三重大学教育学部研究紀要　第63巻　教育科学　（2012）　145 － 166頁

音律の数学的構造に関する一考察*

上垣　　渉**・根津知佳子***

A Study on the Mathematical Structure of Music Tune

Wataru UEGAKI and Chikako NEZU

第１節　８度と５度によるピュタゴラス音律の構成

古代の伝承によれば，ピュタゴラス(1)は一弦琴（モノコルド(2)）を用いて，8度音・5度音・4度音を見出し，4度音と5度音の音程比を用いて音楽史上最初の音律を構成したと伝えられている(3)。この音律は「ピュタゴラス音律」と呼ばれているが，より厳密に言えば「初期ピュタゴラス音律」と「後期ピュタゴラス音律」があり，今日一般に取り上げられているのは後期ピュタゴラス音律（以後，特に断りのない場合，ピュタゴラス音律と言えば，この音律を指す）である。

ピュタゴラス音律は，数学的には8度と5度によって構成されるが，8度と5度はピュタゴラス音律に限らず，その後現れた多くの音律に「純正」あるいは「完全」という接頭語を付けて使用されることからもわかるように，きわめて協和度が高く，音律構成上の基準度として扱われることが多いことから，「純正5度」のように“純正律の5度”を連想させるような用語の使用を避けて，本論文では「真正8度」$\left(\frac{2}{1}\right)$，「真正5度」$\left(\frac{3}{2}\right)$などと呼ぶことにする。そして，特にピュタゴラス音律の8度あるいは5度を特定して用いる場合は「P–8度」あるいは「P–5度」と略記する。また，8度及び5度に限らず，ピュタゴラス音律での音については「P–」を付すこととする。

さて，真正8度及び真正5度の振動数比はそれぞれ2対1，3対2であるから，基音（C）の振動数を1とすれば，真正8度及び真正5度の振動数比はそれぞれ2，$\frac{3}{2}$となり，

$$(C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ A,\ B,\ C)=\left(1,\ D,\ E,\ F,\ \frac{3}{2},\ A,\ B,\ 2\right)$$

となる。P–5度音$\left(G,\ \frac{3}{2}\right)$をさらにP–5度（真正5度）上げると$\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$となるが，これをオクターブ内に収めるために$\frac{1}{2}$を掛けて，P–2度音$\left(D,\ \frac{9}{8}\right)$が求められる。以下同様にして，次々とP–5度（真正5度）上げていくことによって，ピュタゴラス音律，

* 原稿受理日　平成23年10月20日

** 三重大学名誉教授

*** 三重大学教育学部・音楽教育講座

$$(C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ A,\ B,\ C) = \left(1,\ \frac{9}{8},\ \frac{81}{64},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{27}{16},\ \frac{243}{128},\ 2\right)$$

が構成される。

ただ，上記のピュタゴラス音律での P–4 度音$\left(F,\ \frac{4}{3}\right)$だけは P–5 度（真正 5 度）の積み重ねによっては求められない。P–5 度（真正 5 度）の積み重ねによって得られるのは振動数比$\frac{3^{11}}{2^{17}}$すなわち$\frac{177147}{131072}$という協和度の低い音でしかないのである。そこで，F 音の代わりに振動数比$\frac{3^6}{2^9}$すなわち$\frac{729}{512}$である F# 音を用いたのが初期ピュタゴラス音律であった。

後期ピュタゴラス音律では，P–4 度音（F）を P–5 度（真正 5 度）上げると，オクターブ上の振動数比 2 の C 音となることから，$2 \div \frac{3}{2}$と逆算することによって，P–4 度音の振動数比が$\frac{4}{3}$と求められたのである。P–5 度音や P–4 度音のように，その振動数比が$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$と簡単な整数比で表される音の協和度が高いという「法則」は古くピュタゴラスの時代から知られていた(4)。

一般に，P–5 度（真正 5 度）を積み重ねていくと，振動数比は$\frac{3^m}{2^n}$の形になるが，2 と 3 はどちらも素数であるから，$\frac{3^m}{2^n} = 2$（P–8 度音）となる整数$m,\ n$は存在しないのである。ただ，およそ 2 になる場合があって，そのときの振動数比は$\frac{3^{12}}{2^{18}}$（2.0272865）である。つまり，P–5 度（真正 5 度）の積み重ねを 12 回行なうことによって，振動数比が約 2（P–8 度音）となるのである。オクターブを 12 音で構成することの根拠がここにある。

振動数比の値を数直線上に目盛り，その数直線を円筒に巻き付けていくと，図 1 のように螺旋状になり，この螺旋を円筒の上から見ると，振動数比が 1，2，4，8，・・・の点は P–8 度音を示す同一の点（円筒の底面の円周上の点 C）に重なることになる。また，この数直線は 1，2，4，8，・・・などの公比 2 の等比数列をなす値が等間隔に並んでいるから，底を 2 とする対数値が等差数列をなしていることになる(5)。

したがって，たとえば，振動数比$\frac{3}{2}$（P–5 度音，G）の点の位置は，$log_2 \frac{3}{2}$を計算することによって求められる。この対数値を計算ソフト「MATHEMATICA」で計算する(6)と，$log_2 \frac{3}{2}$＝0.5849625 となるから，振動数比$\frac{3}{2}$の点（G 音）は，円筒の底面の円周上で考えれば，図 2 のように，点 C（基音）を 0 として，0.5849625 の位置になる。では，点 C から右回りで点 G まで回ったときの中心角は何度になるだろうか。

点 C から一周した長さ 1 に 360 度が対応しているのであるから，$360 \times 0.5849625 = 210.5865$により，210 度より少し大きいが，これを 210 度とすると，P–5 度は 210 度に相当することになる。したがって，第 1 音（C）から出発して，右回りに回転角 210 度ずつ回転させていくことによって，第 12 音（F）までを円周上に目盛っていくと，図 3 のような閉じた円になる。

ところで，図 3 は，P–5 度をちょうど 210 度として作られたのであるが，実際は 210 度ではなく，

210.5865 度（これも近似値）であるから，約 0.5865 度のズレがある。そして，P−5 度を 12 回上げて 1 回転したのであるから，$0.5865 \times 12 = 7.038$により，約 7 度の「行き過ぎ角」が生じることになる。このズレは「ピュタゴラス・コンマ」（振動数比$\frac{3^{12}}{2^{19}}$）と呼ばれていて，このズレにどう対処するかは，その後の音律研究の大問題となったのであった。

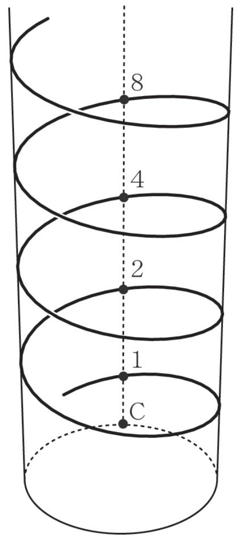

図１ 音律の螺旋

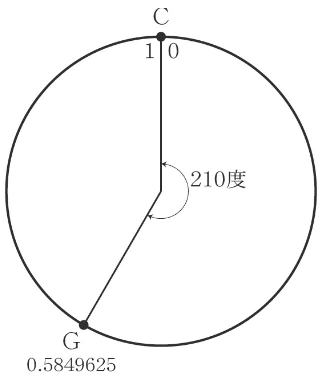

図２ C–G の５度間隔

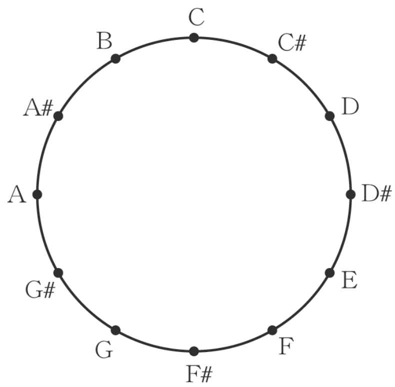

図３ オクターブ（12 音）の配置

第２節 音程の単位「セント」の発明

音楽に用いられる音の性質を表す最も基礎的な量は振動数であり，これは聴覚とは無関係に測定できる物理量である。音波の振動数は Hz（ヘルツ）という単位で表されるが，音が耳に入った後，振動数は聴覚器官によって「高さ」（ピッチ，pitch）として受け止められる[(7)]。

高さの感覚は，たとえば振動数 100Hz の音を 200 Hz にしたときの高さの増分を 1 とすると，400 Hz，800 Hz，1600 Hz，・・・に上げたときの高さの増分は，それぞれ 2，3，4，・・・であるように感じられる。つまり，振動数が等比数列をなして変わるとき，高さの感覚は等差数列をなして変わるわけである。このことは，「感覚量は刺激の強さの対数に比例する」というウェーバー・フェヒナーの法則[(8)]の 1 つの現れでもある。

さて，振動数をx，音高の感覚をyとすると，

$$\begin{cases} x = x_0 a^p \\ y = y_0 + bp \end{cases} \quad (x_0,\ y_0\text{は初項，}a\text{は公比，}b\text{は公差})$$

と表される。第 1 式の両辺について，aを底とする対数をとれば，

$$log_a x = log_a x_0 + log_a a^p = log_a x_0 + p log_a a = log_a x_0 + p$$

$$p = log_a x - log_a x_0 = log_a \frac{x}{x_0}$$

となるから，これを第 2 式に代入して，

$$y - y_0 = b log_a \frac{x}{x_0}$$

となる。オクターブの振動数比は 2 であったから，公比を 2 とし，オクターブの間隔を 1200 と定めると，$a = 2, b = 1200$となるから，

$$y - y_0 = 1200 \times log_2 \frac{x}{x_0}$$

となる。この式において，左辺が意味する「人間が受ける感覚量（音程)」を，右辺の式によって算出される値によって定義するのである。その単位は「セント」と呼ばれている。すなわち，

$$（セント値）= 1200 \times log_2 \frac{x}{x_0} \quad (\frac{x}{x_0}は 2 音の振動数比)$$

である。

セントという単位が導入された背景として，「長」「短」「増」「減」「完全」などの接頭語が必要となるような「何度」という音程の表現方法は合理的とは言えないという理由の他にも次のような事情がある。すなわち，さまざまな民族の音楽には，音程に微妙な幅があって，今日的な平均律の半音の単位では，そのような音程の違いが把握できないのである。

セント値は客観的に測定できる振動数によって算出できるから，その値によって，さまざまな民族音楽の音律や音階の特徴を明らかにできるのである。ちなみに，セントという単位を考案したのは，19 世紀にさまざまな民族音楽を研究したイギリスの民族音楽学者アレクサンダー・J・エリス[9]である。そして，セントという単位が導入されたことによって，「比較音楽学」という分野の研究が進展したと言われている。

