げよう。

1．第1回 TOSM ポストの質問
   (a) 辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？
   (b) 円周上に n 点を取り互いに線分で結ぶとき、円内にできる領域は最大幾つか？n だけで簡単に表わされるか？
   (c) 正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが360° を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正7角形や正11角形などを分度器とコンパスで描くことが出来るか？
   (d) 直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことが出来るか？
   (e) $\sqrt{24x^2+8x+1}$ が有理数となる有理数 x にはどんなものがあるか？

2．第2回 TOSM ポストの質問
   (a) 正方形を縦横に並べて大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜて多くの正方形ができる。n 倍にしたときにできる正方形の数は分かるが、同じことを正三角形でしたら幾つになるか、公式があるか？
   (b) 三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を2等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか？
   (c) 1. 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的は何なのか。どう設定するのがいいか。
   2. ほとんどの生徒が文科系を志望しているので、1年、2年と学年が進むにつれ実力テストなどで成績が下がる。数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

ここに挙がっている質問は、それぞれ質問者にとって色々な思いを持つものであろう。それ

ぞれの問題に対して、コメントと解答を簡単に付しておこう。幾つかを除いては、可成丁寧に解説した文書（以降「解説」と書く」）も作ってあるが、発表の機会があればと思っている。

3．1　辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？

この質問は、TOSMポスト開設のきっかけとなった質問である。直接蟹江が質問を受けた。質問者は三重県の小学校の先生らしい。1992年度三重県教研集会における廊下での立ち話である。児童と一緒にこの問題を考えて、40位まで数えてみたが、それ以上あるのかどうか分からないということであった。その折りは立ち話でもあり時間もなかったので、場合分けをちゃんとやるしかなく、その場合を数え尽くすためのツリーが完全であるかが問題で、また得られた場合のすべてが異なるものであるかをきちんと見ればよいが、中々大変でしょうというような当たり前のことしか言えなかった。

珍しいほど熱心な先生と思い、感心もしたし嬉しくも思った。しかし、その時はやむを得なかったとはいえ、後で、気になって仕方がない。すぐに答えられなくても、もう少し具体的に考えてあげればよかったとか、せめて名前を聞いておけばよかったとか思った。

少し後で、大学院の講義で学生にやらせてみたところ、幾つもの解答が出てきた。100以上もあるという答えもあって、これでは小学生と共に考えるのは大変だろうと思った。展開図を実際に描きながら数えていくと、そのうち同じものがあるのかどうかが分からなくなってくる。そこで、展開図をダイヤグラムに置き換えて、直方体の展開図になるための必要条件をルールとして与え、ある種の不変量を導入して分類し、対称性を考慮しながら各グループ毎に数え上げるという手順でやれば、誰からも非難されない解答に至る。

じっくり読めば、小学校の先生にも判るようにと、可成丁寧に「解説」を書いたが、さて、質問者の名前が分からない。誠に残念である。1993年度の教研集会で是非会いたいと思って探してみたがどうしても見つからなかった。

解答をしておこう。

さて展開図とは何かということもあるが、幾つかの辺を切り開いたとき、拡げて平面図形に出来るときに、それを展開図と呼んでいるものとして良いだろう。しかし、平面図形と見たときも、合同なものは同じだと考えるのか、裏返しは許さないで回転で重なるものだけを同じ展開図と考えるのかという問題があって、どちらに思うかによって当然答えが違ってくる。

裏返しを許すかどうかは、展開図として折り目の山折りと谷折りを区別するかどうかという問題であって、どちらでなければならないという訳ではない。どちらの場合も数えることにする。

答えは次の通り。

『一般の直方体を展開する方法は、裏返しを許さなければ96通りで、許せば54通りである。ちなみに辺の長さの一組が一致するときは正四角柱の形になるが、52通りと29通りで、立方体の場合は、20通りと、11通りである。』

すべてをここに書き上げても煩雑なだけだから書かないが、すべての展開図を描き挙げられるように書いた「解説」を作った。必要な人は、出来れば新しい質問と共に、ポストに請求されたい。

ちなみに、立方体の展開図の数として流布しているのは、この最後の11通りの場合である。

3．2　円周上にｎ点を取り、互いに線分で結ぶとき円内に最大いくつの領域が出来るか？

記念すべき最初のポスト投書である。残念ながら現場からの投書でなく、修士論文の構成上分かれば嬉しいという三重大学のある大学院生の投書である。ｎの関数だが、具体的表示が知られていないものの例とされていたという話である。$n\to\infty$の漸近挙動だけでも判ればということであった。

