三重大学教育学部研究紀要　第56巻　自然科学　(2005)　1 − 29頁

一般の汎関数空間上の Fourier 変換
(domain が測度空間の場合)

桑原　克典*・新田　貴士**

Generalized Fourier Transformation for the Space of Functionals (Measure Space Domain)

Katsunori KUWAHARA and Takashi NITTA

Introduction

1960年ごろ、Abraham Robinson がモデル理論の考えを使うことによって、Leibniz 流の無限小解析をそのままの形で合理化することができるのではないか、という着想を得たのが超準解析 (Nonstandard Analysis) の始まりである。その後、超積の理論とも結びついて超準解析は急速に発展し、応用として Riemann 積分、位相、そして確率過程の議論への Nonstandard バージョンが見られるようになった。

超準解析によれば、たとえば実数体の超準モデルとして、実数体を真に含む全順序体が作られる。そこには無限大数、すなわちどんな実数よりも大きい数や無限小数、すなわちその絶対値をとったときにどんな正の実数をよりも小さく、しかもゼロより大きい数が存在する。これは無限という概念の実体化、すなわち実無限を数学として厳密かつ具体的に構成したということで特筆すべき業績である。しかも、ある意味で実数体に関して成り立つ性質はすべて超実数体、すなわち拡大された体でも成り立ち、逆もまた真である。この性質は移行原理と呼ばれ、超準解析においてとても重要な性質の1つである。これにより無限小解析の議論を展開することができるようになった。また、中でも Peter A. Loeb によるローブ測度論は、その後の超準解析の発展に寄与し、本論文はその応用にあたる。

概　要

三重大学の新田と名古屋大学の岡田によって汎関数空間上の Fourier 変換が定式化されたが、そこでの汎関数は $f:\{a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}\to\mathbb{C}$ というものを考えていた。一方、本論文***では domain が測度空間 $(M,\ \mu_0)$ の場合、すなわち $f:\{a:M\to\mathbb{R}\}\to\mathbb{C}$ の場合を考えた。そして汎関数空間上の Fourier 変換を行うために、新田・岡田の理論にしたがって2回の拡大を用いるが、新田・岡田の2回の拡大がどんな $^*\mathbb{N}$ の無限大数よりも大きいような $^{\star}(^*\mathbb{N})$ の無限大数の存在を保証するために、特殊なフィルターを用いていたのに対し、ここでは自然数全体の集合上のフレシェ・フィルターを含む超フィルターを用いる一般的な2回の拡大で議論を行った。そしてその結果、新田・岡田の場合と同様の結果が得られた。

*　三重大学教育学部

**　三重大学教育学部

***　この論文はすべて桑原の仕事であり、彼の修士論文をまとめたものである。新田は修士論文の指導にあたった。

また、本論文は3つの章から構成されており、第1章では超準解析の議論に必要な事を簡単に述べ、第2章では超準解析の応用として知られているローブ測度空間とルベーグ測度空間の対応について、結果のみ述べる。そして最後の第3章では、本論文の題名にもなっている一般の汎関数空間上の Fourier 変換、但し domain が測度空間の場合について述べる。

第1章　超準解析の準備

この章では超準解析の議論に必要な事を簡単に述べる。また本章では、定理の証明を省略するので、それらについては中村徹著『超準解析と物理学』の第1章を参照されたい。

§1. $\boldsymbol{R}$ の超巾

［1.1 定義］

(1) 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の部分集合族 $\boldsymbol{F}$ が次の3つの条件を満たすとき、$\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{N}$ 上のフィルターという。

(i) $\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{F}$, $\phi\notin\boldsymbol{F}$.

(ii) ($A\in\boldsymbol{F}$ かつ $A\subseteq B$) $\Rightarrow B\in\boldsymbol{F}$.

(iii) ($A\in\boldsymbol{F}$ かつ $B\in\boldsymbol{F}$) $\Rightarrow A\cap B\in\boldsymbol{F}$.

(2) $\boldsymbol{N}$ 上のフィルター $\boldsymbol{F}$ がさらに次の条件を満たすとき、$\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{N}$ 上の超フィルターという。

(iv) 任意の $A\subseteq\boldsymbol{N}$ に対して、$A\in\boldsymbol{F}$ または $A^c=\boldsymbol{N}\setminus A\in\boldsymbol{F}$ が成り立つ.

このとき $\phi\notin\boldsymbol{F}$ と“($A\in\boldsymbol{F}$ かつ $B\in\boldsymbol{F}$) $\Rightarrow A\cap B\in\boldsymbol{F}$”より、$A\in\boldsymbol{F}$ と $A^c\in\boldsymbol{F}$ が同時に成り立つことはない。

このフィルターについて、次の命題が成り立つ。

［1.2 命題］

(1) 集合 $\boldsymbol{N}$ 上のフィルター $\boldsymbol{F}$ に対して、$\boldsymbol{F}$ を真に含む $\boldsymbol{N}$ 上のフィルターが存在しないとき、$\boldsymbol{F}$ を極大フィルターという。$\boldsymbol{F}$ が極大フィルターであることと $\boldsymbol{F}$ が超フィルターであることは同値である。

(2) $\boldsymbol{N}$ 上の任意のフィルター $\boldsymbol{F}$ に対して、$\boldsymbol{F}$ を含む極大フィルターが存在する。

$\boldsymbol{N}$ の部分集合族 $\boldsymbol{F}_0$ を

$$\boldsymbol{F}_0=\{A\subseteq\boldsymbol{N}\ :\ \boldsymbol{N}\setminus A=A^c \text{ は有限集合}\}$$

と定義する。この $\boldsymbol{F}_0$ はフィルターとなるが、これをフレシェ・フィルターという。

このフレシェ・フィルターは、超フィルターではない。例えば、$A=\{2,4,6,8,\cdots\}$を考えると $A^c=\{1,3,5,7,\cdots\}$ であり、A,A^c がともに無限集合であることから、A,A^c はどちらも $\boldsymbol{F}_0$ に属さない。しかし命題1.2によって、この $\boldsymbol{F}_0$ を含む超フィルターの存在が保証されている。

［1.3 定義］

無限集合 Λ_1 を自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ とし、Λ_1 上のフィルター $\boldsymbol{F}_1$ を $\boldsymbol{N}$ 上のフレシェ・フィルターを含む超フィルターとする。そして実数列全体の集合

$$\boldsymbol{R}^{\Lambda_1}=\{(r_1,r_2,\cdots):\ r_\mu\in\boldsymbol{R}\}=\{f\,|\,f:\Lambda_1\to\boldsymbol{R}\}$$

上の関係～を

$$(r_1, r_2, \cdots) \sim (s_1, s_2, \cdots) \Leftrightarrow \{\mu \in \Lambda_1 : r_\mu = s_\mu\} \in F_1$$

と定義すると、これは同値関係になる。$\boldsymbol{R}^{\Lambda_1}$ をこの同値関係〜で同値類別してできる集合 $\boldsymbol{R}^{\Lambda_1}/\sim$ を $\boldsymbol{R}$ の超巾といい、$^*\boldsymbol{R}$ で表す。定数列 $(m, m, \cdots)$ を代表元とする類 $[(m, m, \cdots)]$ を $m \in \boldsymbol{R}$ と同一視することで、$^*\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}$ を部分集合として含むことになる。

§2. 上部構造

[2.1 定義]

(1) 集合 X に対して、X の部分集合全体の集合を $\boldsymbol{P}(X)$ で表すとき、

$$\mathbb{U}_0(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R},$$

$$\mathbb{U}_{n+1}(^*\boldsymbol{R}) = \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}) \cup P(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})) \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$\mathbb{U}(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})$$

によって定義される $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}$ の上部構造（super structure）という。

これは $\boldsymbol{R}$ に関する数学のすべての諸概念を集合によって同一視したときに、それらをすべて含む集合である。同様に $^*\boldsymbol{R}$ の上部構造 $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ も定義される：

$$\mathbb{U}_0(^*\boldsymbol{R}) = {}^*\boldsymbol{R},$$

$$\mathbb{U}_{n+1}(^*\boldsymbol{R}) = \mathbb{U}_n(^*\boldsymbol{R}) \cup P(\mathbb{U}_n(^*\boldsymbol{R})) \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n(^*\boldsymbol{R}) .$$

(2) $x \in \mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ に対して $x \in \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})$ を満たす最小の n を x のランクといい、$rank(x)$ で表す。また $rank(x)$ は $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ の構成手順の何回目で x がつくられるかを表す数である。同様に $x \in \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ のランクとは $x \in \mathbb{U}_n(^*\boldsymbol{R})$ を満たす最小の n のことである。

[2.2 定義]

(1) 以下の手順で帰納的に構成されたものを $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ の論理式という。

(i) x, y を $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ の各要素を表す定項（constant term）もしくは、$\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ の要素をとって変化する変項（variable term）とするとき、

$$x \in y, \quad x = y$$

は論理式である。これらを特に基本論理式という。

(ii) Φ と Ψ が論理式のとき、$\neg\Phi$，$\Phi \vee \Psi$，$\Phi \wedge \Psi$，$\Phi \to \Psi$ も論理式である。

(iii) $\Phi(x)$ が変項 x を含む論理式のとき、$^\forall x\Phi(x)$，$^\exists x\Phi(x)$ も論理式である。

(iv) 以上の操作を有限回くり返してつくられるもののみを論理式という。

(2) 論理式 Φ の中に現れる変項 x のうち、$^\exists x$，$^\forall x$ の形で現れるものを束縛変項（bounded variable）、そうでないものを自由変項（free variable）といい、自由変項を含まない論理式を閉論理式（closed formula）という。

もし論理式が自由変項 x を含んでいたら「すべての x について」と解釈すべきか「ある x について」と解釈すべきか確定しないので真偽を考えることができない。

ゆえに閉論理式に対してのみ真偽を考えることができる。

(3) y のすべての要素 x に対して $\Psi(x)$ が成り立つという命題、すなわち、$^\forall x\{x \in y \to \Psi(x)\}$ を $^\forall x \in y\Phi(x)$ で表す。また、$\Psi(x)$ を満たすような $x \in y$ が存在するという論理式、すなわち $^\exists x\{(x \in y) \wedge \Psi(x)\}$ を

$^\exists x \in y\Phi(x)$ で表す。

論理式Φの中に$\forall$や$\exists$の記号が全く現れないか、現れたとしても　$x \in y$, $x = y$ の形でのみ現れるとき、Φを限定論理式という。

(4)（1）の$\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$を$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$に置き換えたものを、$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$の論理式と定義する。

§3. 移行原理

［3.1 定義］

(1) $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$のランク$n$の要素、すなわち$\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}) \setminus \mathbb{U}_{n-1}(\boldsymbol{R})$の要素を並べた列全体を考え、これに対し関係〜を

$$(A_1, A_2, \cdots) \sim (B_1, B_2 \cdots) \Leftrightarrow \{\mu \in \Lambda_1 : A_\mu = B_\mu\} \in F_1$$

と定義すると、同値関係になる。この同値関係〜で類別してできる類の全体を$\tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R})$とし、

$\tilde{\mathbb{U}}(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R})$ とする：

$$\tilde{\mathbb{U}}(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R}), \quad \tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R}) = (\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}) \setminus \mathbb{U}_{n-1}(\boldsymbol{R}))^{\Lambda_1} / \sim .$$

以下、$\tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R})$の$(x_1, x_2 \cdots)$を代表元とする類$[(x_1, x_2, \cdots)]$を$[(x_\mu); \mu \in \Lambda_1] = [(x_\mu)]$と略記する。

［3.2 定義］

(1) $x \in \mathbb{U}(\boldsymbol{R})$に対して、列$(x, x, x, \cdots)$を代表元とする類$[(x, x, x, \cdots)] \in \tilde{\mathbb{U}}(\boldsymbol{R})$を対応させる写像を$\alpha_1$とする。

(2) 写像$\beta_1 : \tilde{\mathbb{U}}(\boldsymbol{R}) \to \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$を次のように定義する。

（i）$(^*\boldsymbol{R} =)\tilde{\mathbb{U}}_0(\boldsymbol{R})$の上では$\beta_1$は恒等写像とする。

（ii）$\tilde{\mathbb{U}}_0(\boldsymbol{R}) \cup \tilde{\mathbb{U}}_1(\boldsymbol{R}) \cup \cdots \cup \tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R})$の要素に対して写像$\beta_1$が定義されているとして、$\tilde{\mathbb{U}}_{n+1}(\boldsymbol{R})$の任意の要素$x = [(x_\mu)] (x_\mu \in \mathbb{U}_{n+1}(\boldsymbol{R}) \setminus \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}), \mu \in \Lambda_1)$に対して、

$$\beta_1(x) = \{\beta_1(y) : y = [(y_\mu)] \in \tilde{\mathbb{U}}_0(\boldsymbol{R}) \cup \cdots \tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R}), \{\mu \in \Lambda_1 : y_\mu \in x_\mu\} \in F_1\}$$

