三重大学教育学部研究紀要　第53巻　教育科学　(2002)　73 − 83 頁

力学グラフと戦略ゲーム
— 臨床数学教育における教材の役割 —

盤 江 幸 博*

Dynamical Graphs and Strategy Games
−Roles of Materials in Clinical Mathematics Education−

Yukihiro KANIE

はじめに

前巻の論文［5］で、臨床数学教育と称すべき教育のあり方を提唱した。数学教育ばかりでなく、教育の色々な意味や様相での荒廃が叫ばれている。荒廃した学校現場では根本的な対応よりもむしろ対症療法的な対応がとられており、教科の問題よりも児童・生徒の心の問題を重要視する傾向にある。それに臨床教育の名を与えてもいる。確かにそれは緊急の課題であり、現代社会のあり方と子供の世界が無縁でないことの反映であるという点からも大切な観点ではある。

しかし、初等教育であっても、学校は、知識や技術、世界観を伝える場であるべきであり、単に大人の社会と隔離するために存在するわけではない。だとすれば、少なくとも公教育としての問題を論ずるかぎり、単に一般的に心の問題を言挙げするのではなく、教科の教育内容についてこそ、臨床としての教育の在り方を考えるべきだろう。そして数学をテーマとしてそれを行うことを、臨床数学教育と呼ぶことにしようということであった。

またそれに対して有効な教材の候補として、数の構造を反映した一連のゲームを利用することを提案し、それらを数の構造ゲームと総称したのだった。

§ 1. 臨床数学教育の特徴と意義

臨床数学教育を論ずるのは、その意味合いからも、単に教育を論ずればよいわけではない。個々の症例に応じた処方箋を、具体的に示す必要がある。教材はいわば薬でありそれも重要であるが、臨床的には服用法も同じように重要であると言える。本稿は、作業療法としての教材の取り扱い方についての注意を明示することを目的としている。

教材化例としてはまず［6］で、被約約数和の場合の力学グラフを論じた。今巻の自然科学の号の論文［7］では、力学グラフの数学的な概説を述べ、その具体例である反転差グラフについて論じた。教材化と言うよりも、教材の素材としての数学的内容の整理という意味合いが強い。個々の例においてそのような作業は不可欠だが、その作業はいわば薬の成分や効能の基礎研究であり、服用法についての議論は、服用例、症例などとともに、個々の児童生徒に直接働き掛け得るものとして、ゆったりとした形で提示すべきであると考えている。形態としては、臨床的に算数・数学に対する嫌悪感が克服され、自発的にその世界での作業ができるようになっていくという物語の形もあるだろうし、実際に自分で行いたいと考えた児童・生徒にとっての補助となるようなワークブックとかドリルのようなものも必要だろうし、分かり易い理論的な著述も必要となるだろう。しかし、個人の力には限りがあり、一度にすべての作業を行うことはできない。差し当たり、数の構造ゲームの中でも有望だと思われる力学グラフの一般的な理論をまとめ、初等教育での利用が可能な計算例（描画例）を枚挙してみているが、かなり大部な論文［8］になりそうである。

＊　三重大学教育学部数学

したがって、[5] で挙げたその他の教材例のすべてについて詳細な議論を行うことはまだ幾許かの時が必要である。これらの教材は一言で言えば、(自然) 数の理論 (構造、操作) の視覚化ということである。自然数はすべての数学の基礎であり、その教育法もこの数千年の間考案され、開発され、深められてきた。視覚化という作業は、たとえば計算技術を高めるためのものではない。数の四則計算について言うなら、基本的に、反復練習しか技術を高める方法はない。しかし、多くの学習者にとって、反復練習は辛く退屈なものに思える。視覚化を経由することで、その反復練習に付加価値を与え、描画を目的とする補助手段として (単純な) 計算の繰り返しを要求することで、計算の反復練習に動機づけを与えるものである。

その効果を臨床的に算数・数学への嫌悪感や疎外感を取り除くことに利用しようというのである。したがって、そこにまた、要らざる評価を与えることは、開き掛けるかも知れない心を再び閉ざすことになりかねない。

臨床数学教育で取り上げる素材を、通常のカリキュラムを効果的にこなしてくための補助手段としては使わないで欲しい。あくまで、児童生徒の心の中を耕すことにだけ使って欲しい。そのために最適な教材は何か、それをどのように使えば有効か、それを考えていこうというのが、臨床数学教育なのである。

算数の教材として数と並んで重要なものに、図形に関するものがある。ユークリッドの教本のほんの触りを軽く述べているだけのように見え、算数で扱う図形教材にはあまりはっきりした意義が捕らえにくいというきらいがある。論理的思考の例示としてのユークリッド幾何の役割は、古来からそれこそが幾何の学習の意義であるとみなされて来て、その意味では小学校で学ぶ部分は単なる入門というか予備的な接触という意味合いでしか考えられていないようである。確かに厳密に述べようとすれば、小学生の抽象性の把握能力では困難であるが、幾何を学ぶ目的は単に論理運用の例示なばかりではない。それについては次節で述べるが、ここでは以前行った考察 [9]、[10]、[11] が臨床数学教育的な図形教材の開発という意味合いを持っていたことを注意しておこう。そこでは大上段に理論や論理を振り回すのではなく、児童・生徒に馴染みのある概念や道具 (そこでは三角定規) を用いて、具体的な図形を作り組み合わせていくことによって、対称性についての深い考察が可能であることを具体的に指摘したものであった。

