三重大学教育学部研究紀要　第46巻　教育科学（1995）　15－39頁

三角定規の組み合わせ図形の考察

蟹　江　幸　博

A Study of Combination-Figures of Triangles

Yukihiro KANIE

1　動機と設定

1．1　直観力の養成

何年か前、「直観的能力は指導によって育成されうるか」、という昔からある問題に直面させられる問題に出会った。それが立体幾何の問題でもあったことから、幾何教育における直観の問題をしばらく考えてみたことがあり、「幾何的直観と対称性」という論文［1］にまとめたが、あまりに長くなり過ぎたのと、数学を良く知っている読者には陳腐だが現場の教師にとっては専門的すぎる数学的内容が多く含まれており、つまり読者層を想定せずかなり自由に書いたために出版の見込みが立ってない[1]。

問題から触発された教育的議論に関する部分は、奥招氏との共著の形で、三年前の本紀要［2］に公にしてある。

論文［1］には、小学校や中学校の現場で幾何教育の補助として利用出来る教材の素材を提供している部分もあるのだが、論文［1］が公刊出来ないまま、その部分もいつまでも公開出来ないままにしておくのは惜しいこともあり、教材の素材という点に限定して、発表しておくことにした。

論文［1］の主張を簡潔に述べると、直観力を一般に論じることは難しいが、幾何的な問題に限定すればある程度の議論は可能であって、幾何的直観力の大きさは隠れた対称性を見出す能力の高さと言える部分があり、そのためには対称性の多様さや美しさを多くの実例と共に知ることが有効だろうということであり、さらにその実例を日本の初等教育では良く用いられている教具である三角定規を用いて大量かつ体系的に作り出す方法を提案している。

多くの名画を鑑賞することが美術的能力を高めるのに役立ち、名曲を聴くことが音楽的能力を、名作を読むことが文学的能力を高めることに役立つことはさして異論がないだろう。作り出す能力が育たない場合でも、鑑賞する能力は育つし[2]、むしろ製作に直接関与しないで生きていく多くの人達にはその能力の方が役に立つだろう。これと同じことを初等教育での幾何・

[1] 数学教育学者の平林一榮氏に相談した所、教師にも読める読み物にしたらどうかと助言を受けた。変換群の言葉を使わない方が良いかどうかに決心がついていないし、また使わないとなるとかなりの練り直しが必要となるのでまだ手がついていない。いっそ、絵本風にでもまとめられたらと思っている。論文［1］のままで良いと言われる方には、請求があればお送りしている。

[2] 鑑賞する能力を育てるために鑑賞することを学習するのかという種類の非難は、極めて創造性の高い人が自分を律する言葉としては良いかも知れないが、そうでない場合は天に唾するようなものであろう。

図形教育の場で行なおうという提言が、この論説の趣旨の一つである。

数学でも、名作、力作、大作と呼ぶことの出来る論文・著作が多くあり、多くの数学者はそれに触れ、理解し、鑑賞し、再構成し、出来ることならデフォルメをすることまでして成長するものである。しかし、残念なことにそれらを鑑賞することは勿論、単に理解することさえ児童・生徒に期待することは、実際上不可能である。

数学や算数の理解は、例えば自転車に乗ることの習得にも似ている。乗れるようになるまでは、何故乗れるのか分からないほどに難しく感じられるが、乗れるようになった後では、何故乗れないのか理解出来ない、というより乗れない状態というものが想像も出来ない程のことになる。

初等幾何の証明問題や作図題などで、一本の補助線が引ければ誰にでも分かるのに、その補助線を引くことが難しいといったことがある。それを直観力に優れているか否かと呼ぶことになる。

自転車の場合、それでもほとんどの人が乗れるようになるが、幾何の場合、なぜ多くの人が取り残されるのだろうか。必要度の問題や、ほとんどの人が乗れるという事実が学習を後押ししてくれることもあるだろうが、教育技術的には、評価を許容する中間状態の存在の有無によるのではないだろうか。

自転車に乗れない状態から乗れる状態になる途中には幾つかの段階があり、その段階にあることが他人にも自分にも理解出来るのである。介助者に車体の一部を保持してもらい、自転車が安定している状態を作ってもらえば動かすことが出来るという段階は、確かに全然乗れない状態よりは進んだ段階だし、後輪に補助輪をつければ運転出来るという状態は成功間近の段階と言える。

それに反して、補助線の場合は、引けるか引けないかであって、惜しい補助線というものはあり得ない。答えや状況を知っている人にとっては「惜しい」ということはあり得ても、本人にとっては成功しなかった補助線は何の役にも立たない。

それでも中間状態に当たるものはありうるし、教育現場でも評価の対象に出来るものはあると思っているし、多少のことは論文［1］で論じてもいる。

直観力の養成を個人的な問題に還元しないためには、この中間の状態の存在を認め、かつ作り出すことが必要ではないだろうか。

直観的に理解したり判断するということは、すべてを論理的に議論してはいないということであり、そこでは論理の飛躍が要求される。それ故にこそ、直観は思考と時間の節約にはなるが、常に誤りを犯す可能性があるということである。その誤りを少なくするためには、正しい結論を導くモデルを多く知っておくこと以外に有効な処方箋は思い付かない。

1．2　図形の顔としての対称性

さて、幾何の問題に限定することにしよう。初等幾何の論証にしても作図題にしても、その解決過程では実験の連続である。2点を結んだらどうなるか、垂線を下ろしたらどうなるか、接線を引いたらどうなるか…等々である。このときある作業をした後の「どうなるか」という部分が問題なのである。ある作業をして、それで「どうかなった」のか、それとも「どうともならなかった」のか、それをその都度判断して行かねばならない。

「どうかなる」とは、作業した後では作業する前の図では見えなかったものが見えたことであり、「どうにもならなかった」とは作業した後の図に新しいものが何も見えず、却って複雑にしたばかりということになる。そしてこの何かを見つけるということは、見つけるべき何ものかを既に知っているのでなければ、極めて困難だということになろう。

見つけるということは見分けるということであり、言うなれば多くの図形の顔（特徴・特性）を見分けることが出来るほどに親しんでおくが大切になるだろう。

しかし、一般の図形に見分けるべき顔（特徴）をどのように見つけたら良いのだろうか。それには、図形の対称性に着目するのが有効ではないだろうか。

例えば三角形の場合に、図形の種類をと言えば、「正三角形」、「直角二等辺三角形」、「二等辺三角形」、「直角三角形」、「鋭角三角形」、「鈍角三角形」が挙げられる。この違いは各グループの中で特定の三角形を指定するための自由度の問題とも考えられる。

3辺の等しい「正三角形」は長さがすべて等しくその長さ1つだけを決めたら決まるので自由度1である。「直角二等辺三角形」もどれか一つの辺が決まれば決まるから自由度1である。「二等辺三角形」は等辺と他の辺の二つの辺が決まれば決まるし、「直角三角形」もどれか2辺が決まれば決まるので自由度2である。「鋭角三角形」も「鈍角三角形」も自由度3である。三角形は「3辺合同定理」があるので、自由度は高々3であり、最後の2つは「等式」でなく「不等式」で定義されるので自由度が下がらないのである。

このように自由度は一つの指標に過ぎず、それだけでは特徴付けられない。

それでは対称性はどうだろうか。普通、図形の対称性と呼ばれるのは、点対称、線対称、回転対称である。正三角形の場合、各頂点から対辺に下ろした直線に関する線対称と、重心に関する±120°回転があるが、二等辺三角形の場合、等辺の夾角の二等分線に関する対称性しかなく、直角があるということでの対称性は考えられない。

対称性も自由度のように限定された特徴付けに過ぎないのだろうか？しかしそれは、［1］で詳しく論じたように、対称性を狭く考えているからだということが出来る。

平面図形の対称性は本来、平面全体の合同変換[3]で、その図形を保つものがあるときに言うのである。変換が図形を保つという意味を、集合としての図形を変えないという意味にとれば、確かに上の対称性しかない。

しかし、図形Fを変換ϕが写すときに、$\phi(F)=F$を要請することをしなくても、図形Fによる平面の敷き詰めがあって、変換ϕがその敷き詰めの形を変えないのならば、それも図形Fの対称性と呼んでも良いのではないだろうか。ワイルの名著『シンメトリー』［3］でも、敷き詰めを対称性の議論の中で扱っている。この対称性を、図形Fの外部対称性と仮に言うことにしよう[4]。

言葉だけでなく具体的に見てみることにしよう。正三角形の場合、いろいろな敷き詰め方があるが、次の形のもの（図1）がもっとも対称性の高いパターンである。数学的に少し厳密にするために、敷き詰められた図形Fの辺のすべてからなる集合をこの場合の図形Fのパター

[3] 合同な図形を合同な図形に写すとか、もとの図形と写された図形が常に合同であるとかいう感じでついている名前で、今の場合は等長変換という方が厳密である。しかしそれも、三角形の3辺合同定理が成り立つような空間でしか等長変換が合同変換にならないことから言えば、合同変換という言葉の方が良いかもしれない。

[4] これまでの対称性は図形Fを集合として変えないので、対の言葉として、内部対称性と呼んでも良いだろう。

ン$P=P(F)$ と言い、平面の合同変換ϕで$\phi(P)=P$を満たすものをこのパターンの合同変換、または対称性を表わすものとして対称変換と呼ぶことにしよう。

正三角形の標準パターンIII_0で言えば、元々あったBG, OC, ADに関する線対称、三角形OABの重心に関する±120°回転の他に、OA, AB, BOに関する線対称、OA, AB, BOの各中点に関する±180°回転[5]、点O, A, Bに関する±60°, ±120°, 180°回転、さらにはベクトル$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}$の平行移動は対称変換である。

元々の正三角形OABに直接関る部分だけを示したが、定義から明らかなように、任意の二つの対称変換の合成はまた対称変換であり、すべての対称変換の集合は合成に関して群になり、これをパターンIII_0の対称変換群と言い、$\mathcal{T}(III_0)$ と書くことにしよう。当然のことだが、$\mathcal{T}(III_0)$ には無限個の元があり、書き尽くすことは出来ないので、その生成系[6]で表わすことも考える必要がある。

平行移動の全体はまた群となる[7]。この群$\mathcal{H}(III_0)$ をパターンIII_0の平行移動群と呼ぶ。この元（平行移動）を対応するベクトルで表わすことにすれば、部分群$\mathcal{H}(III_0)$ は$\mathcal{H}(III_0)=\mathcal{Z}\overrightarrow{OA}+\mathcal{Z}\overrightarrow{OB}$と表わすことが出来る[8]。