で$\beta_1(x)$を定義する。

(3) 合成写像$\beta_1 \circ \alpha_1 : \mathbb{U}(\boldsymbol{R}) \to \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$を＊で表し、$x \in \mathbb{U}(\boldsymbol{R})$の写像＊による像$^*(x)$を$^*x$で表す。

［3.3 定義］

$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$の要素のうち、写像＊の値域に入っているものを標準元（standard element)、写像β_1の値域に入っているものを内的な元(internal element)、$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$の要素のうち内的でないものを外的な元(external element）という。

［3.4 定理］（ウォッシュの定理）

定項がすべて内的な$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$の限定閉論理式

$$\Phi = \Phi(\beta_1([(a_\mu)]), \beta_1([(b_\mu)]), \cdots, \beta_1([(c_\mu)]))$$

が$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$で真であることと

$$\{\mu \in \Lambda_1 : \Phi(a_\mu, b_\mu, \cdots c_\mu) \text{ が } \mathbb{U}(\boldsymbol{R}) \text{ で真である}\} \in F_1$$

は同値である。

このウォッシュの定理から次の定理を導くことができる。

[3.5 定理]（移行原理）

$\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ の限定閉論理式 $\Phi=\Phi(a,b,\cdots,c)$ （但し $a,b,\cdots c,\in \mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ を Φ の中に現れる定項とする）について、

$$\Phi(a,b,\cdots,c) \text{ が } \mathbb{U}(\boldsymbol{R}) \text{ で真である} \underset{\text{同値}}{\Leftrightarrow} \Phi(^*a,^*b,\cdots,^*c) \text{ が } \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R}) \text{ で真である}$$

が成り立つ。

この移行原理により、スタンダードな世界で成り立つ性質の多くが、ノンスタンダードな世界でも成り立つことがわかる。

§4. 内的な集合に関する諸定理

ここでは内的な集合について成り立つ諸定理について述べる。

[4.1 命題]（内的集合の特徴づけ 1）

$a\in\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ について、a が内的であるためには、$a\in{}^*b$ を満たす $b\in\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ が存在することが必要十分である。つまり内的な元とは、ある標準元の要素となっているもののことである。

・4.1 の系　内的な元の全体は、$\bigcup_{n=0}^{\infty}{}^*(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}))$ と一致する。

[4.2 命題]（内的集合の特徴づけ 2）

内的な集合の要素は内的である。

（ここで考えている内的な集合とは、もちろん $^*\boldsymbol{R}$ の要素ではない）

[4.3 定義]

$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の論理式 Φ について、その中に現れる定項がすべて内的な元であるとき、Φ を $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の内的な論理式という。

[4.4 命題]（内的集合の特徴づけ 3）（Keisler の定理）

$\Phi(x)$ を x のみを自由変項として含む $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の内的な限定論理式とし、A を内的な集合とするとき、集合 $\{x\in A:\Phi(x)$ は $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ で真である$\}$は内的である。

[4.5 定義]

ランクが 1 以上の $A\in\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ に対して、${}^{\mathrm{st}}A=\{^*a:a\in A\}$ とすると、これは $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の要素である。混乱のおそれのない限り $A\in\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ と ${}^{\mathrm{st}}A\in\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ を同一視して単に A で表すことが多い。特に $A\in\mathbb{U}_1(\boldsymbol{R})\setminus\mathbb{U}_0(\boldsymbol{R})$ のときは、完全に ${}^{\mathrm{st}}A$ と A を同一視できる。また、この ${}^{\mathrm{st}}A$ を A を $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ に埋め込んだ集合ということもある。

$^*\boldsymbol{R}$ を定義したときに $^*\boldsymbol{R}$ が実数を含むと述べたのは、${}^{st}\boldsymbol{R}\subseteq{}^*\boldsymbol{R}$ ということである。

また、ここまで $\Lambda_1=\boldsymbol{N}$ の場合で議論してきたが、Λ_1 が一般の無限集合の場合でも同様の議論を行うことができる。

§5. 有限数と無限大数と無限小数

以下、$A\in\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ に対する ${}^{\mathrm{st}}A\in\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ （定義 4.5）を単に A で表すことにする。

[5.1 定義]

(1) $*\boldsymbol{N}$，$*\boldsymbol{Z}$，$*\boldsymbol{R}$ の要素をそれぞれ超自然数，超整数，超実数という。

(2) すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $|x|>n$ が成り立つような $a\in *\boldsymbol{R}$ を（正，負の）無限大数という。

(3) $|x|<n$ を満たす $n\in\boldsymbol{N}$ が存在するとき、$x\in *\boldsymbol{R}$ を有限数という。

(4) すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $|x|<\dfrac{1}{n}$ が成り立つとき、$x\in *\boldsymbol{R}$ を（正，負の）無限小数という。または無限小ともいう。

(5) $x,y\in *\boldsymbol{R}$ に対して $x-y$ が無限小数のとき、x と y は無限に近いといい、$x\cong y$ で表す。

・例 1　$[(1,2,3,\cdots,\mu,\cdots)]$ は無限大数である。

・例 2　$[(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{\mu},\cdots)]$ は無限小数である。

これらが無限大数や無限小数であることは、フレシェ・フィルターの性質とウォッシュの定理からわかる。そして超実数の性質において、次の命題は特に重要である。

[5.2 命題]

$a\in *\boldsymbol{R}$ が有限数のとき、$a\cong r$ を満たす $r\in\boldsymbol{R}$ がただ 1 つ存在する。

この命題から、次の標準化写像が定義される。

[5.3 定義]

有限数 $a\in *\boldsymbol{R}$ に対して $a\cong r$ を満たすただ 1 つの $r\in\boldsymbol{R}$ を $a\in *\boldsymbol{R}$ の標準部分（standard part）といい、${}^{\circ}a$ で表す。$a\in *\boldsymbol{R}$ に対して ${}^{\circ}a$ を対応させる写像を $\circ$ で表し、標準化写像（standard map）という。写像 $\circ$ を st で表し、${}^{\circ}a=st(a)$ と表すこともある。

さらに後の便利のために、$a\in *\boldsymbol{R}$ が有限数でないとき、$a>0$ ならば ${}^{\circ}a=\infty$，$a<0$ ならば ${}^{\circ}a=-\infty$ と標準化写像 $\circ$ の定義を拡張しておく。

[5.4 定義]

(1) $A\in\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ の有限部分集合の全体を $\boldsymbol{P}_F(A)$ とするとき、写像 $*$ による $\boldsymbol{P}_F(A)$ の像を $*(\boldsymbol{P}_F(A))=*\boldsymbol{P}_F(*A)$ で表し、その要素を $*A$ の $*$ - 有限部分集合という。

(2) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}*(\boldsymbol{P}_F(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})))$ の要素を $*$ - 有限部分集合という。

この $*$ - 有限集合はもちろん内的な集合であり、移行原理によってスタンダードな世界における有限集合の性質の多くを保つ集合である。また $*A$ の $*$ - 有限部分集合 a は、

$$a=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{x_k : k\in *\boldsymbol{N}, k\leq n\}\ (n\in *\boldsymbol{N})$$

の形に表すことができる。

以下の記号を用いることにする：

$$\boldsymbol{R}^+=\{x\in\boldsymbol{R} : x>0\},\quad *\boldsymbol{R}^+=\{x\in *\boldsymbol{R} : x>0\},$$

$$*\boldsymbol{N}_\infty=\{n\in *\boldsymbol{N} : n \text{ は無限大数，すなわち } {}^{\forall}m\in\boldsymbol{N}, |n|>m\}=*\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{N}.$$

第2章　超準解析における積分論の応用

この章ではスタンダードな世界の測度空間が、ノンスタンダードな世界の＊-有限加法的測度空間から導かれるローブ測度空間と対応付けられることを簡単に結果だけ述べる。
また第1章と同じく、本章でも証明は省略させて頂くので、足りない部分については中村徹著『超準解析と物理学』の第2章を参照されたい。

§1.　＊-有限加法的測度空間とローブ測度空間

［1.1 定義］

以下の (i) から (vi) を満たす (X,A_d,τ) を内的な＊-有限加法的測度空間という。これがさらに (vii) を満たすとき、(X,A_d,τ) は有界であるという。

（i）X,A_d,τ はいずれも内的な集合である。

（ii）A_d の要素は X の内的な部分集合である。

（iii）τ は A_d から $*\boldsymbol{R}^+\cup\{0,*\infty\}$ への写像である。

（iv）$\phi\in\mathrm{A}_d$ であり、$(A\in\mathrm{A}_d$ ならば $A^c\in\mathrm{A}_d)$ である。

（v）$n\in*\boldsymbol{N}$ とするとき、A_d の要素の内的な＊-有限列 $<A_1,A_2,\cdots,A_n>$ に対して、

$$\bigcup_{k\le n}A_k \text{ は } \mathrm{A}_d \text{ の要素である。}$$

（vi）（v）の $<A_1,A_2,\cdots,A_n>$ が $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$ を満たしているならば、

$$\tau(\bigcup_{k\le n}A_k)=\sum_{k\le n}\tau(A_k).$$

（vii）$\tau(X)$ は有限数である。

［1.2 定義］

X を＊-有限集合とし、内的な＊-有限加法的測度空間 (X,A_d,τ) が重みとよばれる内的な関数 $\rho:X\to*\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$ によって次のように構成されているとする：

$$\mathrm{A}_d=*\boldsymbol{P}(X)\ \ (=X\text{ の内的な部分集合の全体}),$$

$$\tau(A)=\sum_{x\in A}\rho(x)\ \ (A\in\mathrm{A}_d).$$

$A\in\mathrm{A}_d$ に対して ${}^\circ(\tau(A))$ を対応させる写像 ${}^\circ\tau$ は、A_d から $\boldsymbol{R}\cup\{\pm\infty\}$ への有限加法的な測度である。X の任意の内的または外的な部分集合 E に対して

$${}^\circ\overline{\tau}(E)=\inf\{{}^\circ\tau(A):E\subseteq A,A\in\mathrm{A}_d\},$$

$${}^\circ\underline{\tau}(E)=\sup\{{}^\circ\tau(A):A\subseteq E,A\in\mathrm{A}_d\}$$

によって外測度 ${}^\circ\overline{\tau}:\boldsymbol{P}(X)\to[0,\infty]$ と内測度 ${}^\circ\underline{\tau}:\boldsymbol{P}(X)\to[0,\infty]$ を定義する。

［1.3 定義］

(1)　$E\subseteq X$ が ${}^\circ\underline{\tau}(E)={}^\circ\overline{\tau}(E)<\infty$ を満たすとき τ_L－可積分な集合といい、その全体を $I(\mathrm{A}_d)$ で表す。

(2)　$M\subseteq X$ について、すべての $E\in I(\mathrm{A}_d)$ に対して $M\cap E\in I(\mathrm{A}_d)$ が成り立つとき、M は τ_L－可測であ

るという。τ_L－可測集合全体を$L(\mathrm{A}_d)$で表す。また$L(\mathrm{A}_d)$の要素であるτ_L－可測集合をローブ可測集合、または$L(\mathrm{A}_d)$可測集合という。

[1.4 定理]

(1)　$M \in L(\mathrm{A}_d)$に対して、$\tau_L(M) = {}^{\circ}\overline{\tau}(M)$で写像$\tau_L : L(\mathrm{A}_d) \to [0,+\infty]$を定義する。

このとき$(X, L(\mathrm{A}_d), \tau_L)$が完備な$\sigma$－加法的測度空間となる。

(2)　A_d上の有限加法的測度${}^{\circ}\tau$のA_dを含む最小のσ－加法族$\sigma(\mathrm{A}_d)$への拡張は1通りである。

この$(X, L(\mathrm{A}_d), \tau_L)$をローブ測度空間（Loeb measure space）という。

[1.5 定義]

$L(\mathrm{A}_d)$‐可測関数$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$に対して、＊‐単関数$F : X \to {}^*\mathbb{R}$が$f$のもちあげ（lifting）とは、

$${}^{\circ}F(x) = f(x) \quad (\tau_L\text{ - a.e.}) \iff \tau_L(\{x \in X : {}^{\circ}F(x) \neq f(x)\}) = 0$$

を満たすときをいう。

なお＊‐単関数とは、スタンダードな世界における単関数の定義に移行原理を用いて得られる条件を満たす内的な関数のことである。

[1.6 定義]

次の3つの性質（a），（b），（b'）を同時に満たす内的な＊‐単関数$F : X \to {}^*\mathbb{R}$はS－可積分であるといい、その全体を$S - L^1(X)$で表す。

（a）${}^*\int_X |F(x)| \tau(dx)$は有限数である。

（b）$A \in \mathrm{A}_d$が$\tau(A) \cong 0$を満たすならば、${}^*\int_A |F(x)| \tau(dx) \cong 0$

（b'）$A \in \mathrm{A}_d$の上で$F(x) \cong 0$ならば、${}^*\int_A |F(x)| \tau(dx) \cong 0$.