教材そのものの開発は重要である。しかし、臨床数学教育の理念に基づいたそれら教材の活用法についても、有効な方法や望ましくない利用法について若干の注意を述べておく必要があるだろう。本稿では、その点に留意しながら、[5] で挙げたもの以外の教材化可能な題材についても、それらの意味づけと相互の関連性を考えてみることにする。

通常のカリキュラムに対する教材化と臨床数学教育的な教材化との違いは、教材そのものよりも、教材に対する態度・姿勢にあると言える。その意味で、臨床数学教育のために開発した教材を通常のカリキュラムの中に組み込み、あまつさえそれを何らの意味においても評価の基準として用いようとすることは許されるべきではない。

通常のカリキュラムが間違っているわけではない。算数・数学教育が円滑に行われ、児童・生徒の知識、技術、認識力、企画力、決断力、好奇心などを豊かにしていっているのならばそれでもよい。しかし、現在は、少なくとも大学に入学してくる学生の能力や意欲から推測すれば、まさに荒廃した状況にあり、そうではないと強弁することはできない。

荒廃という多分に感覚的な表現も、単なる個人的な感想というものではなく、筆者が以前に行った実態調査 [2]、[3] でも明らかである。最近は多くの人が意識するようになり、はっきりとした調査ができる大学生の場合にセンセーショナルな報告 [1] によって、広く知られるようになっている。さらにそのことは初等教育、特に算数・数学教育の内容の劣化によって引き起こされていることの認識も進み、たとえば [14] のような報告もあるし、算数教育の現況を危惧する [13] のような緊急性を訴えたものも出版されている。

ここで荒廃という言葉を使うのは安易であるかも知れない。世の中で荒廃という言葉が使われるとき、むしろ「徳」の荒廃であるというニュアンスが大きいが、ここで意味しているのは「知」の荒廃である。統計的に見るとむしろ徳の荒廃が起こっているわけではないという指摘が [14] の第I部にある。従来のカリキュラムでも、児童・生徒の自学・自習の、いわゆる勉強の時間が少なくなっていることが、最も重要な指標であることを例示している。

よく量から質への転換ということが言われるが、

転換するに足るだけの量が積み重なっていないということだろう。

せめて、数回前程度の指導要領の内容に戻せないかと、多くの関係者は考えている。そして、そうするだけで、ほとんどの問題は解決するように考えている人も多い。筆者もそう考えてはいる。しかし、そういう力学は働かないだろう。問題は既に教育や教育制度の問題ではなく、政治の問題に、戦後の官僚制度の在り方の問題に深く関っていて、正しいことを正しいという議論が通用しなくなっている。さらには、教育現場の最低限の支えになり得る、各県に置かれた国立の教育大学ないし教育系学部の存続すら問題視されているような政策を、中央省庁は取っている。

そのような社会環境の中で、ただただ「勉強せよ」と鼓吹しても、児童・生徒に対する影響力はなく、勉強時間が増えるわけもない。

もはや、通常のカリキュラムを円滑に運営する理想の数学教育を論じるような時期ではない。文部（科学）省から、県の教育委員会、学校長、教師といったヒエラルキーに、この状況を改善することを期待することはできない。すでについている大きな（負の）慣性を押し戻す力は何にもないだろう。

押し戻すことはできなくとも、逸らすことはできないだろうか。押し寄せる濁流にも、流れに曲率を与えれば、特異点が、つまり澱(よど)みが生まれることがある。いわば、澱みに浮かぶ泡沫(うたかた)に、ある意味で「真の」算数・数学教育を残しておくことはできないか。そして、少しでも広く、その思い、考え方、指導方法を伝えられないか。

臨床数学教育は、そのための旗印として役に立つと期待している。算数・数学を学ぶことを、というより、数や図形について学ぶことを喜びに感じる子どもたちを一人でも多く育てたい。

臨床教育での手段として行われる作業療法などの意味を考えてみよう。現行のシステムとしての学校教育に馴染めない児童・生徒に対して、その閉ざされた心を外界に向けて開くために、学校を連想しないような手続きを具体的に経験させる。そして最終的には、学校での学びや暮らしが本人にとって意義あるものであることを認識させ、学校に回帰させようというものである。結果として学校に戻らなかった場合にも、社会に対する疎外感が幾分とも減じれば、その効果に一定の評価をすることはできるだろう。

その際に最も大切なのは、子どもたちの行動が自発的に生まれてくるまでは、できるだけ干渉しない、少なくとも干渉を感じさせないようにすることである。病的状態にある算数・数学教育の具体的な現場で、勉強しろとか勉強することが面白いとか「言う」ことは無駄なばかりでなく、有害無益である。直接的にでなく、子どもたちに障壁を感じさせない手段や対象を用いて、具体的な作業を経験させることによって、もちろん、最終的には勉強することは面白いと思ってもらえるようにすることである。

一般に教科教育を具体的なものとして論じる場合、対象となる児童・生徒の学力や学習態度に応じて、三種類に大別される。低学力、中程度の学力、高学力である。通常のカリキュラムを行うときは、それぞれに応じた達成度を設定し、その程度に応じた方法を考案することになる。それらの方法は往々にして矛盾するもので、一つの集団に対して実施しようとすれば、効果は相殺し、ややもすれば逆効果にすらなりかねない。

しかし、臨床数学教育的手法をとるとしても、それぞれの集団を隔離して行うことは想定していない。そうすべきではないことは、たとえば [4] でも平均的な生徒・学生像のまやかしとして指摘したように、集団を分離すればそこでの上中下の部分に分離するし、動的にも集団内の乖離が起こるだけであることからもわかる。