ところで，第 1 節の最後に指摘したピュタゴラス・コンマの振動数比は$\frac{3^{12}}{2^{19}}$であったから，そのセント値は$1200 \times log_2 \frac{3^{12}}{2^{19}} = 23.46001038$となることから，約 24 セントとされている。前述したように，この約 24 セントの微小な音程のズレへの対応がそのまま音律の歴史になったと言っても過言ではない。すでに述べたように，ピュタゴラス音律は P−5 度（真正 5 度）の積み重ねを基本として構成されたのであった。すなわち，最初の C 音から出発して，P−5 度（真正 5 度）上げると G 音が得られ，さらに P−5 度（真正 5 度）上げると D 音が得られ，以下同様にしてオクターブ上の C 音までを産出したのであった。このとき，P−5 度（真正 5 度）の積み重ねの連鎖を一部修正することによって，図 4 のように閉じた円として図式化することができたのである。

この図 4 は P−5 度（真正 5 度）の積み重ねを基本として作られたことから，楽典では「5 度圏」あるいは「5 度円」と呼ばれている。ただ，図 4 の円は P−5 度（真正 5 度）連鎖の一部修正によるものであるが，精確な P−5 度（真正 5 度）の積み重ねによっては，図 5 のように，閉じた円ではなく，約 24 セントのピュタゴラス・コンマだけ行き過ぎた円になってしまう。

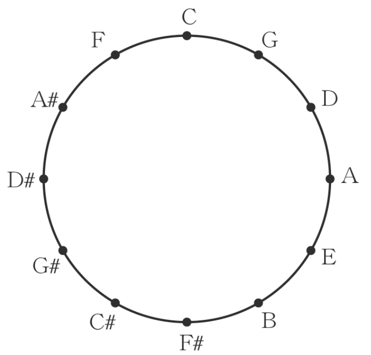

図 4　音律の 5 度圏

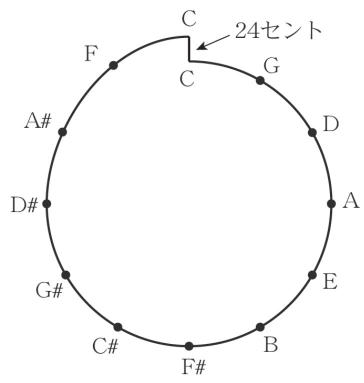

図 5　24 セントのピュタゴラス・コンマ

ところで，第 1 節の図 3 は 5 度圏と類似しているが，正しくは 5 度圏ではなく，楽典にも示されていないので，ここでは「オクターブ圏」と呼ぶことにする。5 度圏が P–5 度（真正 5 度）の積み重ねの順に得られる音を右回りに配置しているのに対して，オクターブ圏においては，各音が音名の順に右回りに配置されている。

P–5 度（真正 5 度）の積み重ねと P–4 度音（F）の振動数比$\frac{4}{3}$への修正によって得られる音律は，

$$(C, G, D, A, E, B, F\sharp, C\sharp, G\sharp, D\sharp, A\sharp, F, C) = \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{3^2}{2^3},\ \frac{3^3}{2^4},\ \frac{3^4}{2^6},\ \frac{3^5}{2^7},\ \frac{3^6}{2^9},\ \frac{3^7}{2^{11}},\ \frac{3^8}{2^{12}},\ \frac{3^9}{2^{14}},\ \frac{3^{10}}{2^{15}},\ \frac{2^2}{3},\ 2\right)$$

であるが，オクターブを 1200 セントとして，この振動数比に従ったセント値を計算し，5 度圏に示すと，図 6 のようになり，A♯–F 間だけが 678.495 セントとなる。つまり，23.46 セントのピュタゴラス・コンマを A♯–F 間で差し引いて，5 度圏を閉じさせたわけである。この 678.495 セントという不協和な 5 度音程は狼の唸り声にたとえられて「ウルフ（狼音）」（wolf tone）と呼ばれている。

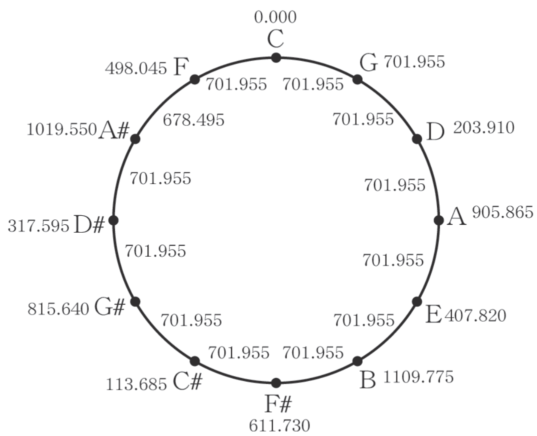

図６ P–５度の積み重ねによるセント値

そして，このウルフを置く場所は C 音を主音とするピュタゴラス音律では G♯–D♯の 5 度関係とすることが通例である(10)とのことだから，ピュタゴラス音律の 5 度圏は図 7 のようになる。また，ピュ

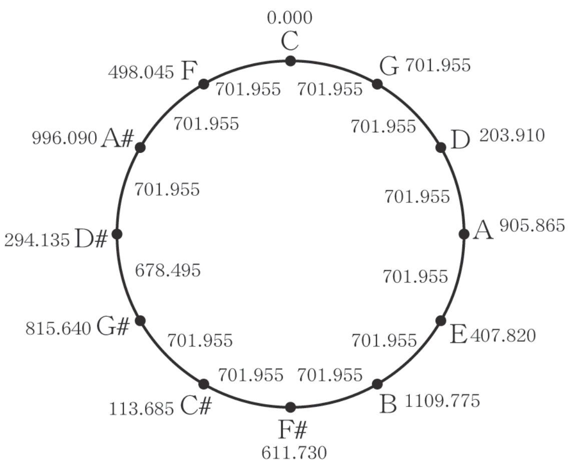

図７ ピュタゴラス音律の５度圏

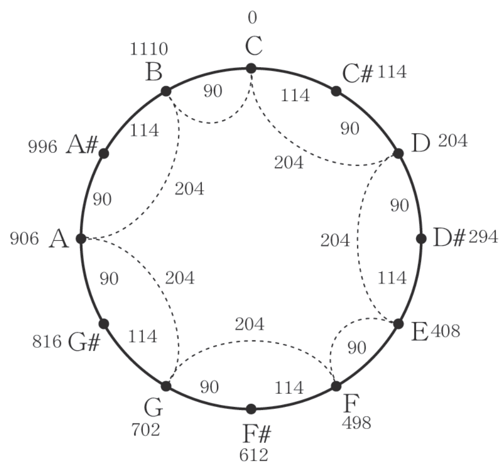

図８ ピュタゴラス音律のオクターブ圏

タゴラス音律の各音のセント値を小数第 1 位の四捨五入による整数値にして，オクターブ圏に示すと図 8 のようになる。

図 8 を見るとわかるように，ピュタゴラス音律は 204 セントの全音と 90 セント及び 114 セントの半音から成り立っている。全音は「トノス」と呼ばれ，90 セントの半音は「全音階的半音」で「リンマ」[11]，114 セントの半音は「半音階的半音」で「アポトメ」と呼ばれている。

ピュタゴラス音律では，ウルフを G♯–D♯の 5 度関係に置いたわけであるから，D♯，A♯の振動数比もピュタゴラス・コンマだけ小さくなる。したがって，それぞれの振動数比は，

D♯　・・・　$\frac{3^9}{2^{14}}\times\frac{2^{19}}{3^{12}}=\frac{2^5}{3^3}$　　　A♯　・・・　$\frac{3^{10}}{2^{15}}\times\frac{2^{19}}{3^{12}}=\frac{2^4}{3^2}$

となり，結局のところ，ピュタゴラス音律の各音の振動数比は下記のようになる。

$$(C,G,D,A,E,B,F\sharp,C\sharp,G\sharp,D\sharp,A\sharp,F,C)=\left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{3^2}{2^3},\ \frac{3^3}{2^4},\ \frac{3^4}{2^6},\ \frac{3^5}{2^7},\ \frac{3^6}{2^9},\ \frac{3^7}{2^{11}},\ \frac{3^8}{2^{12}},\ \frac{2^5}{3^3},\ \frac{2^4}{3^2},\ \frac{2^2}{3},\ 2\right)$$

ピュタゴラス音律では，24 セントのピュタゴラス・コンマを G♯–D♯の 5 度関係に置くことによって処理したが，これがウルフの発生という問題を抱え込むことになった。さらに，ピュタゴラス音律では，P–3 度の振動数比が$\frac{81}{64}$であることから，その協和度の低さが問題とされた。その後の音律研究においては，これら 2 つの問題をいかに解決するかが課題となったのである。

第３節　１２平均律による音律のモノクロ化

ピュタゴラス・コンマにどのように対処するかは，ピュタゴラス音律にとどまらず，その後現れたほとんどすべての音律に共通する大問題であった。歴史的な紆余曲折はあったが，これを一挙に解決してしまったのが「12 平均律」（以下，特に断りのない場合，「平均律」と言えば，12 平均律を指す）である[12]。

ピュタゴラス音律はオクターブを不均一に 12 分割していたが，これに対して，平均律はオクターブを（対数的に）12 等分して，半音を 1 単位，全音を 2 単位とした音律である。5 度圏で言えば，どの音程間隔も少しずつ短くして閉じた円になるようにしたと言える。

そこで，平均律での各音が振動数比hによって次々と得られていくとする。すなわち，基音（C）をh倍した音が半音上の C♯であるとし，そのh倍が半音上の D であるとするのである。以下同様に，h倍していって各音を作っていくと，

$$\left(C,C\sharp,D,D\sharp,E,F,F\sharp,G,G\sharp,A,A\sharp,B,\ \dot{C}\right)=(1,h,h^2,h^3,\ h^4,\ h^5,h^6,\ h^7,\ h^8,h^9,h^{10},h^{11},h^{12})$$

となるが，$\dot{C}$は C の 1 オクターブ上の音であるから，振動数比は 2 でなければならない。したがって，$h^{12}=2$ が成り立つことになり，$h=\sqrt[12]{2}=2^{\frac{1}{12}}$（およそ，1.059463094）となる[13]。

ここで，平均律における各音のセント値を計算する。まず，C 音は$1200\times log_2 1=0$である。そして，C♯音は$1200\times log_2 2^{\frac{1}{12}}=1200\times\frac{1}{12}=100$となり，D 音は$1200\times log_2 2^{\frac{2}{12}}=1200\times\frac{2}{12}=200$となる。つまり，平均律での半音は 100 セント，全音は 200 セントとなっている。したがって，平均律 5 度（これを「H–5 度」と略記する）のセント値は$1200\times log_2 2^{\frac{7}{12}}=1200\times\frac{7}{12}=700$となる。平均律の 5 度圏及びオクターブ圏を示すとそれぞれ図 9，図 10 のようになる。

H–5 度を 12 回積み重ねていくと，5 度圏は閉じた円となり，1 回転のセント値は 700 セントの 12 倍で 8400 セントとなる。これに対して，P–5 度を 12 回積み重ねていくと，そのセント値は