似たような問題に

円周に交わるようにｎ本の直線を引くとき、円内に最大いくつの領域が出来るか？

という良く知られた問題がある。ｎ本の直線を引くときに円内にできる領域の最大数を $\varepsilon(n)$ と書くことにすると、

$$\varepsilon(n)=\varepsilon(0)+\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)=\varepsilon(0)+\sum_{i=0}^{n} i=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

となる。比較的容易なこの問題に比べると、表記の問題はかなり難しい。

元の問題の数を$\gamma(n)$と表わすことにする。実際に図を描いて数えてみると、$\gamma(1)=1$, $\gamma(2)=2$, $\gamma(3)=4$, $\gamma(4)=8$, $\gamma(5)=16$, $\gamma(6)=31$などとなり、最初のうちなら$\gamma(n)=2^{n-1}$という予想ができるが、$n=6$に至ってずれてくる。

一般的に求めることは難しいと思われていたようだが、実は$\gamma(n)$を具体的に求めることが出来る。

$$\gamma(n)=1+\frac{n(n-1)}{24}\{(n-2)(n-3)+12\}$$

証明は帰納法でやる。$\gamma(n)=\gamma(n-1)+a_n$であるような$a_n$が求まればよいが、これが

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\{(i-1)(n-i)+1\}=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n}{6}(n^2-3n+8)$$

と求まるのである。詳しくは「解説」で。

3．3　正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが360°を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正７角形や正11角形などを分度器とコンパスで描くことが出来るか？

初めて封書で届いたポストへの投書である。本人（塾の講師）から聞いたところ、児童に訊かれて困ったということである。何とか答えてあげたいが、このままでは質問が適切でないとしか言いようがない。

適切でないという理由を説明しよう。まず分度器とコンパスだけでは多角形は描けない。定規が必要である。（勿論、鉛筆なりペンなりという道具も必要であるが、描くということからこれは当然のことだから考えなくても良いだろう。）

これは質問を茶化しているのではない。定規を使うのは当たり前すぎて、敢えて質問に入れなかっただけであろう。しかし定規を使うと言っても、その長さの目盛りは使うつもりはない

と思う。目盛りを使うとは、個々の線分の長さを測りながら作業することであるが、１辺の長さが幾つかということは重要ではない。問題となる図形が一つ描ければ、それを相似拡大して任意の長さの辺を持つ正多角形が作れることになるから。

ところで分度器を使うということはその目盛りを使うことを意味する。そして、それが許されるならどんな正多角形も描けることになるのである。

つまり、適当な半径の円を描き、この円周をまっすぐに伸ばして線分にし、それをｎ等分する（これはコンパスと定規だけで出来る)。これをまた円周になるように戻し、隣り合う分点を線分で結べばよい。ここで円周を円に巻き付けたり、伸ばしたりしているのだが、その操作は許されないと考える立場もある（普通、幾何の作図題を解く際にはこの立場に立っている)。しかし分度器を使うことを認めるなら、この操作も認めていることになるのである。分度器を作成する際、その目盛りを入れる作業にはどうしても、どこか本質的なところでこの操作を行っているのである。

しかしまた逆に、そういうことが出来ないようでは円周の長さをどのようなものだと考えればよいのかという反論もありそうである。その反論ももっともだが、立場の問題である。上の操作の問題は、円周率の無理数性や超越性の問題や、曲線の長さの定義の問題が関ってきて、初等教育の範囲内では議論しにくい問題でもあり、許すことの是非という設問には馴染みにくい。

従ってこの問題をそのまま素直に受け取るのなら、上の操作を許すことにして、“どんなｎに対しても正ｎ角形は作図できる”と言って良いのかも知れない。

ところで、類似の問題が古代ギリシャの昔から良く知られていて、様々な数学者が解決に努力している。若い頃のガウスが、正17角形の作図に成功したことを少なからず誇りに思っていたということも、数学史上のエピソードとして有名である。最終的な解決は、革命にか恋にか破れ、形の上では決闘で死んだフランスの天才児ガロアまで待たねばならない。

その問題は

“定規とコンパスだけで正ｎ角形が作図できるか？”

である。元の問題には一応答えたので、これがポストに投函された問題だということにすれば解答はある。

しかし、ガロア理論を使った証明しか知らないので、初等的に解説することが出来るかどうかとなると、難しい。しかし、答えは分かっていて、次の通りである。

“正ｎ角形が定規とコンパスだけで作図できるための必要十分条件は、ｎが次の形をしていることである。

$n=2^{N}p_1p_2\cdots p_k$　（$p_i=2^{e_i}+1$ （$e_i\in Z_{>0}$）は互いに異なる素数, $N\in Z_{>0}$）”