${}^{\circ}\mu(X) < \infty$のときは明らかに（b'）が成り立つので、（a）と（b）だけでよい。

また、${}^*\int_X F(x)\tau(dx)$は＊‐単関数Fの＊‐積分であるが、これはスタンダードな世界における実数の有限集合から実数への写像$\sum$を移行原理によってノンスタンダードな世界に拡張した$\sum : {}^*\mathcal{P}_F({}^*\mathbb{R}) \to {}^*\mathbb{R}$による$\sum_{x \in X} F(x)\rho(x)$の値と等しい。

[1.7 定理]

$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$が$\tau_L$‐可積分ならば、$S - L^1(X)$に属する＊‐単関数$F : X \to {}^*\mathbb{R}$で、

$${}^{\circ}F(x) = f(x) \quad (\tau_L\text{-a.e.}), \qquad {}^{\circ}\left({}^*\int_X F(x)\tau(dx)\right) = \int_X f(x)\tau_L(dx)$$

を満たすものが存在する。

§2. スタンダードな世界との対応例，区間$[0,1]$上のルベーグ積分

ルベーグ測度をローブ測度として構成してみる。簡単のため、区間$[0,1]$で考える。

$N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$を固定し、＊‐有限加法的測度空間$(X, \mathrm{A}_d, \tau)$を次のように定義する。

$X = \{\frac{k}{N} : 0 \le k \le N-1, k \in {}^*\boldsymbol{N}\}$, $\mathrm{A}_d = {}^*\boldsymbol{P}(X)$ （X の内的な部分集合の全体),

$\tau(A) = \frac{|A|}{N}$ （$A \in \mathrm{A}_d$）.（但し $|A| \in {}^*\boldsymbol{N} \cup \{0\}$ は $A \in \mathrm{A}_d$ の要素の個数とする）

記号：$\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{\pm\infty\}$.

［2.1 定義］（ルベーグ積分におけるもちあげ）

(1) $f : [0,1] \to \overline{\boldsymbol{R}}$ に対して、内的な関数 $F : X \to {}^*\boldsymbol{R}$ が

$${}^\circ(F(x)) = f({}^\circ x) \quad (\tau_L \text{ - a.e.}) \cdots (\sharp)$$

を満たすとき、F を f のもちあげという。これは F が $f \circ st : X \to \overline{\boldsymbol{R}}$ の定義 1.5 の意味でのもちあげになっていることと同じである。

(2)（♯）の中の「（τ_L - a.e.)」を「すべての $x \in X$ に対して」に変更したとき、F は f の一様なもちあげであるという。

［2.2 定理］

(1) $S \subseteq [0,1]$ がルベーグ可測集合であるためには、

$$st^{-1}(S) = \{x \in X : {}^\circ x \in S\}$$

が $L(\mathrm{A}_d)$ - 可測集合であることが必要十分である。さらに、ルベーグ測度を ν で表すとき、$\nu(S) = \tau_L(st^{-1}(S))$ が成り立つ。

(2) $f : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ が連続であるためには、f が一様なもちあげを持つことが必要かつ十分である。

(3) $f : [0,1] \to \overline{\boldsymbol{R}}$ がルベーグ可測関数であるためには、f がもちあげを持つことが必要十分である。

(4) $f : [0,1] \to \overline{\boldsymbol{R}}$ がルベーグ積分可能であるためには、f が $S - L^1(X)$ の中にもちあげを持つことが必要十分である。さらに、f のもちあげを F とすると

$$\int_0^1 f(x)\nu(x) \cong {}^*\!\int_X F(x)\tau(dx) \; (= \sum_{x \in X} F(x)\frac{1}{N})$$

が成り立つ。

また、次の命題が成り立つことが、齋藤正彦著『超積と超準解析』の P103 例 5.1.5 で紹介されている。

［2.3 命題］

(M, β, μ_0) を測度空間とすると、その測度に関して積分が定義されることになるが、その実数値可積分関数全体の集合を E とすると、ある＊ - 有限集合 $X(\subseteq {}^*M)$、およびその X 上の内的な超実数値関数 $\rho : X \to {}^*\boldsymbol{R}$ が存在して、任意の $f \in E$ に対して

$$\int_M f(x)\mu_0(dx) \cong \sum_{x \in X}{}^* f(x)\rho(x)$$

が成り立つ。

ここまでの議論は実数値関数に関して行ってきたが、複素数値関数に対しても、実部と虚部に分けて、各々にこれまでの議論を適用すればよいので、その場合も成り立つことになる。

第3章　一般の汎関数空間上の無限小 Fourier 変換

この章では一般の汎関数空間上の無限小 Fourier 変換について述べるが､特に domain が測度空間の場合について考える。また、汎関数空間上の Fourier 変換を行うために、新田・岡田の理論にしたがって超巾の拡大を2回行う。この2回の拡大は余り一般的ではないので、まずは2回の拡大に関する性質について述べる。また、すでに第1章で定義した記号はそのまま用いることにする。

§1. $^*\boldsymbol{R}$ の超巾 $^{\star}(^*\boldsymbol{R})$

第1章で定義したように、$^*\boldsymbol{R}$ の超巾や上部構造なども同様に定義される。

［1.1 定義］

(1) 無限集合 Λ_2 を自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ とし、Λ_2 上のフィルター F_2 を $\boldsymbol{N}$ 上のフレシェ・フィルターを含む超フィルターとする。そして超実数の列全体の集合

$$^*\boldsymbol{R}^{\Lambda_2}=\{(r_1,r_2,\cdots):r_\lambda\in{}^*\boldsymbol{R}\}=\{f\,|\,f:\Lambda_2\to{}^*\boldsymbol{R}\}$$

上の関係～'を

$$(r_1,r_2,\cdots)\sim'(s_1,s_2,\cdots)\Leftrightarrow\{\lambda\in\Lambda_2:r_\lambda=s_\lambda\}\in F_2$$

と定義すると､関係～'は同値関係となる。$^*\boldsymbol{R}^{\Lambda_2}$ をこの同値関係～'で同値類別してできる集合 $^*\boldsymbol{R}^{\Lambda_2}/\sim'$ を $^*\boldsymbol{R}$ の超巾といい、$^{\star}(^*\boldsymbol{R})$ で表す。

(2) $^{\star}(^*\boldsymbol{R})$ の上部構造 $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ は次のように定義される：

$$\mathbb{U}_0(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))={}^{\star}(^*\boldsymbol{R}),$$

$$\mathbb{U}_{n+1}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))=\mathbb{U}_n(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))\cup\boldsymbol{P}(\mathbb{U}_n(^{\star}(^*\boldsymbol{R})))\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_n(^{\star}(^*\boldsymbol{R})).$$

(3) $x\in\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ のランクとは $x\in\mathbb{U}_n(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ を満たす最小の n のことをいう。

［1.2 定義］

第1章の定義 2.2（1）の $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ を $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ に置き換えたものを $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ の論理式と定義する。

［1.3 定義］

$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ のランク n の要素､すなわち $\mathbb{U}_n(^*\boldsymbol{R})\setminus\mathbb{U}_{n-1}(^*\boldsymbol{R})$ の要素を並べた列全体を考え､これに対し関係～'を

$$(A_1,A_2,\cdots)\sim'(B_1,B_2,\cdots)\Leftrightarrow\{\lambda\in\Lambda_2:A_\lambda=B_\lambda\}\in F_2$$

と定義すると同値関係になる。この同値関係～'で類別してできる類の全体を $\tilde{\mathbb{U}}_n(^*\boldsymbol{R})$ とし、$\tilde{\mathbb{U}}(^*\boldsymbol{R})=\bigcup_{n=0}^{\infty}\tilde{\mathbb{U}}_n(^*\boldsymbol{R})$ とする：

$$\tilde{\mathbb{U}}(^*\boldsymbol{R})=\bigcup_{n=0}^{\infty}\tilde{\mathbb{U}}_n(^*\boldsymbol{R}),\qquad\tilde{\mathbb{U}}_n(\boldsymbol{R})=(\mathbb{U}_n(^*\boldsymbol{R})\setminus\mathbb{U}_{n-1}(^*\boldsymbol{R}))^{\Lambda_2}/\sim'.$$

以下、$\tilde{\mathbb{U}}(^*\boldsymbol{R})$ の $(y_1,y_2,\cdots)$ を代表元とする類 $[(y_1,y_2,\cdots)]$ を $[(y_\lambda);\lambda\in\Lambda_2]=[(y_\lambda)]$ と略記することにする。

［1.4 定義］

(1) $x\in\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ に対して、列 $(x,x,x,\cdots)$ を代表元とする類 $[(x,x,x,\cdots)]\in\tilde{\mathbb{U}}(^*\boldsymbol{R})$ を対応させる写像を α_2 とす

る：$\alpha_2 : \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R}) \to \tilde{\mathbb{U}}(^*\boldsymbol{R})$.

(2) 写像 $\beta_2 : \tilde{\mathbb{U}}(^*\boldsymbol{R}) \to \mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ を次のように定義する。

（i）$(^{\star}(^*\boldsymbol{R} =))\, \tilde{\mathbb{U}}_0(^*\boldsymbol{R})$ の上では β_2 は恒等写像とする。

（ii）$\tilde{\mathbb{U}}_0(^*\boldsymbol{R}) \cup \tilde{\mathbb{U}}_1(^*\boldsymbol{R}) \cup \cdots \cup \tilde{\mathbb{U}}_n(^*\boldsymbol{R})$ の要素に対して写像 β_2 が定義されているとして、$\tilde{\mathbb{U}}_{n+1}(^*\boldsymbol{R})$ の任意の要素 $x = [(x_\lambda)]$ $(x_\lambda \in \mathbb{U}_{n+1}(^*\boldsymbol{R}) \setminus \mathbb{U}_n(^*\boldsymbol{R}), \lambda \in \Lambda_2)$ に対して

$$\beta_2(x) = \{\beta_2(y) : y = [(y_\lambda)] \in \tilde{\mathbb{U}}_0(^*\boldsymbol{R}) \cup \cdots \tilde{\mathbb{U}}_n(^*\boldsymbol{R}), \{\lambda \in \Lambda_2 : y_\lambda \in x_\lambda\} \in F_2\}$$

で $\beta_2(x)$ を定義する。

(3) 合成写像 $\beta_2 \circ \alpha_2 : \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R}) \to \mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ を☆で表し、$x \in \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の写像☆による像☆(x) を $^{\star}x$ で表す。

すでにスタンダードな世界 $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ からノンスタンダードな世界 $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ への写像 * が定義されていたが、これによりさらに $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ から $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ への写像が定義されたことになる。また、第 1 章と同様にウォッシュの定理や移行原理も成り立つ。

［1.5 定理］

(1)（ウォッシュの定理）

$\Phi(a,b,\cdots,c)$ を $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の限定閉論理式、$a,b,\cdots,c \in \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ をその中に現れるすべての定項とする。

$[(u_\lambda)]$, $[(v_\lambda)]$, $\cdots$, $[(w_\lambda)] \in \tilde{\mathbb{U}}(^*\boldsymbol{R})$ から $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ の定項

$$u = \beta_2([(u_\lambda)]),\quad v = \beta_2([(v_\lambda)]),\quad \cdots,\quad w = \beta_2([(w_\lambda)])$$

を作り、Φ の中の $a,b,\cdots,c$ を $u,v,\cdots,w$ に置き換えて得られる論理式を $\Phi(u,v,\cdots,w)$ とすると、これは $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ の限定閉論理式であるが、このとき次の同値関係が成り立つ：

$\Phi(u,v,\cdots,w)$ が $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ で真である

$\Leftrightarrow$ $\{\lambda \in \Lambda_2 : \Phi(u_\lambda, v_\lambda, \cdots, w_\lambda)$ が $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ で真である $\} \in F_2$.

(2)（移行原理）

$\Phi = \Phi(a,b,\cdots,c)$ を $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ の限定閉論理式、$a,b,\cdots,c \in \mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ を Φ の中に現れる定項とするとき、次の同値関係が成り立つ：

$\Phi(a,b,\cdots,c)$ が $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ で真である $\Leftrightarrow$ $\Phi(^{\star}a, ^{\star}b, \cdots, ^{\star}c)$ が $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ で真である.