$1200\times log_2\frac{3^{12}}{2^{12}}=8423.460010$のようになって，1 回転のセント値は約 8424 セントとなる。つまり，閉じた 5 度圏を構成する平均律と比較して，ピュタゴラス音律は約 24 セントのズレが生じることになるのであった。

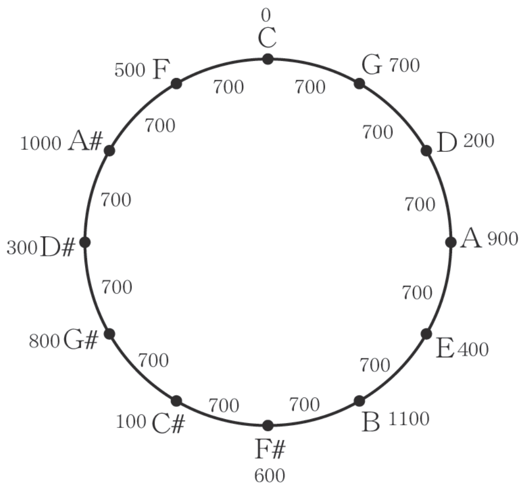

図９　平均律の５度圏

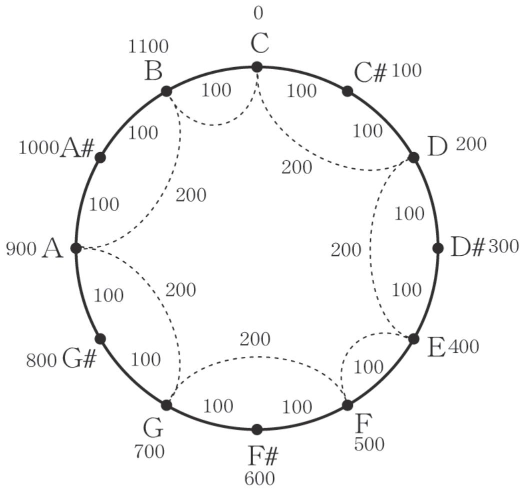

図 10　平均律のオクターブ圏

平均律では，各音程間を均等にすることによって，移調・転調が自由自在に行なうことができるようになったという利点はあるものの，たとえば H−5 度の振動数比が$2^{\frac{7}{12}}$であるように，簡単な整数比で表せないから，真正 5 度のような協和度は保存されないことになる。他の各音についても同様である。その意味で，ピュタゴラス音律やその他の音律に比べて味わいに乏しく，音律をモノクロ化してしまったとも言われている。

第４節　音律の数学的構造

ここで，ピュタゴラス音律及び平均律を参考にして，音律を数学的に表現する様式すなわち数学的構造を明らかにする(14)。音に関しては，「幹音」と称せられる 7 つの音があり，日本語では「ハ，ニ，ホ，ヘ，ト，イ，ロ」，英語では「C，D，E，F，G，A，B」のような「音名」が付けられていて，この 7 種の音が繰り返し現れ，「音名列」が構成されている。

この音名列の中から，任意の C からその 8 度上の C までの部分音列を取り出して構成される音階は「ハ調長音階」と呼ばれているし，任意の A からその 8 度上の A までの部分音列によって構成される音階は「イ調短音階」と呼ばれている。これらをそれぞれ［C］，［a］と略記することにする。つまり，［　］内には音階の主音を音階の長短に応じてそれぞれ大文字，小文字で記すのである。

音階を構成する各音を音名に関係なく表示する名称は，長音階と短音階の区別なく，第 1 音から順に，「主音，上主音，中音，下属音，属音，下中音，導音」のように呼ばれる。これらは正式名称であるが，以下では簡明にするために，所謂「階名」を用いることにする。日本語では「ドレミファソラシド」であるが，英語では「do,re,mi,fa,sol,la,si,do」で，これを略記した「d,r,m,f,s,l,t,d」によって，各音の振動数を表すことにする。ここで，「シ」（si）を「t」としたのは，「ソ」（s）と区別するためであり，トニック・ソルファ法(15)での幹音「doh,ray,me,fah,soh,lah,te,doh」の文字記譜法の「te」に従ったことによる。

さて，それぞれの 2 音の間隔が「全音，全音，半音，全音，全音，全音，半音」である長音階の場合では，音律は調名とは独立であるから，たとえば，［C］から［G］へ移る時には，音名と振動数の対応は下記のようになる。

［C］	振動数	d		r		m	f	$f\sharp$	s		l		t	$2d$		$2r$		$2m$	$2f$	$2f\sharp$	$2s$
	音名	C		D		E	F	F♯	G		A		B	C		D		E	F	F♯	D
［G］	振動数	$\frac{f'}{2}$		$\frac{s'}{2}$		$\frac{l'}{2}$		$\frac{t'}{2}$	d'		r'		m'	f'		s'		l'		t'	$2d'$

この図表の振動数の行は，単に右向きに振動数が増加することを定性的に示したにすぎないので，間隔の広狭は無視していただきたい。また，［C］の場合との区別のために，［G］においては「d'」のようにダッシュが付けてある。さらに，$\sharp$ 記号も，ここでは半音の上昇に係る振動数の倍率を表している。両音階の振動数を比べると，

$$d' = s,\ r' = l,\ m' = t,\ f' = 2d,\ s' = 2r,\ l' = 2m,\ t' = 2f\sharp \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

となっている。また，d, r, m, f, s, l, t, d 及び $d', r', m', f', s', l', t', d'$ は，いずれも長音階であるから，

$$\frac{r'}{d'} = \frac{r}{d},\ \ \frac{m'}{d'} = \frac{m}{d},\ \ \frac{f'}{d'} = \frac{f}{d},\ \ \frac{s'}{d'} = \frac{s}{d},\ \ \frac{l'}{d'} = \frac{l}{d},\ \ \frac{t'}{d'} = \frac{t}{d} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。

①，②には 13 個の方程式があるのに対して，未知数は$\sharp$も含めて合計 15 個あるから，2 個を定数扱いとして解くことができる。そこで，P−5 度に相当する振動数比$\frac{s}{d}$を基準にとることとし，$p = \frac{s}{d}$と定義する。そして，p, dを定数扱いとして，$r, m, f, s, l, t, \sharp$ をp, dで表すことにする。

まず，$p = \frac{s}{d}$より明らかに，$s = pd$である。式②の中の$\frac{f'}{d'} = \frac{f}{d}$に，式①の中の$d' = s,\ f' = 2d$を代入すれば，$\frac{2d}{s} = \frac{f}{d}$ となり，$fs = 2d^2$となる。$s = pd$であったから，$fpd = 2d^2$より，$f = \frac{2}{p}d$となる。以下，同様に計算すると，

$$r = \frac{p^2}{2}d,\ m = \frac{p^4}{4}d,\ f = \frac{2}{p}d,\ s = pd,\ l = \frac{p^3}{2}d,\ t = \frac{p^5}{4}d,\ \sharp = \frac{p^7}{16}$$

と求めることができる。これらを用いて，長音階の音律を主音 C に対する各音の振動数比で表すと，

$$(C, G, D, A, E, B, F\sharp, C\sharp, G\sharp, D\sharp, A\sharp, F, C) = \left(1, p, \frac{p^2}{2}, \frac{p^3}{2}, \frac{p^4}{2^2}, \frac{p^5}{2^2}, \frac{p^6}{2^3}, \frac{p^7}{2^4}, \frac{p^8}{2^4}, \frac{p^9}{2^5}, \frac{p^{10}}{2^5}, \frac{2}{p}, 2\right) \quad (4\text{-}1)$$

$$(C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, B, C) = \left(1, \frac{p^7}{2^4}, \frac{p^2}{2}, \frac{p^9}{2^5}, \frac{p^4}{2^2}, \frac{2}{p}, \frac{p^6}{2^3}, p, \frac{p^8}{2^4}, \frac{p^3}{2}, \frac{p^{10}}{2^5}, \frac{p^5}{2^2}, 2\right) \quad (4\text{-}2)$$

となる。

これが長音階の一般的様式であると同時に，その数学的構造を示しているのである(16)。

先に，$p = \frac{s}{d}$と定義したが，これは「pは主音に対する 5 度音の振動数比」であることを意味している。したがって，たとえば，P−5 度の振動数比は$\frac{3}{2}$であったから，$p = \frac{3}{2}$を上記の式に代入することによって，ピュタゴラス音律における各音の振動数比が求められることになるわけである。

次に，自然短音階の一般的様式すなわち数学的構造を明らかにする(17)。それぞれの 2 音の間隔が「全音，半音，全音，全音，半音，全音，全音」である自然短音階の場合でも，音律は調名とは独立であるから，たとえば，［a］から［e］へ移る時には，音名と振動数の対応は下記のようになる。

［a］	振動数	l		t	d		r		m	f	$f\sharp$	s		$2l$		$2t$	$2d$		$2r$		$2m$
	音名	A		B	C		D		E	F	F♯	G		A		B	C		D		E
［e］	振動数	$\frac{r'}{2}$		$\frac{m'}{2}$	$\frac{f'}{2}$		$\frac{s'}{2}$		l'		t'	d'		r'		m'	f'		s'		$2l'$

長音階の場合と同様に立式すると，

$l' = m,\ t' = f\sharp,\ d' = s,\ r' = 2l,\ m' = 2t,\ f' = 2d,\ s' = 2r$　・・・③

$\frac{t'}{l'} = \frac{t}{l},\ \frac{d'}{l'} = \frac{d}{l},\ \frac{r'}{l'} = \frac{r}{l},\ \frac{m'}{l'} = \frac{m}{l},\ \frac{f'}{l'} = \frac{f}{l},\ \frac{s'}{l'} = \frac{s}{l}$　・・・④

となる。

長音階の場合と同様に，③，④には 13 個の方程式があるのに対して，未知数は 15 個あるから，2 個を定数扱いとして解くことができる。そこで，P−5 度に相当する振動数比$\frac{m}{l}$を基準にとることとし，$p = \frac{m}{l}$と定義する。そして，p, lを定数扱いとして，$t, d, r, m, f, s, \sharp$ をp, lで表すことにする。

まず，$p = \frac{m}{l}$より明らかに，$m = pl$である。式⑤の中の$\frac{r'}{l'} = \frac{r}{l}$に，式④の中の$l' = m, r' = 2l$を代入すれば，$\frac{2l}{m} = \frac{r}{l}$となり，$rm = 2l^2$となる。$m = pl$であったから，$rpl = 2l^2$より，$r = \frac{2}{p}l$となる。以下，同様に計算すると，

$t = \frac{p^2}{2}l,\ d = \frac{4}{p^3}l,\ r = \frac{2}{p}l,\ m = pl,\ f = \frac{8}{p^4}l,\ s = \frac{4}{p^2}l,\ \sharp = \frac{p^7}{16}$