TOSM グループとして、初等教育の教員養成課程に対する（大学の）教科書を書きつつあり、この問題はそこで議論することになっているので、このための「解説」は作らない。

蟹　江　幸　博

3．4　任意の直三角柱の正三角形断面を簡単に描くことが出来るか？

ポストを締めた後（1993年4月18日)、皇学館大学の平林一榮教授にポストの話をしたとき、永年暖めていたという問題を頂いたものである。

解答を述べよう。

底面の三角形をその辺の長さ $a \leqq b \leqq c$ で特徴付け、正三角形の辺の長さ l を a, b, c の関数で書けばよい。そしてその長さ（関数）が、作図できるものであればよい。平林教授の質問は"簡単"に描けるかという点に力点があったようで、その意味では解答になっていないかも知れないが、取り敢えず出来ることだけ報告しておこう。

答えは

$$l^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+\sqrt{2\left((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right)}}{3}$$

である。関数の形が四則演算と自乗と平方根を取ることしか出てこないので、a, b, c からコンパスと定規だけを使って作図することはできる。作図の仕方自体は初等的だが、関数の表示通りにやろうとすればかなり手間がかかる。ここまでの分は「解説」で詳しく述べているが、"簡単に"作図できるかどうかは今の所出来ていない。

3．5　$24x^2+8x+1$ の平方根が有理数となる有理数 x は？

同僚のO氏から示された和算の問題である。「幾つかは求めてみたが」という話で、考えてみることにした。高校数学の問題集にありそうにも思うが、調べてないので分からない。調べるよりやった方が速い。

任意の有理数 α に対して、$x = \dfrac{2\alpha-8}{24-\alpha^2}$ とおけば、$\sqrt{24x^2+8x+1} = \left|\dfrac{\alpha^2-8\alpha+24}{\alpha^2-24}\right|$ という答えが見つかる。他に偶然有理数になる場合がもあるかもしれないが、分からない。

一般に $\sqrt{ax^2+bx+c}$ がいつ有理数になるかという問題は、x が有理数でなくてもよいなら簡単で、任意の有理数 $\alpha>0$ に対して、$ax^2+bx+c=\alpha^2$ の二つの解を考えればよい。

a, b, c が有理数でというなら、x も有理数の範囲で求める問題が自然だろう。かくて、次の形に一般化した問題を考えることにしよう。

有理数 a, b, c を係数とする二次式の平方 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ はどんな有理数 x に対して有理数になるか？

任意の有理数 a, b, c に対して問題の解となる有理数 x をすべて求めることは難しい。勿論、$ax^2+bx+c-\alpha^2=0$ の判別式 $b^2+4a(\alpha^2-c)$ が有理数の平方になるような α に対して得られる x が求める有理数のすべてであると言うことも出来るが、これでは問題の言い換えだけで具体的に x を求めてはいない。

x が沢山（任意の有理数に対して一つずつ）あるための、a, b, c に対する十分条件を挙げよう。

1．$a>0$ で、$\sqrt{a}$ が有理数
2．$c>0$ で、$\sqrt{c}$ が有理数

そのとき、任意の有理数 α に対して

1．$x=\dfrac{a\alpha^2-c}{b-2a\alpha}$ とおけば、$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\ \left|\ \alpha+\dfrac{a\alpha^2-c}{b-2a\alpha}\ \right|=\sqrt{a}\ \left|\ \dfrac{a\alpha^2-b\alpha+c}{b-2a\alpha}\ \right|$

2．$x=\dfrac{b-2\sqrt{c}\ a}{\alpha^2-a}$ とおけば、$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left|\ \sqrt{c}+\dfrac{\alpha\ (b-2\sqrt{c}\ \alpha)}{\alpha^2-a}\ \right|$

$$=\left|\ \frac{\sqrt{c}\ \alpha^2-b\alpha+a\sqrt{c}}{\alpha^2-a}\ \right|$$

となる。

この式で与えられないような解を見つけることは出来なかった。(1),(2)の条件を共に満たす場合はまったく同じ解を与えていることも判る。詳しくは「解説」で。

3．6　正方形を縦横に付けていって大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜてできる正方形の数は分かるが、正三角形で同様にしたら幾つになるか、公式があるか？

