三重大学教育学部研究紀要　第66巻　自然科学　（2015）　21 － 27頁

$t = t_0$で極を持つII型行列パンルヴェ方程式の解の分類

川向　洋之・牛久　祥聡

On a classifcation of solutions of the second Matrix Painleve equation which have a pole at *t*=*t*₀

Hiroyuki Kawamuko and Yoshiaki UAWAMUKO

要　　旨

数理物理の分野で重要なパンルヴェ方程式は，いろいろな角度から研究され，様々な方向に拡張されている．今回の記事では，坂井氏たちによって与えられた，II型パンルヴェ方程式の拡張である方程式を考え，有界な点 $t = t_0$ で極を持つ解の分類と，その解に含まれる任意パラメータの個数を与える．

1　序文

物理的な現象を数式で表すとき，多くの場合，微分方程式が現れる．しかし，この方程式の解が，我々のよく知っている関数で書けるケースは，それほど多くない．このため“我々のよく知っている関数を増やす”，つまり，“何らかの意味のある特殊関数を数多く見つけ，その性質を調べておく”ことは，意味のあることであろう．このような中で，フランスの P. Painlevé は，代数的常微分方程式で，動く特異点（つまり，解の特異点で，その位置が初期条件に依存するもの）が極しかないものを分類し，今日，パンルヴェ方程式と呼ばれている6種類の方程式を発見した．さらに，R. Fuchs や R. Garnier らの研究により，この方程式と，モノドロミー保存変形（つまり，与えられた線形方程式のモノドロミー表現を変えないように，アクセサリー・パラメータを変化させる変形）との関係が見つかり，ここからパンルヴェ型の新たな特殊関数が，次々と定義されて行くようになった．

今回の記事では，この中の一つであるII型行列パンルヴェ方程式（[4] 参照）：

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2), \tag{1.1}$$

$$H = \mathrm{tr}\big(P^2 - (Q^2 + t)P - \theta_1 Q\big),$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1/2 & -p_2 \\ p_2 q_2 - \theta_1 - \theta_2 & p_1/2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ -q_2 & q_1 \end{bmatrix}$$

（ただしで，θ_1, θ_2 は複素パラメータ）の解を考察し，$t = t_0$ で極を持つものの分類と，これらに含まれる任意パラメータの個数を与える．なお，この結果は，パンルヴェ方程式を幾何的に特徴づける初期値空間（つまり，$t = t_0$ の近傍における解と1対1に対応する多様体）を構成するとき，必要となるものであるが，詳細は，牛久祥聡の修士論文に譲る．

2　主結果

(1.1) は数理物理の分野で有名な II 型パンルヴェ方程式

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q},$$

$$H=p^2-(q^2+t)p-\theta_1 q$$

の拡張の 1 つである．また，パンルヴェ方程式と同様に，(1.1) の動く特異点は極しかないことが分かっている．この方程式に対して，次の定理を証明する．

【定理 1】　$t=t_0$ を $\mathbb{C}$ の元とする．

(1) (q_1,q_2,p_1,p_2) が II 型行列パンルヴェ方程式の解であるとき，$t=t_0$ での極の位数は，それぞれ，高々 1 位，高々 2 位，高々 2 位，高々 1 位である．

(2) q_1,q_2,p_1,p_2 を

$$\left.\begin{aligned} q_1&=(t-t_0)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1,k}(t-t_0)^k, \quad q_2=(t-t_0)^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2,k}(t-t_0)^k,\\ p_1&=(t-t_0)^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{1,k}(t-t_0)^k, \quad p_2=(t-t_0)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2,k}(t-t_0)^k \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

と置く．これらが (1.1) を満たすならば，$(\alpha_{1,0},\alpha_{2,0},\beta_{1,0},\beta_{2,0})$ は

$$\left.\begin{aligned} &(0,0,0,0),\ (0,0,0,-1/2),\ (1,0,0,0),\ (1,0,0,-5/2),\ (1/2,-1/4,0,0),\\ &(-1,0,2,-1/2),\ (-1,0,2,2),\ (0,-1,1,1/2),\ (-1/2,-1/4,1,1) \end{aligned}\right\}\ \cdots (♮)$$

のいずれかである．また未定係数法で $\alpha_{1,k},\alpha_{2,k},\beta_{1,k},\beta_{2,k}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ を決めるとき，何個かのパラメータが一意的に決まらないが，この個数を $\mathcal{N}$ とすると，$\mathcal{N}$ は次の表のようになる．