平行移動と回転を繰り返して得られる変換を運動と呼び、その全体$\mathcal{U}(III_0)$ をパターンIII_0

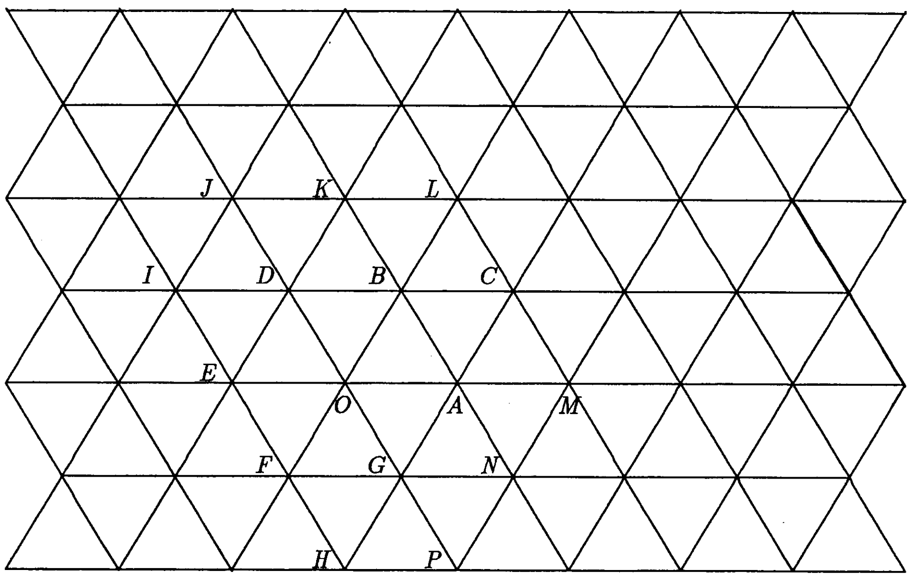


図１：正三角形の標準パターンIII_0

の運動群と呼ぶ。

運動群$\mathcal{U}(III_0)$ は、平行移動群$\mathcal{H}(III_0)$ に三角形OABの重心に関する120°回転と辺OAの

[5] 180°回転は点対称と考えても良い。

[6] 部分集合であって、その有限個の元の積ですべての（群の）元が表わされるもののこと。パターンIII_0の場合、上に具体的にあげた対称変換の全体は群$\mathcal{T}(III_0)$ の生成系になっている。

[7] 二つの平行移動を合成すると、対応する二つのベクトルの和のベクトルに対応する平行移動となる。

[8] $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$であることに注意する。$\mathcal{Z}$は全整数環を表している。

中点に関する180°回転を付け加えて生成した群ということになる。生成することから、パターンの中のどの正三角形の重心の周りの$n\times120°$（$n\in\mathcal{Z}$）回転やどの辺の中点の周りの180°回転も、更にどの頂点の周りの$n\times60°$回転もまた、$\mathcal{U}(III_0)$に含まれることになる。

対称変換群$\mathcal{T}(III_0)$は、運動群$\mathcal{U}(III_0)$に、OAに関する線対称とOCの関する線対称を付け加えて生成したものになる。生成するため、パターンの任意の直線に関する線対称と任意の頂点を通る垂線とそれを±120°回転させた直線に関する線対称が含まれることになる。

各パターンPに対して、三つの対称性の群$\mathcal{T}(P)$，$\mathcal{U}(P)$，$\mathcal{H}(P)$を考えれば、可成のパターンが、ひいては元になる図形（パターンPの基本図形と呼ぶ）が区別できることになるだろう。

正三角形を基本図形とするパターンは上に挙げた標準パターンIII_0以外にも、色々なパターンが考えられる。

図形の種類を区別するという意味で考えるならば、対称性の群が出来るだけ大きくなるようなパターンを考えて比較すれば良いだろう。それでも区別できなければ、可能なパターンを色々考えて、その対称性の群を比較すれば良い。

二等辺三角形の場合に同じことを考えてみよう。紙数の関係で図を描くことは止め、パターンIII_0で$OB=AB\fallingdotseq OA$としたパターンをIII_1と呼ぶことにすれば、二等辺三角形OABのパターンであることになる。このとき、平行移動群$\mathcal{H}(III_1)$はIII_0と同様、$\mathcal{H}(III_1)=\mathcal{Z}\overrightarrow{OA}+\mathcal{Z}\overrightarrow{OB}$となるのだが、生成元のベクトル$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$は、回転では重なることはできない[9]。

運動群$\mathcal{U}(III_1)$に付け加わる回転も、各辺の中点の周りの180°回転しかない。対称変換群$\mathcal{T}(III_1)$に付け加わる線対称も、水平な辺と、各頂点を通る垂直線に関する線対称だけであり、二等辺三角形が正三角形より対称性がかなり小さくなることが分かるだろう。

内部対称性の見つからなかった直角三角形を考えてみよう。パターンIII_0で$AB=OB$のまま、$\angle OBA$が直角であるように変形したパターンをIII_1'と呼ぶことにしよう。直角二等辺三角形OABのパターンであるが、このとき３種類の対称性の群はパターンIII_1と変わらない。

外部対称性まで拡げても直角二等辺三角形を区別できないのだろうか？実はまったく別のパターンで、一般の二等辺三角形では出来ない種類のパターンを作ることが出来るのである。紙数がないので、作り方だけを述べよう。上のように$AB=OB$で$\angle OBA$が直角である三角形OABを考える。この三角形OABから、対称変換を次々と使ってパターンを作りあげていくということを考える。

パターンIII_1'の場合には、すべての辺に対する平行移動を持っていたが、それは諦めなければいけない。また各辺の中点に関する180°回転も諦める。その代わり、各辺に関する線対称を許すことにする。つまり、元の直角二等辺三角形OABの各辺に関して、パタンパタンと折り返していくのである。このパターンIII_2では、斜辺に関する平行移動は残るが、直角を挟む辺の方向の平行移動は辺の長さのものは対称変換にならず、その倍の長さのもので始めてパターンを保つことになる。斜辺に関する線対称は斜辺の中点に関する180°回転とは違うものである。斜辺に関して折り返せば、直角二等辺三角形は正方形になり、このパターンIII_2は正方格子IV_0の対角線方向に線を入れて、その線がまた正方格子[10]になっているようなものになる。

---

[9] ベクトルとしての長さが既に異なっている。

[10] 辺の長さが$\sqrt{2}$倍のもの。正方格子とは普通の方眼紙のパターンを平面全体に拡げたものである。ここには描かないが、各自方眼紙を用いて確かめて欲しい。

このパターンIII_2は容易に、$OB \fallingdotseq AB$の直角三角形の場合にも拡張でき（III_3と呼ぼう）、長方格子（長方形を基本図形とする標準格子）に一斉に入れた対角線が斜方格子（菱形を基本図形とする格子）をなすようなものになる。

このようにして、「正三角形」、「直角二等辺三角形」、「二等辺三角形」、「直角三角形」は外部対称性によって区別されたことになる。

一般の「鋭角三角形」の場合は、始めに一般の三角形を置き、次々と各辺の中点に関する180°回転を施して行けば、パターンが得られる。これは１目盛りの長さの違う斜方格子に、対角線方向の線を入れたものになっている。これをパターンIII_4と呼べば、ここで３辺を同じにすればそのまま正三角形のパターンIII_0であり、２辺を等しくすれば二等辺三角形のパターンIII_1になる。この特殊化によって、段々に対称性の群が大きくなるのである。

直角三角形でも勿論このパターンIII_4は描けるのだが、このパターンでは直角であることからの特別な対称性は得られないということである。直角三角形の場合はIII_4の特殊化ではないようなパターンで、直角三角形でなければ作れないパターンIII_3があるということが特徴なのである。

「鈍角三角形」でも「鋭角三角形」と全く事情は同じであって、単にパターンIII_4の基本図形である三角形が鈍角三角形であるというだけである。

四角形に対しても色々な種類が考えられる。正方形の標準パターンである正方格子IV_0は方眼紙のようなパターンのことであり、長方格子IV_1は縦横の１桝の長さの違う方眼紙である。それを斜めに押し倒したような斜方格子IV_2は、目盛りの長さが同じなら菱形を基本図形とするものだし、目盛りの長さが違えば一般の平行四辺形に対する標準的なパターンとなる。

これらの標準パターンでも、上に述べた四角形は区別できるし、等脚台形、一般の台形、凧型なども他と区別できるパターンを考えるのは難しいことではない[11]。

このように、外部対称性は図形の個性を見分けるための良い道具になることが分かる。

さらにもっと多種多様な個別の図形の個性を特徴付けることが出来る場合があるだろう。しかしその前に、個性を持った図形を知らなければならないだろう。そのために、この論説では、三角定規を用いて沢山の図形の例を作り出すことを目標としている[12]。

京都の三十三間堂には多くの仏像が並べられている。その中には必ず家族や知人の顔があると言われているが、こうして作り出す図形のリストのなかに知っている図形が皆含まれ、それ以外には実用上必要ないと言えるほどに、このリストが多角形の三十三間堂になれば良いと思っている。リストには、数学的には今のところそれ以上の意味はない。

少し苦痛かも知れないが、丹念に読んで頂ければ、平安の仏師が仏像を掘り出したときの苦しみとそして楽しみを味わって頂けるものと信じている。

---

[11] 紙数の制限のために残念ながら割愛するが、一般の三角形のときと同様、一般の四角形に対しても、各辺の中点に関する180°回転を繰り返して、平面を埋め尽すパターンを得ることが出来る。但し、５角形以上では一般にはこのようにしてはパターンは出来ない。

[12] 古代から壷や壁などの文様の中に多くの繰り返し図形が知られている。しかし、何故そのような図形を思い付いたのかという点で不思議なものが中にはある。そのような思い付きの発想の元に、今やろうとしている作業があるのかもしれないとも考えられる。つまりより基本的で単純な図形の組み合わせとして得られたということである。

2　三角定規を使って

三角定規には2つの形がある。直角二等辺三角形$\triangle ABC$と、内角が30°，60°，90°の直角三角形$\triangle EF$Gである。

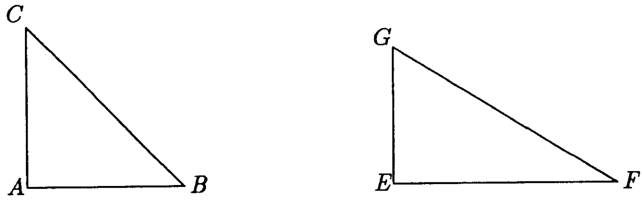


図2：三角定規の2つの形、半正方形と半正三角形

直角二等辺三角形は直角二等角三角形と言っても良く、また$AB=AC=\frac{1}{\sqrt{2}}BC$という辺の比でも特徴付けられる。これは$AB$を1辺とする正方形$ABCD$から対角線$BC$で切り取って得られると言うことと同じである。何度もこの三角形の名前を引用するので、この文章の中でだけという断り付きで、直角二等辺三角形のことを半正方形とも呼ばせて貰うことにしよう。

もう1つの$\triangle EFG$は内角でだけでなく、$EG=\frac{1}{2}GF=\frac{1}{\sqrt{3}}EF$という辺の比でも特徴付けられる。半正方形の場合と同様、GFを1辺とする正三角形を半分にしたものであることから、半正三角形と呼んだらどうだろうか。少なくともこの文章の中でだけはそう呼ぶことを許してもらうことにする。

