三重大学教育学部研究紀要　第55巻　自然科学（2004）　61－73頁

スピログラフのペン先の「逆行」について

正　田　　　良

A Note on “Retrograde Motions” in Spirographs

Rio SHOWDER

要　　　旨

スピログラフというハイポトコロイドを描く道具に関して次の考察を行った。大円の中心からペン先までの距離が極小から次の極小に行くまでの間の曲線の部分に注目したとき、その部分が自己交差を起こすことを「逆行」と呼ぶ。この逆行を起こす条件は、大円の半径を a、小円の半径を b、小円の中心からペン先までの距離を c とすると、$a-b<c<b$ のとき逆行が起こることを示した。

1.　はじめに

スピログラフとは、補注1に記すように、1968年ごろに流行したおもちゃである。その単純な機構にも拘わらず神秘的な図形を描くことができ、さらに、その条件による変化に意外性があるので、中学校や高等学校の数学の教師や数学者が現実世界の現象の数学化を試みる題材として注目して来た。しかし、その多くは輪の歯数と歯車の歯数とが単純な整数比となるかどうかに注目しているが、ここに述べる「逆行」に注目した例は寡聞にしてまだ見ることはない。この現象はスピログラフのうちで、よく普及しているものに顕著にあらわれる現象であるので、その探求がどの程度の数学的な知見によって解明しうるものかを明らかにし、その現象を教育活動の中でどの程度の詳しさで取り上げるべきかの教材研究に資することを目的とする。

2.　定義などの準備

2.1　サイクロイドとトコロイド

直線の上を円が滑ることなく転がるとき、円の周上の点Pの描く曲線をサイクロイド（cycloid）という[1]。x 軸の上を半径 a の円が転がるときの原点を通るサイクロイドを媒介変数 t を用いて式表示すると、$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ となることは、よく知られていることである[2]。

同じく円が直線の上を滑ることなく転がっている場合を考える。点Pが円周上ではなく、円の内部もしくは外部にあって、円周の回転と同じ回転を円の中心に関して行うとき、点Pが描く曲線をトロコイド（trocoid）という。b を円の半径から点Pまでの距離とすると、トロコイドの媒介変数表示は、$x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t$ である[3]。

また、円周の上を他の円が滑ることなく転がる場合、後者の円の円周上にある点Pの軌跡を

三重大学教育学部

考える。一方の円が他方の円と外接する場合、この点Pの軌跡をエピサイクロイド（epicycloid)、後者の円が前者の円の内部にあって内接するときハイポサイクロイド（hypocycloid）という。

媒介変数表示は、複号上側をエピサイクロイド、下側をハイポサイクロイドとして、

$$x=(a\pm b)\cos t \mp b\cos\frac{a\pm b}{b}t, \qquad y=(a\pm b)\sin t - b\sin\frac{a\pm b}{b}t$$

として得られる[4)]。

さらに、円周の上を他の円が滑ることなく転がっているが、後者の円の中心に関してその円周と同じ回転をする点Pが円周上にないとき、その点Pの軌跡を、エピトコロイド、ハイポトコロイドという。スピログラフは、ハイポトコロイドを描く器具である。

