

佐藤良一郎の関数教育論について

— 『新制中學校用基本數學』『新制中學校用増課數學』を通して —

中西正治

**A Study on Ryoichiro Sato's Thought of Function
: through "Fundamental Mathematics for New Secondary School"
"Advanced Mathematics for New Secondary School"**

Masaharu NAKANISHI

要 旨

佐藤の関数や関数教育に対する考え方は、具体的にどのような形で行われようとしたのか、佐藤が著した教科書を分析・考察している。考察の結果、数学教育全体を通じて関数思想を養成しようとする姿勢は、代数・幾何・三角法・統計の各分野に表われていること、しかしグラフの使用の面だけが強調され、自然界や社会現象を対象とした実験・実測には消極的な姿勢であること、この点は数学教育改造運動の思想と異なることが明らかとなった。

1. 研究の目的

筆者は拙稿「佐藤良一郎の関数教育論についての考察」⁽¹⁾において佐藤の関数や関数教育に対する考え方を考察した。しかしそこにおける考察は、それを具現化したものの考察まではなされていない。本稿では、佐藤の関数や関数教育に対する考え方は、具体的にどのような形で行われようとしたのか、佐藤が著した教科書を対象とし考察することを目的とする。

教科書は生徒が直接手にするものであることと、教師もまた教科書を中心に授業を行うという点で、教科書は実際化・具体化という点で大きな意味を持つ。佐藤が著した教科書の中でも、関数教育について初めて述べられた昭和6年の中学校教授要目（「注意」に「教授ノ際常ニ函數觀念ノ養成ニ留意スベシ」と書かれている）の下に出版された『新制中學校用基本數學』（昭和7年）『新制中學校用増課數學』（昭和8年）を対象とする。

教科書の検討・考察に入る前に、佐藤の関数や関数教育に対する考え方を再確認する。

2. 佐藤の関数や関数教育に対する考え方の確認

拙稿「佐藤良一郎の関数教育論についての考察」で述べた佐藤の関数や関数教育に対する考え方を以下にまとめ確認する。

佐藤は、「実験的に得た結果を適当に処理して任意の與へられた温度に對應する鐵棒の長さを算術的に算出する」⁽²⁾というように、実験的に得られた結果を適当に処理して一般的法則を導くことは関数に関する問題であるとし、自然界や社会にはそのような関数に関する問題が非常に多いと考えた。このよ

うな意味で「函数概念及び變數概念がそれぞれ現代數學の最も重要な根本概念の一つとなつてゐる」⁽³⁾と主張するのである。だから佐藤は、特に数学教育の目的と考えた一つである「自然界ニ於ケル諸現象、社會ニ於ケル諸現象ヲ數學的ニ考察スルコトヲ考ヘネバナラヌ」⁽⁴⁾のために、「その正しき理解を得るための道具として」、「何よりも函数思想を與へて、函数的に事物を考察するところの仕方について訓練を與へることが至大至要の仕事であらねばならぬであらう」⁽⁵⁾と考えるのである。

そしてその関数思想を養成するためには、「函数といふ一つの章を中等數學教科の或る箇所に挿入するのでなくて中等數學教育全體を函数思想で浸潤さすべきである」⁽⁶⁾とし、数学教育のあらゆるところでその機会を持つよう要請している。

佐藤は、関数思想は算術、方程式、公式、幾何学などにも深く関連していることを説明する。

算術では、「算術の應用問題の解法に於て函数關係を見出すといふ仕事はすべての鍵となつてゐる」⁽⁷⁾ことに注意を傾けなければならないとし、関数思想が算術の應用問題にある。

方程式では、「方程式の應用を説く前に諸種の變量間の函数關係を考察することが必要である」⁽⁸⁾ことに言及し、関数思想が方程式の應用においても基本である。

公式においても、「その中に用ひられてゐるところの文字は如何なる數値をも代表するが故にこれを變數と考へ従てその公式は變數間の關係即ち函数關係を表示すると考へて然るべき」⁽⁹⁾であり、また定數と考えれば「不變的關係を表示するもの」⁽¹⁰⁾すなわち不變的關係を表していると見ることができる。