以下では、複数の三角定規を使って図形遊びをするという気持ちで読んで欲しい。

2．1　三角定規で作る対称性 I（半正方形の場合）

さて、まずは半正方形(＝直角二等辺三角形)の場合に遊んでみることにしよう。半正方形は内角が90°，45°，45°であり、すべて互いに相似である。どんなメーカーの三角定規を使っても同じ結果が出ることに不安を抱く理由はない[13]。

最初はくるくると回してみよう。1つの辺が水平でないと心理的に不安定になることもあるので、その様に置くことにすると下の3種類になる。まずこの形をしっかりと見てみよう。1つだけで回してみるより、3つでも4つでも自分で納得のいくまで色々の状態のものを並べて見比べられるほうが良いと思う。

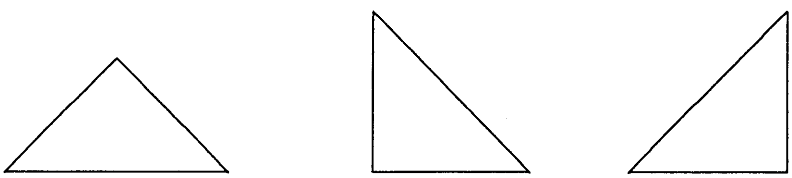


図3：半正方形の3つの置き方（半方 I）

[13] 勿論、大きさの違う三角定規を混ぜて使えば、以下の遊びはうまくいかない。

何も得られなくてもいい。色々と空想が広がるようならそれも良い。教師の判断で適当な時間、適当なコメントを考えておくこと。あくまでも子供の反応を見ながら臨機に判断することが必要である[14]。

次にはこれを幾つか用意して組み合わせてみることにしよう。長さの違う辺をくっつけると対称性が極端に落ちるので、長さの等しい辺を重ねよう。得られる図形は合同を除いて、正方形と半正方形と平行四辺形である。面積はもちろん2倍である。

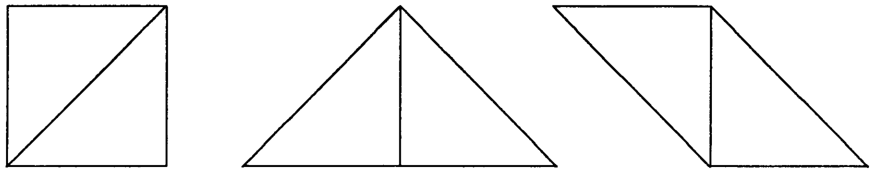


図4：2つの半正方形の組み合わせ図形（半方Ⅱ）

正方形が得られたから、沢山のこの定規を使えばパターンIV_0やその部分パターン[15]を作ることが出来るし、平行四辺形でのパターンIV_2を作ることも出来る。2倍の面積の半正方形が得られているから、基本図形の面積が2倍のどんなパターンも得ることが出来る。

長さが倍の大きさのものを作るためには、当然4倍の数の定規が必要だ。以下で定規を沢山使ったものを図示するときに1辺の長さを小さくせねば納まらないので、そうしなくてはならなくなることもあるが、辺の長さは同じだと思っている。これは目の位置を少し遠ざけたということに当たっていて、議論の本質には関係がない。教室で、例えば班ごとに別れて以下の作業をしていくと机の上だけではスペースが足らなくなれば、教室の床に広い場所を作ってやることになろうが、多くの定規を使うことになれば自然に視線が遠くなるだろう。

8つの定規で作った図5のそれぞれの図形の中に、2つの定規で作った(図4の)図形が隠れているし、その3種類の図形の面積を2倍にした図形も図5のどれかの図形の中に隠れている。面積が倍の図形を探すのは、ちょっとしたコツか洞察力が要るかも知れない。

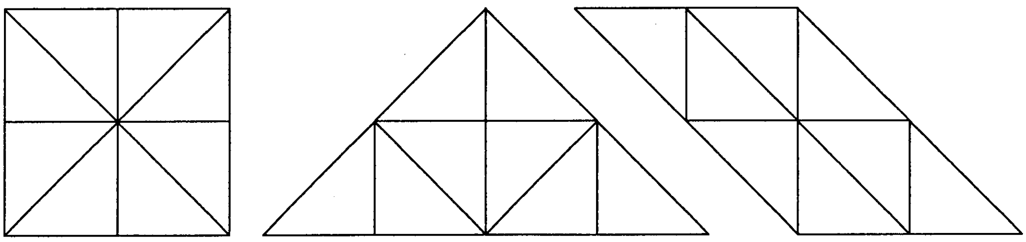


図5：倍の大きさには4倍の個数の定規が要る（半方Ⅱ×2）

---

[14] 対象となる児童・生徒の状況によって異なる。どんな位置に置いても同じ形であることを確認することが以下の操作にとって役に立つだろうと、この作業を入れてみたが、幼児期にはむしろ図形の位置の違いを認識せず、例えば逆に置かれた字も裏返しの字もまったく同じと思っていることも多いようである。

[15] 元のパターンの基本図形を幾つか合わせた図形を基本図形として、元のパターンの中から適当に線分を消すことによって得られるパターンのこと。

見た瞬間に分かってしまう児童・生徒もいるだろうが、そういう対象を問題にしてはいない。教育現場ではそういう児童・生徒には鄭重に静かにしていて貰う工夫、または教師の側につけて分からない児童・生徒を一緒に指導させ、そのことによってそうした子供達にも更に深い理解を得させるような工夫が必要になる。しかしこれは算数・数学教育だけに止まらない問題でもあるし、教師の人間的な広がりや柔軟性などによる部分が大きいのでここでは論じない。

コツというか問題の本質というか、閃きを助ける指導法に1つの提案をしておこう。教師の側はより数学を知っているのだから、その認識や数学的構造についての理解を“陰で”使うことになる。倍の面積の図形とは相似比が$1:\sqrt{2}$の相似な図形であることに注意して、斜辺とそうでない辺との役割を換えるのだということを指摘してやるとよい。相似比の概念の無い子供には、2つ合わせて出来た図形に面積が倍の半正方形があったことを注意して、そのとき斜辺とそうでない辺との役割が反対であったことを指摘してもよい。面積が倍になるとき必然的に変わるもののうち、形を決めるのは何かとか形の特徴を表わすものは何かと考えさせる訳である。

指導上の困難に当たったときそれを克服する統一的な方法があると期待してはいけない。その困難に出会ったときの諸々の状況の違いによって、ある方法がベストであったりかえって混乱を助長する方法であったりする。その困難を越えることの出来る数学的事実や技法は大抵の場合1つではない。多くの等価な事実や技法を考え、その状況に最も適したものを利用するのだという精神を忘れないようにして欲しい。最も適したものだと思ったものでも児童・生徒が理解してくれない場合もあるだろう。その時はもう一度考え直すことである。最も適したものは何か。他に等価な事実がないか。児童・生徒が何か思い込んでいて、そのために正しい理解への障害になっているようなものは何か。そんなときは、多分児童・生徒にとって等価だと思っている数学的事実が実は等価でなかったということが多いものである。指導者だけが等価なものを探すのでなく、誤って等価だと思いやすいものは何かと考える癖を付けておくと、多くの指導上の困難は自然に解消することもあるのではないだろうか。

さて、対称性という観点から言えば、それを基本図形とするパターンの対称変換の多いものが作れることが、その図形の対称性の高さであるという立場で議論を進めてきたのであった。

2つの定規で出来た正方形、半正方形、平行四辺形について言えば、正方形で出来るパターンIV_0は非常に多くの対称性の変換を持っているし、半正方形の場合は何であれ面積が倍のパターンが出来るだけで対称性は変わらないと言えるし、平行四辺形の場合はパターンIV_2での一般の場合の分しか対称性はなくかなり減って仕舞っている。同じ図形を2つ合わせて対称性が増えたり減ったり変わらなかったりしているわけで、半正方形は特別な性質を持っているということも出来る。

次ぎに、3つの半正方形を合わせるとどうなるかを見てみよう。合同を除けば以下のものしかない。等しい長さの辺をくっつけることで得られる図形は以下の4種類の図形のどれかと合同である、つまり回転するか線対称で写すかすれば重なる。

これらの図形は見たところかなり対称性の低い図形であるようだ。回転は自明なものしかないし、対称軸も図形2、4の2つにしかない。しかし、半正方形という特別なものを合わせた図形であることを反映して、この4種類の図形はすべてあるパターンの基本図形になることが出来るのである。

まず最初の図形1が基本図形になりうるのは簡単に分かる。斜辺を合わせれば長方形になる。

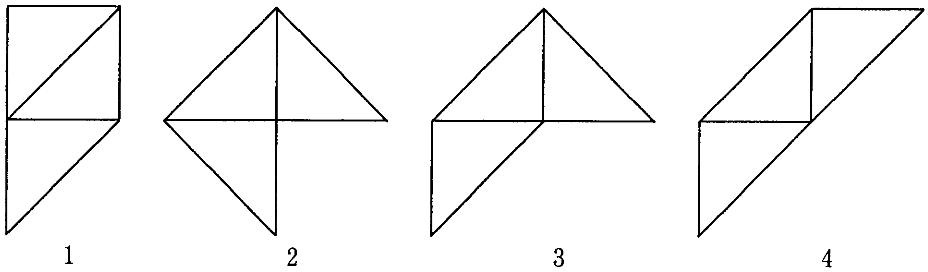


図6 : 3つの半正方形の組み合わせ図形（半方Ⅲ）

そして、長方形の作るパターンで対称変換が多いパターンIV_1のそれぞれの長方形に中に図形1を2つずつはめていけばよい。しかし図形1の作るパターンとして考えるのだから、一番対称変換が多いパターンを考えるとしても、長方形に2つずつの図形1のはめ方の違いで、図形1を基本図形とするパターンとしては異なるものが得られる。簡単に思いつくだけでも図7にあげた4種類のパターンがある。勿論図7は長方形のパターンとしてのパターンIV_1の一部を、全体が推測できる程度に描いたものである。

このうちどれが一番対称変換が多いかは難しいところだ。1、2番目のパターンは3、4番目を比べると、垂直方向の平行移動が半分しかないがその代わり水平の辺に関する鏡映がある。また2、4番目のパターンは1、3番目と比べると、水平方向の平行移動が半分しかないがそ