となれば、少なくとも学校で、つまり集団教育で用いようとする限り、そのどのレベルにも役に立つ、ある意味で万能の妙薬であるように作られねばならない。作り方の目標とする考え方は以下に述べるが、どのレベルにも役に立つように作られているとすれば、それゆえにこそ取り扱いに注意しなければならないものになる。薬そのものは同じでよいが、服用法は症状に応じて異なり、それを間違えると、もしかすると取り返しがつかなくなることもないわけではない、ということである。

臨床数学教育のための教材化の目標は、しかし、そんなに複雑なものではない。学力に幅のある現在の状況での問題点を考えてみよう。

高学力の児童・生徒は学校で教えられる内容が易し過ぎて、退屈をしている。といって、自分で先の方を勉強しようと思っても、以前のように、教科書だけを小学校から高校まで並べてみても、整合性もなく、目的意識も持てず、自学すること

ができない。それでいながら、数学は積み重ねだから、以前のことが分からないと分からないという説明は受け入れている。数学は積み重ねなのに、数学の教科書は積み重ねになっておらず、穴だらけである。小学校の終わりの時点や、中学校の終わりの時点での算数・数学のそれなりの体系的な読み物とワークブックがあれば、これはかなりの程度補うことができるだろう。

低学力の児童・生徒の場合、現在では既に学力が低いという程度を通り越して、学級が一つの社会として成立しないまでになっているようで、その場に対して語られる教育の在り方は、教科の教え方以前の心の問題になっている。この場合、旧来のカリキュラムはそれ自体無力で、学級の形態が回復してからでなくては何を議論することもできないような状態にあるようだ。

さらに、本体ともいうべき中程度の学力を持つ大多数の児童・生徒に対しても、それなりに工夫された穏健な方法が有効だった時代は過ぎてしまって、以前なら低学力の児童・生徒に対する取り扱いと同じように議論されているようである。

臨床数学教育の必要性を感じたのは、実は、少数の高学力の児童・生徒を除いた大多数の対象者に対しては、登校拒否予備軍に対するような注意深い対処が必要になっていることを実感するようになったからである。トスムという算数・数学教師に対する支援プログラムを継続して行く中で、ほとんどの教師がこの問題に直面せざるをえなくなっていることを実感してきた。

それゆえ、すべてのレベルの児童・生徒に対して、基本的には同じ教材でありながら、個々の対象者に対するきめ細かい取り扱いさえすれば、万能の妙薬として機能するものを作る必要に迫られた。

20年以上、大学での文科の数学を教授していく中で、従来のカリキュラムの積み重ねを持たない学生に、多少とも意味のある数学的実質を提供する努力をしてきた。それが、数の種々の構造を反映したゲームに注目することになったきっかけである。

勉強の出来る、勉強の好きな子なら、何処までも自分の興味の続く限り追求して行く、また追求していきたくなるような教材はないか。勉強が好きでなく、むしろ数学に嫌悪感を感じているような子供に、算数・数学に対して心を開かせるような教材はないか。そう考えていた。

実は、1時間や2時間でいいなら、数学嫌いな子供にも数学が得意だと思っている子供にも、面白いと思わせ、興味を持って計算をさせることができるような教材は、普通の人が思っているよりも多いのである。食わず嫌いな大人たちの思いに反して、数学というものは実に面白いものだからである。

しかし、難しいのは、児童・生徒の興味を1年2年と保ち続けることである。それも、指導者が存在しないような場合にも、彼らが自分で持続していき、また持続したいと思うようなものを探すのは難しい。

しかも、学校現場の教師たちの数学的知識は不完全なものなので、この教材に子どもたちが取り組んでいく姿勢を（干渉せずに）観察しているだけで、数の世界の構造についての理解が進むようなものはないか。特に小学校の教師には、算数・数学に対する真の理解を持たないまま、単なる解答を得るための技法としてしか児童に提示できず、そうした操作や考え方の理由を問われると答えられない場合が少なくない。力学グラフはそのような病んだ教師をも癒してくれるものであり得る、と信じているのである。

もちろん、字義通りに万能なわけではないだろう。そこで、力学グラフ以外にも、類似の機能を持つような教材として、戦略ゲームを考えた。[5] で、2つ目に挙げた「同値関係（仲間遊び、グラフ)」と呼んだグループがこれに当たる。その役割については、以下の節で述べる。また、[5] で3つ目のグループとして挙げた「逆問題」には、そこに挙げた「4つの4」、「小町算」、「10作り」以外にも、加法的整数論の諸定理・予想を、小さい数の範囲、たとえば、100までとか、1000までくらいの範囲で実験的に確かめてみるということも有効であるかも知れない。素数和で表わすゴールドバッハ予想や、4つ以内の平方数の和で表わすルジャンドルの定理、ウェアリング問題、多角数と多角数の和での表示なども、逆問題の範疇に入るだろう。

[5] で挙げた3種の教材群について、詳しく議論して行く前に、算数・数学を初等教育で教える意義について考えてみよう。それが、臨床という名で病状を癒し回復する目的を明確にし、そしてその手段としてとるべき方法が見えてくるだろうし、何より、採ってはならない方法も明らかになってくるだろう。

§2. 初等・中等教育における算数・数学の意義

高等教育で数学を教える意義ははっきりしている。現代の文明を支え、推進するために不可欠な数学の知識と技術を一定数の人々に教えることである。それは、社会の状況の変化とともに変わって行くものであり、政策上の要請に沿うことも、ある程度は当然のことである。

初等・中等教育で算数・数学を教える意義をそれと混同してはならない。世の中でなされている多くの議論はこれを、むしろ意識的に混同しているようにさえ思われる。比較的本質をついている議論を［14］の中から紹介しよう。著者の一人の和田氏は精神科の医師で、認知心理学的な考察をもとに子供の成長発達の歪みについて提言をしておられる。