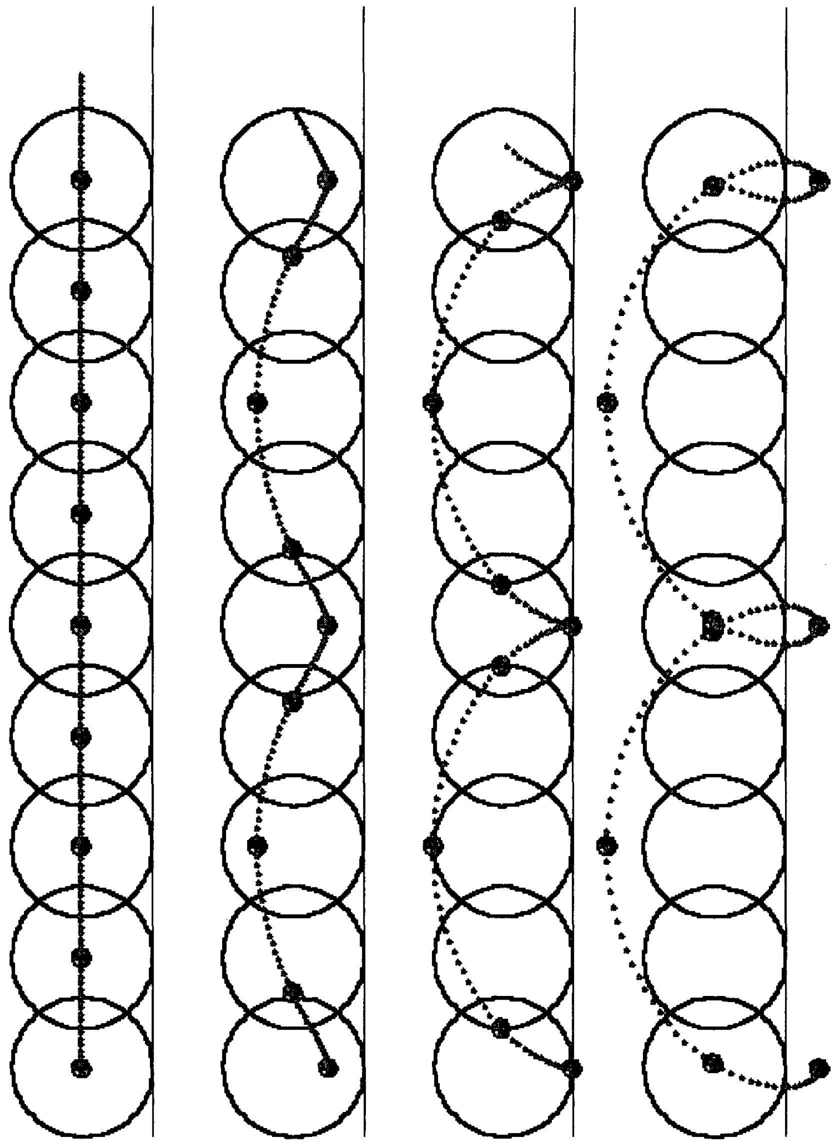

図1　左から2、4番目がトコロイド、3番目がサイクロイド

2.2　座標の選択

エピトコロイド、並びに、ハイポトコロイドの媒介変数表示は、次の方程式で得られる。複号上側をエピトコロイド、下側をハイポトコロイドとして、

$$x=(a\pm b)\cos t\mp c\cos\frac{a\pm b}{b}t,\qquad y=(a\pm b)\sin t-c\sin\frac{a\pm b}{b}t$$

である[5]。このとき、大円の中心は原点O(0, 0)で、半径の長さは a、小円の半径は b で、ペン先Pと小円の中心との距離は c である。

2.3 「逆行」の現象について

トコロイド $x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t$ では、計算によってすぐわかるように、

$$\frac{dx}{dt}=y$$

という性質があるが、a, b の大小関係の違いによって、図形の特徴が異なる。

[1] $a>b$ のとき

即ち、点Pが円の内部にあるときには、自分自身と交点を一切持たない（図1）。この場合、すべての実数 t で、

$$\frac{dx}{dt}>0,\ y>0$$

が成り立つ。一方、

[2] $a<b$ のとき

即ち、点Pが円の外部にあるときには、自分自身と交わる点が、y の値の極小となる点1つに対して1つ存在する。この場合、極小となる点の近くで

$$\frac{dx}{dt}<0,\ y<0$$

となる点がある。この左の条件、即ち t を増やしているにも拘わらず x が減っている状態を「逆行」と呼ぶことにしよう。

この2つのタイプの境界例であるサイクロイドは、尖点[6] を円が滑らずに転がる x 軸上に有する。

2.4 「逆行」へのハイポトコロイドへの拡張

極座標表示 $<r, \theta>$ によって、ハイポトコロイドの動点を表すと、

$$r\cos\theta=x=(a-b)\cos t+c\cos\frac{a-b}{b}t$$

$$r\sin\theta=y=(a-b)\sin t-c\sin\frac{a-b}{b}t$$

となるので、

$$r^2=(a-b)^2+c^2+2(a-b)c\cos\frac{a}{b}t$$

である。

スピログラフでは、歯車の内部に開けられた穴にボールペンを入れるという機構上の理由で、$c\leqq b$ である。 動点は大円の中心の周囲を回るので、x, y, r, θ の値は、軌跡が円になる場合や線分になる場合の特殊な例外を除いて増減する。r は、

$$p = \frac{b\pi}{a-b}$$

を満たす p を周期とする周期的な変化をする。$t=0$ の近くでは、極大が $\theta = t = 0$、極小は、

$$t = \frac{\pm b\pi}{a}$$

を満たす t の値をとるときとなる。

前節2.3に見たような、変化率の符号が異なる現象はほとんどの場合に生じるため、区別するべき現象とは言えない。しかし、スピログラフでの描きにくい現象として、次の現象は注目に値する。r が極小になる点から r が極大になる点を経て次の r が極小となる点に行く連結な弧に注目する。これが自分自身に交差するか否かである。この自己交差の交点から先の描き心地は、歯車が輪から外れやすく「逆行」しているかのような印象を与えるので、これをハイポトロコイドの「逆行」と呼ぶことにしよう。