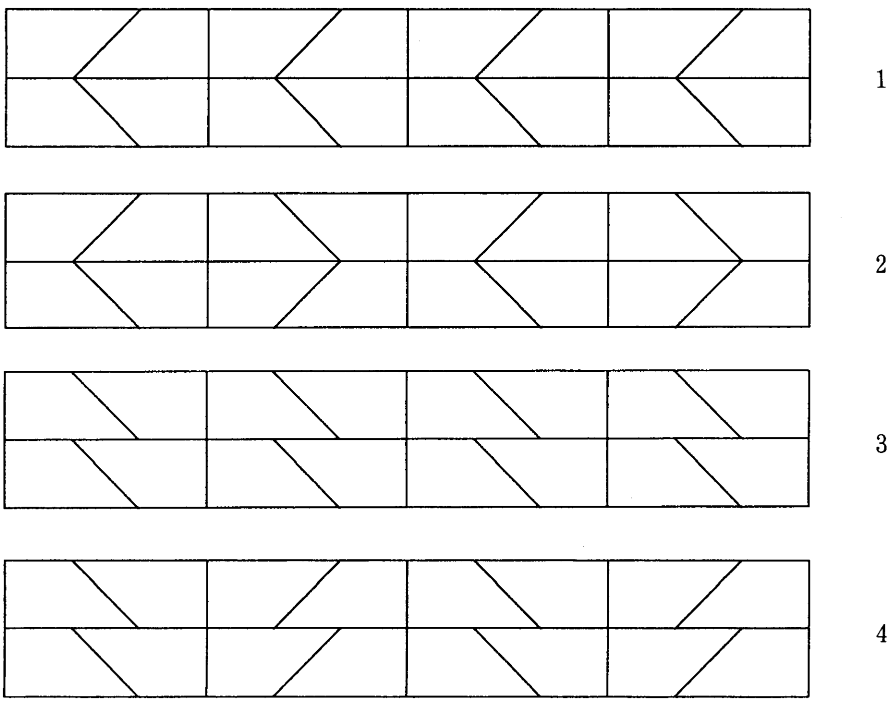


図7　半方Ⅲ図の図形1のパターン

の代わり垂直の辺に関する鏡映がある。90°の回転はないが、180°の回転即ち点対称は幾つかあって、それぞれにそのあり方が異なっている。

これらの図形1を基本図形とするパターンは長方形を基本図形とするパターンIV_2を部分パターンとして持っているが、それぞれのパターンで別の図形を基本図形とするパターンを部分パターンに持っていることが分かり、それがまた対称性の差を表わしていると言えるのである。

図形1を二つ合わせて得られる図形だけを基本図形の候補とするにしても、パターン1では平行四辺形、将棋の駒のような五角形、凹な五角形（図8の左から1、2、3の図）、パターン2では平行四辺形の代りに等脚台形（図8の左から4の図）、パターン3では平行四辺形、パターン4では等脚台形となる。また、パターン3、パターン4では、凹な五角形の代わりに、凸でない六角形が得られている。平行四辺形と等脚台形のとき以外は図7のような2段の帯では分かりにくいかも知れない。その時は3段にしてみるとよく分かると思う。

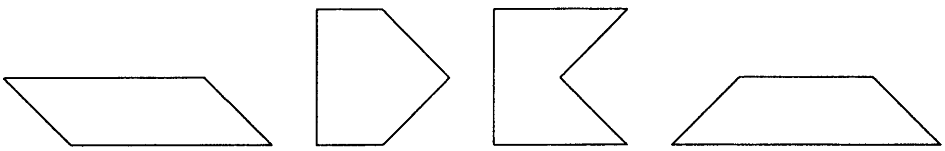


図8：図形1のパターンの2次の部分パターンの基本図形

どの図形のパターンと見ても、長方形のパターンIV_1の方が対称性が多い。図形1だけ見てもまだまだ細かく見ていくことも出来るが、以下のすべての図形に対してここで行うのは煩雑に過ぎる。現場で子供の興味に応じて選んだ図形に対して細かい検討をするのは大いに奨励するものであるが、以下は少なくとも一つのパターンを挙げるに止め、特に興味あるものについては複数示すことにする。

それでは、他の3つの図形を基本図形とするパターンの例を挙げておこう。無限に長い帯さえ出来れば、後は横にずらしていけばパターンが得られるので、帯の作り方だけ分かるように図示してある。

図形2に対しては帯を2段分図示してあるが、下の図9のように2つの帯をきれいに合わせる必要はない。帯をずらしても平面のパターンにはなり得るが、対称性が減る。例えば奇麗に合わせた図9の左の図では十字型に交わっている点があるが、これらの点を通る2本の直線に関して対称だし、これらの点で点対称にもなっているが、帯をずらせばこの対称性は消える。今は一番対称性の高いパターンだけを挙げているに過ぎない。他のパターンを考えてみるのも良いことである。

殆ど遊びになってしまったが、遊びついでに、4つ合わせると合同を除いてどれくらいあるかも考えてみよう。

図10の最初の2つは合わせた図形としては同じ長方形だが、三角形の組み合わせとしては異なるものであり、長方形のパターンIV_1を4次の部分パターンとする半正方形のパターンとしては異なるものである。

他の図形でも正方形を含んでいるものがあるが、その時対角線を逆のものにとれば、得られた図形としては合同だが、組み合わせとしては異なるものが得られることになる。

しかし以下では4つを合わせて得られた図形として合同な図形は同じだと思うことにすると、

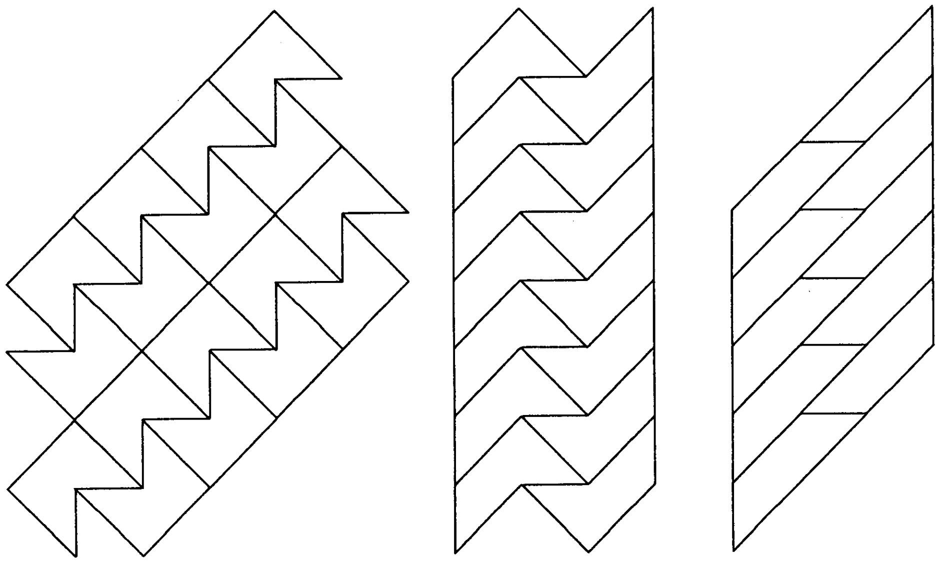


図9：半方Ⅲ図の図形2、3、4のパターン

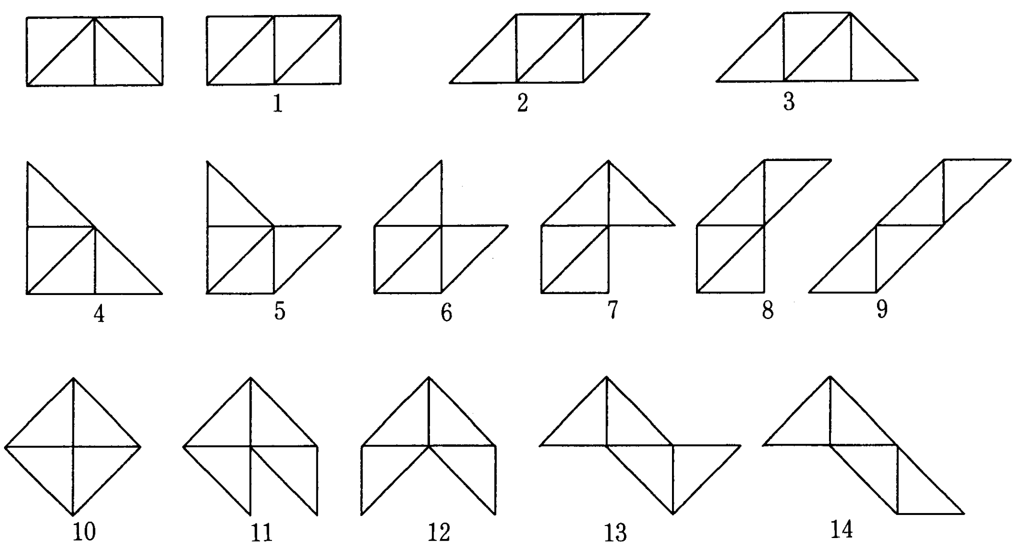


図10：4つの半正方形の組み合わせ図形（半方Ⅳ）

異なるものは14種類ある。これを区別するため、1から14までの番号を振っておこう。

これらの図形もまたあるパターンの基本図形になっている。1つの図形が色々なパターンを作り得るのだが、ここでは典型的なパターンだけ挙げておこう。得られた図形が正方形、長方形、平行四辺形、等脚台形、直角二等辺三角形（半正方形）である図形1，2，3，4，9，10は既に知っているものとして良いし、容易に平行移動で無限に長い帯が作れる図形6，8，12もそれで良いだろう（尖ったところを凹んだ部分にはめていくという感じにする)。残りの

図形5，7，11，13，14についてはパターンが分かる程度に示しておこう。

一般にあるパターンの基本図形であることだけを示すなら、その図形を幾つか組み合わせて既にあるパターンの基本図形になっていることが分かっている図形を得ればいいし、又無限に長い帯が作れれば後は平行移動でずらせばよい。

この原則に当てはめれば、図11の図形から容易に帯が出来ることが分かるので、あるパターンの基本図形になっていることが分かることになる。つまり、図形11と14は2つ合わせて長方形を作り、図形7も2つで3組の対辺が平行で等しい六角形になり、正六角形の標準パターンVI_1[16]を少し歪めたパターンを作ることが出来る。また、図形8はそのまま右にずらしていけば無限の帯が得られるが、それとは別に4つ合わせれば、対辺が平行で等しい六角形が得られる。

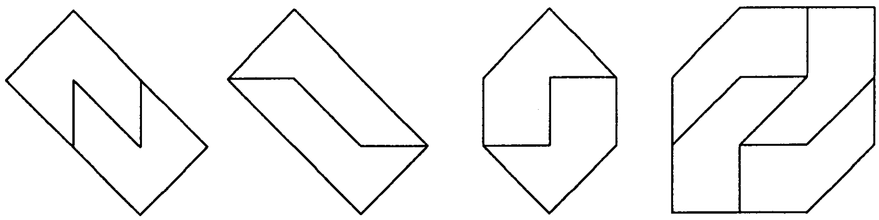


図11：半方Ⅳ図の図形11，14，7，8のパターンの基本図形

図形13に対して、図12を2段だけ見れば刺の出た帯と言うべきもの（波形とも言える）が無限に長く得られることが分かる。帯なら水平方向に引っ掛かるところがなく、縦方向に積むとき好きなように（水平に）ずらすことが出来るが、いまは刺が出ているので、出ているところと引っ込んでいるところを合わせないといけない。自由にずらすわけにはいかないので、更に1段図示しておいたが、これでパターンは分かるだろうと思う。