日本的と言われて論じられている特に戦後から復興期の日本人の特徴的な性格をメランコ人間（躁鬱気質が強い）と呼び、最近の子どもたちは特にアメリカの影響を強く受けてシゾフレ人間（分裂気質が強い）になっているのに、政策決定に関わる人々の認識がずれていることが問題を大きくしているという指摘は面白い。筆者が漠然と感じていた感想「豊かな社会になり、目標と向上心を失い、好奇心と規範を失っている」に言葉を与えてくれた思いである。

「子供に勉強させても大丈夫だ」とか「勉強させた方が心は発達する」とかいう章節のタイトルは、大学教師が言いたくても手前味噌な発言として退けられそうで、兎角控え勝ちになる言葉である。そして「頭のよさとは何か」とか「頭がよくなる勉強とは」という節で、算数を学ぶことの重要性を述べておられる。

認知心理学の立場では、思考とは“ふってわいたようなひらめき”ではなく、“これまでに得た知識を使って推論をすること”であり、知識も単なる記憶される教条的なものではなく手続き的な知識や、能率の良さなどを含めた経験知をも含んだものと考えられている。その意味で、今の学校教育の中で、知識を使った推論の訓練と言えるものは算数・数学しかないと断じておられる。

数学の重要さは、そして数学を教育することの重要さは諸学の基礎であることである、というわけである。実際に創造的な仕事をしているほとんどの人にとって明らかなこの命題が、教科教育学者の間では非常識なのである。もちろん、それぞれの人は自分の立場を守らなければならないだろうが、角を矯めて牛を殺しても、牛が死んだところを見なければそれでよいというのだろうか。文部省も、自分の分野が重要だという色々な主張を調整しようという態度をとれば、必然的に算数・数学の重要性に目をつぶることになる。

ここで筆者が言いたいのは、この状態はあくまで現在の日本の状況を述べているに過ぎないということである。数学が諸学の基礎であることには長い歴史がある。知識が体系化し、学問が成立し、それを広く流布するためにカリキュラムが生まれて行く過程で、諸学の基礎であったのは哲学であった。その伝統は 19 世紀まで続いた。もちろん、カリキュラムとしての有効性を考えるときにその実態は少しずつ修正され、中世ヨーロッパでは、教養三学科、つまりどの学問を学ぶためにも必要とされる学科は、論理学、幾何学、修辞学となっていた。その中でかろうじて大学教育以前に学ぶことが制度化しているのは、幾何学を含んだ（その割合が少なくなっていることを問題視する議論はいつもある）数学だけである。西洋の教育の基盤には今もそれは残っている。日本の現況では、そのどれもがおざなりにされている。

［14］でもそうであるが、算数・数学の重要性は、まず現代社会に対する役割、次に数学以外のどんな分野に対しても多少とも高度なことを学ぶために必須な技術が算数・数学によってしか養われないと指摘されることが多い。その際、議論を簡単にするために、「あれ」や「それ」には「これ」が必要ではないかという議論になりがちである。そういう場合、「あれ」や「それ」が必要でないと感じる人たちは、だったら自分には「これ」は要らないという反論をする。例としてすべてを挙げることは意味がないので、具体的に挙げられた「あれ」や「それ」を必要とする人はむしろ小数であり、算数・数学的な訓練をあまりしてこなかった人々はそれが比喩を用いた議論であることを理解しない。おそらくは、理解しないのではなく、理解したくないのかも知れないが。そして、数学は必要がないという乱暴を通り越した意見が罷り通る。言った本人が暴言であることを意識していないのではないかと思えることが、むしろ恐ろしい。

算数・数学を学ぶことは役に立つ。役に立つのだが、その議論をすすめると、妙な泥仕合に深入

りすることになる。だから単純がよい。諸学の基礎となり得る現行教科は算数・数学しかない。だから、取り敢えず、高級な諸学に入門する前に、ある程度の算数・数学の勉強をした方がいいよ、ということで納得した方がよい。少なくとも被教授者にとって、その方が悩みも少なく、その方が「得」なのである。従来のカリキュラムの中でこのことを主張すると、教科間民主主義の偽善の中に主張が埋没する。

だから素直に、算数・数学を学ぶ意義を述べることにする。

数は既に抽象である。一目で視認できる、5から10くらいの数を超えて、ものを数えることは既に大いなる抽象である。実際に荷物を肩に担ぐことなく物品の数量を計算することは、偉大な叡智の結晶である。簡単な四則演算のルールも、膨大な個別の取り扱いの混沌から産み出された壮麗な秩序の表現である。人類は数を得て、数体系を得て、他の生物に対する優位を得たと言っていい。それを放棄するのか？　議論はそれだけで良いと思う。

さらに言うなら、人間のあらゆる思考のモデルであり、複雑で見通しの悪い状況で考えをまとめるために有効な方法や経験の宝庫である。見通しの悪い状況の中で、置かれている状況を把握し、構造を構築し、行動の結果を予測し、失敗の原因を調べ、模索し、対処法の発見する。そうするために算数・数学で学んだ事柄、そこで問題解決に至った過程、心の有りよう、それが役に立つ。ロビンソン・クルーソー漂流記で、彼が真に状況に対処出来るようになったのが、木の棒に刻み目をつけ、時を計ることが出来るようになってからだというのは、この事情の反映である。