また「一般に運動に關する考察はその性質全く函数的考察である」⁽¹¹⁾から、幾何学において、図形を動的に捉えそこに関数關係を見出そうとした。そのため、三角形の辺と角を「三角形の一つの邊は他の二邊とその夾む角の函数であり三角形の一つの角は他の一角及びそれを夾む二邊の函数である」⁽¹²⁾と捉え、合同条件を関数の考え方の視点から見ようとした。そうすることが生徒に幾何学を分かりやすく理解させ興味をもたせられると考えたのである。

すなわち、算術の應用問題も方程式の應用問題も公式も幾何学も、そこに関数關係を見出すことがそれらを理解することの大切な観点となるわけである。

そして佐藤は関数思想の教授上の注意として「各種の具體的の場合についてその中に含まれる函数關係を考察せしめることにある」⁽¹³⁾と述べ、あくまでも「函数的に思考する習慣」⁽¹⁴⁾を強調した。そして特に「函数思想の最初の導入は圖表示即ちグラフと相伴はしめるを良策」⁽¹⁵⁾とし、直観を利用したグラフの使用を推奨している。

また佐藤は、「函数思想を以て初等數學全體を浸潤させる自然の歸結として初等數學は微分積分の思想をも包容するやうに改造さるべきことを要求」⁽¹⁶⁾し、「微分積分の思想を與へる方法は函数の圖表に結びつけて具象的直觀的なるを良し」⁽¹⁷⁾とした。

3. 教科書の検討

『新制中學校用基本數學』『新制中學校用増課數學』を検討する。関数思想が表れていると考えられる指導内容を簡易な形でまとめている。カタカナ使いは教科書の引用部分であり、ひらがな使いは筆者がまとめた部分である。

(1) 『新制中學校用基本數學』の検討

『新制中學校用基本數學』は上巻・中巻・下巻から構成されている。

編纂上の留意点の4番目に「計算ニ習熟セシメ、空間知覺・空間的想像ノ練習ヲ與へ、幾何學的表現並ニ代數學的表現ニ慣レシメ、方程式解法ノ能力ヲ高メ、就中函数思想ヲ涵養スルコトニ最大ノ努力ヲ費シタ」と述べられている。「函数思想」はあらゆるところで「涵養」されなければならないこと、及

び「関数思想ヲ涵養スルコト」が学校数学にとってひじょうに重要であることを主張している。

①『新制中學校用基本數學 上』⁽¹⁸⁾の指導内容の概略

第一篇 数ト圖形	
第二章 數表及ビ圖表 4. 數表及ビ圖表	練習題でグラフをかく練習をさせている。 (問題 8) 数学科成績 (棒グラフ) (問題 9) 大正 6 年か昭和 2 年までの中学校数 (折線グラフ) (問題 10) 塩用途別消費高 (棒グラフ) (問題 15) 鐵棒の一端を 100° の温度に保つとき、その端から遠ざかるに従う棒の温度の様子 (曲線グラフ) その他 4 題あり。
第二篇 數ノ計算	
第三章 比例及ビ反比例 24. 比例スルトイフコト	2 時間デ 10 km 行ク割合デ歩クナラバ、歩ク時間數ト、行程トノ間ニハ次ノ如キ關係ガアル。(その表とグラフをかいている) 相伴ツテ變化スル二ツノ量ガアツテ、一方ノ量ガ元ノ量ノ a 倍トナレバ、他ノ量モ亦 a 倍トナルトキ、コノ二ツノ量ハ互ニ比例スル又ハ正比例スルトイフ。
25. 反比例スルトイフコト	24 斤/分ノ速サデ行ケバ 50 分カカル道程ヲ速サヲ變ヘテ行クナラバ、ソレニ應ジテコノ道程ヲ行クニ要スル時間モ亦變ル。ソノ變リ方ハ次ノ表及ビ圖表ニ示スガ如クデアル。(その表とグラフをかいている) 相伴ツテ變化スル二ツノ量ガアツテ、一方ノ量ガ元ノ量ノ a 倍トナレバ、他ノ量ガ元ノ $\frac{1}{a}$ 倍トナルトキ、コノ二ツノ量ハ互ニ反比例スル又ハ逆比例スルトイフ。
26. 二乗ニ比例スルトイフコト	正方形の一边と面積の關係で説明 グラフをかいている。
27. 三乗ニ比例スルトイフコト	立方体の一边と体積の關係で説明 グラフをかいている。
第五篇 圖表 (グラフ)	
第一章 圖表ノ作り方 50. 圖表ノ種類	棒グラフ (列国陸軍兵員數)、扇形グラフ (世界人造絹糸生産額)、折線グラフ (本邦貿易月別統計)、曲線グラフ (年齢と体重)
51. 圖表ノ畫キ方	各グラフのかき方の説明。
第二章 二圖表ノ對比 52. 二量ノ年次的變化ノ比較	貿易総額の輸入と輸出のグラフ 練習題では、4 題問題あり。
第九篇 公式及ぐらふ	
第二章 圖表 102. 相伴ツテ變化スル二量 間ノ關係表示	毎時 94 km ノ速サノ汽車ガ、 t 時間ニ s km 走ルトスレバ、 $s=94t$ デアル。 対応表とグラフで説明。
103. 變數、常數	數ヲ代表スル文字ガ、イロイロノ値ヲ取り得ルトキハコレヲ變數トイフ。コレニ對シテ一定不變ノ値ヲ有スル數、又ハソレヲ代表スル文字ヲ常數トイフ。
104. 公式ノ圖表	年利 4 分 8 厘トスルナラバ、一箇年ノ利息ヲ求メル公式ハ $R=0.048M$ トナル。対応表とグラフで説明。 (例 1) 毎時 5 斤ノ速サデ歩イテ t 時間ニ d 斤ダケノ道程ヲ歩クトスレバ、 $d=5t$ デアル。コレヲ圖表ニ表ハセ。 (例 2) 半径ガ r cm ナル圓ノ面積ヲ A cm ² トスレバ $A=\pi r^2$ デアル。コレヲ圖表ニ表ハセ。 (例 3) 1 貫ハ 3.75 kg デアル。貫デ表ハサレタ種種ノ重サヲ、kg ニ換算スル圖表ヲ作レ。