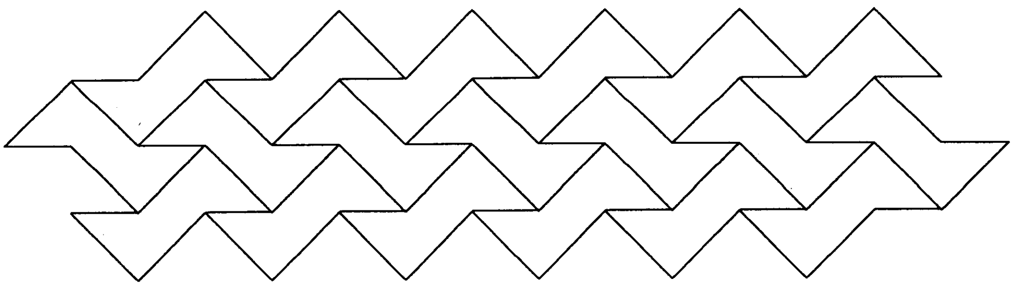


図12：半方Ⅳ図の図形13のパターン

図形5も下の図13のようにすれば無限の帯が得られるが、図形5は線対称な図形ではないのでどうしても鏡映を使わないと平面を埋め尽くすことは出来ない。ここでは行数の都合で、図形5を90°回転したもので描いている。

どうせ鏡映を使うのなら、それを強調して、図形5とその鏡映を合わせると図形13の面積を倍にしたものが得られる。それを使って、図形13の時のパターンを描いて正の方向に45°回転

[16] 良く知られた蜂の巣構造である。平行な対辺を組として、他の組との長さの比を少し変えても同様のパターンが得られることはすぐに分かるだろう。

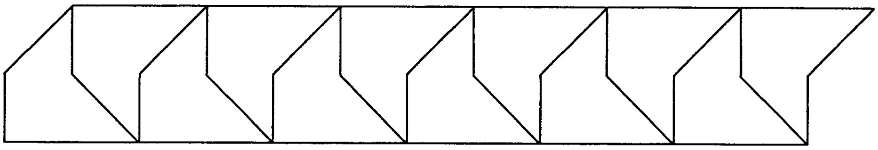


図13：半方Ⅳ図の図形５のパターン１

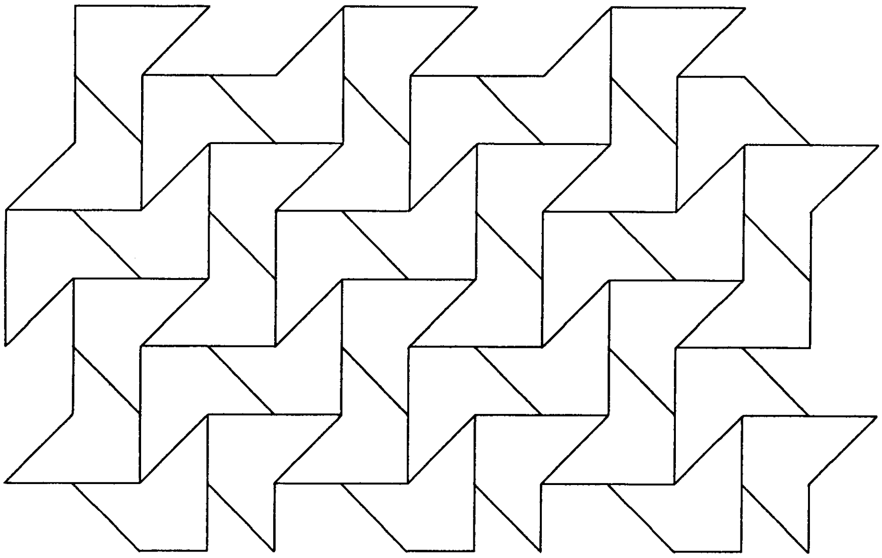


図14：半方Ⅳ図の図形５のパターン２

すれば図14のパターンになる。

このパターンを見ていると、左上から右下への斜めの線が妙に気になる。この方向に２段ずつずらす平行移動でパターンは不変になるようだ。部分パターンの基本図形としては最小のものは４次のもので、それを４つ図15に挙げておこう。面積が最小と言うだけならまだ幾らもある。下の図15の例の前２つの図形には図形13が含まれているが、後ろ２つには図形13は含まれていない。このパターンを得るために図形13を経由する必要はないのだ。

さてこのように、４つ合わせた場合はどの図形もあるパターンの基本図形になったが、５つの時も６つの時も、幾つ合わせたときもそうなるだろうか？時間があれば授業の時でも、又自由研究の時でもやってみれば面白いテーマになるだろう。数え尽くしていく作業と、新しいものを考え付く作業とが別の才能であるのかそれとも関連があるのかを考える良い試験材料になるだろう。

幾つ合わせた図形でも、あるパターンの基本図形になるということが間違っていることを１つだけ例示して、半正方形の場合を終わっておくことにしよう。16個の半正方形で作った図形と、28個で作った図形である。前の図形には１つ、後の図形には２つの穴があいている。これらの図形だけでパターンを作れるかということを考えるとき、あいている穴を埋めるためにこれらの図形を使うことは出来ないのである。

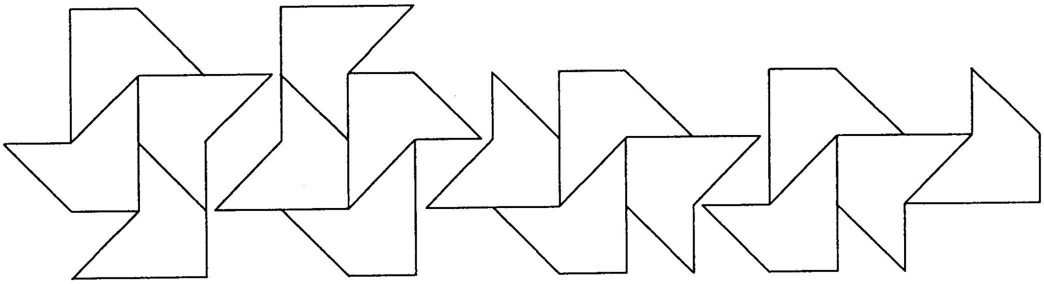


図15：半方Ⅳ図の図形５のパターン２の準基本図形

直観的には明らかだが、疑問の余地なく示せと言われれば、ジョルダンの閉曲線定理を使い、この図形で囲まれた内部（穴）と外部を、この図形自身と交わらずに結ぶことが出来ないと言えばよい。しかし、児童・生徒にはそんなことを言わないでも、穴の面積とこの図形の面積とを数えてみたら納得されるであろうし、それで十分厳密な証明でもある。

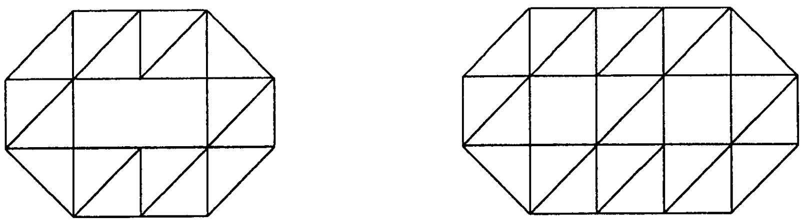


図16：半正方形の組み合わせ図形でパターンの基本図形にならない例

２．２　三角定規で作る対称性Ⅱ（半正三角形の場合）

三角定規にはもう１つ30°，60°，90°の角度を持っているものがある。この定規に対しても直角二等辺三角形と同じことをすることが出来るが、場合の数がかなり多くなる。一辺を水平にして手前に置くだけでも随分置き方が増える。どの辺を選ぶかで３通り、更に垂直な線に関する鏡映によってその倍の６通りである。

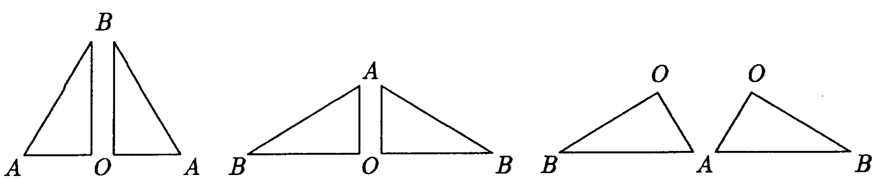


図17：半正三角形の６つの置き方（半三Ⅰ）

長さや面積の値を使いたいこともあるので、$OA=a$としておく。図18の一番左に描いた図形はすべての角度が60°になるので正三角形であり、従って、斜辺は$AB=2OA=2a$であることが分かり、ピタゴラスの定理により残りの辺は$OB=\sqrt{3}a$となる。相似な三角形は辺の比だけで決まるから、考えている三角形は辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の三角形であるということが出来

る。

2つ合わせた図形も、どの辺を選ぶかで3通り、合わせる2つの三角形の向きが同じか否かでその倍の6通りの合同でない図形が得られる。直角二等辺三角形（＝半正方形）の場合は3通りだったが、それは鏡映したものが元のものと回転によって重なったので、違う組み合わせのつもりでも合同になることがあったのである。

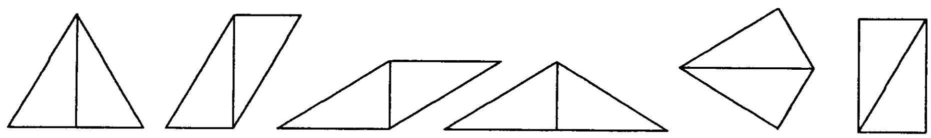


図18：2つの半正三角形の組み合わせ図形（半三Ⅱ）

元の定規の形の三角形は得られないが、正三角形、二等辺三角形、平行四辺形、長方形、西洋凧の形の四角形（これを仮に凧型四角形と呼んでおく）と多様な対称性が得られそうである。勿論これらの図形は多くの対称変換を持つパターンの基本図形になることが出来る。凧型以外は既に知っているので良いと思うが、凧型については少し思い付きにくいかも知れないので、図示しておこう（図19）[17]。

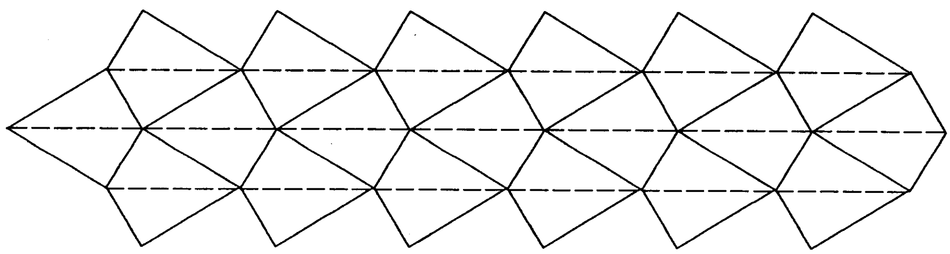


図19：凧型四角形のパターン

さて、半正三角形を3つ合わせるとどうなるかも考えると、図20の図形が得られる。取り敢えずの番号を付けておこう。

ちょっと見ただけでは気付き難いが、実は図形1と2は合同である。正三角形は半正三角形2つ合わせたものとして得られるが、その合わせ方はそれ自体としてはどう取ってもよいのだが、更に三角形を付けていくとなると全く違った感じを与える。出来上がった図形の中に正三角形が含まれていれば、その正三角形のどの頂点から垂線を下ろすかについて3通りの仕方がある。その選び方による感覚の違いが、この気付き難さに現れているのである。図形1を垂線に関して鏡映を取り、正三角形を半正三角形に分ける線の頂点を右下の点に代え、左下の頂点の周りに120°回転させると、図形2が得られる（図21）。