3.　いくつかの例

$a=1$ としても一般性を失わないので、この節では以下そう約束する。つまり、

$$x = (1-b)\cos t + c\cos\frac{1-b}{b}t, \qquad y = (1-b)\sin t - c\sin\frac{1-b}{b}t$$

$$r^2 = (1-b)^2 + c^2 + 2(1-b)c\cos\frac{a}{b}t$$

である。また、大円の内部に小円を内接させているので、$0 < b < 1$ である。

3.1　増減しない特殊な例

(1)　$c = 0$ のとき

$r = 1 - b$ となるので、原点を中心とし、半径の長さが $(1-b)$ である円周となる。

(2)　$b = \frac{1}{2}$ のとき

$$x = (\frac{1}{2}+c)\cos t,\ y = (\frac{1}{2}-c)\sin t$$

となるので、$c = \frac{1}{2}b$ のとき $-1 \leqq x \leqq +1,\ y = 0$ の線分。$c = 0$ のとき、(1)の場合となるので円。他の場合は楕円となる。

3.2　交点の数

b の値が同じでも動点が動く軌跡（ハイポトロコイド）が自己交差する交点の数が c の値によって変わる場合がある。

(1)　$b = \frac{2}{3}$ のとき

$0 < c < \frac{b}{2}$ のとき、交点は3つ。$c = \frac{b}{2}$ のとき、交点が原点のみ。$\frac{b}{2} < c < b$ のときも、交点が3つあるが、この場合に逆行が起こっている。(図 2-1〜3)

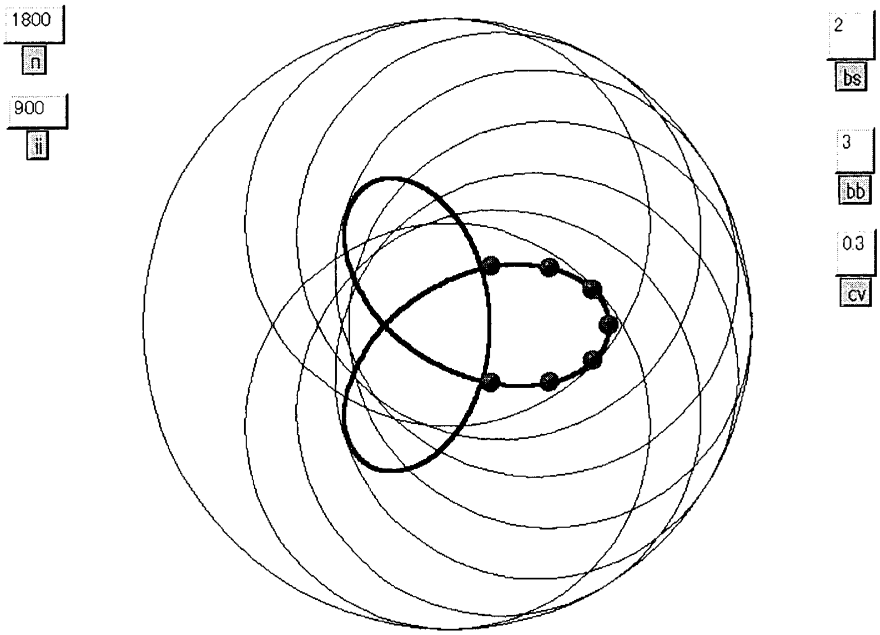

図 2-1　$a:b:c=3:2:0.6$ のとき

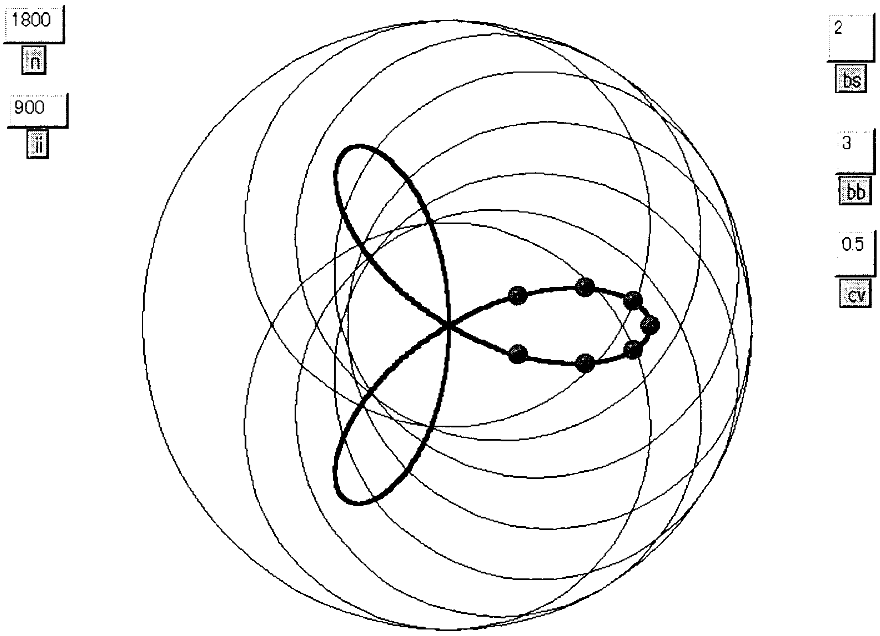

図 2-2　$a:b:c=3:2:1$ のとき

(2)　$b=\dfrac{1}{3}$ のとき

$0<c<b$ のとき自己交差は起こらない。なお、$c=b$ のときは尖点が3つある「デルトロイド」[7] と呼ばれる図形となる。$c>b$ のとき自己交差が生ずるがスピログラフの機構上このような設定はできない。

