三重大学教育学部研究紀要　第 64 巻　教育科学　（2013）　177 － 191 頁

教育数学の諸相（II）
― 数学の教育的側面 ―

蟹江　幸博*・佐波　　学†

Various Aspects of Educational Mathematics（II）
― Educational Side of Mathematics ―

Yukihiro KANIE and Manabu SANAMI

目 次

はじめに

前著『教育数学の諸相（I）』において，我々は，言語の個人的側面と社会的側面の関係を説いたソシュールに倣い，数学の個人的側面と社会的側面を考えるべきこと，そして，“教育”というものが後者の“数学の社会的側面”と密に関係することを述べ，この想定の下に“教育数学”を提唱した（[8], p.335）.

また，前著では，この“教育数学”を構築するための最初の課題として，教育数学と直接的に関係する「数学の教育的側面」を,「数学の社会的側面」との関連に留意しながら明示化することを挙げ，さらに，この課題に取り組むにあたっては,「数学を言語と関係させて理解すること」が有効と思われることを示唆した（[8], pp.337 – 338）.

本稿ではこの教育数学構築のための最初の課題を実行し,「数学の教育的側面」を明示的に示すことを試みた.

“教えるべき数学”とは何か

「数学の教育的側面」は，一言で言えば，数学において“教えるべきこと”は何か，という問いに答えることであり，それが本稿の中心的なテーマとなっている.

結論を一文で言えば,「**数学の教育的側面は，数学の“定格個的使用**（*standardized individual usage*）**”と“共有方式**（*communal schema*）**”からなる**[1]」というものになる（§§3.2.2）．ここで,“定格個的使用”と“共有方式”という用語は，その導入の理由も含め，§2.3 で定義してある.

以下，本稿の概要を説明しておこう.

“数学行為”と“数学所産”

数学を言語と関係させて考察しようとするとき，直ちに気づくことがある．前著でも数学と言語の射程の差異として述べたことだが（[8], p.338）,“言語”という言葉は，通常，言語を用いて獲得された様々な文化的な所産 ―“法律文書”や“文芸作品”といった― を含意していない．しかし,“数学”の場合は,

*三重大学教育学部数学
†鳥羽商船高等専門学校

[1]我々は,『教育数学序説 – 古代における教育と数学の類型 – 』（[7]）において，古代の数学テクストを教育の観点から分類して,“算術型”と“原論型”という類型を導いたが，上述の見解に基づけば，算術型は“数学の定格個的使用”に焦点を合わせたものであり，原論型は“共有方式”に対応するものであるという見方ができる（第 3.3.1 節）.

“知的営為の手段や過程”の部分と，その結果として獲得されたものの双方を含意するものになっている．

本稿では，数学の“知的営為の手段や過程”の領域と，“そうした手段を適用して獲得された結果”の領域を区別し，前者を「**数学行為**（*mathematical act*）」，後者を「**数学所産**（*mathematical product*）」と，仮に，呼ぶこととしたい．

例えば，エウクレイデスの原論は，“テクスト”としては「数学所産」であるが，そのテクストの知識や技法を用いて，図形の性質の探求，測量や天文計算を行うことは，「数学行為」である．

数学行為と言語

我々は，数学において言語と比較されるべきは，この「数学行為」の領域であると考える．

それでは，「言語」と「数学行為」の外延関係はどうなっているのだろうか．

実際には，人間の活動の大部分は動物（霊長類，哺乳類，等々）と同一であり，そのわずかな部分が言語に拠るものとなり，さらに小さな部分が数学行為に拠るものと考えてよいだろう．そして，言語に拠る領域と数学行為に拠る領域は，もちろん重なりは持つものの，一方が他方に包含される関係ではないと考えるのが自然であろう．

“数学の教育的側面”の探求

本稿の中心的な主題は，「数学の教育的側面」とは何かという問いであった．

エウクレイデスの原論を，シェークスピアの作品のように“教える”という立場もあるだろうし，それを否定するわけではないが，本稿では，“数学行為”の領域に限定して考察することにする．

“数学行為”を“言語”の類似と見る基本姿勢を取っているので，「数学の教育的側面」についても，あくまで，言語との類似性に留意しながら考察を進めていくことになる．その意味において，議論の出発点を，「数学の社会的側面（ラング）と個人的側面（パロール）とは何か」という問題に置くことにする．

数学の社会的側面と個人的側面

言語の場合に，社会的側面と個人的側面の重要性を強調したのは，フェルディナン・ソシュールであった．ソシュールは，この“二つの側面”の本質を追求することで，著名な“ラング（langue）”と“パロール（parole）”という概念に到達し，後を継いだ言語学者ルイ・イェルムスレウは，この二つの概念を，“スキーマ（schema）”と“ユーセジ（usage）”として整理した．

我々は，実際的な事例として，台湾に居住した高砂族の一分派であるアミ族を選び，アミ族の用いる「結縄数学」とその社会における使用の形態の分析を通じて，数学の社会的側面（ラング）とは「数概念を表示する“媒体”と数の加減といった“操作”からなる“系（システム）”」であり，個人的側面（パロール）とは「そうした系を，各個人が，現実的な状況（コンテクスト）に応じて使用する営為」であると捉えた（第 2.2 節）．

次に，議論の枠組みを，具体的な“社会”から，抽象的な“**共同体**（*community*）”に移行させて，一般化を試みた．その際，“共同体における数学行為”の社会的側面を，イェルムスレウの術語を一部借用して，「数学の**共有方式**（*communal schema*）」，個人的側面を「数学の**個的使用**（*individual usage*）」として規定した（§§2.3.2 と §§2.3.3）．

なお，この「共有方式」と「個的使用」の間に成り立つ関係として，「**共時的相互依存性**（*synchronic interdependency*）」と「**通時的因果性**（*diachronic causality*）」の二種を取り上げた（§§2.3.6）．

“規格化”の重要性

本稿での基本的な立場は，共同体を中心としたもので，「数学」についても，「言語」と同様，「共同体の構成員が共有（共通に獲得）している」という性格が本質的であると考えている．

したがって，数学の社会的側面である「共有方式」は，言語における「ラング」がそうであるように，しかるべき意味で「規格化」されていることが前提となっている[2]．

他方，実際的な問題としての「個的使用」についても，使用する状況（コンテクスト）が，共同体の観点から「規格化」されているか否かが，特に，教育との関連で，重要

[2]ソシュールは，自然言語の場合の“（我々のいう）規格化”が人為的な操作を拒むものであることを強調した．しかし，この点では，数学と相違があるように思われる．「言語のラング」と「数学の共有方式」という観点から見る限り，数学は，自然言語より人工言語に近いといっても良いだろう．また，このことは，初等的な数学の教育がもつ困難さが，第一言語を教室で学ぶことの困難さであることを含意しているのかもしれない．

になってくる．そこで，本稿では規格化の有無によって，「**定格個的使用**（*standardized individual usage*）」と「**未格個的使用**（*nonstandardized individual usage*）」という2つの概念に分けて考えることにした（§§2.3.4）．