	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\beta_{1,0}$	$\beta_{2,0}$	$\mathcal{N}$
$(\emptyset)$	0	0	0	0	4
(a)	0	0	0	$-1/2$	3
(b)	1	0	0	0	2
(c)	1	0	0	$-5/2$	2
(d)	$1/2$	$-1/4$	0	0	3
(e)	-1	0	2	$-1/2$	2
(f)	-1	0	2	2	2
(g)	0	-1	1	$1/2$	2
(h)	$-1/2$	$-1/4$	1	1	3

注意 1　(1.1) の動く特異点は極しかないので，(2.1) が (1.1) を満たせば収束する．また，このときの $\mathcal{N}$ が，解に含まれる任意パラメータの個数となる．

3 定理 1 の (1) の証明

II 型行列パンルヴェ方程式を具体的に書くと

$$q_1' = p_1 - q_1^2 + q_2 - t, \tag{3.1}$$
$$q_2' = -4q_1q_2 - 4q_2p_2 + 2\theta_1 + 2\theta_2, \tag{3.2}$$
$$p_1' = 2q_1p_1 + 4q_2p_2 - 2\theta_2, \tag{3.3}$$
$$p_2' = 2p_2^2 - p_1 + 4q_1p_2 \tag{3.4}$$

となる．この方程式に対し，次の形の解を考える．

$$q_1 = \frac{1}{T^l}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{1,k}T^k, \quad q_2 = \frac{1}{T^n}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{2,k}T^k,$$
$$p_1 = \frac{1}{T^m}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{1,k}T^k, \quad p_2 = \frac{1}{T^r}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{2,k}T^k.$$

(有界な所にある (1.1) の解の特異点は高々極だから，上記のような形の解を考えても一般性を失わない)．ただし $T = t - t_0$, $l, m, n, r \in \mathbb{Z}$ で，$\lambda_{1,0}, \mu_{1,0}, \lambda_{2,0}, \mu_{2,0}$ はいずれも 0 でないとする．

定理 1 の (1) の主張を 3 つの命題に分けて示す．

【命題 1】 q_1 は $t = t_0$ で高々 1 位の極，すなわち $l \leq 1$ である．

《証明》$l \geq 2$ として矛盾を導く．

(3.1) の各単項式の極の位数を，その下に書くと，

$$\begin{array}{ccccccc} q_1' & = p_1 & - q_1^2 & + q_2 & - t & \cdots (*) \\ l+1 & m & 2l & n & & \end{array}$$

となる．従って，$l \geq 2$ なら，

$$\text{(i)} \quad m = 2l > n, \quad \text{(ii)} \quad n = 2l > m, \quad \text{(iii)} \quad m = n > 2l, \quad \text{(iv)} \quad m = n = 2l$$

の 4 通りが考えられる．また (3.2) と (3.3) を合わせた式の各単項式の極の位数は，

$$\begin{array}{ccccccc} p_1' & + \; q_2' & = 2q_1p_1 & - 4q_1q_2 & + 2\theta_1 & \cdots (\dagger) & \\ m+1 & n+1 & l+m & l+n & 0 & (m \neq 0, n \neq 0) \\ 0 & n+1 & l & l+n & 0 & (m = 0, n \neq 0) \\ m+1 & 0 & l+m & l & 0 & (m \neq 0, n = 0) \\ 0 & 0 & l & l & 0 & (m = 0, n = 0) \end{array}$$

となる．これらのことに注意して，(i),(ii),(iii),(iv) を考える．

(i) の場合：$m > 0$ に注意すると

$$l+m > l+n, \quad l+m > m+1 > n+1, \quad l+m > 0, \quad (n \neq 0 \text{ のとき}),$$
$$l+m > l, \quad l+m > m+1 > 0, \quad l+m > 0, \quad (n = 0 \text{ のとき}).$$

よって，(†) より $\lambda_{1,0}\mu_{1,0} = 0$ となる．しかしこれは $\lambda_{1,0} \neq 0, \mu_{1,0} \neq 0$ に矛盾．

(ii) の場合：$n>0$ に注意すると

$$l+n>l+m,\quad l+n>n+1>m+1,\quad l+n>0,\quad (m\neq 0\ \text{のとき}),$$
$$l+n>l,\quad l+n>n+1>0,\quad l+n>0,\quad (m=0\ \text{のとき}).$$