(3)　$b=\dfrac{2}{5}$ のとき

前項と同様に、$0<c<b$ のとき逆行は起こらない。(図 2-4)

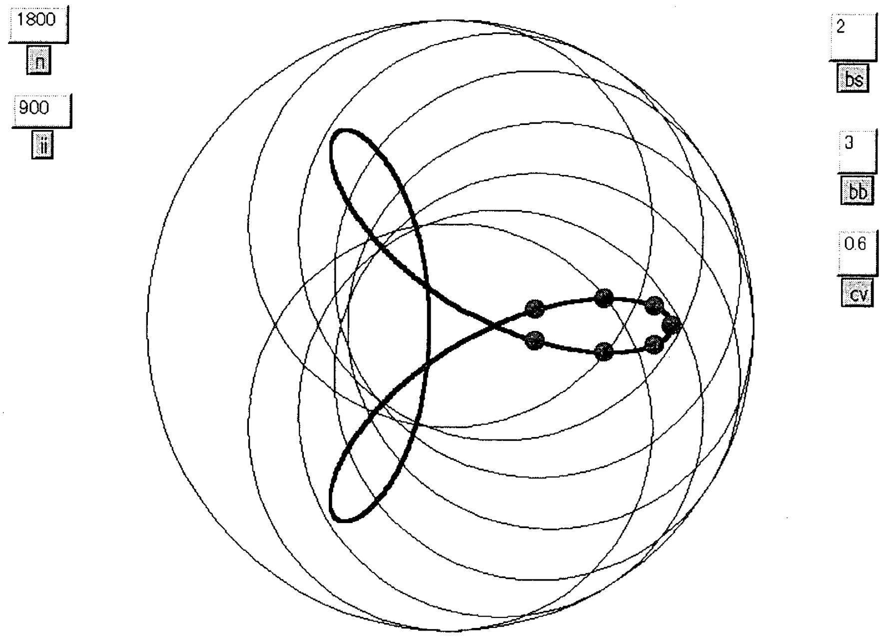

図 2-3　$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} = 3 : 2 : 1.2$ のとき

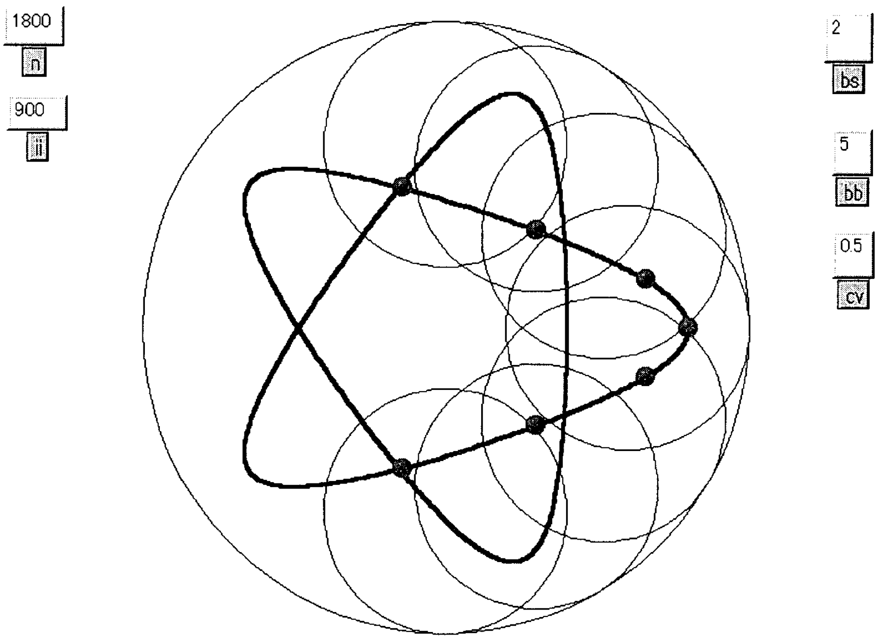

図 2-4　$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} = 5 : 2 : 1$ のとき

(4)　$b=\dfrac{3}{5}$ のとき

$0<c<\dfrac{2b}{3}$ のとき交点は10個ある。$c=\dfrac{2b}{3}$ のとき、交点は原点のみ。$\dfrac{2b}{3}<c<b$ のときも交点は10個あるが、この場合に逆行が起こっている。(図 3-1～2)