数学の教育的側面

まず，共同体中心的立場から，“教育”を「共同体の構成員が共有すべき“諸要素”を，構成員に“獲得”させる“機能”」として定義する．

こう定義することで，「数学の教育的側面」が「数学の定格個的使用」と「数学の共有方式」からなる，ということが明確に認識されてくる．これが本稿での主たるテーゼになる（§§3.2.2）．

付録として — 共有方式と記号系

ソシュールは，ラングを記号系の一種と捉えるという見方を提示し，記号学の祖となった．我々の「数学の共有方式」についても，これを記号系として捉えることは必ずや大きな意義をもつと期待されるが，もちろん，現在流通している記号の一般理論をそのまま適用することは困難であると考えられる．

そこで，今後の研究を進めるにあたって，これまでの記号論の成果の中で，我々の文脈の中で活かせる部分をまとめ直してみたのが付録の内容である．ルイ・プリエートの仕事に「数学の共有方式」の記号系の理論を構築するための示唆を見いだし，しかも，それは，ハンス・フロイデンタールが展開した“数学化（mathematising）”の理論も包含できる可能性があることについて素描してみている．

本稿の構成

本稿の構成は，次の通りである．

第1章で，具体例としてのアミ族の結縄数学について記述する．第2章では，言語の社会的側面と個人的側面に対するソシュールとイェルムスレウの見解を紹介し，数学の場合について検討を加える．そして，第3章において，本稿の主題である，数学の教育的側面について考察を行った．また，付録では記号系との関係について述べた．

最後に，外国語の文献を引用する際，日本語訳が出版されている場合は，概ねそれを利用させて戴いたが，一部，手を加えたところもある．

1　結 縄 — 素朴社会の数学

1.1　素朴数学と結縄数学

1.1.1　素朴数学

議論がいたずらに抽象的になるのを避けるため，第1章では，ある社会で用いられている“数学”を，2章以降の考察のための題材として具体的に記述する．

複雑な事例では，様々な要素が絡むことで，かえって基盤的な部分が隠れてしまう可能性があるため，取り上げる事例は，素朴（primitive）な社会で用いられている数学（「素朴数学」）からとってみたい．

ただし，この「素朴」も「数学」も，学問的に厳密な用法ではない．「素朴」な社会とは，おおむね，生産手段が共有されており，社会的な階層分化が進んでいない少人数の人間集団を想定している．

また，ここでいう「数学」とは，“自然数を表示する媒体と加法の操作を含む系（システム）”を用いる人間の営みの総体のこととする．

1.1.2　結縄数学

「素朴数学」には，歴史的・地理的に様々な種類が知られている[3]が，本稿が取り上げるのは，「数を表示する媒体」として，縄に作った結目（「結縄」）を用いるものである．この「結縄」という媒体も，世界的に広く分布した記数媒体である[4]．

一般論として，「結縄」は，声音による媒体（数詞）とは異なり，数の記録（一定の期間保存すること）が可能であり，さらに，結目を加えたり解いたりすることで「加減」の操作を実現することもできる．

このように，記録媒体や演算装置としての機能を併せて捉えた「結縄」を用いる営みの総体を，本稿では，仮に，「結縄数学」と呼ぶことにする．

[3]例えば，文献 [6] を参照のこと．

[4]文献 [1]，[2]，[15]，[16]，[18]，[20] 等を参照のこと．また，「結縄」以外の媒体については，例えば，文献 [6]，[11] を参照されたい．

1.2　アミ族の結縄数学

「結縄数学」の使用の具体例として，本稿では，台湾に居住した高砂族の一分派であるアミ族の，1900年代前半の状況を取り上げる．なお，以下の記述は，凍光福氏をインフォーマーとする中野敏雄氏の報告『台湾・アミ族の結縄』([12]) に拠る．

1.2.1　アミ族の社会的特徴

文献 [12] では，アミ族の社会的な特徴として，次の諸点が挙げられている．

1. 台湾の東海岸沿いの平地に居住しており，外来文化との接触が盛んなため，主として高山地帯に住した高砂族のなかでは，比較的文化の進んだ種族である．
2. 生産手段は，狩猟と漁労に加えて，家畜を使用する畑・水田の耕作を行っている．
3. 経済組織は原始的であり，各蕃社内における個人の職業的区分は存在せず，生産者と消費者は同一である．(強いていうなら，男女間で若干の分業がみられる．)
4. 年齢階級制度をもつ．男子の場合，長幼老少による 11 の班階が存在し，褌の使用許可や，結婚の許可等々が，位階に応じて与えられる．
5. 「集会所」制度をもつ．集会所は，女性禁制の，蕃社の会議・祭典の場であり，未婚男性の合宿所でもある．ある年齢以上の独身男子は，しかるべき入社式を経て，集会所に入所し，そこで共同作業を行いながら，教育を受けた．
6. （声音言語を表示する）文字をもたない．

1.2.2　計 数 法

文献 [12] に拠ると，アミ族の通常の計数方法は，「10 進法で手の指を以て行い，10 を 1 区切りとして，石又は木片を 1 個用意し，次の 10 を確認して，再び石又は木片を置き，計 20 を確認する．その様にして，順に石又は木片 10 個を確認することにより 100 を知る（p.3)」ものであったという．

この計数法と「結縄」との関係は，[12] の報告では判然としないが，[18] や [20] における琉球での結縄の使用の記述を参照すれば，「結縄」は，計数ではなく，記録や加減といった演算のための使用が中心であったと思われる．

1.2.3　計算用結縄 ― 「結縄」の基本形

加減の計算に使用されると共に，各種の用途に用いる様々な「結縄」の基礎となるものを，[12] では「計算用の結縄」と呼んでいる．この「計算用結縄」の“規格”は，次の通りとされる．

1. 縄の材料は，麻糸である．
2. 「結縄」は，三本の麻縄の上部を揃えて束ね結んだ形を，“規格”としている．ただし，この三本は，長さが 60*cm* 程度で，太さが細・中・太の三種類からできている．

この太さの種別は，単位の区別等に用いられたという．例えば，[12] では，この結縄を「金銭表現」に用いるときに，細縄が 1 銭の単位，中縄は 10 銭の単位，太縄は 1 円の単位とする，日本の大正時代の例を挙げている．

1.2.4　計算用結縄による加法

上述の計算用結縄による加法について，[12] では，次のように例示している．

> 例えば，6 銭＋7 銭の場合，細なわに先ず 6 コの結節を作り，次に，その細なわに 7 コの結節を作る．其の結果，細なわ 13 コの結節が出来る．次に，中なわに 1 コの結節を作り 10 を表現し，その為，次に，細なわ 13 コの結節の内 10 コの結節を解き，3 コの結節を残し，13 の答を得，13 銭を表現する．([12], p.4.)