『新制中學校用基本數學 上』は、第一学年で扱うので数の範囲は正数であり算術的要素がかなり強い。

上巻の第一篇では、関数や関数の考え方の指導の前段階があり、数表や図表（グラフ）をいくつか紹介し、グラフの予備的導入を行っている。第五篇でその本格的な指導をしている。比例の指導においては、変数による比例の扱いが比の指導より先に行われている。比例の定義は、「相伴ツテ變化スルニツノ量ガアツテ、一方ノ量ガ元ノ量ノ a 倍トナレバ、他ノ量モ亦 a 倍トナルトキ、コノニツノ量ハ互ニ比例スル又ハ正比例スルトイフ」という倍保存の定義であり、変化を意識したものになっている。反比例もしかりである。二乗比例、三乗比例は、グラフとの関係で軽く扱っている。また、「102.相伴ツテ變化スルニツノ量間ノ關係表示」「103.變數、常數」「104.公式ノ圖表」では、相伴って変る 2 つの数量関係の基本的な関係式（比例）を扱い、その関係式を公式とみなし、公式をそのグラフとの関係で説明をしている。公式を関数と捉える見方は、特に下巻で強く主張される。

②『新制中學校用基本數學 中』⁽¹⁹⁾の指導内容の概略

第一篇 正數、負數（第二部甲）	
第三章 公式ノ一般化 10.公式ノ圖表	$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ のグラフ
11.座標	座標ノ軸、横軸（ x 軸）、縦軸（ y 軸）、横座標（ x 座標）、縦座標（ y 座標）、原点
12.方程式ノ圖表	$y = 2x$ のグラフのかき方を説明。 （例 1） $y = x + 2$ の図表をかく。 （例 2） $y = -2x + 3$ の図表をかく。 （例 3） $y = x^2 - 3$ の図表をかく。
第二篇 一次方程式（第二部甲）	
第三章 聯立方程式 24.聯立方程式ノ圖解	$\begin{cases} 4x + 3y = 60 \\ x - y = -6 \end{cases}$ をグラフで解く。
25.方程式ノ不定及ビ不能	$\begin{cases} x - y = 12 \\ 2x - 14 = 2y \end{cases}$ が不能であることをグラフ（平行）で説明。 $\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 3y = 30 \end{cases}$ が不定であることをグラフ（重なる）で説明。
第二篇 三角形（第二部乙）	
第三章 三角形ニ於ケル不 等關係 22.二邊ノ長サ一定ナル三 角形ノ第三邊トソノ對角	定理 二邊ノ大サガソレソレ一定ナル三角形ノ第三邊ハ、ソノ二邊ノ夾ム角ノ増大（又ハ減少）スルニ伴ツテ増大（又ハ減少）スル。
第四篇 圓	
第二章 弧、弦、角 31.弧、弦、中心角	系 1.同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ、一ツノ中心角ガ、他ノ中心角ノ n （整数）倍ナレバ、ソレニ對スル弧モ亦他ノ n 倍デアル。