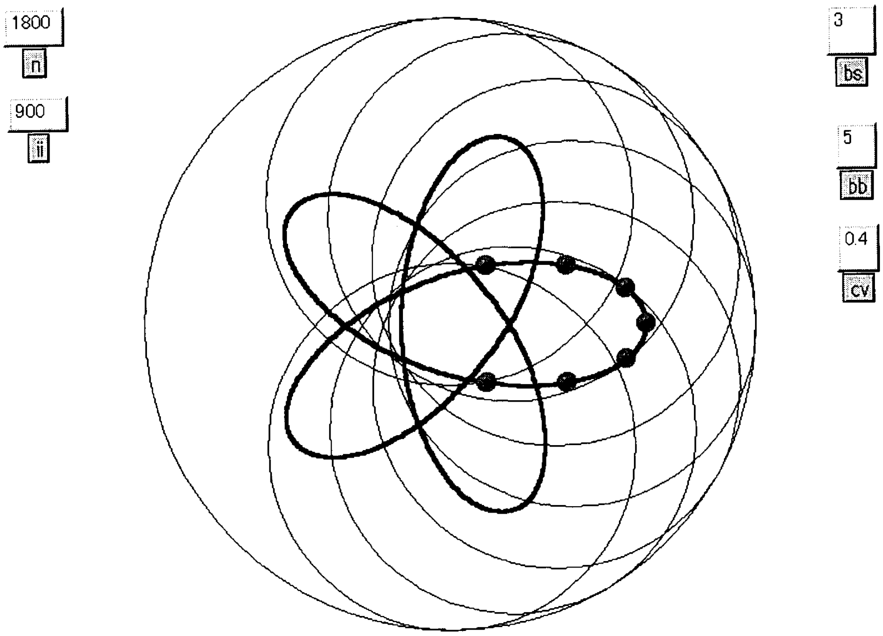

図 3-1　$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c}=5:3:1.2$ のとき

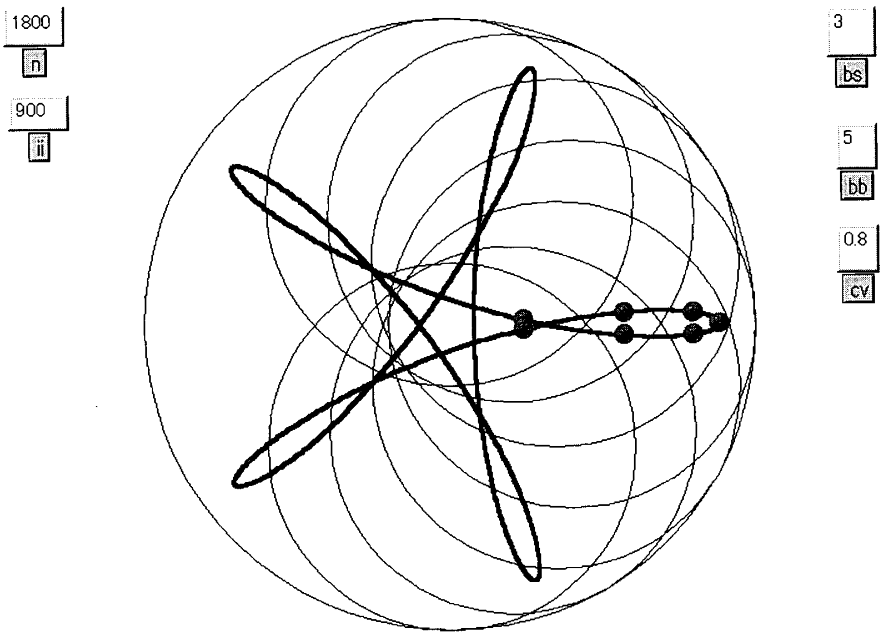

図 3-2　$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c}=5:3:2.4$ のとき

(5)　$b=\frac{4}{5}$ のとき

$0<c<\frac{b}{4}$ のとき交点は15個ある（図 3-3)。$c=\frac{b}{4}$ のとき、交点は原点を含む 6 個ある。$\frac{b}{4}<c<b$ のとき交点は 5 つで逆行が起こっている。(図 3-4)