1.2.5　“蕃社運営”における結縄の使用

アミ族では，蕃社の祭典の費用や，共同作業の分担・集計のために，諸種の計算や記録が必要とされたが，こうした計算や記録は，すべて「結縄」を用いてなされたという[5]．

[5]集計・記録の担当者は 50 歳くらいの長老組から選出されたが，結縄の管理保管者は青年組より数人が選出されたという．

「結縄」作製の目的

この種の結縄を作製する“目的”は様々であったが，大きくは，蕃社全体の共有財産の収集・統計（米・粟・牛・豚・魚・あわび等々の集計や使役日数の統計等）と，各個人から収集する祭費・集会費の納入集計であった．

結縄による記録の方法

記録の具体的な方法は，「細長い板」に，記録を要する集計目的の各々に対応するよう一定の間隔で穴を開け[6]，それぞれの穴に麻縄を通して輪を作り，記録すべき数値を表示する「基本の結縄（§§1.2.3 節の“計算用結縄”）」をこの麻縄の輪につりさげることに拠った．

使用の社会的状況

上述のように作製された「結縄（板）」は，実際の社会生活において，どのように用いられたのだろうか．[12] では，次のような説明が加えられている．

> この様な数多くの板が作製され集会所[7]内に管理保管されている．ある板は，蕃社共有財産用，ある板は祭費割当用，更に他の一枚は，集会費割当用等々と定められている．即ち，例えば，集会費用割当の結縄の板は，何枚も作られる．一枚の板は蕃社の道路の片側の納入者の人員数だけ穴をあけ，道路の南端より数え，1 番目の穴は誰，2 番目の穴は誰と，定めおき，計算用結縄をつるす．
>
> 集会所で会議をする場合は会食形式で実施する故，其の集会費は物品で納入する．集会費は，公平に順序よく納入することになって居り，豚又は牛が多い．
>
> それらの物品を納入した記録の方法は，結節一個を以て豚を示し，連続して結節二個は牛を表示している．更に約束として，如何なる太さのあさなわにそれを結節するかが定められる．この結節が過去の納入記録となる．([12]，pp. 5 – 6.)

[6]アミ族が無文字社会である以上，「穴の位置」と「使用目的」の対応付けは，「記録」ではなく「記憶」でなされたものと思われる．

[7]第 1.2.1 節で挙げた社会的特徴の 5 番目を参照のこと．

1.2.6　貸借行為における結縄の使用

次の例は，個人間の“貸借行為”である．文献 [12] では，以下のように記述される．

> 金銭のほか物品（もみ等々…）を借用した場合，その証書の代用として結縄を作製する．原則として，前述の計算用結縄をそのまま利用する．借用数値を示す結縄 2 組を，借り主と貸し主両者の面前で同じように作製し，1 組は貸し主，他の 1 組は借り主が保管する．(この結縄は，神聖なるものにして，彼等の社会習慣上，これを結び直す様な事は絶対にあり得ない事である．)
>
> 返済日は，口頭で定められる．期日が来て，貸し主が借り主に返却を要求すると，必ず返却がなされる．返却がなされない等のトラブルは，彼らの社会組織の構成上存在しない．
>
> 返却の場合，両人の面前で両人の保持している結縄の結節を全部ほどく．然し，万一，一部返済の場合は，話し合いが得られた後，返却分だけの結節を両人の面前で，おたがいに解き，残部の返却日を定めるという．
>
> 位，結節方法，表現方法は，両人の話し合いの上定めるが，それによるトラブルも絶対に存在しないと言う．([12]，p. 4.)

前項の例が，蕃社の全般的な運営に関わる，いわば“公的”な営みにおける結縄の使用であったのに対し，本項の例は，個人間の貸借行為という，いわば“私的”な領域における結縄の使用であることを留意しておこう．

2　数学の“共有方式”と“個的使用”

2.1　言語の二つの側面

2.1.1　言語の個人的側面と社会的側面

本稿の考察において鍵となる「個人的側面」と「社会的側面」という言葉は，ソシュールが“言語”に対して述べたことに由来する．

この言葉は，ソシュールの『一般言語学講義』の序説第 3 章において，

> どんな仕方を採るにせよ，言語現象は，互いに対応し一方が他方による以外，価値を生じないといった，二つの面を，たえず示している（[17], p.23 ）

と述べ，そうした“見方”の例をいくつか挙げた中の三番目で，

> 言語活動（langage）には**個人的な側面**（côté individuel）と**社会的な側面**（côté social）とがあり，また一方は他方がなくしては考えられない（[17], p.24）

として登場する．そして，

> 言語活動はどんな瞬間にも，安定した体系（système établi）と進化（évolution）を前提にしている．どんな瞬間にも，それは現行の制度（ institution actuelle）であるとともに，過去の産物（produit du passé）である（[17], p.24 ）

と続けられる．

2.1.2　ラングとパロール

この“言語のもつ二重性”は，やがて，ソシュール自身の手によって，言語の社会的側面としての“ラング（langue）”と個人的側面としての“パロール（parole）”という，著名な概念へと結晶化させられることになる．

ラングとパロールについては，学生の聴講ノートに拠るのが明快である．そこでは，次のようになっている．

> ラシグは個人における言語活動（langage）の能力の使用を許すために社会集団によって採択された必要な慣例（convention）の全体である＜定義＞．言語活動の能力はラングから截然とした事実であるが，これなくしては行使されない．パロルによっては，ラングたる社会慣例を手段としてその能力を実現する個人の行為が示される＜定義＞．（[17],p.419, 校注 63.）

こうして，

> ラングとパロルを分けることによって，同時に分けられるのは，1. 社会的なものと個人的なもの，2. 本質的なものと，付随的で多少なりとも偶然なもの，である．（[17], p.30.）

ということになる．

2.1.3　スキーマとユーセジ

ソシュールの有力な後継者であったデンマークの言語学者ルイ・イェルムスレウは，言語を扱う彼自身の枠組みである言素論の枠組みにおいて，ラングとパロールに別の名称を与えた．

本稿では，数学の場合に，イェルムスレウの術語を借用するため，ここで，簡単に触れておきたい．

まず，イェルムスレウは，ラングの対応物を“sprogbygnning”，パロールの場合を“sprogbrug ”と，デンマーク語で呼んだ．この言葉は，著者自身が校訂に参加した著作 [4] の英語訳において，“スキーマ（schema）”と“ユーセジ（usage）”という言葉に置き換えられることになる．

言葉の意味合いについて，イェルムスレウの啓蒙的な著作 [5] では，次のように説明されているので，紹介しておく．

まず，スキーマについてである．ここでは，「言語構造」と訳されている[8]．

> 言語の中の各要素は，したがって，ある一定の結合の可能性はあるが，他の結合の可能性は排除されるということで定義される一定の範疇に帰属する．このように定義されるこれらの範疇が言語の要素体系，すなわちわれわれが言語構造と呼ぶところのものを構成する．（[5][日本語訳], p.50.）

次に，「ユーセジ」の方であるが，こちらは「言語慣用」と訳されている．

> 言語は，すでに述べたように，われわれの前に直接，記号の体系として現われる．しかし，いまわれわれは，言語は実際には，まず第一にいくぶんちがったものである．すなわち，連鎖中である一定の場所を占め，他の結合を排除している一定の結合を行なうべく定められている要素の体系であること

[8] [4] の日本語訳では，「言語構築」と訳されている．

を知る．これらの要素を，要素に対して与えられている規則にそって記号を形成するように用いる（bruge）ことができる．要素の数および各要素の結合の可能性は言語構造において，きっぱりと決められている．言語慣用が，これらの可能性のうちいずれを利用するかを定めるのである．([5][日本語訳], pp.51 – 52.)