[17] 勿論凧型と言えど四角形だから、前節で述べたように、一辺の中点に関する180°回転を次々と施せばパターンが得られるが、実は図19はそうなっている。図19を筆者が思い付いたときは、ともかく帯を作ってみようという方針でやったのだが。

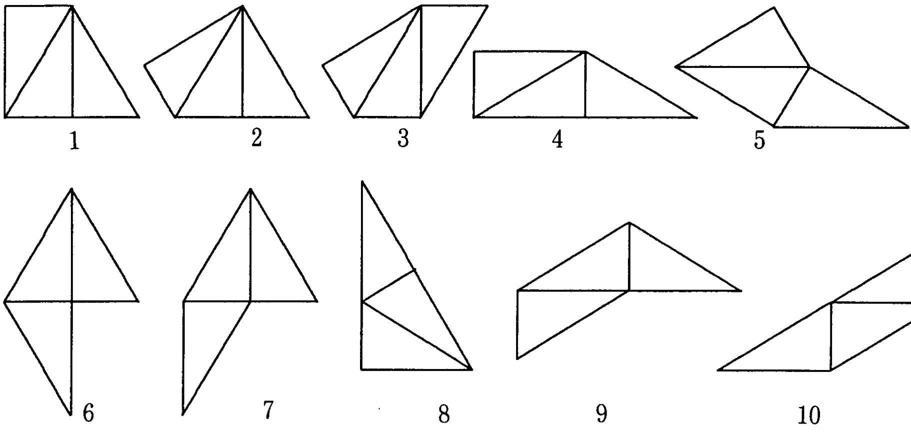


図20：３つの半正三角形の組み合わせ図形（半三Ⅲ）

図形４も角度が違うだけで図形１と同じ状態にみえるだろうが、それでは図形４で平たい三角形の左上に乗っている半正三角形をその向きを代えて乗せたものが図形４自身と合同になるだろうか。実はそうして得られたものは図形４と合同ではなく図形８に、即ち面積が３倍の半正三角形になるのである。こうして半正三角形を３つ組み合わせて得られる図形は合同を除いて９通りである。

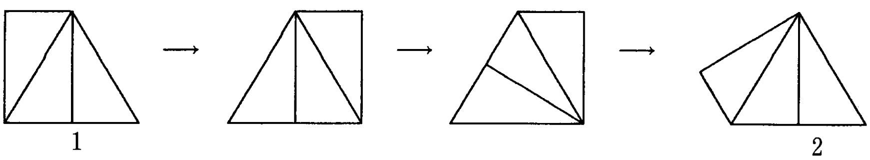


図21：半三Ⅲ図の図形１と図形２は組み合わせ図形としては同じ

さて、これら半三 III 図の図形は、直角二等辺三角形の場合と同様、あるパターンの基本図形になるだろうか。図形１、８のときは２つ合わせると辺の長さが $3a$, $\sqrt{3}a$の長方形になるし、図形４のときは辺の長さがa, $3\sqrt{3}a$の長方形になる。また図形10のときは辺の長さが $6a$, $\sqrt{3}a$の平行四辺形になる。図形６、７、９のときは、直角二等辺三角形の場合と同じ様な仕方で、無限に長い帯を作ればよい。

少し詳しく見ていこう。図形１は２つ合わせると長方形になり（図22左図）、後はパターン IV_1にすれば良いのだが、図22中図のように等脚台形にも出来る。更に底辺の中点に関して鏡映を取ったものと合わせれば対辺が平行で等しい六角形になって、パターン VI_2を少し変形したものを作ることが出来る。

図形10も２つ合わせて平行四辺形を作り、パターン IV_2と同様にやればよい。３つの半正三角形を合わせたものの最初の図形の場合（図20の図形１、２の場合）と同じような問題はあるが、そのうちの２つ目のパターンは次のようにも解釈できる。図22右図は図形10を２つ合わせたものだが、この六角形を基本図形としたパターン VI_1を作ってやると図形10を基本図形とするパターンとしては同じものになる。

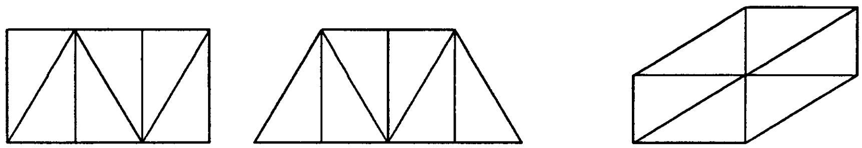


図22：半三Ⅲ図の図形１のパターンの２次の部分パターンの基本図形

また図形１の底辺の中点に関して180°回転して出来る六角形は図22右図と同じものになって、作られるパターンを元の半正三角形のパターンと見れば同じものが得られることになる。

図形６、７、９については直角二等辺三角形の場合と全く同じ様に示せるので、平行移動だけで埋め尽くせるような基本図形の候補を図示しておくだけにしよう（図23)。

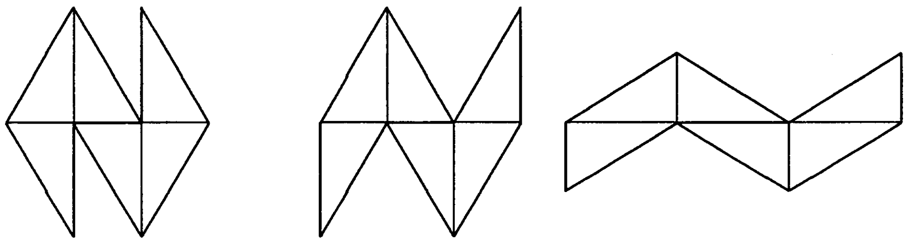


図23：半三Ⅲ図の図形６，７，９のパターンの基本図形

さて図形３と５が残っているが、まず図形３について考えてみよう。これも下の図24の左の２つの組み合わせなら、右上方向にずらしていけば無限に長い帯が得られることが分かる。右端の組み合わせで得られた六角形もパターンVI_1と同様なパターンの基本図形になるが、その

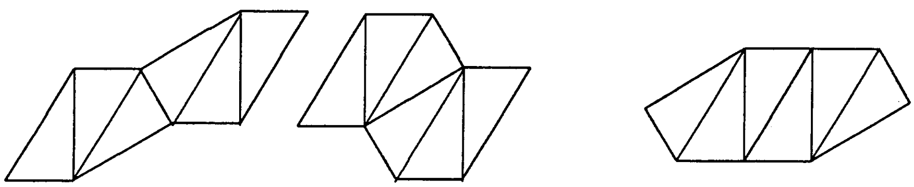


図24：半三Ⅲ図の図形３のパターンの基本図形

パターンは図形３を基本図形とするパターンとしては、上の帯から得られるものと同じである。

図形５については、図形５を２つと図形５の鏡映したもの２つを合わせた下の図形を基本図形として（図25)、平行移動だけでパターンを作ることが出来る。

この図を見ても右上の方向への平行移動ではきちんと納まっていくことが分かっても、もう１つの方向（どの方向？）へ平行移動して納まっていくかどうか心配な人もいるだろう。そこで、この図形を右上と右下へずらして合わせたパターンを図示しておく（図26)。これなら平面全体のパターンが得られ、対称変換の平行移動の群もどうなるか分かるだろうと思う。

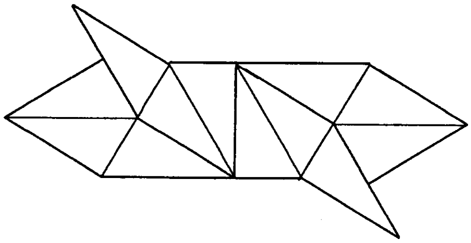


図25：半三Ⅲ図の図形５のパターンの基本図形

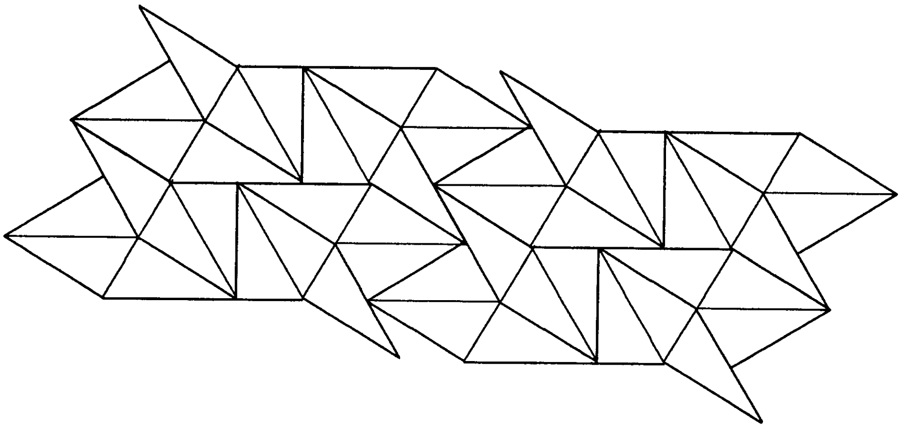


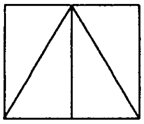
図26：半三Ⅲ図の図形５のパターン

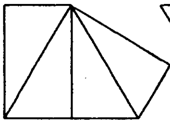
半正三角形を４つ合わせた図形は非常に沢山出来る。合同なものを数えないようにしても以下のもの（図27）が見つかる。

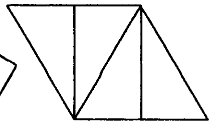
このリストを見て、これから全平面を埋め尽くすパターンを作れるかどうかを調べるのを考えると、もうウンザリしてきた読者も多いだろう。筆者自身も充分にウンザリしている。４つ合わせて出来るあらゆる図形を考え、そのうちどれが互いに合同でないかを調べ、出来るだけ狭い範囲に印刷できるように図形をひっくり返したり回したり、更にウンザリするのはこうして得られたリストの番号の付け方に系統だったところがないとか、重なったり足らないとかの非難を受けるのではないかと思うことである。

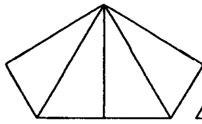
少し考えて欲しい。２つ合わせた図形は全部で６つの“四角形”であった（$4 = 3 + 3 - 2$）。三角形もあるじゃないかという人もいるだろうが、それは２つの辺が直角でつながっている訳で、３つ目の半正三角形をくっつけるときにはその２つの辺の各々にくっつけることが許されているので、場合の数を考えるときには四角形と思ったほうが良い。このとき作業は、元の半正三角形の辺を一つ選び、その辺にくっつくことの出来る半正三角形の辺は一つだが裏返したものをくっつけると出来た図形が異なる可能性があるので、可能性が$1 \times 3 \times 2 = 6$通りあり、更に実際その６通りが互いに合同でなかったということであった。３つ合わせるときは、このリストの６つの“四角形”の各辺に対して同じことを考えると、可能性は$6 \times 4 \times 2 = 48$通りである。そして合同なものを除くと９通りの“五角形”が得られていた（$5 = 4 + 3 - 2$）。