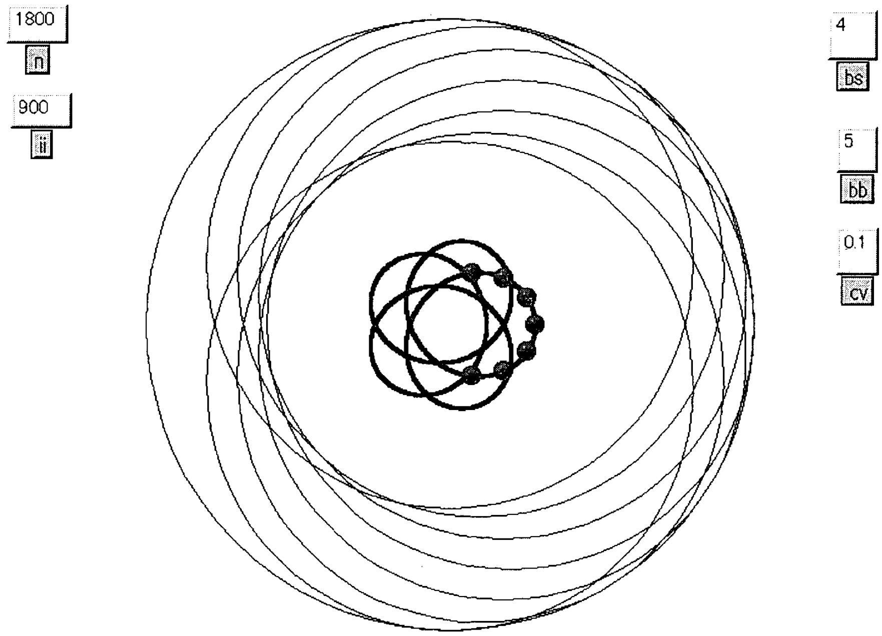

図 3-3　$a:b:c = 5:4:0.4$ のとき

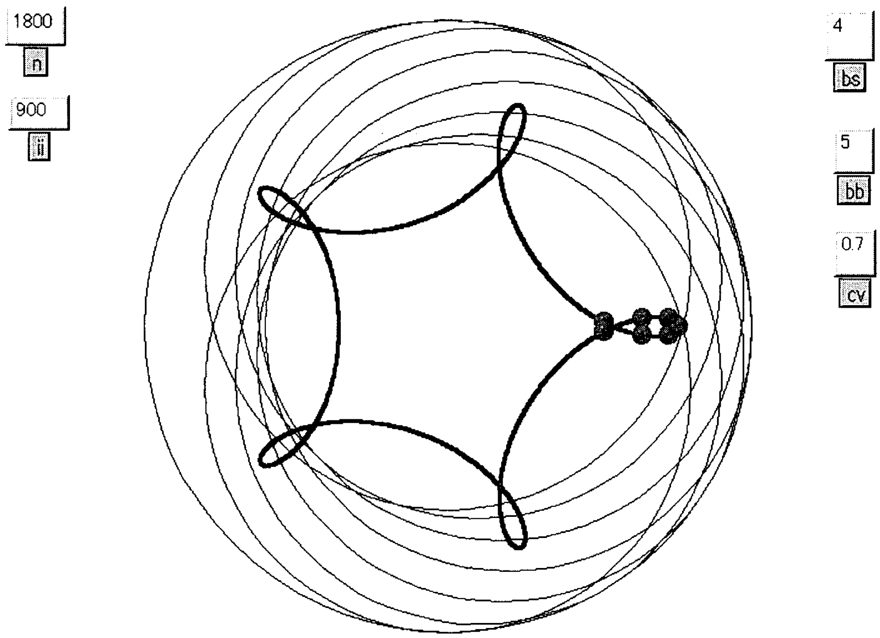

図 3-4　$a:b:c = 5:4:2.8$ のとき

4.　いくつかの命題

これまでの観察によって、次の性質があることが予想される。

動点が大円の中心Oを通るときの c の値を、c_0 とおくと、$c_0 < c < b$ のとき、「逆行」が起こる。

このことを論証するためにいくつかの命題を記そう。

（命題１）動点の軌跡は、2.4 の極座標表示を用いると、

$a-b-c \leqq r \leqq a-b+c$

と表される領域に含まれる。

（∵）大円の中心をO、小円の中心をA、動点をPとする。$r=\mathrm{OP}$。

△OAP で $\geqq \mathrm{OA}+\mathrm{AP}$

a, b はそれぞれ大円、小円の半径。また、大円と小円は内接しているので、$\mathrm{OA}=a-b$

また、$\mathrm{AP}=c$ だから、$\mathrm{AP}=(a-b)+c$。

同様に、$r \leqq (a-b)-c$。■

（注１）$a:b$ が有理数比のとき、動点がいつかはもとに戻ってそれ以降は既に通った軌跡の上をそのまま通る。そのため必ずしも上に記した領域の任意の点を通るとは限らない。また、$r \geqq 0$ なので、$a<b+c$ の場合、$0 \leqq r \leqq a-b+c$ となる。

（命題２）$a-b-c>0$ のとき、動点は大円の中心Oを通らない。

（∵）命題１より $r \geqq a-b-c$。

仮定より、$r>0$。

∴　$r>0$ なので、$r=0$ とはならない。■

（命題３）$b>\dfrac{a}{2}$ のとき、動点は大円の中心Oを通らない。

（∵）スピログラフの機構によって（2.4参照）、$c \leqq b$。

$b+c \leqq 2b$

仮定より、$b+c<a$。

よって、$a-b-c=a-(b+c)>0$ となるので、命題２の条件を満たす。■

（命題４）

$c=a-b$ のとき、動点Pは大円の中心Oを通る。

（∵）2.4で述べたように、

$$r^2=(a-b)^2+c^2+2(a-b)c\cos\frac{a}{b}t$$

$$r^2 \geqq (a-b)^2+c^2-2(a-b)c=(a-b-c)^2 \geqq 0$$

なので、$\cos\dfrac{a}{b}t=-1,\ c=a-b$ のときに限って原点を通る。■

（命題５）　$a-b-c<0$ のとき「逆行」が起こる。

（∵）この軌跡は x 軸に関して対称である。また、$t=0$ のとき、動点は x 軸上にある。よって、自己交差が2.4で述べた意味で起こる場合には $y=0$ となる。よって、「逆行」とは、r が最小値をとる前に、$y=0$ となることである。