三重県の中学の中村先生からの質問である。今年度の県教研の助言者の依頼に来られたおり、TOSM ポストの話もしたし、他の TOSM のプロジェクトの話も聞いていただいた。その後何かの話のついでだったか、気になっている問題としてこの問題をあげられた。どこかに書いてあるかも知れないが、本を調べるより事情を調べる方が面白そうで、やってみることにした。

正方形の場合は辺の長さが k の正方形は $(n-k)^2$ 個あるので、$\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ であることは容易に分かる。

正三角形の場合、と言っても、別に正三角形でなくても一般の三角形でも同じことであるが、その個数 S(n) は実際に絵を描いて数えてみると、

$$S(1)=1,\ S(2)=5,\ S(3)=13,\ S(4)=27,\ S(5)=48$$

となる。n が奇数か偶数かで S (n) に対する式は異なり、

$$S(2m+1)=\frac{(m+1)(4m^2+7m+2)}{2}$$

$$S(2m)=\frac{m\,(m+1)(4m+1)}{2}$$

となる。詳しくは「解説」で。

3．7　三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を 2 等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか？

辺の上の時は簡単で、△ABC の辺 BC 上に点 P が与えられたとする。BC の中点 M を取れば、△ABM は△ABC の面積の半分である。M から、AP の平行線を引き AB か AC かとの交点を Q とすれば、直線 PQ は△ABC を 2 等分する。

ここで BC の中点 M の代わりに BC を m : n に内分する点から出発すれば、PQ は△ABC を m : n に内分することになる。

最初に与える点 P が何処にあっても、m : n の場合に一般化した問題の解答を得ることが出

来る。まず次の問題に帰着する。

「ある角と点Pを与えて、点Pを通る直線で角から切り取る三角形の面積を与えられた値に出来る。」

そしてこの問題は相似と円を使って解決される、割と良く知られた問題である。“線分の代数”という観点で教科書の中で論ずるが、それとは別にこの問題に直接かかわる所だけの「解説」を書いたほうがよいか、少し迷っている。

この方針での解法は、例えば岩田至康 [2] p. 331にある。点Pが角の内部にある場合とか、与える面積の値によってはそこにあるままの証明は通用しないが、補助的な角を取る方向を変えるとか、角の辺に関する対称点を取るなどの若干の修正をすれば良い。

また、与えた点Pが辺上にある時のアイデアは、平行線間で面積を保ちながら三角形の形を変えるというものだが、比例を使わずこのアイデアだけで押し通した証明が秋山武太郎 [1] p. 130にある[7]。マニアックなまでに技巧的である。それはそれとして面白いと思う感性もあった方が良いかも知れない。上のアイデアを使って△ABC の半分（一般には $\frac{m}{m+n}$ の）の面積の多角形を次々と作っていくのだが、点Pの役割を三角形の頂点に移動する中間的な三角形を作るのがキー・アイデアである。最後の所では、ある線分上を動かしていく点につれて出来る四角形がいつ平行四辺形になるかという、作図題でよく現れそうな技法が使ってある。この部分は最初の点Pが△ABC に対してどんな位置にあるかによってかなり証明の表情が違う（本質的には同じだが）。自分でやるときは悩むかも知れない。

ところで、点Pが何処にあろうと任意の三角形△ABC を2等分する直線が存在すること自体は中間値の定理と呼ばれる解析の定理を使えば簡単に判る。点Pを通る直線 l に対して、直線 l で△ABC を分割した左の領域の面積から右の領域の面積を引いた関数 f（l）を考える。そして l をある基準線からの角度 θ で表わすことにすれば（角度を確定するためには直線に向きがついていると思えばよい）、Pが△ABC の内部にあるときは θ は 0°から360°まで動き、f（0°）の値と f（180°）の値は、f（0°）＋f（180°）＝0 だから、正負が異なり、従って何処かで f の値が 0 になるところがあり（中間値の定理）、そこで直線 l は△ABC を2等分することになる。点Pは辺上または△ABC の外部にあるときは、直線 l が△ABC に交わる角の所だけを f の定義域とすれば、f の値は S から－S まで変ることになり（S は△ABC の面積）、内部にあるときと同様である。

与えられた問題はこのように存在が保証されている直線を定規とコンパスだけで作図できるかという問題である。この種の問題が、現在、教育的意味以外にどんな意味を持ち得るかは議論の余地があるが、そういったことは言わずに問題はゲームとして楽しめばよいと思う。