この説明を見る限り，イェルムスレウの「ユーセジ」は，ソシュールの「パロール」に比して，“実際に使用する”という意味合いより，使用の“型（パターン）”を示す傾向が濃いようにも思えるが，我々としては，あくまで数学の場合に借用するための用語であるから，精密な吟味は行なわないことにしておく．

2.2　結縄数学の二つの側面

数学の「社会的側面（ラング）」と「個人的側面（パロール）」の一般的な検討に先立ち，本節では，前章で「アミ族の結縄数学」と呼んだ営みについて，「社会的側面」と「個人的側面」が何にあたるのかを考えてみたい．

2.2.1　結縄数学の社会的側面

「結縄数学」の「社会的側面（ラング）」を考えるにあたって，この「社会的側面」の“社会的”という言葉は，前章の例でいう財産管理や貸借行為のように“実際の社会で用いられている”という意味ではないことを確認しておこう．この“社会的”という意味は，“社会の構成員が共有している”といった意味合いの言葉として用いられている．

我々の見解では，この側面とは，使用される現実的な状況を離れた抽象的な概念としての“数[9]の世界”のことであり，具体的には，「数概念を表示する媒体」としての「結縄」と，「数を加えたり減じたりする操作（の装置としての「結縄」）」からなる“系（システム）”のことである．

この“系”について，もう少し正確に述べると，数の表示の媒体としては，「結縄」以外に，声音言語による表示（数詞）や，石や木片による表示も含まれる．なお，表示の時間的保持について，声音的表示の場合は瞬間的であり，石や木片の場合は一時的であるが，結縄は半恒久的であると考えられる．（こうして，結縄は，“記録（「数」の保存）”と呼ばれる“現実世界における操作”に使用可能な媒体となる．また，加減の操作についても，「加える」であるとか「減じる」という意味をもつ「声音的媒体（言葉）による表示」も含めておくべきであろう．

いずれにしろ，ここで問題としている“系”は，「数の表示媒体全体の集合」と「操作の表示媒体全体の集合」，そして，数の表示媒体と操作の表示媒体の定められた形式を満たす“結合”に対応する「数の表示媒体全体の集合」上で働く“操作”からなる．

もちろん，こうした“系の記述”が不十分なものであることは明らかだが，ここでは，暫定的に，こう考えておくこととしたい．

2.2.2　結縄数学の個人的側面

それでは，「結縄数学」の「個人的側面（パロール）」は，何になるのだろうか．

ひとことで述べれば，それは，先述の“数の世界”を表現している“系”を，ひとりひとりの個人が“使用する”こと，つまり，こうした“系”を現実的な状況（コンテクスト）に適用する個人個人の営為の総体，といったものになるだろう．

あくまで漠然とした言い方ではあるが，もう少し詳しく述べれば，

- 現実世界を構成する“ある種の事象”を“計数”という操作（§§1.2.2）によって「数（概念）」として“把握”すること．
- 把握された「数」を，“系”の媒体を用いて“表示”すること．
- 把握された「数」を，“系”に属する「結縄」媒体を用いて“記録”すること．

  あるいは，現実世界を構成する“ある種の事象”を，“系”における「数の加減」という操作として“把握”すること，および，“系”における操作の結果として得られた「数」を現実世界の事象に“還元”すること．

等々といった営みとして捉えることができるだろう．

なお，ここで登場する“ある種の事象”は，前章の例では，「蕃社全体の共有財産の集計」や「各個人

[9] “数”とは，計数という“現実世界における操作”によって得られる概念，という見方もできる．

から収集する祭費・集会費の納入集計」であったり，個人間の貸借行為における「貸借関係の成立や解消」にあたる．先の二つが「公的」なものであり，最後の行為が「私的」なものであることは，詳しい議論をする際には必要になる（第 2.3.4 節）が，大きくは，いずれの行為も，会計管理者なり，貸借関係を結ぶ者なりが，「個人的に“系”を用いて活動を行う」という意味においては相違がない．

これが，ここで挙げた“数学的な営み”を，数学の個人的側面と呼ぶ所以である．

2.2.3　数学の社会的側面と個人的側面

結局のところ，ソシュール的な意味での“社会的側面（ラング）”とは，数学的な活動を行うための「諸概念とその操作」からなる抽象的な“系（システム）”であり，“個人的側面（パロール）”とは，その“系”の「諸概念や操作」を現実的な状況において“実現”させる各個人の活動を意味するといえるだろう．

2.3　数学行為の“共有方式”と“個的使用”

2.3.1　社会から共同体へ

以上の議論において，“社会的”という言葉を用いるにあたっては，“表示媒体と操作（知識や技法）”という観点から「数学」を見ると，“固有の数学”をもつ多様な“社会”が在り得るということが前提されている．（この意味での“数学の多様性”が，前著 [8] の主題であった．）

この“社会”は，必ずしも“国家”的なものとは限らず，地域社会，職能集団等々，議論の文脈に適した，しかるべき「人間の集団」として一般化して考えることが有効性が高い．以下，そうした集団を，[9] に倣って，“**共同体** (*community*)”と呼ぶことにする[10]．

2.3.2　数学の共有方式

共同体の上で「数学」を考えたとき，その「社会的側面」とは，どのようなものになるのだろうか．まず，そうした側面を，言葉としては，序でも述べたように，共同体を強調して，「数学の**共有方式**（*communal schema*）」と呼んでおく．（イェルムスレウの用語を一部借用した．）

前節の結果を敷衍すれば，我々は，ある共同体上の数学の“共有方式”とは，「数学的概念の表示媒体と諸操作」からなる“系（システム）”であると考えることができる[11]．

2.3.3　数学の個的使用

次に，共同体上の数学の「個人的側面」についてであるが，やはり前節の見解を敷衍して，数学の“共有方式”に則って（つまり，“系”を用いて），しかるべき現実的な状況（コンテクスト）[12] において“数学行為”を行なうこととしたい．

本稿では，このような“数学行為”を，やはりイェルムスレウの用語を一部借用して，「数学の**個的使用**（*individual usage*）」と仮に呼ぶことにした．