中巻では、数の範囲も負の数となり、グラフも 4 つの象現を使うようになる。代数の面では、連立方程式の根をグラフで説明している（不定、不能を含む）。そのために、事前指導として前節では、 $y = ax + b$ を方程式と見なし、その関係をグラフにかくことを指導している。また幾何の面では、三角形の見方も単に 6 要素からできているというのではなく、「三角形の一つの邊は他の二邊とその夾む角の函数であり三角形の一つの角は他の一角及びそれを夾む二邊の函数である。」というように、三角形を関数

として捉え、定理「二邊ノ大サガソレゾレ一定ナル三角形ノ第三邊ハ、ソノ二邊ノ夾ム角ノ増大（又ハ減少）スルニ伴ツテ増大（又ハ減少）スル。」にも現れているように、変化に着眼させ関数的見方を養っている。

③『新制中學校用基本數學 下』⁽²⁰⁾の指導内容の概略

第三篇 軌跡及ビ作圖	
第一章 軌跡	
38.軌跡ノ決定	或條件ヲ満足サセル點ハ、皆或圖形ノ上ニアリ、コノ圖形ノ點ハ、皆ソノ條件ヲ満足サストキハ、ソノ圖形ヲ、與ヘラレタ條件ヲ満足サセル點ノ軌跡トイフ。
39.基本ノ軌跡	定理 一定點カラ一定距離ニアル點ノ軌跡ハ、ソノ定點ヲ中心トシコノ距離ヲ半径トスル一ツノ圓周デアアル。等
40.軌跡ノ求メ方	例 1.定圓内ノ定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。等
第一篇 比例及ビ相似	
第三章 三角函數	
14.正切	比 $\frac{AC}{BC}$ ハ $\angle XAY$ ノ函數デアルトイフ、而カモ $\angle XAY$ ノ正切函數又ハ單ニ正切 (<i>tangent</i>) トイフ。 正切のグラフ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$) あり。
15.正弦及ビ餘弦	$\frac{BC}{AB}$ ヲ $\angle XAY$ ノ正弦函數又ハ單ニ正弦 (<i>sine</i>) トイヒ、 $\frac{AC}{AB}$ ヲ $\angle XAY$ ノ餘弦函數又ハ單ニ餘弦 (<i>cosine</i>) トイフ。 正弦及び余弦のグラフ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$) あり。
第二篇 二次方程式	
第三章 二次方程式	
32.一元二次方程式	$2x^2 + x - 6 = 0$ (2 実根) を $y = 2x^2 + x - 6$ が x 軸で 2 点で交わることで説明。 $2x^2 + x + \frac{1}{8} = 0$ (重根) を $y = 2x^2 + x + \frac{1}{8}$ が x 軸で 1 点で接することで説明。 $2x^2 + x + 4 = 0$ (虚根) を $y = 2x^2 + x + 4$ が x 軸とは交わらないことで説明。
第三篇 函數値ノ變化	
第一章 一元函數	
38.變數及ビ函數	ココニ二ツノ變數 x, y ガアツテ、 x ノ値ガ定マレバソレニ伴ツテ y ノ値モ亦マルトイフ關係ニアルトキハ、 y ハ x ノ函數デアルトイフ。 圓の周は半径の一次函數 $S = 2\pi h$ 圓の面積は半径の二次函數 $S = \pi h^2$ $y = ax + b$ 一次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 二次函數
40.一次函數ノ圖表	$y = ax + b$ x 軸とのなす角の正切 (勾配) $y = \frac{1}{2}x, y = \frac{1}{2}x + 5, y = \frac{1}{2}x - 5$ の關係をグラフで説明。 一次函數 $y = ax + b$ ノ圖表ハ直線デアツテ、 a ハソノ直線ノ勾配ヲ定メ、 b ハソノ y 軸ヲ截ル點ノ位置ヲ定メル。 $b = 0$ のとき y は x に比例するという。
41.二次函數ノ圖表	$y = 2x^2$ $y = 2x^2 + 10$ $y = 2x^2 - 4x + 2$ [$= 2(x-1)^2$] $y = 2x^2 - 4x - 5$ [$= 2(x-1)^2 - 7$] のグラフをかき互いの關係を説明。 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ノ圖表ハ $y = ax^2$ ヲ各座標軸ノ方向に適當ニ平行移動サセルコトニ依ツテ得ラレル。