と求めることができる。

これらを用いて，自然短音階の音律を主音aに対する各音の振動数比で表すと，

$$(a, e, b, f\sharp, c\sharp, g\sharp, d\sharp, a\sharp, f, c, g, d, a) = \left(1, p, \frac{p^2}{2}, \frac{p^3}{2}, \frac{p^4}{2^2}, \frac{p^5}{2^2}, \frac{p^6}{2^3}, \frac{p^7}{2^4}, \frac{2^3}{p^4}, \frac{2^2}{p^3}, \frac{2^2}{p^2}, \frac{2}{p}, 2\right) \quad (4\text{-}3)$$

$$(a, a\sharp, b, c, c\sharp, d, d\sharp, e, f, f\sharp, g, g\sharp, a) = \left(1, \frac{p^7}{2^4}, \frac{p^2}{2}, \frac{2^2}{p^3}, \frac{p^4}{2^2}, \frac{2}{p}, \frac{p^6}{2^3}, p, \frac{2^3}{p^4}, \frac{p^3}{2}, \frac{2^2}{p^2}, \frac{p^5}{2^2}, 2\right) \quad (4\text{-}4)$$

となる。これが自然短音階の一般的様式であると同時に，その数学的構造を示しているのである。そして，上記の式において，$p = \frac{3}{2}$を代入することによって，ピュタゴラス短音階が得られることになる。

なお，以下の第 5 節以後に扱う音階については，紙面の都合上，長音階のみとする。

第5節　純正律と移調・転調の問題

ピュタゴラス音律では，最初の音すなわち基音と（オクターブ離れた音を除いて）最もよく協和する音は，基音の$\frac{3}{2}$の振動数を持つ音であった。これは 3 倍音を利用して作られた音で，ピュタゴラス音律の G（P−5 度音）であった。2 倍音からはオクターブ上の音が，4 倍音からは 2 オクターブ上の

音が，その中間の 3 倍音からはピュタゴラス音律の G 音がそれぞれ得られたわけである。

したがって，次は 5 倍音によって作られる音が欲しくなるのは当然のなりゆきと言える。もちろん，ピュタゴラス音律にそのような音は存在しない。そこで，5 倍音をオクターブ内に収めるために 2 で 2 回割った振動数比$\frac{5}{4}$の音が音律の中に欲しくなるわけである。この音は$\frac{5}{4}=1.25$であるから，ピュタゴラス音律の中で最も近い音は E（P−3 度音）であって，その振動数比は$\frac{81}{64}=1.265625$である。そこで，E 音の振動数比を$\frac{5}{4}$に置き換えて，ピュタゴラス音律ではよく協和しなかった C と E，すなわち P−3 度が協和するように作られた音律が「純正律」[18]なのである。

純正律を音律の形で正式に登場させたのは，スペインのバルトロメ・ラモス[19]で，15 世紀後半のことと言われている。それでは，純正律における各構成音の振動数比を計算してみる。以下では，たとえば「純正律 5 度」，「純正律 5 度音」などはそれぞれ「J−5 度」，「J−5 度音」などのように略記することとする。

最初に，ピュタゴラス音律と同様に 3 倍音を用いて，振動数比$\frac{3}{2}$の G 音（J−5 度音）を作り，$\frac{3}{2}$倍がちょうど振動数比 2 であるオクターブ上の C 音となるように，F 音の振動数比を$\frac{4}{3}$と決める。そして，$\frac{3}{2}$が$\frac{4}{3}$の$\frac{9}{8}$倍であることから，D 音の振動数比を$\frac{9}{8}$と決めるのである。次に 5 倍音を用いて，振動数比$\frac{5}{4}$である E 音（J−3 度音）を作る。さらに，振動数比$\frac{5}{4}$を$\frac{3}{2}$倍して，振動数比$\frac{15}{8}$の B 音を，振動数比$\frac{4}{3}$を$\frac{5}{4}$倍して，振動数比$\frac{5}{3}$の音である A 音を作るのである。こうして，純正律における各構成音の振動数比が，

$$(C,D,E,F,G,A,B,C)=\left(1,\frac{9}{8},\frac{5}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{15}{8},2\right)$$

と決まるのである。

しかし，この純正律は，第 4 節において得た音律の数学的構造（4-1），（4-2）からは導出できない。なぜなら，純正律では，J−5 度$\left(\frac{3}{2}\right)$と J−3 度$\left(\frac{5}{4}\right)$を併用しているから，$p=\frac{3}{2}$であるとともに，$\frac{p^4}{4}=\frac{5}{4}$より$p=5^{\frac{1}{4}}$でもあることになるからである。その意味で，ピュタゴラス音律や平均律が一元論的音律であるのに対して，純正律は二元論的音律であると言える。

そこで，純正律の数学的構造を知るためには，（4-1），（4-2）に若干の修正を加えなければならない。まず，純正律では，ピュタゴラス音律の不協和な P−3 度の協和度を高めるために，J−3 度を$\frac{5}{4}$としたのであるから，$\frac{81}{64}\times\frac{80}{81}=\frac{5}{4}$より P−3 度の$\frac{81}{64}$を$\frac{80}{81}$倍することによって P−3 度を J−3 度に変換できることになる。したがって，$\alpha=\frac{80}{81}$として，E 音，A 音，B 音の振動数比にαを乗じなければならない。また，純正律の半音階的半音は$\frac{5}{4}\div\frac{6}{5}=\frac{25}{24}$であるから，$\sharp=\frac{25}{24}$として，必要に応じて振動数比に$\sharp$を乗じ

なければならない。

以上のような修正を施すことによって，純正律の一般的様式すなわち数学的構造が下記のように得られる。

$$(C,G,D,A,E,B,F\sharp,C\sharp,G\sharp,D\sharp,A\sharp,F,C)=\left(1,p,\frac{p^2}{2},\frac{p^3}{2}\alpha,\frac{p^4}{4}\alpha,\frac{p^5}{4}\alpha,\frac{2}{p}\sharp,\sharp,p\sharp,\frac{p^2}{2}\sharp,\frac{p^3}{2}\alpha\sharp,\frac{2}{p},2\right)$$

$$(C,C\sharp,D,D\sharp,E,F,F\sharp,G,G\sharp,A,A\sharp,B,C)=\left(1,\sharp,\frac{p^2}{2},\frac{p^2}{2}\sharp,\frac{p^4}{4}\alpha,\frac{2}{p},\frac{2}{p}\sharp,p,p\sharp,\frac{p^3}{2}\alpha,\frac{p^3}{2}\alpha\sharp,\frac{p^5}{4}\alpha,2\right)$$

具体的な数値で示せば,

$$(C,G,D,A,E,B,F\sharp,C\sharp,G\sharp,D\sharp,A\sharp,F,C)=\left(1,\frac{3}{2},\frac{3^2}{2^3},\frac{5}{3},\frac{5}{2^2},\frac{5\times3}{2^3},\frac{5^2}{2\times3^2},\frac{5^2}{2^3\times3},\frac{5^2}{2^4},\frac{3\times5^2}{2^6},\frac{5^3}{2^3\times3^2},\frac{2^2}{3},2\right)$$

$$(C,C\sharp,D,D\sharp,E,F,F\sharp,G,G\sharp,A,A\sharp,B,C)=\left(1,\frac{5^2}{2^3\times3},\frac{3^2}{2^3},\frac{3\times5^2}{2^6},\frac{5}{2^2},\frac{2^2}{3},\frac{5^2}{2\times3^2},\frac{3}{2},\frac{5^2}{2^4},\frac{5}{3},\frac{5^3}{2^3\times3^2},\frac{5\times3}{2^3},2\right)$$

となる。

上記の純正律における各音の振動数比を用いて，それぞれのセント値を計算し，それを 5 度圏に表示すると図 11 のようになる。また，各音のセント値を小数第 1 位の四捨五入などによる整数値にして，オクターブ圏に示すと図 12 のようになる。

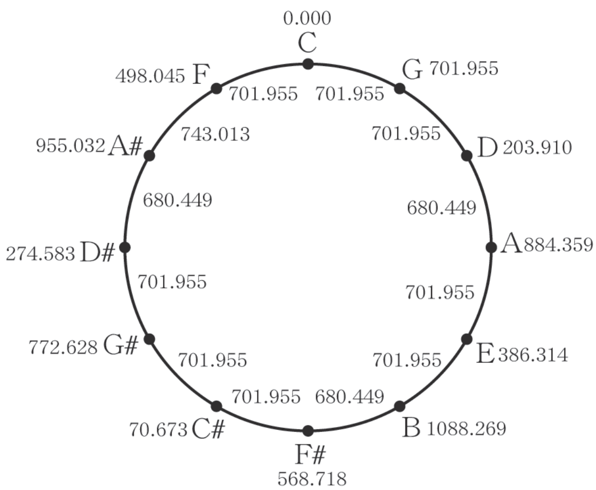

図 11　純正律の５度圏

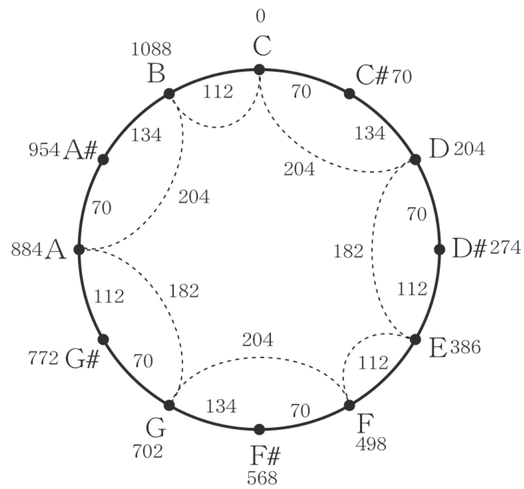

図 12　純正律のオクターブ圏

図 12 を見るとわかるように，純正律には 204 セントの全音と 182 セントの全音がある。前者は「大全音」，後者は「小全音」と呼ばれている。また，半音も 112 セントの「全音階的半音」と 70 セント，112 セント及び 134 セントの「半音階的半音」とがある。

純正律では， J−3 度及び J−5 度の振動数比がそれぞれ$\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$のように簡単な整数比であるから，その協和度は高いが，移調・転調ができないという問題が生じてくる。たとえば，ハ調長音階において，C−G 間の 5 度音程は真正 5 度であるが，D−A 間の 5 度音程は$\frac{5}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{40}{27}$となって，不協和な 5 度となってしまう。また，C−E 間の 3 度音程は真正 3 度であるが，D−F 間の 3 度音程は$\frac{4}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{27}$となって，

不協和な 3 度となる。そして，他の調に移調・転調した場合も同様の弊害が生じるから，一般的には移調・転調はできないと言ってもよい。

平島達司『増補　ゼロ・ビートの再発見』によれば，あらゆる調性で純正律を実現するには，長調・短調で異なる音を使うことも勘定に入れると，オクターブに 69 の音が必要とのことである(20)。これでは，鍵盤楽器などではとても対応できない。こうして，純正律を改善して，移調・転調が可能であるような新しい音律を探し求める努力が続けられたのである。