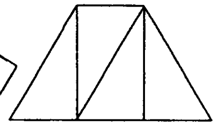
それでは４つ合わせるときは$9 \times 5 \times 2 = 90$通りの可能性を調べればよいだろうか。実はそうはいかない。３つ合わせるときのリストで、図形１と２は合同であったが、上の注意によって更に一つくっつける時は違うものだと思わないといけない。４つの時のリストの最初の行の

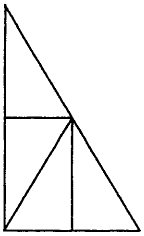

1

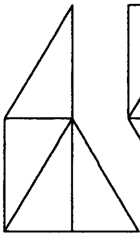

2

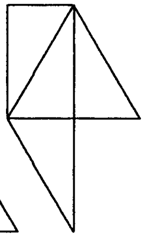

3

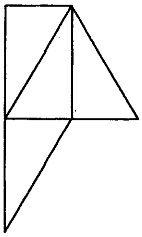

4

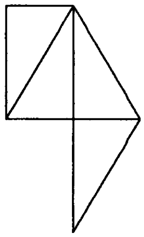

5

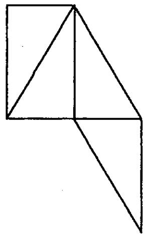

6

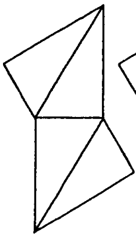

7

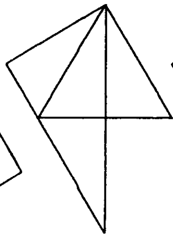

8

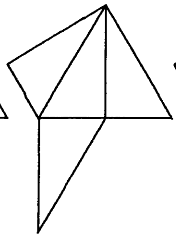

9

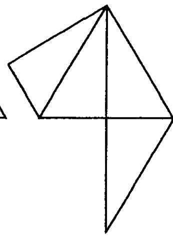

10

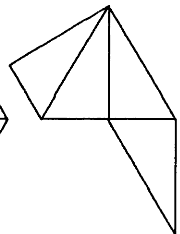

11

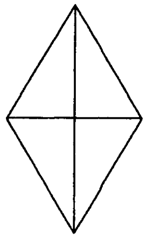

12

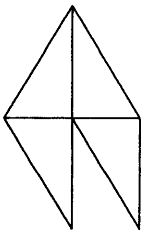

13

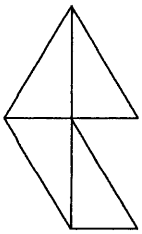

14

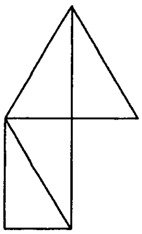

15

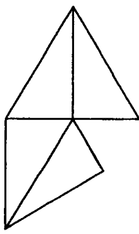

16

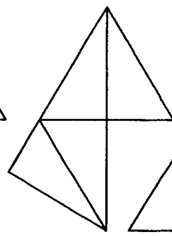

3

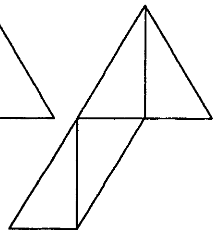

18

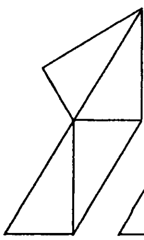

19

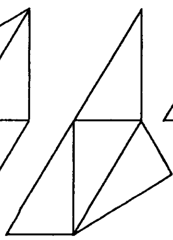

20

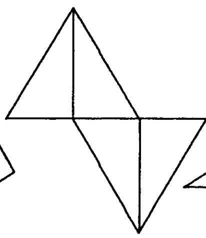

21

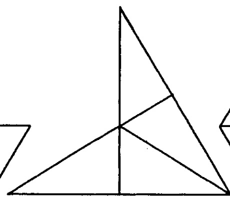

22

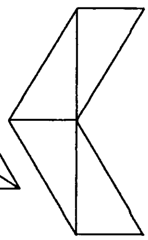

23

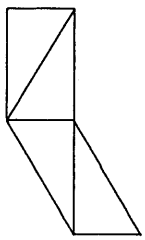

24

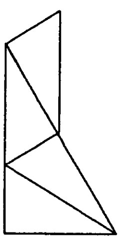

25

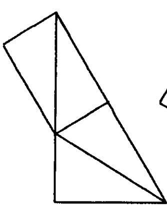

26

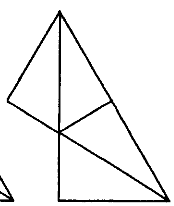

27

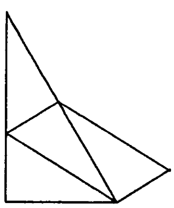

28

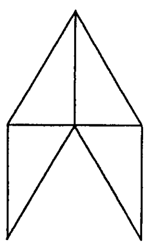

29


30


31


32


33


34

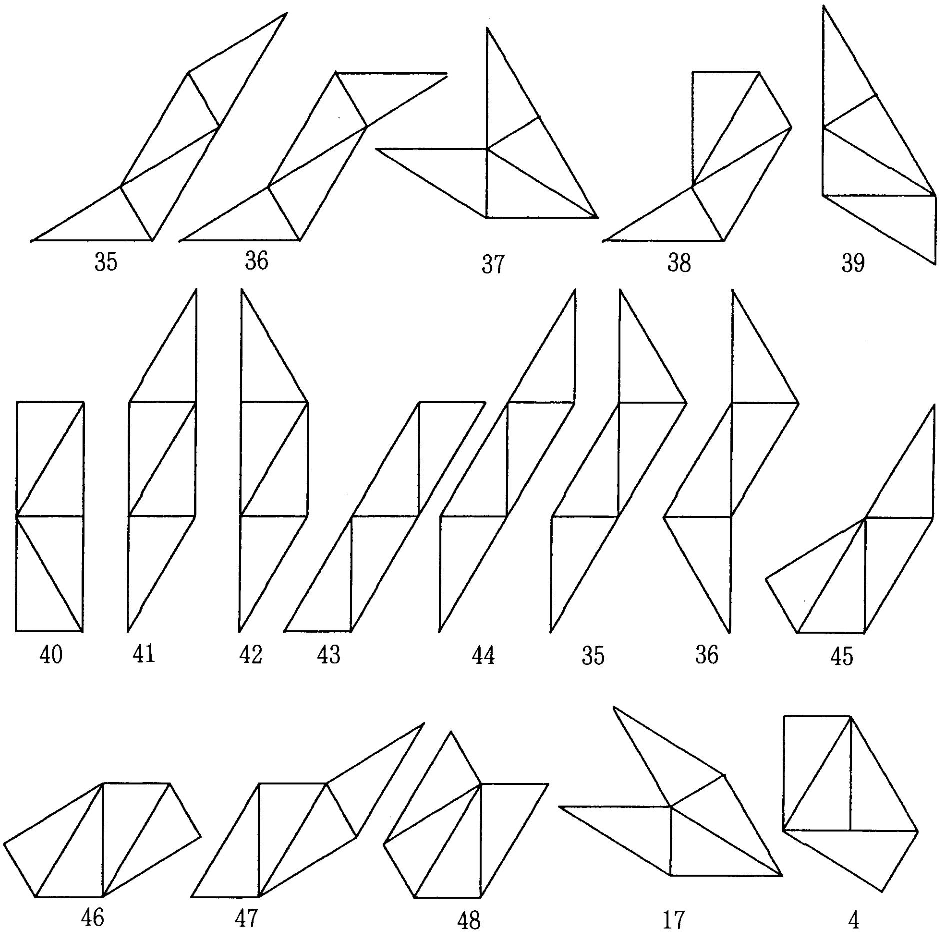


図27：四つの半正三角形の組み合わせ図形（半三Ⅳ）

図形４は３つの時の図形２の右肩に半正三角形をくっつけたものだが、最後の行にある図形４は３つの時の図形１の下にくっつけたものになっている。３つの時の図形１の下にこのように付けることが出来るのは、図形１だけ見ていたら気付かないこともある。したがってくっつける元の図形の一部が、一つの正三角形の２辺が外から付けられる状態にあるときは、正三角形の区切り方を変えたものも次の段階の候補を考える時には必要なのである。したがって、可能性はざっと（９＋１）×５×２＝100通りである。

それをすべて書き上げて、互いに合同でないものを外していき、綺麗に見える形を探すのである。回したり、ひっくり返したり、時には線の入れ方を変えたり、それはもう大変で、筆者も充分にウンザリしている。

図形35と36は７行目と８行目に２回描かれている。それぞれ向き付けが反対で置かれ方が違うので、随分と印象が違うのではないかと思う。見本として描いておいた。また図形３も１行目と３行目に２回描いてある。正三角形の区切り方の違いが印象の大きな違いになる例として描いてある。

又一般論的には５＋３－２＝６角形になるはずで、確かにリストを見てもそうなっているようだ。四角形や五角形になるときでも辺の上には合わさって内角の和が180°になっている頂

点が乗っていることになる。しかし最後の行の図形4では、その様な頂点は図形内部に取り込まれてしまっていて外の辺の上には無い。この場合は最初の行の図形4のように線を入れ直せば、“六角形”になっていると言える。

しかし、3行目の図形3はどうだろうか。どう見ても立派な四角形で、余分な頂点を自然に考えることなど出来そうにない。では何故四角形になったのだろうか。一般に辺と辺を合わせる際には、その合わせる2つの辺が図形内部に吸収されるので $m + n - 2$ という計算をすることになるのだが、またしても偶然にだが、一組の辺を合わせるとき同時に他の辺も合ってしまうということが起こり得たのであった。したがって今の場合 $5 + 3 - 2 \times 2 = 4$ という計算になるのである。勿論、正三角形の区切り方を変えれば、1行目の図形3のように六角形と思うことも出来る。

ウンザリはしているが、しかし楽しくもあった。楽しさを感じないでは、これだけ面倒なことをやり抜くことは難しい。翻って考えてみれば、数学の学習や研究にはこうしたことが不可避である。

“ウンザリしたが楽しかった。楽しかったがウンザリである。”

状況として似ているようにみえるが、教育の効果としては雲泥の差がある。一見如何に楽しそうにみえる授業であっても、多くの児童・生徒に厭かれるようではいけないし、煩雑で面倒くさそうなことでも児童・生徒が楽しんでやるようなら外部の非難を気にする必要はない。しかし、性格も能力も様々な児童・生徒すべてが同時に楽しいと感じられるように授業を行うことは現実には至難の業であろう。

それでも敢えて言いたい。教育とは本来、教育を受ける者が教育期間を過ぎた後に直面する困難を、教師の助けのない状況で、克服する能力を養うことである。だからこそ、教師の助けを受けられる状況では、自分の力で自分の能力以上の障壁を乗り越える経験を積ませる必要があるのだ。