意義を強調するのはこれくらいにしておこう。

これまでのカリキュラムの上で、ほとんどすべての児童・生徒にとってなじみ深い対象を用い、技術的には困難をともなわない範囲に留まりながら、深く興味深い数学的な内容を表現し、しかも、導入部だけを注意深く越えさせてやれば、後は児童生徒が自身の力と興味だけで、好きなだけ取り組むことができる教材が、臨床数学教育のテーマとして取り挙げられるべきものである。

誤解されてはいけないので、はっきり述べておきたいことがある。それは、力学グラフにしろ何にしろ、通常の算数・数学教育の内容を代替するものではないということである。沿うことを意図したものではないということである。

実際の問題としては、ある程度は代替することが可能であるので、却って、その可能性を押し進めて、代替するような方向に持っていこうとする動きが起こるかも知れないが、それは決してしないで欲しい。そうすることは、力学グラフの持つ妙薬としての働きを殺してしまうことになる。妙薬というのは、いわく妙な薬なのであって、どの成分がどの症状に聞くというものではない。特に以下の節で、代替可能性をほのめかすような利用法や導入について述べるので、その方向への利用を進めたくなるかも知れない。

臨床数学教育的教材は、算数・数学の技術を教えるものではない。最低限の技術は習得していることを仮定している。その上で、さらに技術（計算や応用）に磨きをかけようとせず、面倒くさいとか、嫌いだとかの感情を持っている児童・生徒や、一定程度の技術の向上には努めるが、さらに自発的に教えられたことを越えて技術を磨こうとしない児童・生徒に、動機づけを与えることこそが目的なのである。

自発性を喚起すること、それが臨床数学教育教材の最大の目的であり、それが通常のカリキュラムの理解や習得の補助になることは、余得（余徳）であると思っていただきたい。しかし、そういう側面を明示しないと、現場の教師や教育関係者に受け入れられにくいだろうということから、次節以下を述べるのである。

臨床数学教育的教材の改良や整備のためには、色々な学習レベルや年齢を持つ対象者に対して実際に教授する必要がある。時代や社会情勢の変化に伴って、特に導入部の工夫はつねに更新して行く必要があるだろうから。そうした実験をさせていただくためにも、学校関係者に一定の理解を得る必要がある。そのために以下の節を述べるだけである。

本当は、児童・生徒に対し直接的に働きかけることのできる形態で公開したいと思っている。しかし、それが現実的に児童・生徒の手に届くためにも、学校関係者の理解を得ることが必要である。

これからいよいよ具体的にこれらの教材の内容とその特性、活用法について述べていくわけだが、あくまで、子どもたちが、計算をすることに抵抗感を持たないようにすることだけが、具体的な効用であることを注意しておく。それ以上の効用はない。あるとしてもそれは副産物。

知らず知らず、どんどんどんどん計算がしたくなる。そういう麻薬のような効用を持っている。だから、服用させ過ぎると、危険がないわけではない。ひたすら意味のない計算をして、自己満足に落ちいるということも起こり得る。現在の状況から見れば、そんな心配をしなければいけないような児童・生徒はきわめて少ないのではないかと思われるので、この注意は杞憂というものであるかも知れない。

基本的には、どんどん計算をすればそのうち何かが分かってくる、筈だという立場に立っている。だから、それ以上の期待はしないで欲しい。ただ、臨床数学教育的教材として［5］で挙げた3グループのテーマは、それぞれ付加的な意味を濃厚に持っているので、というか、そのようなものとして選んでいるのでと言うべきだが、無目的的な計算に埋没して自分の位置を見失うということはあまり起こらないだろうと期待している。これらの点も、長期間の実践によってしか、はっきりしたことは分からないのだが。

§3．力学グラフの場合

数の構造ゲームのうちで、現在筆者が最も有望だと思っているのは、力学グラフ（ダイナグラフ）である。力学グラフの定義や例、基本的性質については、詳しくは［7］や［8］を参照して欲しいが、考え方としては、（自然）数の構造、操作、個体識別などを視覚化することであり、その中で特に因果関係を表現するものになっている。

数の力学グラフは、数学的には、自然数の集合$\mathbb{N}$もしくはその部分集合を頂点集合とする有向グラフであって、各頂点に対してそれを始点とする有向辺（矢印）が常に1つだけあるものである。これは概念的には、頂点集合上の任意の写像と対応するものであって、言い換えればその上の力学系と対応するものである。それが力学グラフの名前の由来である。

こうした意味で力学系という言葉が意識的に用いられるようになったのは20世紀になってからで、言葉遣いを含めて、このまま初等・中等教育の現場に持ち込むのは問題があるだろう。何か類似の概念で、多少とも馴染みのあるものはないだろうかと考えていたが、磁力線はどうだろうか。深い理解はなくとも、紙の上に撒かれた鉄粉が紙の下に置かれた磁石のために整然と、しかも直線とも円とも言いがたい、ある種の魅力を持った曲線上に並ぶ、という状況は印象として忘れ難いだろう。

と言って、数力線では字面もまた発音した際の音を考えても、それだけで内容が理解されることが期待できず、好ましくない。そこで児童・生徒には次のように言ったらどうだろう。

数の世界には色々な力が働く。力によって数は動かされ、数の世界に流れが生まれる。流れに乗って進んでみよう。何処かに行きつくのか、何処にも留まらずいつまでも進んでいくのか。すべては、数の世界に与えられた力によって起こる。力が一旦与えられたら、数の世界の運命は決まる。

力はルールである。数学的には頂点集合上の写像によって表わされる。どれかの頂点を選べば、後の運命はそのルールによって必然的に定まる。そして、世界自身の形が決まる。

最初、数がばらばらに置かれている。中には何の構造もない。そこにルールが与えられる。すると、すべての数は他の（自分自身かも知れない）数と結ばれる。数の世界に構造が生まれる。