$$y=(a-b)\sin t-c\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)t$$

の右辺を $f(t)$ とおく。この増減を調べる。

$$f'(t) = (a-b)\cos t - c\frac{a-b}{b}\cos\frac{a-b}{b}t$$
$$= (a-b)\left\{\cos t - \frac{c}{b}\cos\frac{a-b}{b}t\right\}$$

スピログラフの機構上 $a > b \geqq c$ なので、$0 < t < \mathrm{Arccos}\frac{c}{b}$ の範囲で、$f(t)$ は単調増加である。$f(0) = 0$ なので、$f'(t) = 0$ となる正の数 t のうちで最小のものを、t_1 とおくと、

$0 < t \leqq t_1$ の範囲で $f(t) > 0$　　(1)

r の値が最小となるときの t の値の絶対値を、t_2 とおくと、$t_2 = \frac{\pi b}{a}$ であった。

$$f(t_2) = f\left(\frac{\pi b}{a}\right)$$
$$= (a-b)\sin\frac{\pi b}{a} - c\sin\frac{a-b}{b}\frac{\pi b}{a}$$
$$= (a-b-c)\sin\frac{\pi b}{a}$$

$a - b - c < 0$ のとき、$f(t_2) < 0$　　(2)

(1), (2)より、$a - b - c < 0$ のとき、$t_1 < t < t_2$ の範囲に $f(t) = 0$ を満たす t が少なくとも1つある。これは「逆行」をすることを意味している。▮

（命題6）原点を動点が通る c の値を c_0 とすると、$c_0 < c < b$ のとき逆行が起こる。
(∵) 命題4より、$c_0 = a - b$ なので、$c_0 < c < b$ のとき、
$a - b < c < b$。　　$\therefore\ a - b - c < 0$
命題5より $c_0 < c < b$ のとき「逆行」する。▮

5. 最　後　に

大円の中心である原点を動点が通るように c がとれる条件は、

$$2b > a > b > 0$$

であることは初等幾何の範囲で証明することができた。しかし「逆行」の条件に関しては、いまのところ微積分を利用した証明しか与えることができていない。

ただ、観察をする段階で、交点の数に関しては原点を動点が通る条件は、交点が原点で重複する点で境界となることは重要な知見である。これを境に位相的な性質が異なってくることは観察できることであろう。既存のスピログラフを用いて図形をかいた後、他の歯数比、小円とペン先との距離による図を描ける環境を用いて探求するのに面白い話題と言えるだろう。

この意味ではパソコンによる描画で補助することが有用な場面と言えるだろう。

[文献・注]

1) 栗田　稔『いろいろな曲線』共立出版，1966，p. 73
2) 文部省『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』実教出版，1999，p. 107 に数学Cでの、「曲線の媒介変数表示」の教材例として記されてもいる。
3) 上掲、栗田。p. 74

4)　上掲、pp. 74–75。
5)　上掲、p. 79 にこの結果が記されているが、次の方針で示すことができる。
大円の中心をO、$t=0$ のとき、大円と小円とがA $(a,0)$で接していたが、現在小円の中心はCで大円とはQで接しており動点（ペン先）はPであるとする。$\vec{e}_t=(\cos t,\sin t)$と記すと、$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=(a-b)\,\vec{e}_t+c\vec{e}_\alpha$ とおけるが、「滑らずに」という条件から、大円の弧 AQ に対応する小円の弧の中心角が α なので、$(a-b)\,t=b\alpha$。
6)　一松　信 他『新数学事典』大阪書籍，1979，p. 519
7)　ロックウッド／松井政太郎『カーブ』みすず書房，1961／1964，p. 79

［補注１］教具としてのスピログラフ

インタネットサイト http://www.gantsu.co.jp/nendai1968.html や、http://f25ans.tripod.co.jp/chidhood/toy.html によれば、昭和43(1968)年２月ごろに、「スピログラフ　1450円（セイコウ）」として売られていたもの。

現在100円ショップなどで「デザイン定規」としてよく見られるのは、日本製のものと中国製のものとの２種類みられる。後者は時として歯車にバリが残っていることがあるので、使う前に手入れをしないと前者に比べて外れやすい。ただ、歯車の歯数、輪の歯数、サイズなど両者同じようである。輸入製造元と卸業者などとを記しておく。