42.二次函数ノ極大値及ビ極小値	$y=2x^2-4x-5$ と $y=-2x^2+4x+5$ を例にとつてそれらのグラフをかき、極小値と極大値を説明（平方完成の説明も含む）。
43.或型ノ方程式ノ圖表	$xy=k$ ($xy=-2$) 雙曲線 $x^2+y^2=a^2$ ($x^2+y^2=25$; $y=\pm\sqrt{25-x^2}$) 圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$) 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{x^2-25}$) 雙曲線 の各グラフをかいている。
44.聯立方程式ノ圖解	$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ の根を圖解している。
第二章 多元函数	多元関数の例を挙げている。
45.多クノ變數ノ函数	$T=\frac{1}{3}\pi h^2 t$ (直圓錐ノ體積)、 $M=\frac{t}{2}(u+s)$ (梯形ノ面積)
46.積ニ比例スルトフコト	$M=2\pi h t$ (直圓錐ノ側面積)、 $T=\pi h^2 t$ (圓錐ノ體積) $\frac{\pi a h^2}{360}$ (扇形ノ面積)、 $T=\frac{1}{3}\pi h^2 t$ (直圓錐ノ體積) (例1) 平面ニ垂直ニ當ル風ノ壓力ハ、ソノ平面ノ面積ト風速ノ自乗トニ比例スル。コレヲ方程式デ表ハセ。 $A=k\cdot M h$ (k ハ常數) (例2) 弦ノ振動數 (n) ハ、弦ノ直徑 (d) ノ平方根及ビ長サ (l) ニ反比例シ、張力 (t) ノ平方根ニ比例スル。コレヲ方程式デ表ハセ。 $n=\frac{k}{l}\sqrt{\frac{t}{d}}$ (k ハ常數)
第四篇 正多角形ト圖	
第一章 正多角形	
47.正多角形ノ周及ビ面積	正弦、餘弦、正切ヲ用ヒルト、正多角形ノ周及ビ面積ハ、ソノ外接圓(又ハ内接圓)ノ半径ト、邊數ノ函数トシテ簡單ニ表ハサレル。
第二章 圓周率	
48.圓周ト内接形並ニ外接形ノ周	定理 圓ニ内接(又ハ外接)スル正多角形ノ邊數ヲ限りナク増ストキハ、ソノ周ハ限りナク圓周二近ク。 【注意】 (2) 一變數ヲ次第二一定數ニ近カシメルトキ、ソノ差ノ絶對値ヲ如何ホドデモ小ナラシメルコトガ出來ルナラバ、ソノ一定數ヲ變數ノ極限トイフ。 圓周ハ、ソノ圓ニ内接又ハ外接スル正多角形ノ邊數ヲ限りナク多クスルトキコノ多角形ノ周ノ極限デア (3) 極限トイフ考ヘハ、現代ノ數學デ最も重要ナ考ヘノ一ツデア。コレニツイテノ深イ研究ハ高等數學ノ職トスルトコロデア。

下卷では、三角関数で「比 $\frac{AC}{BC}$ ハ $\angle XAY$ ノ 函数 デアルトイフ」と、辺の比を角の関数と捉え、正接関数・正弦関数・余弦関数の定義をし、関数の考え方を意識させている。三角関数の変化をグラフ化 ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$) している。二次方程式では、根の数をその式の関数のグラフとの関係で説明している。「函数値ノ變化」では、一次関数、二次関数の節を起こし、それぞれの特徴(極大・極小を含む)をグラフで説明している(平均変化率(変化の割合)までには及んでいない)。また関数の式を利用して、円、楕円、双曲線のグラフを教えている。立体の体積や面積に関する公式や物理で扱われる易しい公式も多元関数と捉え指導している。