（証明）

(1) のウォッシュの定理と (2) の移行原理は、それぞれ第 1 章の定理 3.4 と定理 3.5 と同様にして証明できるので、中村徹著『超準解析と物理学』を参照されたい。 □

§2. 一次内的と二次内的

第 1 章の定義 3.3 で“内的”について定義したが、ここでは 2 回の拡大によって $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の内的と $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ の内的を考えることになるから、それらを区別する必要がある。
そこで $\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の要素のうち、写像 * の値域に入っているものを一次標準元、写像 β_1 の値域に入っているものを一次内的といい、$\mathbb{U}(^*\boldsymbol{R})$ の要素のうち一次内的でないものを一次外的ということにする。
そして $\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ の要素のうち、写像☆の値域に入っているものを二次標準元、写像 β_2 の値域に入っているものを二次内的といい、$\mathbb{U}(^{\star}(^*\boldsymbol{R}))$ の要素のうち二次内的でないものを二次外的ということにする。
このとき第 1 章の§4 で述べた一次内的な集合に関する諸定理が、やはり二次内的な集合についても成り立つ。証明は一次内的な集合の場合と同様にして示すことができる。ゆえにそれらの命題を以下、命題 2.1～命題 2.3 として結果のみ述べる。

［2.1 命題］（二次内的集合の特徴づけ 1）

$a \in \mathbb{U}({}^{\star}({}^{*}\mathbb{R}))$ について、a が二次内的であるためには、$a \in {}^{\star} b$ を満たす $b \in \mathbb{U}({}^{*}\mathbb{R})$ が存在することが必要十分である。つまり二次内的な元とは、ある二次標準元の要素となっているもののことである。

・2.1 の系

二次内的な元の全体は、$\bigcup_{n=0}^{\infty} {}^{\star}(\mathbb{U}_n({}^{*}\mathbb{R}))$ と一致する。

［2.2 命題］（二次内的集合の特徴づけ 2）

二次内的な集合の要素は二次内的である。

（ここで考えている二次内的な集合とは、もちろん ${}^{\star}({}^{*}\mathbb{R})$ の要素ではない）

［2.3 命題］（二次内的集合の特徴づけ 3）

$\Phi(x)$ を x のみを自由変項として含む $\mathbb{U}({}^{\star}({}^{*}\mathbb{R}))$ の二次内的な限定論理式とし、A を二次内的な集合とするとき、集合

$$\{x \in A : \Phi(x) \text{ は } \mathbb{U}({}^{\star}({}^{*}\mathbb{R})) \text{ で真である} \}$$

は二次内的である。

［2.4 定義］

第 1 章の定義 4.5 と同様に、ランクが 1 以上の $B \in \mathbb{U}({}^{*}\mathbb{R})$ を $\mathbb{U}({}^{\star}({}^{*}\mathbb{R}))$ へ埋め込んだ集合 ${}^{\star\text{-st}}B$ も定義され、${}^{\star\text{-st}}B \subset {}^{\star}B$ となる。特に ${}^{\star\text{-st}}({}^{st}\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ と同一視できる。

$${}^{\star\text{-st}}B = \{{}^{\star}b : b \in B\}, \quad {}^{\star\text{-st}}B \subset {}^{\star}B .$$

§3. 2 重の内的

このセクションで述べる 2 重の内的は中村徹の本にはないので、証明も載せておく。

［3.1 定義］

今、$\mathbb{U}({}^{\star}({}^{*}\mathbb{R}))$ の元 A が二次内的であり、なおかつ $A = \beta_2([(A_\lambda)])$ とおくとき、

$$\{\lambda \in \Lambda_2 : A_\lambda \text{ は一次内的である} \} \in F_2$$

を満たすとする。このとき A は 2 重の意味で内的である、または 2 重の内的であるという。

［3.2 命題］（2 重の内的集合の特徴づけ 1）

$a \in \mathbb{U}({}^{\star}({}^{*}\mathbb{R}))$ について、a が 2 重の意味で内的であるためには、$a \in {}^{\star}({}^{*}b)$ を満たす $b \in \mathbb{U}(\mathbb{R})$ が存在することが必要十分である。

（証明）

十分性.　$a \in \mathbb{U}({}^{\star}({}^{*}\mathbb{R}))$ に対して、$a \in {}^{\star}({}^{*}b)$ を満たす $b \in \mathbb{U}(\mathbb{R})$ が存在するとする。

このとき a は命題 2.1 より二次内的なので、$a = \beta_2([(a_\lambda)])$ と表せる。

するとウォッシュの定理より、

$$a \in {}^{\star}({}^{*}b) \Leftrightarrow \{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \in {}^{*}b \} \in F_2$$

が成り立ち、各 a_λ は一次標準元 ${}^{*}b$ の要素であるから、a_λ も一次内的である。よって

$$\{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \in {}^{*}b \} \subseteq \{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \text{ は一次内的である} \} \in F_2$$

であるから、a は 2 重の意味で内的である。

必要性.　$a \in \mathbb{U}({}^*\mathbb{R})$ が 2 重の意味で内的であるとする。このとき a は二次内的なので、$a = \beta_2([(a_\lambda)])$ となる $[(a_\lambda)] \in \tilde{\mathbb{U}}({}^*\mathbb{R})$ が存在し、命題 2.1 の系より

$${}^\exists m \in \mathbb{N} \ s.t.\ a \in^{\star} (\mathbb{U}_m({}^*\mathbb{R}))$$

が成り立つ。ゆえにウォッシュの定理から

$$\{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \in \mathbb{U}_m({}^*\mathbb{R})\} \in F_2$$

となる。今、a は 2 重の意味で内的なので、各 a_λ は一次内的である。ゆえに命題 2.1 の系より、

$a_\lambda \in \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*(\mathbb{U}_n(\mathbb{R}))$ となるが、$a_\lambda \in \mathbb{U}_m({}^*\mathbb{R})$ であることから、

$$a_\lambda \in \bigcup_{k=0}^{m} {}^*(\mathbb{U}_k(\mathbb{R})) = {}^*(\mathbb{U}_m(\mathbb{R}))$$

となる。ゆえに

$$\{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \in \mathbb{U}_m({}^*\mathbb{R})\} \cap \{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \text{ は一次内的である}\}$$
$$\subseteq \{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \in {}^*(\mathbb{U}_m(\mathbb{R}))\} \in F_2$$

が成り立ち、ウォッシュの定理から $a \in^{\star} ({}^*(\mathbb{U}_m(\mathbb{R})))$ となる。

もちろんこの $\mathbb{U}_m(\mathbb{R})$ は、$\mathbb{U}(\mathbb{R})$ の定義から $\mathbb{U}(\mathbb{R})$ の元である。 □

• 3.2 の系

2 重の意味で内的な元の全体は、$\bigcup_{n=0}^{\infty} {}^{\star}({}^*(\mathbb{U}_n(\mathbb{R})))$ と一致する。

（証明）

命題 3.2 の証明より、2 重の意味で内的である任意の元 $a \in \mathbb{U}({}^{\star}({}^*\mathbb{R}))$ に対して、$a \in^{\star} ({}^*(\mathbb{U}_m(\mathbb{R})))$ を満たす $\mathbb{U}_m(\mathbb{R}) \in \mathbb{U}(\mathbb{R})$ が存在する。このとき

$$a \in^{\star} ({}^*(\mathbb{U}_m(\mathbb{R}))) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^{\star}({}^*(\mathbb{U}_n(\mathbb{R})))$$

が成り立つので、(2 重の意味で内的である元の全体) は $\bigcup_{n=0}^{\infty} {}^{\star}({}^*(\mathbb{U}_n(\mathbb{R})))$ に含まれる。

逆に任意の $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^{\star}({}^*(\mathbb{U}_n(\mathbb{R})))$ について、$a \in^{\star} ({}^*(\mathbb{U}_m(\mathbb{R})))$ となる $\mathbb{U}_m(\mathbb{R}) \in \mathbb{U}(\mathbb{R})$ が存在するので、命題 3.2 から a は 2 重の意味で内的な元となる。

よって 2 重の意味で内的な元の全体は、$\bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*(\mathbb{U}_n(\mathbb{R}))$ と一致する。 □

[3.3 命題] (2 重の内的集合の特徴づけ 2)

2 重の意味で内的な集合の要素は 2 重の意味で内的である。

（証明）

a を 2 重の意味で内的な集合で $b \in a$ とする。このとき a は二次内的な集合であり、なおかつその元である b も命題 2.2 から二次内的となる。そこで

$$a = \beta_2([(a_\lambda)]), \quad b = \beta_2([(b_\lambda)])$$

とおくとき、ウォッシュの定理から $\{\lambda \in \Lambda_2 : b_\lambda \in a_\lambda\} \in F_2$ が成り立つ。また、a は 2 重の意味で内的な集合なので各 a_λ は一次内的であり、その元である b_λ についても第 1 章の命題 4.2 から一次内的となる。よって、

$$\{\lambda \in \Lambda_2 : b_\lambda \in a_\lambda\} \cap \{\lambda \in \Lambda_2 : a_\lambda \text{は一次内的である}\}$$
$$\subseteq \{\lambda \in \Lambda_2 : b_\lambda \text{は一次内的である}\} \in F_2$$

が成り立つので、b は2重の意味で内的である。　□

［3.4 定義］

$\mathbb{U}({}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R}))$ の論理式 Φ について、その中に現れる定項がすべて 2 重の意味で内的であるとき、Φ を $\mathbb{U}({}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R}))$ の2重の意味で内的な論理式、または2重の内的な論理式という。

［3.5 命題］

$\Phi(x)$ を x のみを自由変項として含む $\mathbb{U}({}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R}))$ の 2 重の意味で内的な限定論理式とし、A を 2 重の意味で内的な集合とするとき、集合

$$\{x \in A : \Phi(x) \text{ は } \mathbb{U}({}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})) \text{ で真である}\}$$

は2重の意味で内的である。

（証明）

$\Phi(x)$ に現れる定項を $c_1, c_2, \cdots, c_m$ として、$\Phi(x)$ を $\Phi(c_1, \cdots, c_m, x)$ と表すことにする。$c_1, c_2, \cdots, c_m, A$ は2重の意味で内的なので、命題3.2の系から十分大きい n をとれば、$c_1, c_2, \cdots, c_m, A \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})))$ となる。そこで $\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ の限定論理式

$$\forall x_1 \in \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}) \cdots \forall x_m \in \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})\ \forall y \in \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})$$
$$\exists z \in \mathbb{U}_{n+1}(\boldsymbol{R})\ \forall x \in \mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})\ (x \in z \leftrightarrow (x \in y \wedge \Phi(x_1, \cdots, x_m, x)))$$

を考えると、これは分出公理により $z = \{x : x \in y \wedge \Phi(x_1, \cdots, x_m, x)\}$ が存在するので、$\mathbb{U}(\boldsymbol{R})$ で真である。すると移行原理により

$$\forall x_1 \in {}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})) \cdots \forall x_m \in {}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}))\ \forall y \in {}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}))$$
$$\exists z \in {}^{*}(\mathbb{U}_{n+1}(\boldsymbol{R}))\ \forall x \in {}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}))\ (x \in z \leftrightarrow (x \in y \wedge \Phi(x_1, \cdots, x_m, x)))$$

は $\mathbb{U}({}^{*}\boldsymbol{R})$ で真である。さらに $\mathbb{U}({}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R}))$ への移行原理を用いれば、

$$\forall x_1 \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R}))) \cdots \forall x_m \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})))\ \forall y \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})))$$
$$\exists z \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_{n+1}(\boldsymbol{R})))\ \forall x \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})))\ (x \in z \leftrightarrow (x \in y \wedge \Phi(x_1, \cdots, x_m, x)))$$

が成り立つ。ここで $x_1 = c_1, \cdots, x_m = c_m, y = A$ とおくと

$$\exists z \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_{n+1}(\boldsymbol{R})))\ \forall x \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_n(\boldsymbol{R})))\ (x \in z \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(c_1, \cdots, c_m, x)))$$

が $\mathbb{U}({}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R}))$ で真となる。この z が集合 $\{x \in A : \Phi(c_1, \cdots, c_m, x)$ は $\mathbb{U}({}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R}))$ で真である$\}$ であり、$z \in {}^{☆}({}^{*}(\mathbb{U}_{n+1}(\boldsymbol{R})))$ なので、命題3.2の系から z は2重の意味で内的である。　□

§4.　${}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ の世界

［4.1 定義］

(1) すべての ${}^{☆}({}^{*}n) \in {}^{☆\text{-}st}({}^{st}\boldsymbol{N})$ $(n \in \boldsymbol{N})$ に対して ${}^{☆}({}^{*}n) < |x|$ が成り立つような $x \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ を ${}^{☆\text{-}st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ に対する（正，負の）無限大数（または単に無限大数）という。