2.3.4　数学の個的使用の区分

数学の個的使用は，（理念的には）二種に区別することが出来る．

「結縄数学」の例でいえば，一方は第 1.2.5 節で挙げた「蕃社の運営」という“公的”なものに関わる数学的活動であり，他方は第 1.2.6 節で取り上げた「個人間の貸借」という“私的”なものに関係する営みである．

前者では，「どういう種目の場合は，どのように計算を行い，どのような形式で記録するか」までが共有化されている．つまり，そうした行為を，その共同体のどの構成員が実行しようと，その過程や結果が，すべての構成員に了解可能になっている．つまり，使用するための共有方式だけでなく，個的使用を

[10] 社会と共同体の厳密な区分は難しい．例えば，マリヤンスキ・ターナーの『社会という檻　人間性と社会進化』([10]) では，社会の構造を概念化して，「社会は人口誌的 (demographic)，空間的 (spatial)，制度的 (institutional)，階層的 (stratifying)，カテゴリー的 (categoric)，そして，団体的 (corporate) の，六種の次元に沿って組織されている」と主張するが，彼らのいう“団体 (corporation)”のいくつかは，我々の言葉での“共同体”とみなしても良いと思われる．

[11] 我々は，文献 [9] では，本稿の共有方式のことを，「共有記号系（*communal sign system*）」と呼んだ．この用語の由来は，「数学的概念の表示媒体」を「意味を担う媒体」である“記号 (sign)”の特別な場合と考え，“記号学”の用語を借用して「記号系」としたものである．しかし，数学で必要としている“系”は，上述の通り“操作”を含意しているが，この点は，必ずしも記号学の通常の用法と一致しない．そこで，本稿では，「記号系」を用いずに，「共有方式」と呼ぶこととした．詳細については，本稿の「付録」を参照のこと．

[12] 何が“現実的”であり何が“抽象的”か明確に定めることは，困難なことである．少なくとも，“人間を取り巻く物理的自然”のみを“現実的”とするのでは，事態の矮小化になってしまうだろう．

実行するための「現実的な状況」も共有を可能とするために“規格化”されていると思うことができる．

他方，後者の例では，貸借行為に必要な数値の記録自体に「結縄」を用いるという意味では共有方式の使用に他ならないが，そこで用いられた結縄がどのような数値を表わすかについては，当事者間のその場の規約に基づくものであるから，共同体の他の構成員には了解不可能なものである．結局のところ，この場合は，共同体として共有できるように状況が“規格化”されていないことになる．

こうして，数学の個的使用は，あくまで“共同体”という観点から見たときにだが，次の二種類に区別することができる．

1. **定格個的使用**（*standardized individual usage*）
   これは，「規格化されている状況」における“使用”を意味する．
2. **未格個的使用**（*nonstandardized individual usage*）
   こちらは，「規格化」されていない状況における“使用”のことである．

もちろん，この区別は，理念的なものであり，実際の使用における規格化の有無を判定するのは，容易なことではない．

2.3.5　数学の個的使用における“揺れ”

個的使用について，もうひとつ重要なことは，使用に伴う“揺れ（deviance）”の存在である．

“数学の個的使用”では，共有方式として規定された“抽象的”な記号群を現実的な「媒体」で表示し，そうした「媒体」を記号のなす系の構造が許容するような規格化された方式で「操作」することになる．

しかし，特定の現実的な状況において，そうした“使用”を行うと，実際上，媒体の表示の仕方や操作の方式が，共有方式の規格からある程度外れてしまう．この“規格から外れている状況”を，本稿では，仮に，“揺れ”と呼ぶ．

この「個的使用における揺れ」の存在は，人間の営為である以上，原理的に避け得ないと考えられるが，その程度に差異があるのも当然であろう．

例えば，前項で述べた「定格の個的使用」より「未格の個的使用」の方が，こうした“揺れ”が大きくなる傾向を認めることができる．

2.3.6　社会的側面と個人的側面の関係性

ソシュールにとって，言語の社会的側面と個人的側面は，本来，切り離すことの出来ないものであった．こうした事情を，数学の場合，つまり，数学の共有方式と個的使用の関係性[13]について，やはりソシュールによって導入された“共時的”と“通時的”という枠組みを用いて，簡単に観察しておきたい．

共時的相互依存性（*synchronic interdependency*）

共有方式と個的使用の関係は，共時的には，次のような“相互依存性”として捉えることができる．

> 共有方式は個的使用を通じてしか“発現”しないが，同時に，共有方式なしに個的使用が“発現”することは不可能である．

「共有方式は個的使用を通じてしか“発現”しない」ということは，共有方式というものが，本来的に，共同体の構成員の間のコミュニケーションのためのものであるという性格を反映したものである．

固有の言語に対して，ソシュールのいうラング，つまり言語の構造を“記述”することが行われているが，これは，大雑把にいって，声音言語の記号系を，別種の，例えば書記言語の記号系を用いて“翻訳[14]”することを意味している．

個別言語の構造を記述することを志向する「記述言語学」があるように，数学の場合も，個別数学の共有方式を“記述”する営為が存在するのが当然ではあるが，現状は，言語学でいうソシュール以前の状況ではないかと思われる．記号系の一般的な構造論にもとづき，固有数学の共有方式の共時的な記述を行うことは，教育数学の重要な役割のひとつではないかと考えている．

通時的因果性（*diachronic causality*）

共有方式と個的使用の関係を，通時的に捉えると，次のような“因果性”が認められる．

> 数学の個的使用は必ず“揺れ”を含み，その“揺れ”が共有方式の変化を引き起こす．

[13]「ラングとパロルには，明らかに弁証法的性格がある」ことが指摘されている．([17], p.420, 校注 65.)

[14]同型（もしくは準同型）となる射を構成するという意味では，“表現”することと言ってもよいかもしれない．

進化と捉えるか退化と捉えるかは価値観という基準によるだろうが，現実に使用されている「数学」は，時代と共に変化する．この“変化”は，個的使用の“揺れ”という“ミクロ”なものの蓄積に“由来”することを主張している．

自然言語の場合にソシュールが強調したのは，この変化を人為的に操作することの不可能性であったが，数学の場合は，少なくとも「共有方式」という観点から見る限り，「自然言語」よりはむしろ「人工言語」に近いと思われるから，上述の観察も，個的使用の“揺れ”は，あくまで，変化を引き起こす“第一因”であることを主張していると思うことにしたい．

3　数学の教育的側面

3.1　教育数学の“教育”

3.1.1　教育数学のために

本稿の主題は，我々の本来の関心である「教育数学」を展開するために，「数学の教育的側面」について検討することであった．

それでは，ここまでに見た数学の「社会的側面＝共有方式」と「個人的側面＝個的使用」と「教育」は，どのように関係するのだろうか．

この課題に取り組むにあたっては，まず，「教育」をどういうものと思うかを明確にしておく必要があるだろう．この点について，我々は，「共同体中心主義」的立場を取る．

3.1.2　共同体にとっての教育

そもそも，「人間の集団」が「共同体」になるためには，しかるべき“成立要件”を満たす必要があるだろう．本稿では，そうした「成立要件」のうちで構成員が共有すべき“諸要素”を，構成員に“獲得”させる“機能”を，「教育」と考える．