別のルールを与えれば、いわば別の数の世界が生まれる。ある世界では何の変哲もないある数が、別の世界では燦然と個性を発揮する。

頂点集合を与えることと、ルールからグラフを作る手続きとを一旦習得した児童・生徒は、恐らくは次々と別の世界を作り、その世界の探険に乗り出していって、くれる筈だと思っている。

ルールが非常に単純であっても、力学グラフはさまざまな変化をしてくれ、そのことが数の個性を表現し、数の世界の構造を示してくれる。［7］や［8］で詳しく述べているが、たとえばルールf（V上の写像として実現されている）が四則演算、特に加法や乗法で表わされているような場合には、個々の矢印の行き先を決める計算はとても易しく、$V = I_{100} = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < 100\}$ くらいなら、小学校の低学年でも十分に計算が可能であり、まだ数学に偏見を持っていないこの時期から、数学への嫌悪感を払拭するのに役に立つものと期待している。種々のkに対して$V = I_k$とし、法kで$+a$するというルールに対応する力学グラフは、サイクルの離散和になるが、その周期はkとaの最大公約数に深く関わっていることが視認できて楽しい。

また掛け算グラフM_k^aは、法kで$\times a$するというルールに対応する力学グラフであるが、kがaのベ

キであるときは擬木[1]となるが、そうでなければリミット・サイクルが得られる。k と a が互いに素ならサイクルの離散和になり、サイクルの周期は $k-1$ の約数となる。k と a を動かせばサイクルと木が複雑に絡み合い。その構造が、自然数の比較的単純な性質によって記述されることが分かる。

このように多少抽象的な整数の性質も、力学グラフの幾何的な言葉で述べることができ、それが算数・数学の理解を容易にする効果も持っている。

既に2年ほど、未熟な形の力学グラフ教材を使った授業を行っている。主に、大学の「文科系の」数学の講義で行ってきたが、成功したとも失敗したともいえない状況にある。すべての受講生に興味を持たせることには成功していないが、興味を持ちそうにないと思われるような学生が猛然と計算に取り組む姿を見ることもある。恐らく、プレゼンテーションが不完全だったのだろうと思われる。さすがに大学の講義だから、最低限の数学的背景を述べてから、その例として計算を始めて貰うことにしているが、その数学的背景は必ずしも受講生に馴染みのあるものではない。力学グラフ教材における感覚や興味を引き出してから、最低限の技術を教えるという段階を経ればよかったのだろう。実際に初等・中等教育で力学グラフ教材を扱う際には、導入部にはさまざまな方法を考えることができるし、そうするのが普及には役に立つのであろう。しかし、あまりあざとい導入は慎んで欲しい。あくまでも臨床数学教育的目的のために用いるものであって、力学グラフ教材自体の普及が目的なのではないのだから。

できるだけ自然な流れで、できるなら、教える時点までの対象者の算数・数学的知識のすべてを1つの構造の中に位置づけ、裏づけを与えるように教えるように努力して欲しい。但し、力学グラフを「教える」場合にはということであるが。力学グラフ教材の導入について力学グラフ教材はそれ自体で、つまり、余分な干渉をしなければ、自然にそのような役割を果たすことが出来るものである、と信じている。

導入に関しては、児童・生徒の発達状況に合わせ、また興味のあり方に合わせた数種の方法を用意する計画があり、実地調査として実際に小・中学校、高等学校での実践を行う予定でいて、本稿が印刷される頃には幾つかの実践を行っている筈である。また、大学の文科系数学の講義や、小学校教師になるための数学基礎知識を与える講義などで色々なタイプの導入を考えており、時を経て幾分かずつでも改良されてきている。近い将来、児童・生徒に直接に伝えられる形の教科書、ワークブック、また症状の軽快が顕著な実践例などを世に問う必要を感じているし、企画もしている。

力学グラフの定義について、少し注意と反省を述べておく。外向き矢印が常に1つあるという定義には必ずしもこだわらなくてもいいかもしれない。外向き矢印が1以下という方がむしろ児童・生徒の感覚に会うかも知れない。もちろんそれでは数学的な意味では力学系にならないが、系外に行くときはブラックホールだ、と言ってしまうという手もあって、却って力学的状況を表わすと言えるかも知れない。

§4. 戦略ゲーム

力学グラフが数の世界の中で決定論的な時間進行を表わしているのは、各頂点から外向きの矢印がただ1つであるという制限に基づいている。数の構造ゲームは、大量の数の計算に付加価値を与えることに主たる目的があり、そのために視覚化を経由する。つまり、グラフ表現を利用する。その際、各頂点から出る矢印に制限を設けないと、数を与えてもその未来は決定しない。多くの未来の中から、望ましいものを選び、それを実現するための方策を求め、さらには最終目的を得るための時間（ステップ数）を最短にするという営為が必要になる。

戦略ゲームというのはそれらの総称としての言葉である。[5] で第2のグループとして考えた時には、辺の向きを特定しないものを考えたが、力学グラフを得るためのステップとして、外向き矢印の数を特定しない有向グラフを考えることも有効であるかも知れない。

たとえば、[6] で詳述した被約約数和の場合[2]、

---

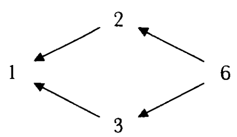
1 すべてのサイクルの周期が1である力学グラフのこと。

2 この論文にはグラフに若干の間違いがあり、文章にも修正が必要な箇所が出来た。修正論文を発表すべきところだが、筆者のホームページ（http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/）のトスム文献のページに修正したものを挙げて置くことにする。論文の本旨が間違っているわけではない。