(2) $|x| < {}^{☆}({}^{*}n)$ を満たす ${}^{☆}({}^{*}n) \in {}^{☆\text{-}st}({}^{st}\boldsymbol{N})$ $(n \in \boldsymbol{N})$ が存在するとき、$x \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ を有限数という。

(3) すべての ${}^{☆}({}^{*}n) \in {}^{☆\text{-}st}({}^{st}\boldsymbol{N})$ $(n \in \boldsymbol{N})$ に対して $|x| < \dfrac{{}^{☆}({}^{*}1)}{{}^{☆}({}^{*}n)} \left(= {}^{☆}({}^{*}\dfrac{1}{n})\right)$ が成り立つとき、$x \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ を ${}^{☆\text{-}st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ に対する（正，負の）無限小数（または単に無限小数）という。

(4) $x, y \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ に対して $x - y$ が無限小数のとき、x と y は無限に近いといい、$x \cong y$ で表す。

(5) $x \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ が ${}^{☆}({}^{st}\boldsymbol{R})$ に対する（正，負の）無限大数であるとは、すべての $[({}^{*}n_\lambda)] \in {}^{☆}({}^{st}\boldsymbol{N})$ $(n_\lambda \in \boldsymbol{N})$ に対

して$[({}^*n_\lambda)] < |x|$が成り立つときをいう。もちろん${}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{R})$に対する無限大数は${}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{R})$に対する無限大数である。

(6)　$x \in {}^{\text{☆}}({}^*\mathbb{R})$が${}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{R})$に対する（正，負の）無限小数であるとは、すべての$[({}^*n_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N})$ $(n_\lambda \in \mathbb{N})$に対して$|x| < \dfrac{{}^{\text{☆}}({}^*1)}{[({}^*n_\lambda)]}$が成り立つときをいう。もちろん${}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{R})$に対する無限小数は${}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{R})$に対する無限小数である。

・例 1　$[({}^*1, {}^*2, {}^*3, \cdots, {}^*\lambda, \cdots)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N})$ $(\lambda \in \Lambda_2)$は無限大数である。

・例 2　$[({}^*1, {}^*\frac{1}{2}, {}^*\frac{1}{3}, \cdots, {}^*\frac{1}{\lambda}, \cdots)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{R})$ $(\lambda \in \Lambda_2)$は無限小数である。

・例 3　${}^{\text{☆}-st}({}^*\mathbb{N}_\infty)(\subseteq {}^{\text{☆}}({}^*\mathbb{N}))$の任意の元は、${}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{R})$に対する無限大数である。

・例 4　${}^{\text{☆}-st}({}^*\mathbb{N}_\infty)(\subseteq {}^{\text{☆}}({}^*\mathbb{N}))$の任意の元$[(n_\lambda)]$ $(n_\lambda \in {}^*\mathbb{N}_\infty)$に対して、$\dfrac{{}^{\text{☆}}({}^*1)}{[(n_\lambda)]}$は${}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{R})$に対する無限小数である。

これらのことは、フレシェ・フィルターの性質とウォッシュの定理からわかる。
次に後の議論に用いる 2 種類の無限大数の大小関係について述べる。

[4.2 命題]
(1)　${}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{N})$の任意の元は${}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{R})$に対する無限大数である。
(2)　${}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N})_\infty = {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{N})$とおくとき、

$$\forall [(x_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N})_\infty \ (x_\lambda \in {}^{st}\mathbb{N}),\quad \forall [(y_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^*\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N}) \ (y_\lambda \in {}^*\mathbb{N}) \quad [(x_\lambda)] < [(y_\lambda)]$$

が成り立つ。
(証明)
(1) 任意の$[({}^*x_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{N})$ $(x_\lambda \in \mathbb{N})$について、

$$[({}^*x_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{N}) \Leftrightarrow \{\lambda \in \Lambda_2 : {}^*x_\lambda \in {}^{st}\mathbb{N}\} \in F_2$$
$$\text{かつ}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \{\lambda : {}^*x_\lambda \neq {}^*n\} \in F_2$$

が成り立っている。ここで$[({}^*x_\lambda)]$が無限大数でないと仮定すると、

$$\{\lambda \in \Lambda_2 : {}^*x_\lambda \in {}^{st}\mathbb{N}\} \in F_2\ \text{かつ}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \{\lambda : {}^*x_\lambda \neq {}^*n\} \in F_2$$
$$\text{かつ}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \{\lambda : |{}^*x_\lambda| \leq {}^*n_0\} \in F_2$$

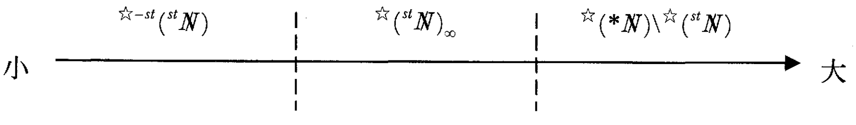
となる。すると$\{\lambda : {}^*x_\lambda \in {}^{st}\mathbb{N}, {}^*x_\lambda < {}^*1\} = \phi \in F_2$という矛盾が生じるので、$[({}^*x_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}-st}({}^{st}\mathbb{N})$は無限大数である。
(2) 任意の$[(x_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N})_\infty$ $(x_\lambda \in {}^{st}\mathbb{N})$と任意の$[(y_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^*\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N})$ $(y_\lambda \in {}^*\mathbb{N})$について、

$$[(y_\lambda)] \in {}^{\text{☆}}({}^*\mathbb{N}) \backslash {}^{\text{☆}}({}^{st}\mathbb{N}) \Leftrightarrow \{\lambda \in \Lambda_2 : (y_\lambda \in {}^*\mathbb{N}) \wedge (y_\lambda \notin {}^{st}\mathbb{N})\} \in F_2$$
$$\Leftrightarrow \{\lambda \in \Lambda_2 : y_\lambda \in {}^*\mathbb{N}_\infty\} \in F_2$$

であり、一方、各x_λは${}^{st}\mathbb{N}$の要素であるから、

$$\{\lambda \in \Lambda_2 : x_\lambda \in {}^{st}\mathbb{N}\} \cap \{\lambda \in \Lambda_2 : y_\lambda \in {}^*\mathbb{N}_\infty\} \subseteq \{\lambda \in \Lambda_2 : x_\lambda < y_\lambda\} \in F_2$$

が成り立つ。ゆえにウォッシュの定理から$[(x_\lambda)] < [(y_\lambda)]$が成り立つ。　□



［4.3 命題］

$a \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ が有限数のとき、$a \cong {}^{☆}({}^{*}r)$ を満たす ${}^{☆}({}^{*}r) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ $(r \in \boldsymbol{R})$ がただ１つ存在する。

（証明）$|x| < {}^{☆}({}^{*}n)$ を満たす ${}^{☆}({}^{*}n) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{N})$ $(n \in \boldsymbol{N})$

$$A = \{{}^{☆}({}^{*}x) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R}) : x \in \boldsymbol{R}, {}^{☆}({}^{*}x) < a\},\quad B = \{{}^{☆}({}^{*}x) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R}) : x \in \boldsymbol{R}, {}^{☆}({}^{*}x) \geq a\}$$

とおくと、a が有限数なので、$|a| < {}^{☆}({}^{*}n)$ となる自然数 n が存在し、

$$\begin{aligned} |a| < {}^{☆}({}^{*}n) &\Leftrightarrow a = [(a_\lambda)]\ (a_\lambda \in {}^{*}\boldsymbol{R}),\quad \{\lambda : |a_\lambda| < {}^{*}n\} \in F_2 \\ &\Rightarrow \{\lambda : |a_\lambda| < {}^{*}n\} \subset \{\lambda : a_\lambda < {}^{*}n\} \in F_2, \\ &\quad\ \{\lambda : |a_\lambda| < {}^{*}n\} \subset \{\lambda : -{}^{*}n < a_\lambda\} \in F_2 \\ &\Leftrightarrow a < {}^{☆}({}^{*}n),\quad -{}^{☆}({}^{*}n) < a \\ &\Rightarrow -{}^{☆}({}^{*}n) \in A,\quad {}^{☆}({}^{*}n) \in B \end{aligned}$$

であるから、A と B は空集合ではない。また、a とは異なる任意の ${}^{☆}({}^{*}x) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ は ${}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ の順序において、${}^{☆}({}^{*}x) < a$，$a < {}^{☆}({}^{*}x)$ のどちらか一方しか成り立たないので、A と B の一方にしか属さない。${}^{☆}({}^{*}x) = a \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ のときは、明らかに $x \notin A$，$x \in B$ となる。ゆえに $A \cup B = {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ である。

また $A \cap B = \phi$ であることと、任意の ${}^{☆}({}^{*}x) \in A$ と任意の ${}^{☆}({}^{*}y) \in B$ に対して ${}^{☆}({}^{*}x) < {}^{☆}({}^{*}y)$ が成り立つことは明らかである。従って対 (A, B) は ${}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ の切断である。

ゆえに $\boldsymbol{R}$ と同一視できる ${}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ にデデキントの連続性公理を適用させることで、ある ${}^{☆}({}^{*}r) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ $(r \in \boldsymbol{R})$ がただ１つ存在して、任意の ${}^{☆}({}^{*}x) \in A$ と任意の ${}^{☆}({}^{*}y) \in B$ に対して ${}^{☆}({}^{*}x) \leq {}^{☆}({}^{*}r)$ かつ ${}^{☆}({}^{*}y) \leq {}^{☆}({}^{*}r)$ となる。すると任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して、

${}^{☆}({}^{*}r) - {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n}) \in A$，${}^{☆}({}^{*}r) + {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n}) \in B$ となるから、

$$ {}^{☆}({}^{*}r) - {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n}) < a < {}^{☆}({}^{*}r) + {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n}) $$

が成り立つ。（もし $a = {}^{☆}({}^{*}r) + {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n_0})$ となる $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在したとすると、

$$ {}^{☆}({}^{*}r) = a - {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n_0}) < a - {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{2n_0}) \in A $$

となり、任意の ${}^{☆}({}^{*}x) \in A$ に対して ${}^{☆}({}^{*}x) \leq {}^{☆}({}^{*}r)$ となることに矛盾する）

従って任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $-{}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n}) < a - {}^{☆}({}^{*}r) < {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n})$、すなわち

$$ |a - {}^{☆}({}^{*}r)| < {}^{☆}({}^{*}\frac{1}{n}) $$

が成り立つので、$a \cong {}^{☆}({}^{*}r)$ である。　□

この命題4.3により、${}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ における標準化写像が定義される。

［4.4 定義］

有限数 $a \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ に対して $a \cong {}^{☆}({}^{*}r)$ を満たすただ１つの ${}^{☆}({}^{*}r) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ $(r \in \boldsymbol{R})$ を $a \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ の標準部分（standard part）といい、${}^{☆-\circ}a$ で表す。$a \in {}^{☆}({}^{*}\boldsymbol{R})$ に対して ${}^{☆-\circ}a$ を対応させる写像を ☆−∘ で表し、標準化写像（standard map）という。写像 ☆−∘ を ☆−st で表し、${}^{☆-\circ}a =$ ☆−$st(a)$ と表すこともある。

また、${}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$ の要素 ${}^{☆}({}^{*}r)$ $(r \in \boldsymbol{R})$ について、特にウォッシュの定理を使った議論が必要ないところでは、単に r と表しても良いことにする。例. $1 = {}^{☆}({}^{*}1) \in {}^{☆-st}({}^{st}\boldsymbol{R})$.