当然ながら，この機能が働くことで，共同体は，成立し，あるいは，存続することになる．

3.2　数学の教育的側面

3.2.1　「教育」の対象となる数学の“要素”

数学の場合，教育の対象，つまり，共同体の構成員が共通に身につけておくべき“要素”というのは，何だと思えば良いのだろうか．我々は，この“要素”こそが，「数学の教育的側面」を検討する際の鍵になると考えている．

そうした“要素”は，第一義的には，共同体の運営に必要とされる事柄のうち，数学的に扱うことが適切なもの，すなわち，その共同体の共有方式で表現され得る（あるいは，表現されるべき）事柄を他者に提示できることや，他者の提示したものを理解できることあろう．

つまり，第2.3.4節の言葉を用いれば，各構成員が共有すべき“要素”は，数学の「定格個的使用」ということになる．

3.2.2　数学の教育的側面

以上の議論より，数学の教育的側面は，第一に，「数学の定格個的使用」の総体を含むことになった．

ところで，そもそも，数学の個的使用とは，実際的な状況において「数学の共有方式」に則った使用を行なうことであった．したがって，「数学の共有方式」もまた，数学の教育的側面に含まれると考えるのが自然であろう．

つまり，本稿の枠組における結論としては，

「数学の教育的側面」は，「数学の定格個的使用」と「数学の共有方式」からなる，

としておきたい．

3.3　教育的側面の周辺的課題

教育によって構成員が身につけるべきことは，「定格個的使用」と「共有方式」であるとしても，「個的使用」そのものは，無限の変相（ヴァリエーション）をもつから，「すべてを記憶させる」といったことはできない．

したがって，実際に必要なことは，「定格個的使用」を“可能”にすることであり，そのためには，あるいは，「未格個的使用」等々も，数学の教育の“対象”となるかもしれない．

あるいは，“共有方式”といい，“定格”というが，そもそも，現実の“数学”を考えるとき，そのようなものを，どうすれば決定できるというのか．

「数学の教育的側面」をめぐっては，多くの“周辺的な課題”が存在する．本節では，こうした課題に関連すると思われる，いくつかの話題を取り上げておく．

3.3.1　数学の教育的側面と数学テクストの類型

数学の「教育的側面」と，実際の教授の場において用いられる“テクスト”との関係について，どのようなことが考えられるだろうか．

我々は，『教育数学序説 – 古代における教育と数学の類型 – 』（[7]）において，古代の数学テクストを教育の観点から分類して，算術型と原論型という類型を導いた．

本稿の見解に基づけば，算術型テクストは“数学の定格個的使用”に焦点を合わせたものであり，原論型テクストは“共有方式”に対応するものであるという見方ができるだろう．

3.3.2　定格個的使用の習得過程

数学の定格個的使用とは，「規格化されている状況（コンテクスト）」において「数学の共有方式」に規定された使用を行なうことであった．したがって，各構成員がそうした「個的使用」を行うことができるために必要なことは，素直に考えれば，最初に「個的使用」の前提となる「数学の共有方式」を習得し，次に，その「共有記方式」の「規格化された状況」における適用の仕方を習得するということになるだろう．

しかし，数学の個人的側面である「個的使用」と社会的側面である「共有方式」の“共時的相互依存性”（第 2.3.6 節）を考慮に入れるなら，上で述べた“素直な見解”は，一方的な見方にすぎないことがわかる．

構成員が「共有方式」を“本質的”に知るためには，「個的使用」を通じることによるしかない，したがって，数学の教育は，本質的には，「使用することを通じて構造を知りつつ，身につけた構造を用いて使用する」という相互依存的な過程を形成することになるだろう．

3.3.3　教育の顕在化機能と浸透化機能

前項で見た“学習者が数学の教育において経由する過程”からは，「何を使用しているのか」という型の問題と，「どのように使用するか」という型の問題を析出することができる．

以上の見解を敷衍し，我々は，[9] において，「教育とは，共同体を成立あるいは維持・変化させるために，構成員が共有すべき要素を顕わにする (explicate) こと，そして，そうした要素を構成員（もしくはその候補者）に浸透させる (permeate) ことである[15]」と考え，教育という機能を，「構成員が共有すべき要素を顕在化させる機能（顕在化機能）」と，「そうした要素を構成員に浸透させる機能（浸透化機能）」という二つの下位機能に分割した．

3.3.4　「未格個的使用」の活性化

本稿では，共同体中心的立場から教育を捉えているから，その第一義的な対象は「定格個的使用」ということになった．一方で，いわゆる“数学を用いた独創的な研究”などは，「数学の未格個的使用」に対応することになるだろう．

もちろん，そうした「未格個的使用」的な営為も，共同体のある種の発展のためには重要であろうが，本稿の文脈からいえば，そうした活動の活性化のために必要なことは，「教育」とは別種の共同体の機能の働きの結果として得るべきものと思われる．

結　び

本稿で，我々は，言語との比較を光源として，数学と教育との関係に光を当てることを試みた．

ソシュールによって導入された“ラング”と“パロール”の区分は，数学においても有効であろうことが確認されたが，枠組みとしてはともかく，一歩中に足を踏み入れると，やはり，数学と言語を同一に扱うことは難しい．

言語のもつ自然性に比べ，数学は，何がしかの人工性を帯びているように感じられる．その理由は，いくつか考えられるが，結局のところ，「数学は言語ほ

[15] つまり，構成員が共有すべき要素を「顕わにすること」は「何を教えるか」を，また，「浸透させること」は「どう教えるか」を敷衍したものである．

ど使われないから」という理由が大きいように思える．つまり，大多数の共同体において，数学を必要とする事柄は，言語の場合に比べて，圧倒的に少ないという事実に起因しているのではないだろうか.（数学の研究者集団において，数学が言語に匹敵する自然性を帯びることとは対極的である.）

しかし，同時に，数学は，他の人間の種々の営みに比べ，言語に近い性格をもっていることも確かそうである．この“性格の近さ”の正確な意味づけは今後の課題であるが，いずれにしろ，この言語と数学を比較し得る“性格”を明確にすることが，数学における教育の役割を真に理解する鍵となるだろう.

周知の通り,「学ぶ」の意から派生した「マテマティケー」という言葉には,「数」の含意はない．この言葉が今で言う「数学」に転義した理由として，ラオディケアの司教として知られる三世紀末のアナトリウスは，次のように伝えている（[19], p.2 ）.

> なぜ，マテマティケーはこういう名で呼ばれるようになったのか？
>
> 逍遥学派は，こう説く．修辞（レトリケー）や詩文（ポイエティケー）や通俗音楽（デモウデオウス・ムウシケー）は，教えを受けることなく理解することができる．が，このマテマティケーという特別な名で呼ばれる学的領域は，教育を通ぜずしては何人も修得能わざるものであるのだ，と.