［日本製］レモン(株) 03-3822-8899／修勝堂 03-3866-2597
［中国製］(株)オオイシ 052-502-3216／キャラメル横町　http://www.carayoko.com/

数学に関連する教具としては、
・遠山　啓『初等整数論』日本評論社，1972.　pp. 35–36。
・足立久美子『たのしい中学数学』日本書籍，1985. p. 9。
・野崎昭弘（監修）『数学の窓の開けかた』1995. pp. 18–23

などに紹介されている。

中学生などを対象とした授業では、歯数の少しの違いがえがかれる図形の複雑さが「がらっ」と変わることに意外性があって面白い。(1)輪と歯車の歯数の比によって、花びらの数や、何回回転すると元に戻るかを調べる活動や、(2)ペン先の動き方が、楕円をかくように動くのか、三角形をかくように動くのかなどの他に、今回注目した(3)逆行が起こる場合があることに生徒が気付くことはある。

［補注２］描画のための算譜

（図１）以外の図は後にまとめた。画面にパラメータを表示させているが、a は１として固定。b の値を bs/bb として表すこととし、c の値は、b の何倍かを cw の値として指定するようにした。

（図１）のための算譜を以下に記す。言語は Logo の一種である Micro World（(株)創育）である。実行にはテキストボックスやタートルを必要に応じて作り、コントロール・センタでＳなるコマンドを行って起動させる。

```
to cycloid :r :y0
   pu     setpos (list -320 :y0 )    pd
   setpensize 1   setshape 1    setsize 10
   seth 90   forward 640
   pu   setpensize 2
   let [ n 0 ]
   let [ dt 40 * 2 * 3.141592 / 4 ]
   repeat 9 [
      D_Circle  :dt * :n - 280   :y0 + 40    40
      let [ n :n + 1 ]
   ]
   let [ n 0 ]    let [ dt :dt / 18 ]
   repeat  9 [
        setsize 15
        setpos ( list :dt * :n - 280 :y0 + 40  )
        seth 180 + 5 * :n
        forward :r
        setsh 2   pd  stamp  pu
```

```
      setsh 1   back  :r
      let [ n :n + 1 ]
    repeat 17 [
      setsize 10
      setpos ( list :dt * :n - 280 :y0 + 40  )
      seth 180 + 5 * :n
      forward :r          pd  stamp   pu
      back  :r
      let [ n :n + 1 ]
    ]
  ]
  setpos [-320 -180]
end

to     D_Circle  :x   :y    :r
     pu      setpos ( list :x + :r :y )      pd
     let [ t 5 ]
     repeat 72 [
       setpos ( list :x + :r * ( cos :t ) :y + :r * ( sin :t ) )
       let [ t   :t + 5 ]
     ]
     pu
end

to S
  cg   cycloid 0 150   cycloid 20 30   cycloid 40 -90
  cycloid 60 -210   ht
end
```

また、後の描画に用いる算譜を以下に記す。

```
to hypotrocoid
    cg    st    pu      D_Circle 250 0 0 1
    let [  b bs / bb ]    let [r2 250 * :b ]
    let [r3 250 - :r2 ]  let [ k -3 ]
     repeat 7 [
       let [ tt 30 * :k]       D_Circle  :r2 ( :r3 * cos :tt) ( :r3 * sin :tt)   1
       let [ k :k + 1 ]
    ]
    let [ i  ( -1 ) * n / 2]    let [ j  :i - :i / :b ]
    pu    let [ rr cv *  :b ]
    let [ x (1 - :b) * (cos :i) + :rr *(cos :j) ]
    let [ y (1 - :b) * (sin :i) + :rr * (sin :j) ]
    setpos ( list :x * 250 :y * 250 )    setpensize 3    pd
    repeat n [
       let [ rr cv *  :b ]       let [ j :i - :i / :b ]
       let [ x (1 - :b) * (cos :i) + :rr *(cos :j) ]
       let [ y (1 - :b) * (sin :i) + :rr *(sin :j) ]
       setpos ( list :x * 250 :y * 250 )
       let [ i :i + 1 ]       ii, cleartext       insert :i
    ]  pu
    let [ k -3 ]
    repeat 7 [ pu
       let [ i  30 * :k]       let [ j  :i - :i / :b ]
       let [ x (1 - :b) * (cos :i) + :rr *(cos :j)  ]
       let [ y (1 - :b) * (sin :i) + :rr *(sin :j) ]
```

```
        setpos ( list :x * 250 :y * 250 )
        pd stamp pu        let [ k :k + 1 ]
    ]    ht
end

to      D_Circle  :r :x   :y   :d
        pu       setpensize :d       setpos ( list :x + :r :y )       pd
        let [ t 5 ]
        repeat 72 [
            setpos ( list :x + :r * ( cos :t ) :y + :r * ( sin :t ) )
            let [ t   :t + 5 ]
        ]       pu
end

to S
    hypotrocoid
end
```