さらに後の便利のために、$a \in {}^{\star}({}^{*}\boldsymbol{R})$ が有限数でないとき、$a>0$ ならば ${}^{\star-\circ}a=\infty$，$a<0$ ならば ${}^{\star-\circ}a=-\infty$ と標準化写像☆−∘の定義を拡張しておく。

[4.5 定義]

(1) $A \in \mathbb{U}({}^{*}\boldsymbol{R})$ の有限部分集合の全体を $\boldsymbol{P}_F(A)$ とするとき、写像☆による $\boldsymbol{P}_F(A)$ の像を ${}^{\star}(\boldsymbol{P}_F(A))={}^{\star}\boldsymbol{P}_F({}^{\star}A)$ で表し、その要素を ${}^{\star}A$ の☆-有限部分集合という。

(2) $\bigcup_{n=0}^{\infty}{}^{\star}(\boldsymbol{P}_F(\mathbb{U}_n({}^{*}\boldsymbol{R})))$ の要素を☆-有限部分集合という。

この☆-有限集合はもちろん二次内的な集合であり、${}^{\star}A$ の☆-有限部分集合 a は、

$$a=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{x_k : k\in{}^{\star}({}^{st}\mathbb{N}), k\le n\}\ (n\in{}^{\star}({}^{st}\mathbb{N}))$$

の形に表すことができる。

§5. ☆-有限集合に関する諸定理

汎関数空間の元の domain となる測度空間 (M,μ_0) が、ある＊-有限加法的測度空間のローブ測度空間と対応付けられる時、2 回目の拡大で用いた添え字集合とその超フィルターが 1 回目の拡大と同じであることから、その＊-有限加法的測度空間と同等の☆-有限加法的測度空間の存在が保証される。つまり $\mathbb{U}({}^{*}(M\cup\mathbb{C}))$ に埋め込んだ M に対して、同じように☆-有限加法的測度空間を構成すればよい。そこでその☆-有限加法的測度空間の base となる二次内的な☆-有限集合を ${}^{\#}M(\subseteq{}^{\star}({}^{st}M))$ とする。このセクションでは☆-有限集合に関する諸定理について述べ、ここで定義された記号は後のセクションでも用いる。

[5.1 定義]

$\left|{}^{\#}M\right|=m\in{}^{\star}({}^{st}\mathbb{N})$ （但し $|{}^{\#}M|$ は ${}^{\#}M$ の要素の個数），

$$H'\in{}^{\star-st}({}^{*}\mathbb{N}_{\infty})(\subseteq{}^{\star}({}^{*}\mathbb{N}))\text{ は偶数，}\quad \varepsilon'=\frac{1}{H'}$$

とする。そして ${}^{\#}M$ 上の二次内的な重み $\nu{:}{}^{\#}M\to{}^{\star}({}^{st}\boldsymbol{R}^{+})\cup\{0\}$ が与えられていて、

$$\forall k\in{}^{\#}M\quad \nu(k)>0$$

を満たしているとする。

[5.2 補題]

(1) 任意の $A\in\boldsymbol{P}_F({}^{st}M)$ は一次内的である。

(2) 任意の $A\in\boldsymbol{P}_F({}^{st}M)$ に対して $f:A\to{}^{st}\boldsymbol{R}$ は一次内的な関数である。

(3) ☆-有限集合 ${}^{\#}M$ に対して、二次内的な関数 $f{:}{}^{\#}M\to{}^{\star}({}^{st}\boldsymbol{R})$ は、2 重の意味で内的な関数となる。

（証明）

(1) $A=\{{}^{*}a_1,{}^{*}a_2,\cdots,{}^{*}a_n\}$ （$a_k\in M$，$k=1,2,\cdots,n$）とおくと、A は一次内的な集合 ${}^{*}B={}^{*}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ と一致する。実際、任意の ${}^{*}a_k\in A$ について $\{\mu\in\Lambda_1 : a_k\in B\}\in F_1$ が成り立ち、ウォッシュの定理から ${}^{*}a_k\in{}^{*}B$ となる。

逆に任意の $b\in{}^{*}B$ をとると、超フィルターによって必ず b と一致する A の元が存在することになる。よって $A={}^{*}B$ となり、A は一次内的な集合である。

(2) 任意の $A\in\boldsymbol{P}_F({}^{st}M)$ は、

$A=\{{}^*a_1,{}^*a_2,\cdots,{}^*a_n\}$ （$a_k\in M$， $k=1,2,\cdots,n$）， ${}^*B={}^*\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

とおくとき、（1）の証明から $A={}^*B$ となることがわかる。今、関数 $f:A\to{}^{st}\boldsymbol{R}$ の定義域 A は有限集合なので、

$f(A)=\{{}^*b_1,{}^*b_2,\cdots,{}^*b_n,b_k\in\boldsymbol{R},f({}^*a_k)={}^*b_k,k=1,2,\cdots,n\}$

と表せるが、これはスタンダードな世界の関数 $g:B\to\boldsymbol{R}$， $g(a_k)=b_k$ を移行原理でうつした一次内的な関数 ${}^*g:{}^*B\to{}^*\boldsymbol{R}$ と一致することから、 $f:A\to{}^{st}\boldsymbol{R}$ は一次内的な関数である。 □

(3) ${}^{\#}M=\beta_2([(M_\lambda)])$， $f=\beta_2([(f_\lambda)])$ とおくと、ウォッシュの定理より

$\{\lambda\in\Lambda_2:M_\lambda\in\boldsymbol{P}_F({}^{st}M),\ f_\lambda:M_\lambda\to{}^{st}\boldsymbol{R}\}\in F_2$

となる。すると (2) より、各 $f_\lambda:M_\lambda\to{}^{st}\boldsymbol{R}$ は一次内的な関数となる。よって、

$\{\lambda\in\Lambda_2:M_\lambda\in\boldsymbol{P}_F({}^{st}M),\ f_\lambda:M_\lambda\to{}^{st}\boldsymbol{R}\}\subseteq\{\lambda\in\Lambda_2:f_\lambda$ は一次内的である $\}\in F_2$

が成り立つので、 $f:{}^{\#}M\to{}^{\star}({}^{st}\boldsymbol{R})$ は２重の意味で内的な関数である。□

この補題によって ${}^{\#}M$ 上の二次内的な重み $\nu:{}^{\#}M\to{}^{\star}({}^{st}\boldsymbol{R}^+)\cup\{0\}$ が 2 重の意味で内的な関数であることがわかる。

§6. 汎関数空間上の無限小 Fourier 変換

いよいよ本題に入る。

[6.1 定義]

各 $k\in{}^{\#}M$ について、２重の意味で内的な無限小格子 L_k' を

$$L_k':=\{\frac{\varepsilon'z'}{\sqrt{\nu(k)}}:\frac{-H'}{2\sqrt{\nu(k)}}\le\frac{\varepsilon'z'}{\sqrt{\nu(k)}}<\frac{H'}{2\sqrt{\nu(k)}},z'\in{}^{\star}({}^*\boldsymbol{Z})\}(\subseteq{}^{\star}({}^*\boldsymbol{R}))$$

によって定義する。各 $k\in{}^{\#}M$ について、 $\{\frac{\varepsilon'z'}{\sqrt{\nu(k)}}:z'\in{}^{\star}({}^*\boldsymbol{Z})\}$ 上の同値関係 $\sim_{H_k'}$ を

$$x\sim_{H_k'}y\Leftrightarrow x-y\in\{\frac{H'z}{\sqrt{\nu(k)}}:z\in{}^{\star}({}^*\boldsymbol{Z})\}$$

によって定義して、 $\{\frac{\varepsilon'z'}{\sqrt{\nu(k)}}:z'\in{}^{\star}({}^*\boldsymbol{Z})\}$ を $\sim_{H_k'}$ で割ったものを L_k' と同一視し、同じ記号で表すことにする：

$$\{\frac{\varepsilon'z'}{\sqrt{\nu(k)}}:z'\in{}^{\star}({}^*\boldsymbol{Z})\}/\sim_{H_k'}\underset{\text{同一視}}{\equiv}L_k'.$$

２重の意味で内的な関数空間 X を次のように定義する：

$X:=\{a\,|\,a:{}^{\#}M\to{}^{\star}({}^*\boldsymbol{R})$ は２重の意味で内的, $\forall k\in{}^{\#}M\ \ a(k)\in L_k'\}$.

汎関数空間 A を次のように定義する：

$\mathrm{A}:=\{f\,|\,f:X\to{}^{\star}({}^*\boldsymbol{C})$ は２重の意味で内的$\}$.

[6.2 定義]

$a,b\in X$， $f,g\in\mathrm{A}$ とする。

(1) f の無限小 Fourier 変換 $F\cdot f\in\mathrm{A}$，無限小逆 Fourier 変換 $\overline{F}\cdot f\in\mathrm{A}$ を

$$(F\cdot f)(b):=\sum_{a\in X}\varepsilon'^m\exp(-2\pi i\sum_{k\in{}^{\#}M}\nu(k)a(k)b(k))f(a),$$

$$(\overline{F}\cdot f)(b) := \sum_{a\in X}\varepsilon'^m \exp(2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)b(k))f(a)$$

で定義する。

(2) 無限小 δ 関数を

$$\delta\in \mathrm{A},\quad \delta(a) := \begin{cases} H'^m & (a=0) \\ 0 & (a\neq 0) \end{cases}$$

によって定義する。

(3) f と g の合成積 $f*g\in \mathrm{A}$ を

$$(f*g)(a) := \sum_{b\in X}\varepsilon'^m f(a-b)g(b)$$

によって定義し、汎関数空間 A の内積を

$$(f,g) := \sum_{a\in X}\varepsilon'^m\overline{f(a)}g(a) \qquad (\text{但し } \overline{f(a)} \text{ は } f(a) \text{ の複素共役})$$

によって定義する。

このとき以下の通常の Fourier 変換の定理が成り立つ。

尚、具体的な計算を必要としないところでは、

$$\nu ab := \sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)b(k)$$

という記号を用いることにする。

［6.3 定理］

(1) $\delta = F\cdot 1 = \overline{F}\cdot 1$,

(2) F は unitary であり、$F^4=1$ かつ $\overline{F}F = F\overline{F} = 1$,

(3) $f*\delta = \delta * f = f$,

(4) $f*g = g*f$,

(5) $F(f*g) = (Ff)(Fg)$,

(6) $\overline{F}(f*g) = (\overline{F}f)(\overline{F}g)$,

(7) $F(fg) = (Ff)*(Fg)$,

(8) $\overline{F}(fg) = (\overline{F}f)*(\overline{F}g)$.

（証明）

(1)
$$\begin{aligned}(F\cdot 1)(b) &= \sum_{a\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)b(k))\cdot 1 \\
&= \sum_{a\in X}\varepsilon'^m \prod_{k\in^{\#}M}\exp(-2\pi i\nu(k)a(k)b(k)) \\
&= \varepsilon'^m\prod_{k\in^{\#}M}\sum_{a(k)\in L'_k}\exp(-2\pi i\nu(k)a(k)b(k)) \\
&= \varepsilon'^m\prod_{k\in^{\#}M,b(k)\neq 0}\sum_{a(k)\in L'_k}\exp(-2\pi i\nu(k)a(k)b(k)) \\
&\quad\cdot\prod_{k\in^{\#}M,b(k)=0}\sum_{a(k)\in L'_k}\exp(-2\pi i\nu(k)a(k)b(k)) \qquad \cdots\ (*).\end{aligned}$$

$b(k)\neq 0$ となる $k\in{}^{\#}M$ について、 $\sum_{a(k)\in L_k'}\exp(-2\pi i\nu(k)a(k)b(k))$ は、

$$\text{初項：}\ \exp(-2\pi i\varepsilon'\nu(k)(-\frac{H'^2}{2\sqrt{\nu(k)}})b(k)),$$

$$\text{公比：}\ \exp(-2\pi i\nu(k)(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\nu(k)}})b(k))$$

の等比級数である。

ゆえに $b\neq 0$ のとき

$$(*)\ =\varepsilon'^m\prod_{{}^{\#}M\in L,b(k)\neq 0}\frac{\exp(-2\pi i\nu(k)(-\frac{H'}{2\sqrt{\nu(k)}})b(k))(1-\exp(-2\pi i\nu(k)(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\nu(k)}})H'^2b(k))}{1-\exp(-2\pi i\nu(k)(\varepsilon'/\sqrt{\nu(k)})b(k))}$$

$$\cdot\prod_{k\in{}^{\#}M,b(k)=0}\sum_{a(k)\in L_k'}\exp(-2\pi i\nu(k)a(k)b(k)).$$

$b(k)\neq 0$ のとき

$$b(k)=\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\nu(k)}}z''\quad(-\frac{H'^2}{2}\leq z''<\frac{H'^2}{2},\quad z''\in{}^{\star}({}^{*}\boldsymbol{Z}))$$

とおくと、

$$\exp(-2\pi i\nu(k)\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\nu(k)}}H'^2b(k))\ =\exp(-2\pi iz'')=1$$

より、(＊) $=0$ となる。よって $b\neq 0$ のとき、$(F\cdot 1)(b)=0$ となる。次に $b=0$ のとき

$$(F\cdot 1)(b)=\sum_{a\in X}\varepsilon'^m\ =\varepsilon'^m\cdot(H'^2)^m=H'^m.$$