第6節　ミーントーン（中全音律）の登場

純正律を改善した新しい音律として提案されたのは「ミーントーン」（中全音律）と呼ばれる音律で，1523 年にピエトロ・アーロン(21)が発表したものである。この音律は真正 3 度を保つために J−5 度を少しだけ狭くするというものであり，その仕方は C 音から右回りに G♯音までと，C 音から左回りに D♯までとを，それぞれ少し狭くするというものであった。

このミーントーンは 1482 年にスペインのラモスが『実践音楽論』の中で挙げているラモス音律(22)にヒントを得て構成されたものと言われている。

真正 3 度の振動数比は$\frac{5}{4}$であるから，長音階の数学的構造（4-1），（4-2）において，$\frac{p^4}{4}=\frac{5}{4}$すなわち$p=5^{\frac{1}{4}}$とするのであるから，ミーントーンの各音の振動数比は，

$$(C,G,D,A,E,B,F\sharp,C\sharp,G\sharp,D\sharp,A\sharp,F,C)=\left(1,5^{\frac{1}{4}},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2},\frac{5^{\frac{3}{4}}}{2},\frac{5}{2^2},\frac{5^{\frac{5}{4}}}{2^2},\frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^3},\frac{5^{\frac{7}{4}}}{2^4},\frac{5^2}{2^4},\frac{2^2}{5^{\frac{3}{4}}},\frac{2^2}{5^{\frac{1}{2}}},\frac{2}{5^{\frac{1}{4}}},2\right)$$

$$(C,C\sharp,D,D\sharp,E,F,F\sharp,G,G\sharp,A,A\sharp,B,C)=\left(1,\frac{5^{\frac{7}{4}}}{2^4},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2},\frac{2^2}{5^{\frac{3}{4}}},\frac{5}{2^2},\frac{2}{5^{\frac{1}{4}}},\frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^3},5^{\frac{1}{4}},\frac{5^2}{2^4},\frac{5^{\frac{3}{4}}}{2},\frac{2^2}{5^{\frac{1}{2}}},\frac{5^{\frac{5}{4}}}{2^2},2\right)$$

となる(23)。

上記のミーントーンにおける各音の振動数比を用いて，それぞれのセント値を計算し，それを 5 度圏に表示すると図 13 のようになる。また，各音のセント値を小数第 1 位の四捨五入による整数値にして，オクターブ圏に示すと図 14 のようになる。

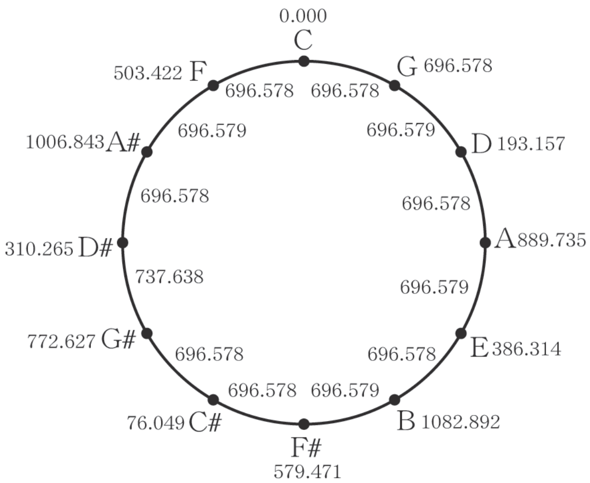

図 13　ミーントーンの５度圏

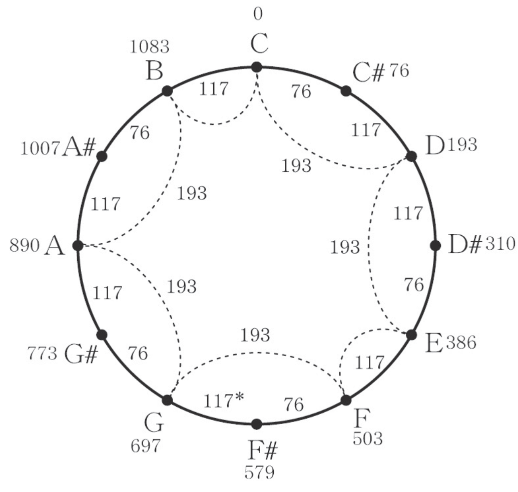

図 14　ミーントーンのオクターブ圏

＊ この値は，正しくは 118 である。

図 14 を見るとわかるように，ミーントーンでは全音が 193 セント，半音が 117 セントとなってい

る。このミーントーンの全音は，純正律の大全音（204 セント）と小全音（182 セント）の算術平均値 $\frac{204+182}{2} = 193$となっている。振動数比で言えば，幾何平均値 $\left(\frac{9}{8}\times\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}$ である。ミーントーンが「中全音律」と呼ばれる理由がここにある。

純正律はピュタゴラス音律における不協和な P−3 度を矯正して，協和度の高い真正 3 度にしたのであったが，ミーントーンはこの真正 3 度をそのまま保ち，ミーントーン 3 度（これを「M−3 度」と略記）とした。P−3 度は 407.820 セントであり，M−3 度（真正 3 度）は 386.314 セントであるから，その差 21.506 セントをどこかで消滅させなければならない。この P−3 度と J−3 度（真正 3 度，M−3 度）の差である 21.506 セントは「シントニック・コンマ」(24) と呼ばれている。

ピュタゴラス音律では，C−G−D−A−E という P−5 度の連鎖の中で C−E 間が 407.820 セントであったのであり，これを 386.314 セントに短縮するのであるから，$21.506 \div 4 = 5.376$により，4 回の P−5 度をそれぞれ 5.376 セント短縮すれば 21.506 セントを消滅させたことになる。ミーントーンでは，この 5.376 セントの短縮を他の 5 度連鎖にも適用されることになり，ミーントーン 5 度（これを「M−5 度」と略記）は 696.58 セントとなる。

実際，図 13 を見ればわかるように，G♯−D♯間以外のすべての 5 度連鎖は四捨五入して 696.58 となっていて，P−5 度（701.955 セント）との差は 5.375 セントである。しかし，G♯−D♯間以外の 5 度において 5.375 セント短縮した分のつけが G♯−D♯間にまわってきて，737.638 セントというウルフを生じさせてしまったことになる。

ミーントーンでは，M−3 度は真正 3 度に保たれるが，M−5 度は J−5 度より 5.375 セント狭くなっている。この狭くなった M−5 度は微妙なうなりを生み出し，結果としてミーントーン独特の味わいが醸し出されたと言われ，かなり長い間，西欧で愛された音律として知られている。

図 14 からわかるように，真正 3 度を保っている M−3 度は（C−E），（D−F♯），（D♯−G），（E−G♯），（F−A），（G−B），（A−C♯），（A♯−D）と 8 種類もあるから，ミーントーンは純正律に比べて，より自由に移調・転調ができるようになったのである。しかし，依然として G♯−D♯間のウルフは残っている。このウルフを解消するためにウェル・テンペラメントが考案されたのである。

第7節　ウェル・テンペラメントによる諸音律

真正 3 度を保持したミーントーンではあったが，依然として使用できる調性の範囲が限られているなどの理由によって，さらなる改善が加えられることになる。その改善の方向は M−5 度のうちの一部を真正 5 度（振動数比$\frac{3}{2}$）に置き換えるというものであった。具体的にどこを置き換えるかによって種々の音律が生まれるのであるが，これらの音律は総称して「ウェル・テンペラメント」と呼ばれている(25)。代表的なものにヴェルクマイスター(26)音律，キルンベルガー(27)音律，ヤング(28)音律などがあるが，それらの基礎となった音律がウェル・テンペラメントである(29)。

ピュタゴラス 5 度圏では，真正 5 度を右回りに積み重ねて P−3 度を得たのであるが，これを左回りに積み重ねて，新しい 3 度（テンペラメント 3 度，「T−3 度」と略記）を得ることが考案された。これを振動数比で計算すると，$\left(\frac{2}{3}\right)^8 \times 2^5 = \frac{2^{13}}{3^8}$となり，そのセント値は$1200\times log_2\frac{2^{13}}{3^8} = 384.360$となる。この T−3 度は真正 3 度（386.314 セント）と比較して約 2 セント（1.9537 セント）狭いだけであるから，真正度の高い長 3 度と言える。

このように，T−3 度を 384.360 セントと確定した上で，次にテンペラメント 5 度（これを「T−5 度」と略記）が求められたのである。5 度を 4 回上げて 3 度が得られるのであるから，求める T−5 度の振

動数比をxとすると，$x^4\times\frac{1}{2^2}=\frac{2^{13}}{3^8}$，$x=\frac{2^{\frac{15}{4}}}{3^2}$となり，そのセント値は$1200\times log_2\frac{2^{\frac{15}{4}}}{3^2}=696.090$となる。これが T‒5 度のセント値である。

そして，C 音から右回りで G 音，D 音，A 音を T‒5 度によって定め，C 音から左回りで E 音までを真正 5 度で定めたのであるから，その数学的構造は（4-1）を用いて次のように定められる。まず，(C,G,D,A)においては，$p=\frac{2^{\frac{15}{4}}}{3^2}$とすればよい。また，$(E,B,F\sharp,C\sharp,G\sharp,D\sharp,A\sharp,F,C)$においては，$p=\frac{3}{2}$（真正 5 度）を用いるのであるが，逆回りとなるので，$p^{-1}=\frac{2}{3}$を使用することになる。そのようにして得られたウェル・テンペラメントの各音の振動数比は，

$$(C,G,D,A,E,B,F\sharp,C\sharp,G\sharp,D\sharp,A\sharp,F,C)=\left(1,\frac{2^{\frac{15}{4}}}{3^2},\frac{2^{\frac{13}{2}}}{3^4},\frac{2^{\frac{41}{4}}}{3^6},\frac{2^{13}}{3^8},\frac{2^{12}}{3^7},\frac{2^{10}}{3^6},\frac{2^8}{3^5},\frac{2^7}{3^4},\frac{2^5}{3^3},\frac{2^4}{3^2},\frac{2^2}{3},2\right)$$

$$(C,C\sharp,D,D\sharp,E,F,F\sharp,G,G\sharp,A,A\sharp,B,C)=\left(1,\frac{2^8}{3^5},\frac{2^{\frac{13}{2}}}{3^4},\frac{2^5}{3^3},\frac{2^{13}}{3^8},\frac{2^2}{3},\frac{2^{10}}{3^6},\frac{2^{\frac{15}{4}}}{3^2},\frac{2^7}{3^4},\frac{2^{\frac{41}{4}}}{3^6},\frac{2^4}{3^2},\frac{2^{12}}{3^7},2\right)$$

となる。

そして，ウェル・テンペラメントを 5 度圏に示すと図 15 のようになる。また，各音のセント値を小数第 1 位の四捨五入による整数値にして，オクターブ圏に示すと図 16 のようになる。図 15 より明らかにウルフは解消されていることがわかる。