“数の世界”は，“教育”を通じることによってのみ，人の営みである“数学”として，その姿を顕わにするのかもしれない.

参考文献

[1] Ascher, M. and Ascher, R : *Code of the Quipu: A Study in Media, Mathematics, and Culture*, University of Michigan Press, 1981.

[2] Brokaw, G. : *A History of the Khipu*, Cambridge University Press, 2010.

[3] Chandler, D. : *Semiotics the basics*, (2nd ed.) Routledge, 2007.

[4] Hjelmslev, L. : *Omkring Sprogteoriens Grundlæggkese*, Festskrift udgivet af Københavns Universitet i anledning af Universitets Aarsfest, November(1943),3 - 113.

[英語訳]　――：*Prolegomena to a Theory of Language*,（translated by Whitfield, F. J.）Revised English edition, Wisconsin, 1961.

[日本語訳] ルイ・イェルムスレウ『言語理論の確立をめぐって』（竹内孝次 訳） 岩波書店, 1985.

[5] Hjelmslev, L. : *Sproget — En Introduktion*, erlingske Leksikon ibliotek, Berlingske Forlag, København, 1963.

[英語訳]　――：*Language　An Introduction*,（translated by Whitfield, F. J.）The University of Wisconsin Press,1970.

[日本語訳] ルイ・イェルムスレウ『言語学入門』（下宮・家村 訳） 紀伊国屋書店，1968.

[6] Ifrah, G. : *Histoire Universelle des Chiffres* , Seghers, Paris, 1981.

[日本語訳] ジョルジュ・イフラー：『数字の歴史』（彌永・丸山・後平 訳), 平凡社, 1988.

[7] 蟹江幸博，佐波学『教育数学序説 – 古代における教育と数学の類型 – 』三重大学教育学部紀要，第 61 巻， 教育科学, (2010), 187 - 218.

[8] 蟹江幸博，佐波学『教育数学の諸相（Ⅰ）— 数学の多様性 — 』三重大学教育学部紀要， 第 63 巻， 教育科学, (2012), 335 - 352.

[9] 蟹江幸博，佐波学『教育数学から見た「算術條目及教授法」』， 数理解析研究所講究録,（掲載予定）.

[10] Maryanski, A. and Turner, J. H. : *The Social Cage, Human Nature and the Evolution of Society*, Stanford University Press, 1992.

[日本語訳] アレクサンドラ・マリヤンスキー，ジョナサン・H・ターナー：『社会という檻　人間性と社会進化』（正岡寛司 訳), 明石書店, 2009.

[11] Menninger, Karl :*Zahlwart und Ziffer : Eine Kulturgeschichte der Zahl* , Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1958.

（日本語部分訳） K. メニンガー著『図説　数の文化史：世界の数字と計算法』（内林政夫 訳) 八坂書房, 2001.

[12] 中野敏雄『台湾・アミ族の結縄』， 数学史研究, 通巻 88 号，(1981), 1 - 8.

[13] Prieto, L. J. : *Messages et Signaux*, Presses Universitaires de France, 1972.

[日本語訳] ルイ・プリエート『記号学とは何か』（丸山圭三郎 訳）白水社, 1998.

[14] Prieto, L, J. : *Pertinence et Pratique*, Minuit, 1975.
[日本語訳] L. プリエート：『実践の記号学』(丸山・加賀野井 訳), 岩波書店, 1984.
[15] Quilter, J. , Urton, J. (ed.) : *Narrative Threads – Acccounting and Recounting in Andean Khipu*, University of Texas Press, 2002.
[16] Salomon, F. : *The Cord Keepers – Khipus and Cultural Life in a Peruvian Village*, Duke University Press, 2004.
[17] Saussure,F.de.:*Cours de linguistique générale*, (edition critique preparee par Mauro, T. D.), Paris : Payot, 1972.
[日本語訳] トゥリオ・デ・マウロ『「ソシュール一般言語学講義」校注』(山内貴美夫 訳), 而立書房, 1976.
[18] 田代安定『沖縄結縄考』至言社（昭和 20 年養徳社版の復刻）, 1977.
[19] Thomas, I.(tr.) : *Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press, 1991.
[20] 矢袋喜一『琉球古来の数学と結縄及記標文字』宝文館 , 1915.

付録　共有方式と記号系

言語の場合に，ソシュールは,「ラングを記号系として捉える」という見方を創始した．数学の場合も，共有方式を“記号系”として捉えることに有効性が期待されるが，本文の脚注 11 でも触れたように，“操作”の扱いに困難が見られる．

この付録では，このような問題意識をもって，“数学の共有方式と記号系”に関連する話題をいくつか取り上げることにしたい．

A. 記号系としてのラング

最初に，ラングを記号系として捉えることを提案した，ソシュールの見解を見ておこう．

ソシュールによれば，

> ラングが一つの社会的制度であることは，私たちのみたところである．しかし，それは，政治的，法的などのほかの諸制度からは，多くの点で区別される．その特殊な性質を理解するには，諸事実の新たな系を介入させる必要がある．
>
> ラングは，イデーを表出する記号の体系（un système de signes exprimant des idées）である．またそのことによって，比較できるものとしては，文字をはじめ，聾唖者のアルファベット，象徴儀礼，礼法上の形式，軍関係の合図などがある．ラングはこれらの体系のなかでもっとも重要なものというだけである．([17], p.33.)

そして，この後に，“記号論”の創始を示唆する，著名な文章が続く．

> したがって，記号の生態を研究する一科学が考えられる．社会生活のただなかでの — それは社会心理学の一部を形づくることになろう．またその結果，一般心理学の一部を．それを私たちは記号学 sémiologie と名づけよう．　…　言語学はこの一般的な科学の一部に過ぎない．記号学が発見してゆく諸法則は，言語学へ適用できるものとなり，またこうなれば，後者は人間の諸事実の全体における，よく定義された領域と密接していることがわかろう．([17], pp. 33 – 34.)