以上により $F\cdot 1=\delta$ が示された。

$\overline{F}\cdot 1=\delta$ も同様。 □

(2) $(Ff,Fg)=\sum_{b\in X}\varepsilon'^m\overline{Ff(b)}Fg(b)$

$$=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m(\sum_{a\in X}\varepsilon'^m\exp(2\pi i\nu ab)\overline{f(a)})(\sum_{c\in X}\varepsilon'^m\exp(-2\pi i\nu bc)g(c))\}$$

$$=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m(\sum_{a\in X}\varepsilon'^{2m}\exp(2\pi i\nu ab)\sum_{c\in X}\exp(-2\pi i\nu bc))\overline{f(a)}g(c)\}$$

$$=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m(\sum_{a\in X}\varepsilon'^{2m}\sum_{c\in X}\exp(-2\pi i\nu b(c-a)))\overline{f(a)}g(c)\}$$

$$=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m(\sum_{a\in X}\sum_{c\in X}\varepsilon'^{2m}\overline{f(a)}g(c)\exp(-2\pi i\nu b(c-a)))\}$$

$$=\sum_{a\in X}\sum_{c\in X}\varepsilon'^{2m}\overline{f(a)}g(c)\sum_{b\in X}\varepsilon'^m\exp(-2\pi i\sum_{k\in{}^{\#}M}\nu(k)(c(k)-a(k))b(k))\quad\cdots(*_1).$$

$$\sum_{b\in X}\varepsilon'^m\exp(-2\pi i\sum_{k\in{}^{\#}M}\nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$$

$$=\sum_{b\in X}\varepsilon'^m\prod_{k\in{}^{\#}M}\exp(-2\pi i\nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$$

$$= \varepsilon'^m \prod_{x \in^{\#} M} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$$

$$= \varepsilon'^m \prod_{k \in^{\#} M, c(k) \neq a(k)} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$$

$$\cdot \prod_{k \in L, c(k)=a(k)} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))b(k)) \quad \cdots (*_2).$$

ここで、 $\sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$ について、 $c \neq a$ のときに

$$b(k) = \frac{\varepsilon' z'}{\sqrt{\nu(k)}} \quad \left(-\frac{H'^2}{2} \leq z' < \frac{H'^2}{2}, \quad z' \in^{\star} ({}^*\boldsymbol{Z})\right)$$

とおくと、これは $c(k) \neq a(k)$ である k については、

初項： $\exp(-2\pi i \nu(k)(-\frac{H'}{2\sqrt{\nu(k)}})(c(k)-a(k)))$,

公比： $\exp(-2\pi i \nu(k)\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\nu(k)}}(c(k)-a(k)))$

の等比級数である。よって

$(*_2) =$

$$\varepsilon'^m \prod_{k \in^{\#} M, c(k) \neq a(k)} \frac{\exp(-2\pi i \nu(k)(-\frac{H'}{2\sqrt{\nu(k)}})(c(k)-a(k)))(1-\exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))\frac{\varepsilon' H'^2}{\sqrt{\nu(k)}}))}{1-\exp(-2\pi i \nu(k)(\varepsilon'/\sqrt{\nu(k)})(c(k)-a(k)))}$$

$$\cdot \prod_{k \in^{\#} M, c(k)=a(k)} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$$

となる。そこで

$$c(k)-a(k) = \frac{\varepsilon' z''}{\sqrt{\nu(k)}} \quad (z'' \in^{\star} ({}^*\boldsymbol{Z}))$$

とおくと、

$$\exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))\frac{\varepsilon' H''^2}{\sqrt{\nu(k)}}) = \exp(-2\pi i z'') = 1$$

となる。よって $c(k) \neq a(k)$ となる k が存在するとき、すなわち $c \neq a$ のとき、

$(*_2) = 0$

である。また、 $c = a$ のときは、

$$(*_2) = \varepsilon'^m \prod_{x \in^{\#} M} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$$

$$= \varepsilon'^m H'^{2m} = H'^m$$

であるから、

$(*_2) = \delta(c-a)$

と表せる。よって

$$(*_1) = \sum_{a \in X} \sum_{c \in X} \varepsilon'^{2m} \overline{f(a)} g(c) \sum_{b \in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k \in^{\#} M} \nu(k)(c(k)-a(k))b(k))$$

$$= \sum_{a \in X} \sum_{c \in X} \varepsilon'^{2m} \overline{f(a)} g(c) \delta(c-a)$$

$$= \sum_{a \in X} \varepsilon'^m \overline{f(a)} g(a)$$

$$= (f, g)$$

が成り立つ。ゆえに

$$(Ff, Fg) = \sum_{a \in X} \varepsilon'^m \overline{f(a)} g(a) = (f, g)$$

であるから、F は unitary である。次に、

$$(F^2 f)(c) = (F(Ff))(c) = f(-c)$$

であることを示すことで、$F^4 = 1$ であることを示す。

$$\begin{aligned}
(F^2 f)(c) &= (F(Ff))(c) \\
&= \sum_{b \in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \nu bc)(Ff(b)) \\
&= \sum_{b \in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \nu bc) \sum_{a \in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \nu ab) f(a) \\
&= \sum_{b \in X} \varepsilon'^{2m} \sum_{a \in X} \exp(-2\pi i \nu b(a+c)) f(a) \\
&= \sum_{a \in X} \varepsilon'^{2m} \sum_{b \in X} \exp(-2\pi i \sum_{k \in {}^{\#}M} \nu(k) b(k)(a(k)+c(k))) f(a) \\
&= \sum_{a \in X} \varepsilon'^{2m} \{ \prod_{k \in {}^{\#}M} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k) b(k)(a(k)+c(k))) \} f(a) \quad \cdots (*'_1).
\end{aligned}$$

$$(*'_2) = \varepsilon'^{2m} \prod_{k \in {}^{\#}M} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k) b(k)(a(k)+c(k)))$$

とする。$\sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k) b(k)(a(k)+c(k)))$ は、$a(k) \neq -c(k)$ となる k については、

初項：$\exp(-2\pi i \nu(k)(-\dfrac{H'}{2\sqrt{\nu(k)}})(c(k)+a(k)))$,

公比：$\exp(-2\pi i \nu(k) \dfrac{\varepsilon'}{\sqrt{\nu(k)}}(c(k)+a(k)))$

の等比級数である。よって

$(*'_2) =$

$$\varepsilon'^{2m} \prod_{k \in {}^{\#}M, a(k) \neq -c(k)} \frac{\exp(-2\pi i \nu(k)(-\frac{H'}{2\sqrt{\nu(k)}})(c(k)+a(k)))(1-\exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)+a(k))\frac{\varepsilon H'^2}{\sqrt{\nu(k)}}))}{1-\exp(-2\pi i \nu(k)(\varepsilon'/\sqrt{\nu(k)})(c(k)+a(k)))}$$

$$\cdot \prod_{k \in {}^{\#}M, a(k) = -c(k)} \sum_{b(k) \in L'_k} \exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)+a(k)) b(k))$$

となる。そこで

$$c(k) + a(k) = \frac{\varepsilon' z''}{\sqrt{\nu(k)}} \quad (z'' \in {}^{\star}({}^{*}\boldsymbol{Z}))$$

とおくと、

$$\exp(-2\pi i \nu(k)(c(k)+a(k)) \frac{\varepsilon H''^2}{\sqrt{\nu(k)}}) = \exp(-2\pi i z'') = 1$$

となる。よって $a(k)=-c(k)$ となる k が存在するとき、すなわち $a\neq -c$ のとき、

$$(*_2')=0$$

である。また、$a=-c$ のときは、

$$(*_2')=\varepsilon'^{2m}\prod_{k\in^{\#}M}\sum_{b(k)\in L_k'}\exp(-2\pi i\,\nu(k)\,b(k)(a(k)+c(k)))=\varepsilon'^{2m}(H'^2)^m=1$$

となるので、

$$(*_2')=\varepsilon'^m\delta(a+c)$$

と表せる。よって

$$(*_1')=\sum_{a\in X}\varepsilon'^m\delta(a+c)f(a)=f(-c)$$

となる。したがって $(F^2f)(c)=(F(Ff))(c)=f(-c)$ である。
最後に $(\overline{F}(Ff))(c)=f(c)$ を示す。

$$\begin{aligned}(\overline{F}(Ff))(c)&=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m\exp(2\pi i\sum_{x\in^{\#}M}\nu(k)\,b(k)c(k))Ff(b)\}\\&=\sum_{b\in X}\varepsilon'^m\exp(2\pi i\sum_{x\in^{\#}M}\nu(k)\,b(k)c(k))\sum_{a\in X}\varepsilon'^m\exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)\,b(k))f(a)\\&=\sum_{b\in X}(\varepsilon'^m)^2\sum_{a\in X}\exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)b(k)(a(k)-c(k)))f(a)\\&=\sum_{a\in X}(\varepsilon'^m)^2\sum_{b\in X}\exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)\,b(k)(a(k)-c(k)))f(a)\\&=\sum_{a\in X}(\varepsilon'^m)^2\{\sum_{b\in X}\prod_{k\in^{\#}M}\exp(-2\pi i\,\nu(k)\,b(k)(a(k)-c(k)))\}f(a)\\&=\sum_{a\in X}(\varepsilon'^m)^2\{\prod_{k\in^{\#}M}\sum_{b(k)\in L_k'}\exp(-2\pi i\,\nu(k)\,b(k)(a(k)-c(k)))\}f(a)\quad\cdots(*_1'')\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$(*_2'')=(\varepsilon'^m)^2\prod_{k\in^{\#}M}\sum_{b(k)\in L_k'}\exp(-2\pi i\,\nu(k)\,b(k)(a(k)-c(k)))$$

とする。$\sum_{b(k)\in L_k'}\exp(-2\pi i\,\nu(k)\,b(k)(a(k)-c(k)))$ は、$a(k)\neq c(k)$ である $k\in^{\#}M$ について

初項： $\exp(-2\pi i\,\nu(k)(-H'/2\sqrt{\nu(k)})(a(k)-c(k)))$,

公比： $\exp(-2\pi i\,\nu(k)(\varepsilon'/\sqrt{\nu(k)})(a(k)-c(k)))$

となる等比級数である。よって
$(*_2'')=$

$$\varepsilon'^{2m}\prod_{x\in^{\#}M,a(k)\neq c(k)}\frac{\exp(-2\pi i\,\nu(k)\dfrac{-H'}{2\sqrt{\nu(k)}}(a(k)-c(k)))(1-\exp(-2\pi i\,\nu(k)\dfrac{-\varepsilon H'^2}{\sqrt{\nu(k)}}(a(k)-c(k))))}{1-\exp(-2\pi i\,\nu(k)(\varepsilon'/\sqrt{\nu(k)})(a(k)-c(k)))}$$

$$\cdot\prod_{k\in^{\#}M,a(x)\neq c(x)}\sum_{b(k)\in L_k'}\exp(-2\pi i\,\nu(k)\,b(k)(a(k)-c(k)))$$

となる。

ここで $\exp(-2\pi i\nu(k)\frac{-\varepsilon' H'^2}{\sqrt{\nu(k)}}(a(k)-c(k)))$ について、$k\in^{\#}M$ が $a(k)\neq c(k)$ のとき、

$$a(k)-c(k)=\frac{\varepsilon' z''}{\sqrt{\nu(k)}}\qquad(-H'^2\le z''<H'^2,\quad z''\in^{\star}({}^*\mathbf{Z}))$$

とおくと、

$$\exp(-2\pi i\nu(k)\frac{-\varepsilon' H'^2}{\sqrt{\nu(k)}}(a(k)-c(k)))=\exp(-2\pi iz'')=1$$

となる。

ゆえに $a(k)\neq c(k)$ となる $k\in^{\#}M$ が存在するとき、すなわち $a\neq c$ のとき $(*''_2)=0$ である。

また、$a=c$ のときは、

$$(*''_2)=(\varepsilon'^m)^2\prod_{k\in^{\#}M}\sum_{b(k)\in L'_k}\exp(-2\pi i\nu(k)b(k)(a(k)-c(k)))$$

$$=(\varepsilon'^m)^2\prod_{k\in^{\#}M}H'^2=(\varepsilon'^m)^2(H'^2)^m=1$$

となるので、

$$(*''_2)=\varepsilon'^m\delta(a-c)$$

と表せる。よって

$$(*''_1)=\sum_{a\in X}(\varepsilon'^m)^2\{\prod_{k\in^{\#}M}\sum_{b(k)\in L'_k}\exp(-2\pi i\nu(k)b(k)(a(k)-c(k)))\}f(a)$$

$$=\sum_{a\in X}\varepsilon'^m\delta(a-c)f(a)=f(c)$$

が成り立つ。以上により $\overline{F}F=1$ が示された。また、$F\overline{F}=1$ についても同様にして示すことができる。

□

(3) $(f*\delta)(a)=\sum_{b\in X}\varepsilon'^m f(a-b)\delta(b)$

$$=\varepsilon'^m\sum_{b\in X}f(a-b)\delta(b)$$

$$=\varepsilon'^m f(a)\delta(0)=f(a)$$

であり、

$$(\delta*f)(a)=\sum_{b\in X}\varepsilon'^m\delta(a-b)f(b)$$

$$=\varepsilon'^m\sum_{b\in X}\delta(a-b)f(b)$$

$$=\varepsilon'^m\delta(0)f(a)=f(a)$$

が成り立つ。　□

(4) $(f*g)(a)=\sum_{b\in X}\varepsilon'^m f(a-b)g(b)$

（$f,\ g$ の定義域 X を同値類たちへの関数たちの集合としたので、$\sum_{b\in X}$ としても $\sum_{(a-b)\in X}$ としても和は等しいので、）

$$=\sum_{(a-b)\in X}\varepsilon'^m f(a-b)g(a-(a-b))$$

$=(g*f)(a)$. □

(5) $F(f*g)(c)=\sum_{a\in X}\{\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)c(k))(f*g)(a)\}$

$$=\sum_{a\in X}\{\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)c(k))\sum_{b\in X}\varepsilon'^m f(a-b)g(b)\}$$

$$=\sum_{a\in X}\{\varepsilon'^m \sum_{b\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)c(k))f(a-b)g(b)\}$$

$$=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m \sum_{a\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)c(k))f(a-b)g(b)\}$$