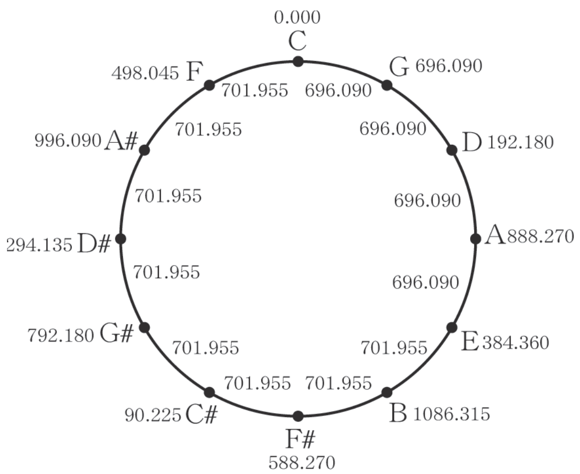

図 15　ウェル・テンペラメントの5度圏

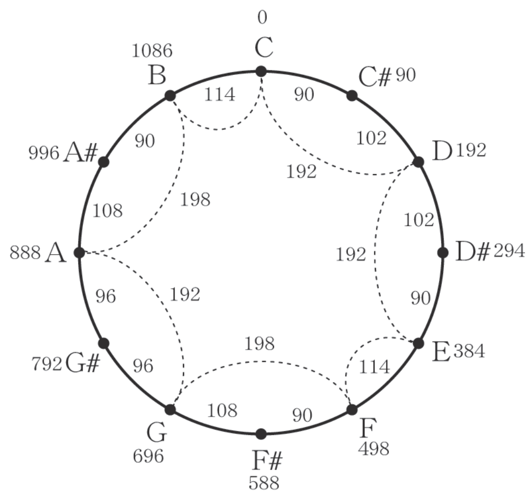

図 16　ウェル・テンペラメントのオクターブ圏

ウェル・テンペラメントでは，C 音から右回りの 4 つの 5 度と左回りの 8 つの 5 度の構成原理が異なっている。すなわち，音律の数学的構造（4-1），（4-2）におけるpの値が異なるのである。その意味において，ウェル・テンペラメントは二元論的音律であり，さらにウェル・テンペラメントを基礎にして構成された下記の 3 つの音律もすべて二元論的音律であることになる。

（1）ヴェルクマイスター音律

図 15 に示されたウェル・テンペラメントの 5 度圏に新たな手を加えてヴェルクマイスター音律が

構成された。この音律では，5 度として T−5 度（振動数比$\frac{2^{\frac{15}{4}}}{3^2}$，696.090 セント）が採用されたので，これを「W−5 度」と略記する。

ヴェルクマイスター音律では，最初に，A−E 間を真正 5 度（振動数比$\frac{3}{2}$，701.955 セント）にするために，E 音が約 6 セント（5.865 セント）高くされたのである。これによって，E−B 間が約 6 セント狭くなるから，B 音も約 6 セント高くして，E−B 間も真正 5 度としたのである。結局，B−F♯間を約 6 セント狭くしたことになる。ここで，5.865 セント高くするための比率を求めると，以下のようになる。

A−E 間の比率が$\frac{2^{13}}{3^8}\div\frac{2^{\frac{41}{4}}}{3^6}=\frac{2^{\frac{11}{4}}}{3^2}$であるから，この比率によって 696.09 セント上がることになる。同様にして，E−B 間の比率が$\frac{2^{12}}{3^7}\div\frac{2^{13}}{3^8}=\frac{3}{2}$であるから，この比率によって 701.955 セント上がることになる。したがって，その差 5.865 セントを広くするためには，$\frac{3}{2}\div\frac{2^{\frac{11}{4}}}{3^2}=\frac{3^3}{2^{\frac{19}{4}}}$により，比率を$\frac{3^3}{2^{\frac{19}{4}}}$とすればよいのである。

そこで，ヴェルクマイスター音律の E 音，B 音の振動数比を求めると，

E 音・・・$\frac{2^{13}}{3^8}\times\frac{3^3}{2^{\frac{19}{4}}}=\frac{2^{\frac{33}{4}}}{3^5}$　　　B 音・・・$\frac{2^{12}}{3^7}\times\frac{3^3}{2^{\frac{19}{4}}}=\frac{2^{\frac{29}{4}}}{3^4}$

となり，さらにセント値を求めれば，

E 音・・・$1200\times log_2\frac{2^{\frac{33}{4}}}{3^5}=390.225$　　　B 音・・・$1200\times log_2\frac{2^{\frac{29}{4}}}{3^4}=1092.180$

となる。

ヴェルクマイスター音律における各音の振動数比は，ウェル・テンペラメントにおける各音の振動数比の中で，E 音と B 音の振動数比を上記の値で置き換えたものとなる。このようにして構成されたヴェルクマイスター音律の 5 度圏及びオクターブ圏は，それぞれ図 17，図 18 のように示される[(30)]。

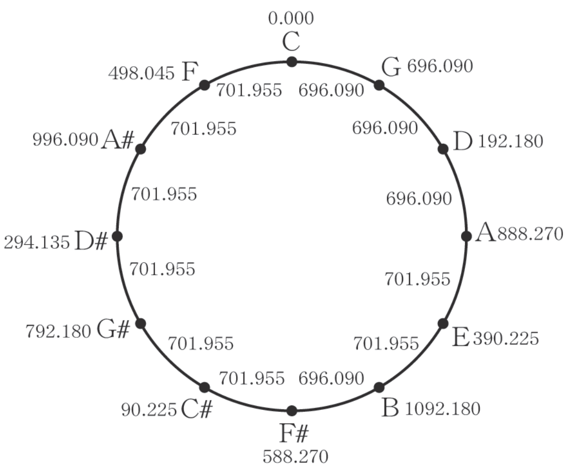

図 17　ヴェルクマイスター音律の5度圏

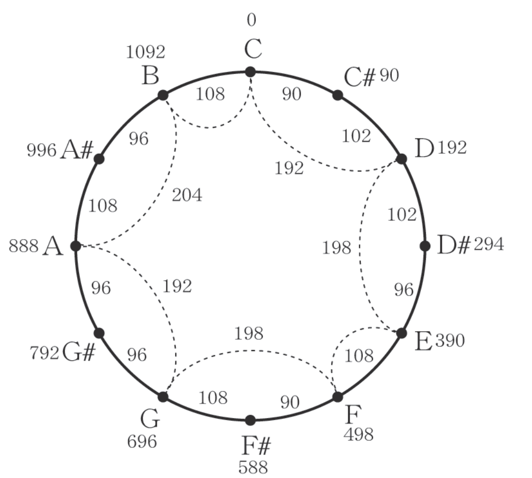

図 18　ヴェルクマイスター音律のオクターブ圏

（2）キルンベルガー音律

この音律では，C–E 間が真正 3 度（振動数比$\frac{5}{4}$，386.314 セント）に優先的に固定される。したがって，ウェル・テンペラメントの E 音（384.360 セント）と比較して，$386.314 - 384.360 = 1.954$セントだけ広くすることになる。この 1.954 セントは「スキスマ」と呼ばれ，ピュタゴラス・コンマとシントニック・コンマの差（$23.460 - 21.506 = 1.954$）に等しくなっている。

この 1.954 セント分を補正するために，F♯–C♯間（真正 5 度，701.955 セント）を 1.954 セント狭くして，$701.955 - 1.954 = 700.001$セントとするのである。1.954 セント狭くするための比率は次のように求められる。

ピュタゴラス・コンマ及びシントニック・コンマに相当する比率がそれぞれ，$\frac{3^{12}}{2^{19}}$，$\frac{3^4}{5\times2^4}$であるから，$\frac{3^{12}}{2^{19}} \div \frac{3^4}{5\times2^4} = \frac{5\times3^8}{2^{15}}$となる。よって，キルンベルガー音律の E 音，B 音，F♯音の振動数比はそれぞれ，

E 音：$\frac{2^{13}}{3^8}\times\frac{5\times3^8}{2^{15}} = \frac{5}{2^2}$　　B 音：$\frac{2^{12}}{3^7}\times\frac{5\times3^8}{2^{15}} = \frac{5\times3}{2^3}$　　F♯音 ：$\frac{2^{10}}{3^6}\times\frac{5\times3^8}{2^{15}} = \frac{5\times3^2}{2^5}$

となり，そのセント値はそれぞれ，386.314 セント，1088.269 セント，590.224 セントとなる。

次に，5 度を 4 回上げて真正 3 度が得られるのであるから，キルンベルガー音律の 5 度の振動数比は，$\left(\frac{5}{2^2}\times2^2\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}}$と求められる。このキルンベルガー音律 5 度を「K–5 度」と略記する。その後，C 音から右回りに K–5 度を積み重ねて G 音，D 音，A 音が得られ，C 音から左回りに真正 5 度を積み重ねて B 音までが得られる。したがって，キルンベルガー音律における各音の振動数比は，

$$(C,G,D,A,E,B,F\sharp,C\sharp,G\sharp,D\sharp,A\sharp,F,C) = \left(1,5^{\frac{1}{4}},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2},\frac{5^{\frac{3}{4}}}{2},\frac{5}{2^2},\frac{5\times3}{2^3},\frac{5\times3^2}{2^5},\frac{2^8}{3^5},\frac{2^7}{3^4},\frac{2^5}{3^3},\frac{2^4}{3^2},\frac{2^2}{3},2\right)$$

$$(C,C\sharp,D,D\sharp,E,F,F\sharp,G,G\sharp,A,A\sharp,B,C) = \left(1,\frac{2^8}{3^5},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2},\frac{2^5}{3^3},\frac{5}{2^2},\frac{2^2}{3},\frac{5\times3^2}{2^5},5^{\frac{1}{4}},\frac{2^7}{3^4},\frac{5^{\frac{3}{4}}}{2},\frac{2^4}{3^2},\frac{5\times3}{2^3},2\right)$$