$a \to b$ は $b = f(a) = \sum_{c|a} c - a$ で定義されているが、a によってはこの計算は必ずしも容易ではない。また、この計算自体が難しく思えてしまえば、グラフに興味を失わせることにもなりかねない。そういう場合には、補助的な有向グラフとして、矢印のルールを、a が b で割りきれその商が素数になるときに $a \to b$ であると定義すると、簡単な網目グラフになる、$f(a)$ はこのグラフでの a の純未来の和という表現が可能である[3]。

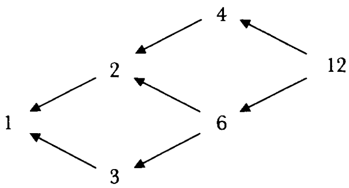
少し説明をしよう。元の力学グラフを $G = (V, E)$ と書き、この補助グラフを $H = (V, F)$ と書こう。つまり、頂点集合 $V = \mathbb{N}$ は自然数全体であり、$(a, b) \in E$ は $b = f(a)$ で、$(a, c) \in F$ は $c \mid a$ かつ a/c が素数であること、で定義するわけである。力学グラフの良さは常に平面グラフになるところでもあるが、グラフ H は平面グラフにならない。だから、紙の上に描こうとすれば無限に交差して収拾がつかない。V を I_{100} 位にとっても、かなり複雑に交差し合う。しかし、ある数 n を選び、その数が生成する部分グラフ $\langle n \rangle$ を書くなら、比較的単純な有限グラフになる[4]。それでも n が大きくなると複雑になって、たとえば、n の素因数分解が $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ $(e_i > 0)$ であれば、つまり異なる素因数の数が k であれば、グラフ $\langle n \rangle$ は k 次元になる。

たとえば $n = 6$ なら $n = 2 \cdot 3$ であり、グラフ $\langle 6 \rangle$ は



となり、6 の純未来（6 以外の約数）である、1、2、3 の和 $6 = 1 + 2 + 3$ が $f(6)$ になり、それが 6 が完全数ということであり、6 が力学グラフ G の固定点であることを意味している。

もう少し複雑な例として、$12 = 2^2 \cdot 3$ の場合を考えると、グラフ $\langle 12 \rangle$ は



となる。12 の純未来は 1、2、3、4、6 で、$f(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ となる。$n \leq 100$ なら、異なる素因数の数は 3 までなので、グラフ $\langle n \rangle$ は 3 次元ではあるが、透視図のように考えれば、それ程難しいものではない。数を書くだけですべての約数を数え上げるよりも、この方が見落としが少なくていいだろう。

力学グラフ教材に対してもそれに固執せず、補助的な（有向）グラフを考えるなどの柔軟なとり扱いを心掛けた方がよい。臨床数学教育は何より、硬くなった児童・生徒の心をほぐすためのものなのだから、そのためだったら基本的には何をしてもよいのだが、数学の範疇の中にまだまだそうする余地が残されていて、それを探す努力を続けようというのが基本的な姿勢であることを忘れないで欲しい。

辺に向きのないグラフの場合、一般にそのようなグラフを考えることは漠然とし過ぎていて、教材には適さない。[5] では、同値関係の生成系を与えるという形でグラフを与えている。このとき、生成系をうまく選ばないと、連結性の意味では自明なものになり易い。その場合でも最短経路の問題（それが戦略的思考を育てる）は問題としては成立する。きわめて複雑になるか自明になるかになりやすいので、多くの人から広く例を求めるということが必要となるだろう。

このグループに属するテーマをこれまで実際に講義してみた感じでは、こちらが思っているほどには学生は興味を示してくれない。というか、興味を示すものとそうでないものが極端に分かれ、示さないものの方が多いのである。力学グラフ教材での場合のように、まだまだプレゼンテーションが熟（こな）れていないということが理由であろう。[8] のように包括的な理論構築をし、その中で、個々の教材例に対して詳しい考察が必要なのだろう。

簡単な例を挙げるためにもかなりな背景説明が必要であり、簡単に述べられてしかも印象的な例が見つかっていない。十分調べていないということに原因があると思うのだが。効果的な例も挙げ

---

3 一般に純未来が有限集合のときに、その総和をとるのは数の有向グラフ一般に対する力学化になる。

4 記号の厳密な定義は本巻の [7] を参照されたい。

ずに中途半端な議論を展開するより、ここでは教材作りの基本的な考え方を述べただけに留めることとしたい。

おわりに

これまで述べてきたことからも分かるように、臨床数学教育的教材は知の領域における「性善説」に基づいている。それゆえ、「性悪説」的な取り扱いには馴染まない。荀子が性悪説を唱え、為政者が強く（もちろん善なる意図を持って）民衆を統治すべきであると考えたのは、その時代、貧富の差が激しく、文化や言語も違い、教育程度も極端に異なる大量の人間を統治するための方便であった。そのように、指導者の意図や意思を、児童・生徒に強要することは厳に慎まなければならない。

強調しておきたいことは、臨床数学教育のための教材を、通常の算数のカリキュラムのための補助教材とは考えないで欲しい、ということである。教えられるということに倦み、疲れ、嫌悪の情を抱いている児童・生徒に、数の世界の魅力を、自分の手で触れ、自分の足で踏み入ることによって、自然に感じて貰うということが目的なのである。教師や親の役目は入り口を指し示すだけ。中に入ることも、入ってから進むことも、できる限り、当人たちの自由意志に従っているようにしてほしい。少なくともそう感じさせなければならない。できるだけ何もしない。ただ黙って見ている。よほど迷路に迷いこんだときに、ヒントを与える程度にして欲しい。しかし、うまくヒントを与えることは理論を熟知していないと難しく、安易な誘導は危険である。一般的な指導者は、そのような場合、入り口に戻るようにという助言に留めてほしい。