（$d(k)=a(k)-b(k)$ とおくと、）

$$=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m g(b)\cdot\sum_{d\in X-b}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)(b(k)+d(k))c(k))f(d)\}$$

$$=\sum_{b\in X}\varepsilon'^m g(b)\sum_{d\in X-b}\varepsilon'^m\{\exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)b(k)c(k))\exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)d(k)c(k))\}f(d)$$

$$=\sum_{b\in X}\{\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)b(k)c(k))g(b)\cdot\sum_{d\in X-b}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)d(k)c(k))f(d)\}$$

（f,g の定義域 X を同値類たちへの関数たちの集合としたので、$\sum_{d\in X-b}$ としても $\sum_{d\in X}$ としても和は等しいので、）

$$=\{\sum_{b\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)b(k)c(k))g(b)\}\cdot\{\sum_{d\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)d(k)c(k))f(d)\}$$

$=(Fg)(c)\,(Ff)(c)=(Ff)(c)(Fg)(c)$.（但し $X-b:=\{x-b:x\in X\}$ とする。） □

(6) (5) と同様にすると、$\overline{F}(f'*g')(c)=(\overline{F}f')(c)(\overline{F}g')(c)$. □

(7) 上の (6) の両辺に F を施すと、$f'*g'=F((\overline{F}f')(\overline{F}g'))$ が成り立つ。そこで $f'=Ff$, $g'=Fg$ とすると、次が成り立つ： $(Ff)*(Fg)=F(fg)$. □

(8) (5) “$F(f'*g')=(Ff')(Fg')$” より、$f'*g'=\overline{F}((Ff')(Fg'))$ が成り立つ。
そこで $f'=\overline{F}f$, $g'=\overline{F}g$ とすると、次が成り立つ： $(\overline{F}f)*(\overline{F}g)=\overline{F}(fg)$. □

§7. 無限小前進差分と無限小後退差分

このセクションでは、汎関数の無限小前進差分と無限小後退差分を定義する。
以下、簡略化のために

$$\nu ab:=\sum_{k\in^{\#}M}\nu(k)a(k)b(k)$$

という記号を用いることにする。

[7.1 定義]

$f\in \mathrm{A}$, $a\in X$ とし、

$$b:{}^{\#}M\to{}^{\star}({}^{*}\boldsymbol{R})\ \text{（2 重の意味で内的）}\ s.t.\ {}^{\forall}k\in{}^{\#}M\ b(k)\in L'_k\cap\{\frac{z}{\sqrt{\nu(k)}}:z\in{}^{\star}({}^{*}\boldsymbol{Z})\}.$$

とする。このとき $\varepsilon' b\in X$ であることに注意する。
f の無限小前進差分 $D_{+,b}f$ を

$$(D_{+,b}f)(a) := \frac{f(a+\varepsilon' b) - f(a)}{\varepsilon'}$$

によって定義し、f の無限小後退差分 $D_{-,b}f$ を

$$(D_{-,b}f)(a) := \frac{f(a) - f(a-\varepsilon' b)}{\varepsilon'}$$

によって定義する。そして関数 λ_b, $\overline{\lambda}_b$ を次のように定義する：

$$\lambda_b(a) := \frac{\exp(2\pi i\varepsilon' vab) - 1}{\varepsilon'},$$

$$\overline{\lambda}_b(a) := \frac{\exp(-2\pi i\varepsilon' vab) - 1}{\varepsilon'}.$$

このとき、次の定理が成り立つ。

［7.2 定理］

(1) $(F(D_{+,b}f))(a) = \lambda_b(a)(Ff)(a)$, 　(2) $(F(D_{-,b}f))(a) = -\overline{\lambda}_b(a)(Ff)(a)$.

関数 $\varphi : a \mapsto \lambda_b(a)f(a)$, $\varphi' : a \mapsto \overline{\lambda}_b(a)f(a)$
について次の (3) ～ (6) が成り立つ。

(3) $(F\varphi)(a) = -(D_{-,b}(Ff))(a)$, 　(4) $(F\varphi')(a) = (D_{+,b}(Ff))(a)$,

(5) $(D_{+,b}(\overline{F}f))(a) = (\overline{F}\varphi)(a)$, 　(6) $(D_{-,b}(\overline{F}f))(a) = -(\overline{F}\varphi')(a)$,

(7) $\lambda_b(a) = 2\pi i \cdot \dfrac{\sin(\pi\varepsilon' vab)}{\pi\varepsilon'} \cdot \exp(\pi i\varepsilon' vab)$.

(証明)

(1)
$$\begin{aligned}
(F(D_{+,b}f))(a) &= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))(D_{+,b}f)(c) \\
&= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k)) \frac{f(c+\varepsilon' b) - f(c)}{\varepsilon'} \\
&= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c+\varepsilon' b)\} \\
&\quad - \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\} \\
&= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)a(k)(c(k)+\varepsilon' b(k) - \varepsilon' b(k))f(c+\varepsilon' b)\} \\
&\quad - \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\} \\
&= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i va(c+\varepsilon' b))\exp(2\pi i va\varepsilon' b)f(c+\varepsilon' b)\} \\
&\quad - \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\}
\end{aligned}$$

$$= \exp(2\pi i \varepsilon' vab)\sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i va(c+\varepsilon\mathfrak{b}))f(c+\varepsilon\mathfrak{b})\}$$

$$-\sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\}$$

（f の定義域 X を同値類への関数たちの集合としたので、$\sum_{c\in X}$ としても $\sum_{c+\varepsilon\mathfrak{b}\in X}$ としても和は等しいので、）

$$= \frac{1}{\varepsilon'}[\exp(2\pi i \varepsilon' vab)\sum_{c+\varepsilon\mathfrak{b}\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i va(c+\varepsilon\mathfrak{b}))f(c+\varepsilon\mathfrak{b})$$

$$-\sum_{c\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(2\pi i \varepsilon' vab)(Ff)(a)-(Ff)(a)\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}(\exp(2\pi i \varepsilon' vab)-1)(Ff)(a) = \lambda_b(a)(Ff)(a). \qquad \square$$

(2) $$(F(D_{-,b}f))(a) = \sum_{c\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))(D_{-,b}f)(c)$$

$$= \sum_{c\in X}\varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))\frac{f(c)-f(c-\varepsilon\mathfrak{b})}{\varepsilon'}$$

$$= \sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\}$$

$$-\sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c-\varepsilon\mathfrak{b})\}$$

$$= \sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\}$$

$$-\sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)a(k)(c(k)-\varepsilon\mathfrak{b}(k)+\varepsilon\mathfrak{b}(k))f(c-\varepsilon\mathfrak{b})\}$$

$$= \sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\}$$

$$-\sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i va(c-\varepsilon\mathfrak{b}))\exp(-2\pi i va\varepsilon\mathfrak{b})f(c-\varepsilon\mathfrak{b})\}$$

$$= \sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\}$$

$$-\exp(-2\pi i \varepsilon' vab)\sum_{c\in X}\varepsilon'^m \frac{1}{\varepsilon'}\{\exp(-2\pi i va(c-\varepsilon\mathfrak{b}))f(c-\varepsilon\mathfrak{b})\}$$

（f の定義域 X を同値類への関数たちの集合としたので、$\sum_{c\in X}$ としても $\sum_{c-\varepsilon\mathfrak{b}\in X}$ としても和は等しいので、）

$$= \frac{1}{\varepsilon'}[\sum_{c\in X}\varepsilon'^m\{\exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} v(k)c(k)a(k))f(c)\}$$

$$-\exp(-2\pi i \varepsilon' vab)\sum_{c-\varepsilon\mathfrak{b}\in X}\varepsilon'^m\{\exp(-2\pi i va(c-\varepsilon\mathfrak{b}))f(c-\varepsilon\mathfrak{b})\}]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{(Ff)(a) - \exp(-2\pi i\,\varepsilon' vab)(Ff)(a)\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}(1 - \exp(-2\pi i\,\varepsilon' vab))(Ff)(a) = -\overline{\lambda}_b(a)(Ff)(a)\,. \qquad \square$$

(3) $(F\varphi)(a) = \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} \nu(k)c(k)a(k))\varphi(c)$

$$= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} \nu(k)c(k)a(k))\lambda_b(c)f(c)$$

$$= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu ca)\frac{1}{\varepsilon'}(\exp(2\pi i\varepsilon'\nu cb) - 1)f(c)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{\sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu ca)\exp(2\pi i\varepsilon'\nu cb)f(c)$$

$$- \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu ca)f(c)\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{\sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu c(a - \varepsilon' b))f(c) - (Ff)(a)\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{(Ff)(a - \varepsilon' b) - (Ff)(a)\}$$

$$= -(D_{-,b}(Ff))(a)\,. \qquad \square$$

(4) $(F\varphi')(a) = \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} \nu(k)c(k)a(k))\varphi'(c)$

$$= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i \sum_{k\in^{\#}M} \nu(k)c(k)a(k))\overline{\lambda}_b(c)f(c)$$

$$= \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu ca)\frac{1}{\varepsilon'}(\exp(-2\pi i\varepsilon'\nu cb) - 1)f(c)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{\sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu ca)\exp(-2\pi i\varepsilon'\nu cb)f(c)$$

$$- \sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu ca)f(c)\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{\sum_{c\in X} \varepsilon'^m \exp(-2\pi i\,\nu c(a + \varepsilon' b))f(c) - (Ff)(a)\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon'}\{(Ff)(a + \varepsilon' b) - (Ff)(a)\}$$

$$= (D_{+,b}(Ff))(a)\,. \qquad \square$$

(5) (1) の $(F(D_{+,b}f'))(a) = \lambda_b(a)(Ff')(a)$　により、
両辺を逆 Fourier 変換すると、関数 $\varphi'' : a \mapsto \lambda_b(a)(Ff')(a)$ について、

$$(D_{+,b}f')(a) = (\overline{F}\varphi'')(a)$$

である。そこで $f' = \overline{F}f$ とすると、

$$(D_{+,b}(\overline{F}f))(a) = (\overline{F}\varphi)(a)\,. \qquad \square$$

(6) (2) の $(F(D_{-,b}f'))(a) = -\overline{\lambda}_b(a)(Ff')(a)$ により、両辺を逆 Fourier 変換すると、関数 $\varphi'': a \mapsto \overline{\lambda}_b(a)(Ff')(a)$ について、

$$(D_{-,b}f')(a) = -(\overline{F}\varphi'')(a)$$

である。そこで $f' = \overline{F}f$ とすると、

$$(D_{-,b}(\overline{F}f))(a) = -(\overline{F}\varphi')(a). \quad \square$$

(7) $$\lambda_b(a) = \frac{\exp(2\pi i\varepsilon' vab) - 1}{\varepsilon'}$$

$$= \frac{\exp(\pi i\varepsilon' vab)}{\varepsilon'}(\exp(\pi i\varepsilon' vab) - \exp(-\pi i\varepsilon' vab))$$

$$= \frac{\exp(\pi i\varepsilon' vab)}{\varepsilon'} \cdot 2i\sin(\pi\varepsilon' vab)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\sin(\pi\varepsilon' vab)}{\pi\varepsilon'}\exp(\pi i\varepsilon' vab). \quad \square$$

参考文献

中村徹：超準解析と物理学. 日本評論社 (1998)

N.Dunford&J.T.Schwartz：Linear Operators Part 1. Wiley Interscience, New York (1988)

齋藤正彦：超積と超準解析. 東京図書 (1976)

岡田朋子：Non-well-founded 集合論の特徴と Non-standard 解析の応用. 名古屋大学大学院多元数理博士論文