となる。

このように構成されたキルンベルガー音律の 5 度圏及びオクターブ圏はそれぞれ図 19，図 20 のようになる[(31)]。

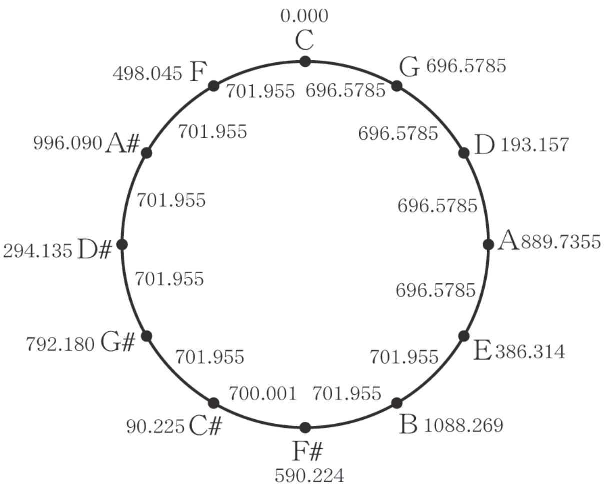

図 19　キルンベルガー音律の5度圏

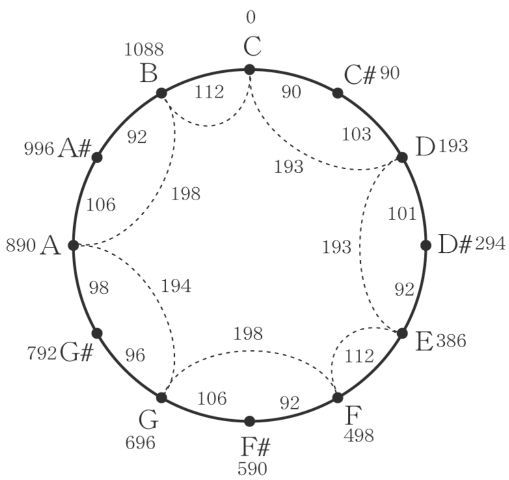

図 20　キルンベルガー音律のオクターブ圏

（３）ヤング音律

ウェル・テンペラメントでは，23.460セントのピュタゴラス・コンマを4等分した5.865セントを，C–G，G–D，D–A，A–Eの4つの真正5度としての5度（701.955セント）から差し引くことによって，ピュタゴラス・コンマを消滅させたのであるが，ヤング音律では，5度圏のC音とF♯音を結ぶ直線を対称軸として左右に分割し，左側の6つの5度を真正5度に，右側の6つの5度を真正5度より少し狭くすることによってピュタゴラス・コンマの問題を解決しようとした(32)。

ピュタゴラス・コンマを6つの5度から均等に差し引くのであるから$23.460 \div 6 = 3.91$より，真正5度より3.91セント狭くすることになり，右側の6つの5度は698.045セントとなる。このヤング音律の5度を「Y–5度」と略記することとする。このY–5度の振動数比は次のようにして求めることができる。

ピュタゴラス・コンマの比率は$\frac{3^{12}}{2^{19}}$で，これを乗ずることによって23.460セント広くなるのであるから，逆に狭くするには，その逆数$\frac{2^{19}}{3^{12}}$を乗ずればよい。そして，算術的には6等分するのであるから，比率的には$\frac{1}{6}$乗すればよい。よって，ピュタゴラス・コンマの$\frac{1}{6}$だけ狭くする比率は$\left(\frac{2^{19}}{3^{12}}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{2^{\frac{19}{6}}}{3^2}$となり，Y–5度の振動数比は$\frac{3}{2}\times\frac{2^{\frac{19}{6}}}{3^2} = \frac{2^{\frac{13}{6}}}{3}$となり，そのセント値は$1200\times log_2\frac{2^{\frac{13}{6}}}{3} = 698.045$となる。したがって，ヤング音律における各音の振動数比は，

$$(C, G, D, A, E, B, F\sharp, C\sharp, G\sharp, D\sharp, A\sharp, F, C) = \left(1, \frac{2^{\frac{13}{6}}}{3}, \frac{2^{\frac{10}{3}}}{3^2}, \frac{2^{\frac{11}{2}}}{3^3}, \frac{2^{\frac{20}{3}}}{3^4}, \frac{2^{\frac{53}{6}}}{3^5}, \frac{2^{10}}{3^6}, \frac{2^8}{3^5}, \frac{2^7}{3^4}, \frac{2^5}{3^3}, \frac{2^4}{3^2}, \frac{2^2}{3}, 2\right)$$

$$(C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, B, C) = \left(1, \frac{2^8}{3^5}, \frac{2^{\frac{10}{3}}}{3^2}, \frac{2^5}{3^3}, \frac{2^{\frac{20}{3}}}{3^4}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^{10}}{3^6}, \frac{2^{\frac{13}{6}}}{3}, \frac{2^7}{3^4}, \frac{2^{\frac{11}{2}}}{3^3}, \frac{2^4}{3^2}, \frac{2^{\frac{53}{6}}}{3^5}, 2\right)$$

となる。

このようにして構成されたヤング音律の5度圏及びオクターブ圏はそれぞれ図21，図22のようになる。

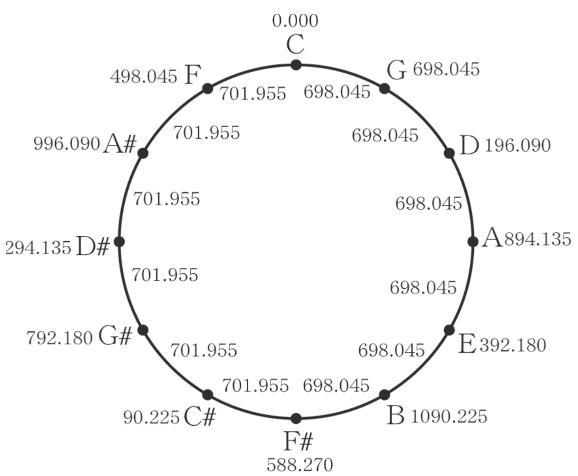

図21　ヤング音律の5度圏

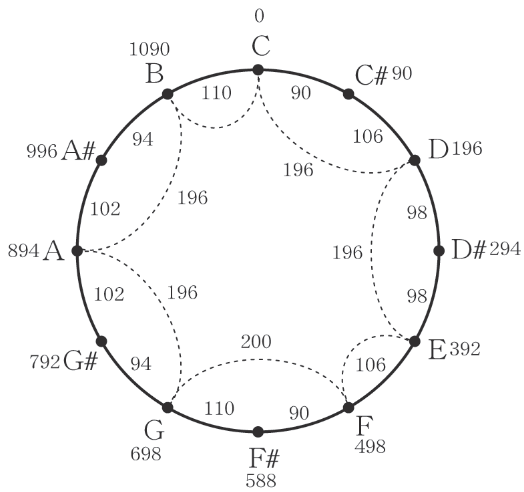

図22　ヤング音律のオクターブ圏

第８節　音律の分類

本論文で扱った諸音律は，その性格によって4種類に大別することができる。すべての5度を真正

にとるピュタゴラス音律は全体的に高めの音程になるため，旋律が大変きれいに響くので，旋律的音律と言えるが，和音的には，C–E の長 3 度が濁って不協和となるため，和声的ではない。この C–E の長 3 度を真正にした純正律及びそれを実用化したミーントーンは和声的音律と言うことができる。特に純正律ハ長調においては，主要 3 和音の 3 度と 5 度がすべて真正となるため，きわめて和声的な音律と言える。

純正律とミーントーンの相違点は一元論的か否かによる。ミーントーンでの基準比率は$p=5^{\frac{1}{4}}$のみであったから一元論的であるが，純正律での基準比率は$p=\frac{3}{2}$と$p=5^{\frac{1}{4}}$の 2 種類が併用されていたから二元論的と規定した。ただ，ウェル・テンペラメントも二元論的と規定したが，この場合の基準比率は$p=\frac{3}{2}$のみであり，この比率を 5 度圏の右回りと左回りに使用したのであったから，純正律の二元論とは異なる。したがって，純正律を「完全二元論的音律」と呼ぶとすれば，ウェル・テンペラメントは「不完全二元論的音律」と言えよう。

主和音の C–E の長 3 度，属和音の G–B の長 3 度の音程が真正に近づけば，和音はきれいに響くようになるが，E–F 間及び B–C 間は広くなり，旋律性は弱くなってしまう。逆に，C–E 及び G–B の長 3 度が広くなると，E–F 及び B–C は狭くなり，旋律性は強くなるのである。

一方，ウェル・テンペラメントを基礎として構成された諸音律は，5 度圏の左回りと右回りとが異なる原理に従っていて，長 3 度を真正に近づけるとともに，真正 5 度及び真正 5 度より少し狭い 5 度を配置することによって，和声的な音楽から旋律的な音楽へ変化し，調性感を鮮明にすることのできる調性的音律と言える。たとえば，ヴェルクマイスター音律においては，白鍵では 5 度の幅が少し狭いために 3 度が真正に近く，黒鍵では真正 5 度になっているためにピュタゴラス音律に変わることになる。つまり，変化記号の少ない調では和声的であり，変化記号が多くなるにしたがって旋律的に変化していき，しかも，すべての調が演奏可能なのである。

また，平均律は字義通り，平均的音律である。平均律もウェル・テンペラメントも異名同音であるから，12 のキーですべての調を弾くことができる。そして，ウェル・テンペラメントの場合は，転調して主音が変われば，音律の比率がすべて変わることになるが，この調性感が変わるところが魅力的であるとも言われている。

以上のことから，本論文で扱った諸音律を分類すると下の表のように整理することができる。

<table>
<tr><td>旋律的音律</td><td>ピュタゴラス音律</td><td rowspan="3">一元論的音律</td><td rowspan="4">すべての調が同型</td><td>異名異音</td></tr>
<tr><td>平均的音律</td><td>平均律</td><td>異名同音</td></tr>
<tr><td rowspan="2">和声的音律</td><td>ミーントーン</td><td rowspan="2">異名異音</td></tr>
<tr><td>純正律</td><td rowspan="2">二元論的音律</td></tr>
<tr><td>調性的音律</td><td>ウェル・テンペラメント
ヴェルクマイスター音律
キルンベルガー音律
ヤング音律</td><td>各調ごとに型が変わる</td><td>異名同音</td></tr>
</table>