迷ったときは常に最初に戻る。それがもっとも確実で速い解決法になる、というように臨床数学教育的教材は作られていなければならない。

筆者が提示してきたものは、臨床数学教育的教材というより、その素材と言うべきものであって、教材化には実験を繰り返し、多くの英知を集める必要があると考えている。

算数・数学以外の分野での臨床的な教科教育的教材を考案することは、これほど単純ではないかも知れない。児童・生徒の内在的な欲求や論理によって導かれて行くべきだという態度は、算数・数学が対象とするものは物自体ではなく、人間がそれらの対象にどのように向き合うかという姿勢や枠組みを整理したものであることによっている。だから、そのような欲求や論理は、どんな人間にも多少の差はあれ、等しく内在しているものと考えている。これが性善説に基づいているという意味なのである。

しかし、他の教科、特に外界との関係を基本的な問題とする教科については、そのような信頼をよせることは難しいかも知れない。たとえば、ある社会のルールを教えようとしたとき、それは児童・生徒に内在するものではなく、あくまでもその時点の外的要因に過ぎないので、彼らの自発的な興味に従って進めていくことには無理がある。この辺りが、たとえば総合学習の指導に関して、看過されやすい問題点ではないだろうか。

最後にもう一度注意しておくが、評価に使ってはならないというガイドラインは、指導することの禁止ではない。画一的にならないようにするためのものである。

授業の中で利用している場合だが、力学グラフの場合でも、児童・生徒が1つのグラフを完成したら、褒めることを忘れてはいけない。褒めておいて、そのグラフが正しいかどうかを視認して、間違っている箇所があれば、その箇所やその周辺のグラフの形や美しさに言及するといい。正誤を指摘されることに傷つく子供も、グラフの美醜で傷つくことは少ないだろう。数構造を視覚化するという効果の一つがここにある。

一旦完成したら、他のルールのグラフに移行したい子供もいるだろうし、完成したことに満足してしまってグラフの整備・整理をする意欲すら示さない子供もいるだろう。前者については対応は容易で、自分で別のルールを発見できる場合は放置して観察するだけにしておき、それが出来ないような場合には「一緒に」考えてみせることもよいだろう。その場合にもできるだけ「指導」は避けて欲しい。指導した結果描けたとしても、子供の中に残る効果は数分の一になってしまう。教えることを我慢して見守ることは、子供を信頼することであり、人類というものを信頼することであり、それが出来ることは教師としてのもしかすると最大の資質であるかも知れない。

また意欲を示さないタイプの子供に対しては、算数・数学的価値とは異なる価値を与えることも考えられる。「面白い形だね。でももう少しキレイにならないかな」などと言って美的な整形や、

場合によっては、イラスト的な変形を許容してもよいだろう。そしてうまく描けたら、美学的な言葉で褒め、描いた図に名前をつけることもよいだろう。さらには、その図を双六のような道程図に見立てて、物語を作ってみるのも面白い。グラフとして同じものでも、描き方によってかなり印象が違うことがある。(高い) 抽象性に慣れていない児童・生徒を対象としている場合には、その印象の差に敢えて注意を惹きつけるようなことも、方便としては許されるかも知れない。

参考文献

[1] 岡部恒治、戸瀬信之、西村和雄編『分数が出来ない大学生−21 世紀の日本が危ない』東洋経済新聞社 (1999)。

[2] 蟹江幸博 『数学的知識の欠如に関する自己認識の調査』三重大学教育学部紀要、第 45 巻、教育科学 (1994)、1−13。

[3] ——『数学的知識の欠如に関する自己認識の調査IV』三重大学教育実践研究指導センター紀要 15 (1995、Mar)、49−57。

[4] 蟹江幸博、岡本和夫『数学教育 TF−高校数学と大学数学の接点』三重大学教育学部紀要、第 49 巻、教育科学 (1998)、97−113。

[5] 蟹江幸博 『臨床数学教育を目指して』三重大学教育学部紀要、第 52 巻、教育科学 (2001)、101−105。

[6] ——『数の構造ゲームⅠ−数学嫌いの癒しに向けて−』三重大学教育学部紀要、第 52 巻、教育科学 (2001)、107−118。

[7] Yukihiro Kanie, *Games of Number Structures II* (*Reversed Difference*)、三重大学教育学部紀要、第 53 巻、自然科学 (2002)、7−26。

[8] ——『力学グラフ: グラフ的算数入門のための数学的理論』(*A Mathematical Theory of Graphical Illustration to Arithmetics*), in preparation.

[9] ——『幾何的直観と対称性』プレプリント

[10] 奥招・蟹江幸博 『児童・生徒の直観的能力に関する研究 (II) −直観的能力は指導によって向上するか、その可能性について−』三重大学教育学部研究紀要、第 44 巻、 教育科学 (1992)、17−49。

[11] 蟹江幸博 『三角定規の組み合わせ図形の考察』三重大学教育学部紀要、第 46 巻、教育科学 (1995)、41−49。

[12] ア・ヤ・ヒンチン 『数論の 3 つの真珠』(蟹江幸博訳・解説) 日本評論社 (2000)。

[13] 関沢正躬『算数があぶない』岩波ブックレット 513 (2000)。

[14] 和田秀樹、西村和雄、戸瀬信之『算数軽視が学力を崩壊させる』講談社 (1999)。