しかしながら、解はあれば良いのだ、どうせ作図といってもきちんと描けないのだからある程度正確ならよいじゃないか、鉛筆の線の幅より誤差が小さければ何の問題もない、という立場もないではない。

その意味では存在が保証されている以上、解の直線にいくらでも近付くプロセスが得られればよいとも言える。例えば、頂点から点Pを通る直線が辺と交わる点を P’とすると、P’を通る2等分線は、点Pは通らないが、求める直線の近似と考えられる。得られた四角形に等し

---

[7] 勿論一般の m：n に分割するものは比例を使わずに出来る訳はないが、半分になら出来る。比例を使わない証明であることにこだわる著者は m：n で出来ることもコメントしたくなかったのかも知れない。

い面積を得るため、頂点を取り替えて同様の操作を行うと、更に解の直線に近付く。これを繰り返せばよい[8]。

3．8 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的をどう設定すべきか。 数学の成績が下がる文科系志望の生徒に対し、数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

教育における数学の目的は何かというような問題は一言では言いにくい。恐らく、どのように言ったとしても一面的にならざるを得ず、不適切な場面が起こりうるだろう。

常に正しい主張ができたとすれば、それは多分普遍的一般的な言明になり、それゆえ、現場では役に立たず質問に答えていることにはならないだろう。

それでも敢えて答えるとなれば、“新しいカリキュラム”になど向かわなくても良いのでは、と言いたくなる。そして、数学が好きになるような興味付けは出来るかどうかを考えるより先に、教師自身が数学を好きになることだと言いたくなる。

指導要領が変わろうと、数学自体が変わる訳ではない。何かが好きになるかどうかは個人の好みなのだから、むやみに干渉すべきでない。

色々な外圧が強くなればなるほど、教師個人の内なる数学が問われる。何より数学を愛することだと思う。しかし、自分が愛しているからといって、それだけで君達も好きになれと生徒に強要は出来ない。「出来れば好きになって欲しい」程度のことは言ってもよいだろうが、すべきなのは教師自身が本当に数学を愛していることを数学を通して伝えることである。

教育技術的には、数学的な技術を余り必要としないトピックスで、面白かったり、思いがけない応用があったりするものの中で、教える教材に関連したものを選んで、導入部分に使うことであろう。もしかすると、こうした質問はその様なトピックスとしてどんなものがあるかという質問なのかも知れない。しかし前にも述べたように、それは個々のケースで何が適切かは変ってくる。素材としては色々なものが有りえ、それを集めた本を書く予定もあるが、成書もないではない。

具体的に状況を判った上なら考えることも出来るが、やはりこの種のことは教師自身の数学が問われているというべきであろう。あまり安直な種本探しや、ネタ探しは勧められない。

4 終わりに

直接間接、有形無形にTOSMグループに協力してもよいという人を募っている。全面的な協力者になって貰うのは、時間的にも経済的にも無理な人が多かろうし、プロジェクトごとの参加の形も検討している。

また個人的には、[4] を手始めとして児童・生徒の本当の数学的能力を測る調査の有り方を模索し、その調査をもとに今後の算数・数学教育の有り方について考えていきたいと思っている。TOSMの調査 [5] のような教師サイドの調査と関連を持たせることが出来れば、更に面白い示唆が得られるかもしれないが、直接双方に同種の調査をすることには抵抗があるだろう。今後の課題である。

---

[8] 実は、秋山氏の解答を示した後で点が△ABCの内部にある場合にやってみるように浪人中の息子に言ったところ、難しかったとみえて苦し紛れに、直線の近似列を作ってきた。問題が違うと叱りはしたが、分かってしたのならそれはそれで見識かとも思う。実際にこの問題を教室で行う場合には、考慮しなければいけないかも知れない。

調査の結果、現在の指導内容では足りないところがあれば、それを補うような書物を書いていきたいとも思っている。例えば [3] は、幾何的直観を通して直観力の養成について考察したもので、具体的に三角定規を利用した教材の展開についても述べている。

参考文献

[1] 秋山武太郎 「新版　幾何学つれづれ草」サイエンス社（1993）

[2] 岩田至康編 「幾何学大辞典　1　基本定理と問題－平面－」槙書店（1971）

[3] 蟹江幸博 「幾何的直観と対称性」プレプリント

[4] 蟹江幸博 「数学的知識の欠如に関する自己認識の調査Ｉ」三重大学教育学部紀要、第45巻、教育科学（1994）

[5] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 「数学教育における教師の授業観と意識に関する調査研究」岐阜大学教育学部研究報告(自然科学)、第18－2巻（1993）