幾何の面では、軌跡で動的な図形の見方や、「正弦、餘弦、正切ヲ用ヒルト、正多角形ノ周及ビ面積ハ、ソノ外接圓(又ハ内接圓)ノ半径ト、邊數ノ函数トシテ簡單ニ表ハサレル」「一變數ヲ次第二一定數ニ近カシメルトキ、ソノ差ノ絶對値ヲ如何ホドデモ小ナラシメルコトガ出來ルナラバ、ソノ一定數ヲ

変数ノ極限トイフ」というような変化に視点を当てた指導を行っている。

(2)『新制中學校用増課數學』の検討

『新制中學校用増課數學』は『新制中學校用基本數學』の続編である。第四学年・第五学年（または第三学年・第四学年・第五学年）に使用される。上巻と下巻から構成されている。編纂上の留意点は『新制中學校用基本數學』と同じである。

①『新制中學校用増課數學 上』⁽²¹⁾の指導内容の概略

第一篇 方程式ノ補充（第一部甲）	
第一章 二次方程式 5.一元二次方程式ノ図解	$3x^2 - 5x + 2 = 0$ の根は $y = x^2$ のグラフと $y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$ のグラフの交点と説明。
第二章 不等式 9.二次函数ノ値ノ變化	$y = ax^2 + bx + c$ を、平方完成を行い $a > 0$ や $a < 0$ の場合に分けて変化を説明。
第二篇 指数及ビ對數（第一部甲）	
第一章 冪及ビ根 19.冪函数	$y = ax^n$ ($n = 5, 4, 3, 2, -1, -2, -3, -4$)のグラフをかいている。
20.冪函数ノ値ヲ作圖スルコト	冪関数のグラフのかき方を説明している。
第二章 指数及ビ對數 25. $y = 10^x$ ノ圖表	$y = 10^x$ のグラフをかいている。 【注意】 (2) 一般ニ $y = ka^x$ ヲ x ノ指数函数トイフ。
第三章 對數	
27. $y = \log_{10} x$ ノ値ノ變化	$y = \log_{10} x$ のグラフをかいている。 【注意】 一般ニ $y = \log_a x$ ニ依ツテ定義サレタ函数 y ノコトヲ x ノ對數函数トイフ。
第二篇 三角形ニ於ケル數量的關係（第一部乙）	
第一章 鈍角ノ三角函数 7.三角函数ノ値ノ變化 [i] $\sin \alpha$ 及ビ $\cos \alpha$ ノ變化 [ii] $\tan \alpha$ 及ビ $\cot \alpha$ ノ變化	$\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)のグラフあり。

②『新制中學校用増課數學 下』⁽²²⁾の指導内容の概略

第四篇 一般角ノ三角函数（第一部甲）	
第一章 一般角ノ三角函数 44.圓運動ト一般角	一般角（正の向き、負の向き）を考える。
47.三角函数ノ値ノ變化	4つの象現での $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ のグラフをかいている。
補充篇	
IV.三角函数ノ應用 11.正弦曲線	(例1) $y = 2 \sin x + \sin 3x$ のグラフ (例2) $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ のグラフ (例3) $y = 100 \sin x + 50 \sin(3x - \frac{2}{9}\pi)$ のグラフ
V.二三ノ簡單ナ函数ノ値ノ變化 12. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ノ値ノ變化	(例1) $\frac{1}{x-3}$ ノ値ノ變化ヲ略述シコレヲ圖示セヨ。 (例2) $\frac{x}{x-3}$ ノ値ノ變化ヲ略述シコレヲ圖示セヨ。 (例3) $\frac{x-1}{x-3}$ ノ値ノ變化ヲ略述シコレヲ圖示セヨ。