音律関係人物年表

1400

1440 ラモス『実践音楽論』1482 1491

1500

1490 アーロン（ミーントーン：1523）1545

1517 ツァルリーノ『和声論』1558 1590

1546 ステヴィン（$\sqrt[12]{2}$の計算 1585）1620

1550 ネイピア（対数の発見 1594）1617

1558 ビュルギ（対数の発見 1588）1632

1600

1588 メルセンヌ『普遍的和声論』1636 1648

1645 ヴェルクマイスター『音楽的音律論』1691 1706

1700

1685 J.S. バッハ「平均律クラヴィーア曲集」（1 巻 1722，2 巻 1744）1750

1697 ヴァロッティ（音律：1754 頃）1780

1721 キルンベルガー（音律第 3 法：1779）1783

1773 ヤング（音律：1800）1829

1800

1795 ウェーバー 1878

1801 フェヒナー 1887

1814 エリス（セントの導入）1890

1821 ヘルムホルツ『音感覚論』1863 1894

1900

注

(1) ピュタゴラス（Pythagoras, 前 580 頃−前 490 頃）は古代ギリシアの自然哲学者。魂は不滅であり，次々といろいろな動物の身体を巡るという霊魂輪廻説を信奉していた。また，音楽を魂の浄化（カタルシス）との関わりで研究したと言われている。
(2) この用語は，ギリシア語で「単一の」を意味する「モノ」と「弦」を意味する「コルデー」の合成語である。
(3) イアンブリコス（Iamblichus, 250 頃-325 頃，新プラトン主義の哲学者）の『ピュタゴラス伝』（佐藤義尚訳）国文社，2000 年，pp,107-109を参照されたい。また，ボエティウス（Boethius，480頃- 524，最後のローマの哲学者・著作家であり，最初のスコラ哲学者）の『音楽教程』を参照されたい。たとえば，C.M.Bower, BOETHIUS Fundamentals of Music, pp18-19，あるいは，S.K.ヘニンガー・Jr『天球の音楽』（山田耕士＋吉村正和＋正岡和恵＋西垣学＝訳）平凡社，1990 年，p.113 を参照されたい。
(4) 8 度及び 5 度などの協和度が高いことは，古くから実験的にも確かめられている。たとえば，アレクサンダー・ウッド『音楽の物理学』（石井信生訳）（音楽之友社，昭和 51 年）の第 10 章を参照されたい。また最近のものでは，小方 厚『音律と音階の科学』（講談社ブルーバックス，2007 年）の第 4 章を参照されたい。
(5) 対数の概念の発見はスコットランドのジョン・ネイピア（John Napier, 1550-1617）に帰せられている（1594 年）が，発見自体はネイピアよりもスイス生まれのヨスト・ビュルギ（Jost Burgi, 1558-1632）のほうが少し早かった（1588 年）。ビュルギは長い間，発見を公表しなかったので，対数の発見はネイピアの業績として知られている。
(6) 以後は，特に断らない限り，対数計算などは MATHEMATICA による。
(7) 一定の音高の音における振動数の測定はメルセンヌ（Marin Mersenne, 1588 - 1648）が初めて行なったと考えられる。彼は，長さが 90 フィート以上の麻縄と 138 フィートの真鍮線とを使用して実験をした。その結果，振動数がどのように変化しているかについて研究し，振動体として弦を使用した場合，振動数(f)は次の式で与えられるという「振動数の法則」を発見した。$f=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{m}}$，ここで，$l$ は弦の長さ（cm），Pは張力（dyn），mは弦の 1cm の質量（g）である。
　音階中のある 1 音に一定の振動数を指定することが望ましいわけであるが，何世紀にもわたって規定されてこなかった。紆余曲折の後，1939 年 5 月にロンドンで開催された国際会議において，「高音部譜表上の A 音 ―a'音― を 440Hz とする」ことが決定された。
(8) エルンスト・ハインリッヒ・ウェーバー（Ernst Heinrich Weber, 1795-1878）はドイツの生理学者，解剖学者。グスタフ・テオドール・フェヒナー（Gustav Theodor Fechner, 1801-1887）はウェーバーの弟子で，ドイツの物理学者，哲学者。
(9) アレクサンダー・ジョン・エリス（Alexander John Ellis, 1814-1890）はイギリスの音響学者・比較音楽学者。著作に『諸民族の音階』［1885 年］（門馬直美訳，音楽之友社，昭和 26 年 9 月）がある。また，エリスはヘルムホルツの名著“On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music”（『音楽理論のための生理学的基礎としての音感覚論』，初版は 1863 年）のすぐれた英訳を行ない，初版を 1875 年 6 月に出版した。この英訳本におけるエリスの手になる「附録」にも「セント」が定義され，真正 5 度，長 3 度，ピュタゴラス・コンマ，シントニック・コンマ，スキスマのセント値がそれぞれ 701.955，386.314，23.460，21.506，1.954 と計算されるとともに，それらの相互関係にも言及されている（私蔵：英訳第 3 版，pp.431-432）。

(10)藤枝 守『[増補] 響きの考古学』平凡社，2007 年，p.98
(11)「リンマ」は，「剰余」を意味するギリシア語“$\lambda\varepsilon\iota\mu\mu\alpha$（leimma)”に由来することから，「レイマ」とも呼ばれるが，現在では“limma” という綴りが用いられる。古くは「ディエシス」（diesis）とも呼ばれていた。
(12)マラン・メルセンヌ（Marin Mersenne, 1588-1648）はフランス，カトリック・ミニム会の神父，数学者，音楽理論家。当時の代表的な知識人デカルト，フェルマ，ホイヘンスたちと文通し，その集まりはメルセンヌ・アカデミーとも呼ばれた。1636 年に『普遍的和声論』を著し，12 平均律を理論的に確立したことで知られている。数学分野では，完全数に関わるメルセンヌ素数で有名である。平均律には，12 平均律以外にも，19 平均律，31 平均律，53 平均律など種々ある。
(13)平均律における各音高間の比率を 2 の 12 乗根として，西洋で最初に数学的に記述したのはベルギーの数学者シモン・ステヴィン（Simon Stevin, 1546-1620）である。彼はまた今日的な 10 進小数の発明者でもある。
(14)大塚正元『楽譜の数学』(早稲田出版，2003 年）を参考にした。
(15)トニック・ソルファ法（tonic sol-fa）はイギリスのグラヴァーが19世紀の初めに考案し、1840年頃にカーウェンが完成した移動ドによるソルミゼーション（階名唱法）である。読み方は以下の通りである。

doh(ド)，ray(レ)，me(ミ)，fah(ファ)，soh(ソ)，lah(ラ)，te(ティ)

(16)古代ギリシアの音楽理論では，両端が完全 4 度の音程を成し，その中間に 2 つの音を置いてできる 4 度音列を「テトラコルド」と称して，音組織を体系づける基本的な単位とみなされた。そして，この中間 2 音の置き方，テトラコルドの接続の仕方によって各種の旋法が構成された。古代ギリシアの旋法にはドリア旋法，フリギア旋法，リディア旋法，ミクソリディア旋法という 4 つの「正格旋法」と，接頭語「ヒュポ」の付いた同数の「変格旋法」があるが，6 世紀にこれらをもとにして，グレゴリウス一世（Gregorius I，540 頃-604，在位 590-604）の命により「グレゴリオ旋法」(教会旋法）が統一的に制定された。さらに，16 世紀になって，スイスの神父ヘンリクス・グラレアーヌス（Henricus Glareanus，1488-1563）によって，エオリア旋法，イオニア旋法及びその変格が追加されたので，教会旋法は合計 12 となった。このうち，イオニア旋法は今日の長音階，エオリア旋法は短音階の母体となった旋法である。
(17)短音階には，他にも和声的短音階（「全音，半音，全音，全音，半音，1.5 全音，半音」)，旋律的短音階（「全音，半音，全音，全音，全音，全音，半音」上行形）があるが，ここでは省略する。
(18)純正律音階の起源を遡ると，ピュタゴラスより少し後代のアリストクセノスにたどり着く。彼が提唱した純正律音階の比率に関しては，溝部國光『正しい音階　音楽音響学』(日本楽譜出版社，1971 年，p.12）に，$(C,D,E,F,G,A,B,C)=\left(1,\frac{9}{8},\frac{5}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{27}{16},\frac{15}{8},2\right)$と記述されており，15〜16 世紀の純正律音階と比較して，第 6 音だけが少し異なっている。アリストクセノスの音階論については，山本建郎訳の『アリストクセノス／プトレマイオス　古代音楽論集』(京都大学学術出版会，2008 年）及び山本建郎著『アリストクセノス『ハルモニア原論』の研究』(東海大学出版会，2001 年）を参照されたい。また，イタリアの音楽理論家ジョゼッフォ・ツァルリーノ(Gioseffo Zarlino, 1517−1590)は純正律の研究に大きく貢献したので，純正律を「ツァルリーノ音律」と言うこともある。
(19)バルトロメ・ラモス・デ・パレーファ（Bartolomeo Ramos de Pareja, 1440-1491）はスペインの音楽理論家。音律を純正律への方向へと進めた。ラミスとも言う。
(20)平島達司『増補　ゼロ・ビートの再発見』東京音楽社，昭和 60 年，pp.62-64

(21) ピエトロ・アーロン（Pietro Aaron, 1490-1545）はイタリアの作曲家，音楽理論家。和声的な音楽への移行に影響を与えた。
(22) J. Murray Barbour“Tuning and Temperament − A Historical Survey”(初版は Michigan State Press, 1951 年，私蔵 Dover 版は 2004 年）（p.90）によれば，ラモス音律における各音のセント値が次のように示されている。

（C,C♯,D,E♭,E,F,F♯,G,A♭,A,B♭,B,C）＝（0,92,182,294,386,498,590,702,792,884,996,1088,1200）

(23) C 音から右回りで G♯音までは$p = 5^{\frac{1}{4}}$を，C 音から左回りで D♯音までは$p^{-1} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}$を使用していることに注意されたい。
(24) シントニック・コンマは，その発見者ディデュモス（Didymos Chalkenteros, 前 63 頃−後 10 頃）の名にちなんで「ディデュモス・コンマ」とも呼ばれる。ディデュモスはアレクサンドリアの文法学者，数学者，音楽理論家。
(25)「ウェル・テンペラメント」は，H・ケレタート『音律について　上巻　バッハとその時代』(竹内ふみ子訳，（株）シンフォニア，1990 年 11 月）では「快適音律」と訳されている。
(26) アンドレアス・ヴェルクマイスター（Andreas Werckmeister, 1645-1706）はドイツの作曲家，音楽理論家，オルガン奏者。
(27) ヨハン・フィリップ・キルンベルガー（Johann Philippe Kirnberger, 1721-1783）はドイツの作曲家，音楽理論家，ヴァイオリン奏者。J.S.バッハに師事したことがある。
(28) トーマス・ヤング（Thomas Young, 1773-1829）はイギリスの物理学者。力学分野では，弾性体力学の基本定数ヤング率で有名である。音楽分野では，1799 年にヤング音律を考案し，翌年発表した。
(29) J.S.バッハの作品に《平均律クラヴィーア曲集》があり，この曲集が平均律を前提に作曲されたように言われるが，それは誤りである。実際には，この曲集の調律法として，バッハはウェル・テンペラメント（ヴェルクマイスター音律）を想定したと思われる。原題は “Das Wohltemperierte Klavier” であり，「良く整律されたクラヴィーア」と訳されるべきところを「平均律クラヴィーア」と誤訳したところから，ウェル・テンペラメントと平均律の混同が続いた。
(30) ここでは，最も広く普及した「第 1 技法Ⅲ」を取り上げている。
(31) キルンベルガー音律には，第 1 法から第 3 法まであるが，ここでは第 3 法を取り上げている。
(32) 5 度圏の F 音と B 音を結ぶ線分を対称軸として，左右に分割し，左側に真正 5 度，右側に真正 5 度より少し狭い 5 度を配置した音律はヴァロッティ音律と呼ばれる。左右 6 つの 5 度に分割する点においてヤング音律と類似しているので，総称してヴァロッティ・ヤング音律とも呼ばれる。ヴァロッティ（Vallotti, 1697-1780）はイタリアの音楽理論家。