そうした障壁が児童・生徒が社会に出て実際的具体的に出会う障壁である必要はない。不必要なばかりでなく無意味だったり不適切なことさえある。その理由を議論しはじめると、初等教育で教えるべき内容はどうあるべきか、またなぜ算数・数学を教えるのかという深く且つ異論の百出する問題に踏み込むことになるので、この点は稿を改めて行うことにしたい。ただ問題には、児童・生徒の側からと教える側からとの二面性があることにだけを注意しておくことにする。

さてウンザリしたから、というよりこれ以上同じことをしても読者をウンザリさせるばかりだから、4つ合わせて得られたこれら48種類の図形が、平面を埋め尽くすパターンの基本図形になるかどうかという問題を議論するのは止めておこう。熱心な読者がどうしても知りたいという要望を筆者に伝えてくるようなことが起きれば、その時にはまた考えることにしよう。

ところで100の可能な図形がこの48の図形のどれかに合同であるのは実際に合同であることを確かめれば済むことだが、48の図形が互いに合同でないことは見ているだけでは心配になってくるだろう。それではどうしたらそれを確かめられるだろうか。色々な方法が考えられるだろうし、児童・生徒に考えさせてみれば面白い提案が出てくるかも知れない。実際に実験授業をしてみると面白いだろう。

ここでは紙数の都合もあるし、面白くはないかもしれないが一つの解答を与えておこう。現代数学の言葉遣いで言えば、これらの図形を特徴付ける不変量を得ればよい。といって余り不

変量の次元を大きくしたのでは煩雑になる。何事も程々がよい。

問題にしている図形は一般に六角形であり、合同であれば、何が変わらないだろうかと考えてみる。辺の長さや角の大きさ、更にはそれらの繋がり具合は変わらないだろう。今は半正三角形4つ合わせたのだから面積が $2\sqrt{3}a^2$ と決まっている。従って相似であれば合同である。

三角形の時のことを考えれば角度さえ合えば相似になる。そこで、出来た図形が何角形であるか、内角をすべて（何角形でもすべて“六角形”であると考えれば6つの内角）、最後に印としての図形番号があれば図形を区別できるだろうと考えることにして、次の表を作った。

表の読み方を説明しておこう。表の各項（$N;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N:n$）の N は N 角形になったということであり、n は図形番号である。次の6つの角度の並べ方は唯単に大きい順番に並べるのでは、合同でなくても角度の並びが同じになるものが沢山あることがすぐに分かる。そこで一番大きな角度のものを一番目に置く。後は辺に沿って（図形の上で）並んでいる順に書く（θ_1とする）。裏返すこともあるので、回っていく2通りの方向のうちどちらかを選ばないといけない。方向によって、次に来る角度の候補が2つあるが、大きいほうの方向を選ぶことにする。2つ目がどちらも同じになることもあるので、その時は3つ目も比較して大きくなる方向を選んだ。これで角度を並べる方向は決まる。

(3;90, 60, 30:6)	(4;90, 90, 90, 90:1)	(4;90, 90, 90, 90:40)
(4;120, 60, 120, 60:3)	(4;120, 60, 120, 60:43)	(4;120, 120, 60, 60:5)
(4;150, 30, 150, 30:41)	(4;150, 30, 150, 30:44)	(4;150, 60, 120, 30:39)
(4;150, 150, 30, 30:42)	(4;240, 30, 60, 30:27)	(5;120, 90, 120, 90, 120:4)
(5;150, 90, 120, 90, 90:2)	(5;210, 60, 90, 150, 30:7)	(5;210, 60, 120, 90, 60:30)
(5;210, 60, 150, 90, 30:33)	(5;210, 90, 90, 60, 90:31)	(5;210, 90, 150, 60, 30:25)
(5;240, 90, 60, 60, 90:32)	(5;270, 30, 150, 60, 30:37)	(5;270, 60, 90, 90, 30:13)
(5;270, 60, 90, 60, 60:22)	(6;120, 120, 90, 120, 120, 60:46)	(6;210, 90, 60, 210, 90, 60:12)
(6;210, 90, 90, 150, 120, 60:29)	(6;210, 90, 120, 120, 150, 30:45)	(6;210, 120, 30, 210, 120, 30:36)
(6;210, 120, 60, 150, 150, 30:47)	(6;210, 150, 30, 180, 120, 30:35)	(6;240, 60, 60, 210, 60, 60:26)
(6;240, 60, 90, 90, 210, 30:14)	(6;240, 60, 120, 90, 180, 30:9)	(6;240, 60, 120, 120, 120, 60:28)
(6;240, 60, 120, 120, 120, 60:48)	(6;240, 90, 60, 150, 120, 60:24)	(6;240, 90, 90, 120, 150, 30:11)
(6;240, 90, 120, 120, 120, 30:38)	(6;240, 120, 60, 180, 60, 60:23)	(6;240, 120, 90, 90, 150, 30:16)
(6;270, 60, 120, 90, 150, 30:8)	(6;270, 90, 90, 120, 120, 30:10)	(6;270, 90, 90, 150, 60, 60:20)
(6;270, 120, 90, 90, 120, 30:15)	(6;300, 30, 150, 60, 150, 30:34)	(6;300, 30, 150, 60, 150, 30:17)
(6;300, 60, 120, 120, 60, 60:19)	(6;300, 90, 60, 150, 60, 60:21)	(6;330, 30, 150, 60, 120, 30:18)

辞書式順序に並んでいるので順に2つずつ比べていけば良い。これが違えば相似でなく、したがって合同でもない。順に見ていくと図形番号で1と40、3と43、41と44、28と48、17と34の5組以外は互いに異なっており、従って相似ではない。そしてこの5組も図形を見れば合同でないことはすぐに分かる。それで48種類の図形はすべて互いに合同でないと結論付けてもよいのだが、せっかく表を書いたのだからもう少しこの線に沿って議論してみよう。

順序を込めて内角が等しくても相似でないことが四角形以上では起こるのだということである。三角形の時の相似条件に内角が等しいことという条件があったが、これが成り立つのは三

角形に特有なことなのだ。相似の定義そのものには辺の比が一定であることがあったので、辺の長さを見てみよう。図形1と40の場合、最大の角90°を挟む辺の長さは（$2a, \sqrt{3}a$）と（$a, 2\sqrt{3}a$）であり、合同にはなれない。他の組み合わせの時も、例えば図形3と43では（$2a, 2a$）と（$a, 4a$）であり、図形41と44では（$2a, 2\sqrt{3}a$）と（$\sqrt{3}a, 4a$）であるなどして互いに合同でないことが分かる。

この48種類の図形を区別する不変量には、上の表の角度だけでなく、最大の角を挟む線分の長さ[18]を取れば良かったということになる。

さて三角定規という身近な教材を用いてこれまでやって来たことは、非常に単純な図形、いまは半正方形と半正三角形からほんの少し組み合わせてやるだけで多様な対称性を持つ多様な図形が得られるということを示すということであった。

これまでに挙げた図形だけでも、更に色々な問題を考えることが出来る。

「5つ以上くっつけたらどうなるか。」

「パターンを考えるとき、元の図形を裏返してはいけないことにするとどうなるか。」

また、三角定規は半正方形の斜辺と半正三角形の直角を挟む辺のうち長い方の辺とは長さが等しく作られているので、この辺をくっつけて良いことにしたらどうなるか。一つずつくっつけたものは一通りしかなく一般の四角形としてのパターンが作れる。m 個の半正方形と n 個の半正三角形で出来る図形の合同類を決めたり、その各々がパターンを作れるかなどの問題はかなり難しいが、やり方次第では面白いかも知れない。ここで行なったのは、$(m, n) = (2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(0, 4)$ の場合で、合同類の数はそれぞれ3, 4, 14, 6, 9, 48であり、$(0, 4)$ 以外の場合にパターンを作ることであった。[19]

また幾つかくっつけて出来た図形の中に元の定規の三角形と相似なものが得られることがある。半正方形の場合は、面積が2倍のもの、4倍のもの、8倍のものなどがあるし、半正三角形の場合は3倍のもの、4倍のものなどがある。これから発展して、くっつけて出来る図形の中には面積が何倍の三角形があるのか、またあり得るのかという問題も考えられる。例えば半正方形の時に3倍の図形が得られないということが、$\sqrt{3}$ が無理数であることに関係しているのだが、あからさまにピタゴラスの定理を述べ無理数を導入しなくても、自然に有理数以外の数の存在に導くことも出来るかも知れないし、少なくとも存在を感じさせることは出来るかも知れない。

問題を次々に考えることが出来ること、更に児童・生徒に問題自体を考えさせ、自分達の問題を自分達で解くという作業を行うことが出来るというのが、敢えて三角定規の教材としての

---

[18] 今の場合はこの長さの比があれば良い。くっつける定規の数が増えていけば、この比だけではなくより多くの辺の比をとる必要があることになり、安全のためには角が廻っていく順にある辺のすべての比を採っておいた方がいいかもしれない。

[19] （added in proof）投稿後、m、nの混合型の場合も少しやってみた。$(m, n) = (1, 1)$ の場合の合同類の数が1であることは明らかだが、$(m, n) = (2, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$ の場合は、それぞれ4、4、14、24、15の数の合同類が得られる。5個の場合も $(m, n) = (5, 0)$ の場合が30であるのはそんなものだろうと思う。5個の半正三角形の $(m, n) = (0, 5)$ の場合は169を数え、この数になると何度チェックしても少し心配なのだが、試みる人への目安のために挙げておいた。

図形につけた番号は便宜的なもので、調べていく手順によって変わってしまう。数の少ないうちはそれでも良いが、169個もあるとやはり図形に一定の番号を付けておいた方が良いように思えてきた。この議論に参加するすべての人にとって同じ番号が使えた方が良い。その意味では、それまでのすべての図形のリストの番号も並べ直した番号を付けなおした方が良いだろう。

価値を見直す提案をする理由の一つである。

3　終りに

三角定規で作った図形のそれぞれに対して、色々なパターンを作り、その対称性の群を計算し、それらの図形の個性を調べるのも楽しい作業である。見た目が大きく異なる図形の対称性の群が同じであったり、僅かの違いの図形と思っても対称性の群が著しく異なることもある。

紙数の制限がなければ沢山のパターンを載せたかったのだが。この論説の中のパターンや論文［1］の中のパターンのコピーをじっと眺めながら、思い付いたことを語り合わせる授業もやり方によっては面白いものになるだろう。

参考文献

［1］蟹江幸博「幾何学的直観と対称性」プレプリント

［2］蟹江幸博・奥招「児童・生徒の直観的能力に関する研究（I）－直観的能力は指導によって向上するか、その可能性について－」三重大学教育学部研究紀要（教育科学）44（1992），17－49.

［3］ヘルマン・ワイル「シンメトリー　美と生命の文法」（遠山啓訳）紀伊國屋書店（1957／Dec.）
Symmetry, Princeton University Press by Hermann Weyl（1952）