<p>13. $\sqrt{x+a}$ノ値ノ變化</p>	<p>(例1) $y=\sqrt{x}$ノ圖表ヲ畫ケ。 (例2) $\sqrt{x-3}$ノ値ノ變化ヲ略述シコレヲ圖示セヨ。 (例3) $\sqrt{x+3}$ノ値ノ變化ヲ略述シコレヲ圖示セヨ。</p>
<p>VI.實驗公式 14.實驗公式</p>	<p>摂氏0°ノトキ1 mノ長サアル或鐵棒ノ伸ビト温度トノ關係ヲ決定スルタメニ實驗ヲ行ツテ次ノ結果ヲ得タトスル。 対応表の値をグラフにプロットして、その形から正比例することがわかり、$y=0.012x$の方程式を求めている。 (例2) 大理石ノ球ヲ溝ニ沿ウテ轉ガシ、落ち初メテカラ、一秒經過スル毎ニ球ノ位置ヲ觀測シテ次ノ結果ヲ得タ。時間ヲt、距離ヲsトシテ實驗公式ヲ求メヨ。$s=0.0043t^{2.3}$</p>
<p>X.統計</p>	
<p>25.度數分布 26.平均 27.標準偏差 28.相關係數</p>	<p>数学の成績を例にとって、統計処理し、その中で関数や関数の考え方を養成している。</p>

上巻では「9.二次函数ノ値ノ變化」「20.冪函数ノ値ヲ作圖スルコト」「25. $y=10^x$ ノ圖表」「27. $y=\log_{10}x$ ノ値ノ變化」「7.三角函数ノ値ノ變化 ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)」、下巻では「47.三角函数ノ値ノ變化 (一般角) ($y=asinbx + csin dx$ のグラフを含む)」「12. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ノ値ノ變化 (分数関数)」「13. $\sqrt{x+a}$ ノ値ノ變化 (無理関数)」というように、関数の値の變化が中心となっていることが分かる。もちろんその説明はグラフを利用し、視覚的・直観的な説明をしている。さらに下巻では、「VI 實驗公式」の章を設け實驗値から實驗公式を求める方法を紹介し、實驗的に得られた結果を適当に処理して一般的法則を導くことを指導している。「X 統計」の章では、「25.度數分布」「26.平均」「27.標準偏差」「28.相關係數」など、数学の成績を統計処理し、その中で関数や関数の考え方を養成している。

4. まとめと考察

佐藤は、関数思想を養成するためには、「函数といふ一つの章を中等數學教科の或る箇所に挿入するのでなくて中等數學教育全體を函数思想で潤澤さすべきである」とし、数学教育のあらゆるところでその機会を持つよう要請した。そして佐藤は具体的に、関数思想は算術、方程式、公式、幾何學などにも深く関連していることを説明した。そこで考察の観点を、算術の面、方程式の面、公式の面、幾何學の面、及び微積分の面、グラフの面とし、最後に総括的に述べることにする。

算術の面では、應用問題の解法において関数關係を見出すことが重要であるとしている。『新制中學校用基本數學 下』の「24.比例スルトイフコト」「25.反比例スルトイフコト」「102.相伴ツテ變化スル二量間ノ關係表示」「103.變數、常數」「104.公式ノ圖表」では、變数を意識した関数關係を扱っている。小学校で扱うような具体的に1つの數量を求めるのではなく、變数としての文字の關係式 (比例關係が中心) となっている。

方程式の面では、一次方程式の解き方が説明され、その根の存在もグラフで直観的視覚的に捉えさせ丁寧な扱いになっている。しかし「方程式の應用を説く前に諸種の變量間の函数關係を考察することが必要である」ことに対して、一次方程式を立てる準備段階としての一次式を作るための數量間の関数關

係の練習問題が無い。それは二次方程式にもいえることである。方程式を立てられなければ変量間の関数関係を考察させることができない。方程式に対応する関数のグラフかきに指導の重点がある。また円や楕円や双曲線などの図形は、例えば円 $x^2 + y^2 = 25$ は $\pm \sqrt{25 - x^2}$ として、2つの関数が合わさったものとして捉えられグラフ化されている。

幾何学の面では、図形を動的に捉えたり、関数的に捉えたりすることを主張している。実際に「三角形の一つの邊は他の二邊とその夾む角の函数であり三角形の一つの角は他の一角及びそれを夾む二邊の函数である。」というように、三角形を関数として、「二邊ノ大サガソレゾレ一定ナル三角形ノ第三邊ハ、ソノ二邊ノ夾ム角ノ増大（又ハ減少）スルニ伴ツテ増大（又ハ減少）スル」や「一變數ヲ次第ニ一定數ニ近カシメルトキ、ソノ差ノ絶對値ヲ如何ホドデモ小ナラシメルコトガ出來ルナラバ、ソノ一定數ヲ變數ノ極限トイフ」のような変化の取り扱いや、軌跡のように動的な図形の捉え方に着眼させている。しかしその指導項目は教科書の幾何の指導内容全体に比べるとその比率は低い。