B. “記号”の一般理論

ソシュールの構想した“記号学”は，その後，どうなっただろうか．

現在，“記号”について一般的な考察を行う学問分野は「記号学（semiology）」もしくは「記号論（semiotics）」と呼ばれる．

この分野には，様々な立場があり，必ずしも標準的な見解が確立しているわけではないようだが，大きくは，ソシュールの影響下にあって“記号”をコミュニケーションの手段として捉える立場（「semiology（記号学）」と呼ばれることが多い）と，パースに拠って“記号”の意味作用に焦点をあてる立場（「semiotics（記号論）」）の系統に分かれるとされる[16]．

[16] “記号”の基礎的な理論に関する最近の動向については，例えば，文献 [3] を参照のこと．

「記号学」の系統では，単一の“記号”の性質ではなく，“記号群”の集合上に，複数の記号の結合が意味を担う様態の記述（コード）等々を併せて，ひとつの“系（システム）”として捉えることが多い．

ただ，我々が必要としている「数学の社会的側面」のように，“操作”自体が本質的な形で“系”に包含されているような理論については，寡聞にして知らない．

C. フロイデンタールの“数学化”

それでは，我々が必要とする，数学の共有方式を記述するための新しい“記号論”に加えるべきは，数の加減といった“操作”だけで良いのだろうか．

ここで，しばらく「記号系」の話題を離れ，数学の教育に関するハンス・フロイデンタールの見解を，簡単に振り返っておきたい．

教えるべき数学とは何か

1980年開催のICMI(International Commission on Mathematics Instruction)の招待講演で，ハンス・フロイデンタールは，「数学の教育において教材や教授法は主要な問題ではない」と主張した．

フロイデンタールは述べる．「教えるということは常に何か（something）を教えることだ，ということには私も同意します．何でも（anything）ではなく，何かしかるべきものをです．教える価値のある何かをです．」そして，彼は，こう問いかけた．「しかし，いったい何が教える価値のあるものなのでしょうか？」

この問いには，我々の「数学の教育的側面」の追求と，同様の問題意識が感じられる．

なお，フロイデンタールがこの講演で与えた答は，「教えるべきものであるためには，応用可能（applicable）でなければならない．ある意味で，あるいは，何らかの意味で．」であった（[7], p.193）．

フロイデンタールの「数学化」

その後も，フロイデンタールは，「教えるべき数学とは何か」という問いを追求し続ける．

そして，彼が得た解答の鍵となる概念は，「数学化（mathematising）」であった．彼にとって，「数学化」の過程（プロセス）こそ数学の本質であり，その過程の追体験が数学教育の本質であった．

それでは，数学化とは何か．

数学化とは，「フォーム（form）とコンテント（content）が相互作用（interplay）」している状況において，何かを発見したり組織化したりする活動であるという．

“動物の骨に刻みをつけて数の記録をする”素朴社会を例にとれば，「フォーム＝動物の骨に刻まれることで表示される“数”，コンテント＝家畜の群れ，相互作用＝数えるという行為」が，ひとつの数学化の対象としての状況となる．

家畜の群れというコンテント上で生じる，組み分けや増減といった事象が，数えるという相互作用を通じて骨の刻み目というフォームの世界に反映されるとき，自然数や演算の原初形態の形成が始まる，こうした営みが，数学化の姿のひとつである．

なお，フロイデンタールは，ある対象を数学化した結果生じたものどもを新たな対象とし，さらなる数学化を行なうことを「垂直方向の数学化」，未だ数学化のなされていない対象の数学化を「水平方向の数学化」と呼んだ．（[7], p.195）

D. プリエートの構想

先に，“数学の共有方式”を“記号系”と呼ばなかった理由は，“操作”をうまく扱えなかったからだと述べた．ところで，この“操作”は，フロイデンタールの“数学化”の一種と捉えることもできる．

それでは，こうした“操作”や“数学化”を，「記号の系としての共有方式」と関連付けることはできないのだろうか．

我々は，ルイ・プリエートが“記号学”の名の下に展開を試みていた理論が，その可能性をもっていると考える．そこで，本節では，プリエートの見解について，簡単に触れておきたい（文献 [13],[14] を参照）．

人間と道具

プリエートは，言語（あるいは，より一般に，コミュニケーションの手段としての記号系）を，より根源的な「人間の使う道具」という観点から取り扱おうとする．

プリエートの“思想”は，例えば，

> 人間と道具（instrument）は互いに切り離すことのできない二つの現象（phénomène）

> であり，道具を創るために人間が必要であったのも事実なら，人間が人間となったのは，道具を創ることによってのみであるというのも同様に正しい．実際，人間のもつすべて，人間の最も特徴的なものと認められるすべては，その形の如何を問わず，道具の使用（emploi）に結びついている．

という文章に良く表現されている．

そして，プリエートにとっては，言語も，意味を担ったメッセージを他者に届けるための“道具”の一種ということになる．

そして，我々の関心から言えば，数学に現われる様々な“操作”や，フロイデンタールの“数学化”も，プリエート的な“道具”として捉えることが出来るのではないかと考える．

双面構造 ― ″道具″を規定する構造

プリエートにとっての“道具”は，人間の意識状態において，“双面構造（bifacial structure）”と呼ばれれる構造によって規定されるものであった．

なお，この“双面構造”とは，ソシュールの「シニフィエとシニフィアン」の関係を一般化したものとして定式化される[17]．（理論的に整理された立場を取れば，双面構造が“言語という道具”に対して顕われたものが，シニフィアンとシニフィエということになる．）

したがって，数学の“操作”やフロイデンタールの“数学化”が，プリエートの意味での“道具”かどうかは，それを規定する双面構造が存在しうるか，という問題になる[18]．

直示と共示

さらに，プリエートは，コミュニケーションの手段としての“記号系”に，直示と共示という概念を導入する[19]．

乱暴な言い方をすれば，ある記号のシニフィエ（意味するもの）が，別種の構造を備えた“対象”であるとき，その記号は“共示的（connotatif）”であるとされる．また，シニフィエが，そうした構造を通すことなく直接的に把握される場合が，“直示的（notatif）”である．そして，プリエートは，“共示”の場合の「別種の構造」を，それまでに当然視されていた“記号構造”に限定することなく，より一般的な“双面構造”とすることを示唆した．

つまり，このようにすれば，種々の“道具”をコミュニケーションの手段である“記号系”に取り入れることができることになるが，議論の詳細は，紙面の都合で，別の機会に委ねることにしたい．

---

[17] プリエートの双面構造を，集合論の言葉を用いて整理すると，次のようになる；

双面構造とは，外的空間 (external space) と内的空間 (internal space) と呼ばれる 2 つの集合 U と W，それぞれのべき集合の二つの部分集合 $\mathfrak{U}$ と $\mathfrak{W}$，および，この部分集合の間の，U, W における包含関係を保持するような写像 $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{W}$，の六つ組 $(U, W, \mathfrak{U}, \mathfrak{W}, \Phi)$ で与えられる構造である．

なお，言語（もしくは，コミュニケーションの手段としての“記号系”）の場合は，$A \in \mathfrak{U}$ と $B \in \mathfrak{W}$ が，$B = \Phi(A)$ という関係にあるとき，組 $\sigma = (A, B)$ を 記号（sign）といい，A を σ のシニフィアン，B をシニフィエと呼ぶことになる．また，B が（W の包含関係で）極小かつ A が（U の包含関係で）極大のとき，記号 σ は，（エリク・ビュイサンスの導入した）セーム（seme）に対応する．さらに，いわゆる“第一次分節”は，部分集合の族への分解として得られることになる．

[18] フロイデンタールの数学化の前提である「フォームとコンテントが相互作用している状況」は，双面構造と親和性の高いことが予想される．

[19] プリエートの“共示”は，イェルムスレウの示唆によって導入された“共示”という概念を，自身の理論構成に適するよう，シニフィアンとシニフィエの役割を逆転する形で転用したものである．