三角関数では $\frac{BC}{AB}$ を三角比の定義ではなく、関数の定義「 $\frac{BC}{AB}$ ヲ $\angle XAY$ ノ正弦函数」として扱っている。

公式の面では、公式を関数と捉える考え方が、「104.公式ノ圖表」や多元関数で強く表われている。

微積分の面では、「函数思想を以て初等數學全體を浸潤させる自然の歸結として初等數學は微分積分の思想をも包容するやうに改造さるべきことを要求」し、「微分積分の思想を與へる方法は函数の圖表に結びつけて具象的直觀的なるを良し」としたのであるが、これに関する指導内容は教科書には述べられていない。

グラフの面については、「函数思想の最初の導入は圖表示即ちグラフと相伴はしめるを良策」とし、直観を利用したグラフの使用を推奨した。このことは実行され、「4. 數表及ビ圖表」「50.圖表ノ種類」「51.圖表ノ畫キ方」「52.二量ノ年次的變化ノ比較」などの指導および、方程式の根や関数の視覚的表示方法として、グラフは広範囲に使用されている。

また統計を取り上げ、「25.度數分布」「26.平均」「27.標準偏差」「28.相關係數」について数学の成績を例にとりあげ「函数思想」を養成している。このことは他の教科書にはあまり見られない。

最後に、関数そのものの扱いについてである。『新制中學校用基本數學 下』の「第三篇 函数値ノ變化」の「第一章 一元函数」で扱われる。この章では、二元一次方程式・二元二次方程式ではなく、「一次函数」・「二次函数」という用語が使われている。しかし、実験・実測で得られたデータをもとに法則を導く指導（実験公式、統計）は『新制中學校用増課數學 下』だけである。『新制中學校用基本數學』にその姿勢はない。佐藤は、実験的に得られた結果を適当に処理して一般的法則を導くことは関数に関する問題であるとし、自然界や社会にはそのような関数に関する問題が非常に多いと考えるにもかかわらず、実験を重視した扱いにはなっていない。

数学教育全体を通じて関数思想を養成しようとする姿勢は、具現化され教科書に表われている。しかしグラフの使用の面だけが強調され、自然界や社会現象を対象とした実験・実測には消極的な姿勢である。この点は数学教育改造運動の思想と異なる。

[引用文献及び参考文献]

- (1) 拙著「佐藤良一郎の関数教育論についての考察」、日本数学教育史学会『数学教育史研究』第1号、平成13年8月13日発行、pp. 21-27
- (2) 佐藤良一郎著『初等數學教育の根本的考察』（大正13年12月21日発行：目黒書店）p. 123
- (3) 前掲書 (2) p. 124

- (4) 佐藤良一郎著『數學教育各論』(昭和4年11月28日初版發行、昭和9年3月10日12版發行：東洋圖書株式合資会社) p. 4
- (5) 上掲書 (2) p. 124
- (6) 上掲書 (2) p. 125
- (7) 上掲書 (2) p. 129
- (8) 上掲書 (2) p. 132
- (9) 上掲書 (2) p. 132
- (10) 上掲書 (2) p. 133
- (11) 上掲書 (2) p. 137
- (12) 上掲書 (2) p. 135
- (13) 上掲書 (2) p. 138
- (14) 上掲書 (2) p. 138
- (15) 上掲書 (2) p. 138
- (16) 上掲書 (2) p. 141
- (17) 上掲書 (2) p. 141
- (18) 佐藤良一郎著『新制中學校用基本數學 上』(昭和7年12月18日訂正再版發行：目黒書店)
- (19) 佐藤良一郎著『新制中學校用基本數學 中』(昭和7年12月18日訂正再版發行：目黒書店)
- (20) 佐藤良一郎著『新制中學校用基本數學 下』(昭和7年12月18日訂正再版發行：目黒書店)
- (21) 佐藤良一郎著『新制中學校用增課數學 上』(昭和8年11月30日訂正再版發行：目黒書店)
- (22) 佐藤良一郎著『新制中學校用增課數學 下』(昭和8年11月30日訂正再版發行：目黒書店)