よって，(†) より $\lambda_{1,0}\lambda_{2,0}=0$ となる．しかしこれは $\lambda_{1,0}\neq 0, \lambda_{2,0}\neq 0$ に矛盾．

(iii) の場合：(*) より，p_1+q_1 は $t=t_0$ で高々 $2l$ 位の極となる．よって，

$$\mu_{1,0}=-\lambda_{2,0},\quad \mu_{1,1}=-\lambda_{2,1},\ \cdots\ \mu_{1,m-2l-1}=-\lambda_{2,m-2l-1}$$

となり，

$$p_1-2q_2=\frac{\mu_{1,0}-2\lambda_{2,0}}{T^m}+\cdots$$

の初項の係数 $\mu_{1,0}-2\lambda_{2,0}$ は $3\mu_{1,0}\,(\neq 0)$ に等しい．従って p_1-2q_2 は $t=t_0$ で正確に m 位の極となる．この事と，$m+l>2l+1>0$ に注意して

$$(\dagger)\ \rightarrow\quad \underset{2l+1}{(p_1+q_2)'}=\underset{m+l}{2(p_1-2q_2)q_1}+\underset{0}{2\theta_1}\qquad\cdots\ (\ddagger)$$

を考えると，$\lambda_{1,0}\mu_{1,0}=0$ が分かる．しかしこれは $\lambda_{1,0}\neq 0, \mu_{1,0}\neq 0$ に矛盾．

(iv) の場合：$m=n=2l$ と $l\geq 2$ より $l+n>n+1, l+n>0$．よって (3.2)：

$$\underset{n+1}{q_2'}=-\underset{l+n}{4q_1q_2}-\underset{n+r}{4q_2p_2}+\underset{0}{2\theta_1+2\theta_2}$$

より $l=r$ が分かる．このとき，(3.1), (3.2), (3.3), (3.4) より，

$$\mu_{1,0}-\lambda_{1,0}^2+\lambda_{2,0}=0,\quad 2\lambda_{1,0}\mu_{1,0}+4\lambda_{2,0}\mu_{2,0}=0,$$
$$-4\lambda_{1,0}\lambda_{2,0}-4\lambda_{2,0}\mu_{2,0}=0,\quad 2\mu_{2,0}^2-\mu_{1,0}+4\lambda_{1,0}\mu_{2,0}=0$$

が成立するが，この方程式を解くと $(\lambda_{1,0},\mu_{1,0},\lambda_{2,0},\mu_{2,0})=(0,0,0,0)$ で矛盾．

以上より，(i),(ii),(iii),(iv) のいずれの場合でも矛盾するので $l\geq 2$ はあり得ない．$\square$

【命題 2】　p_1, q_2 は $t=t_0$ で高々 2 位の極，すなわち $m\leq 2$ かつ $n\leq 2$．

《証明》$m\geq 3$ または $n\geq 3$ なら矛盾することを示す．

$m\geq 3$ のとき，$l\leq 1$ および (*) より $m=n$ が分かる．従って，命題 1 の証明の (iii) の場合と同じ理由で，p_1+q_2 は $t=t_0$ で高々 $2l$ 位の極，p_1-2q_2 は $t=t_0$ で正確に $m(=n)$ 位の極となる．この結果と $m+l>2l+1$，および

$$(\dagger)\ \rightarrow\quad \underset{\substack{2l+1\\0}}{(p_1+q_2)'}=\underset{\substack{m+l\\m}}{2(p_1-2q_2)q_1}+\underset{\substack{0\\0}}{2\theta_1}\qquad \substack{(l\neq 0)\\(l=0)}$$

より，$l\neq 0, m+l=0$ が分かる．また (3.4)：

$$\underset{\substack{r+1\\0}}{p_2'}=\underset{\substack{2r\\0}}{2p_2^2}-\underset{\substack{m\\m}}{p_1}+\underset{\substack{l+r\\l}}{4q_1p_2}\qquad\cdots\ (\sharp)\quad \substack{(r\neq 0)\\(r=0)}$$

より $m=2r$ が分かる．(実際，$r\leq 1$ ならば $m>r+1\geq 2r$, $m>l+r$ となるので $\mu_{1,0}=0$ が成り立つが，これは矛盾．$r\geq 2$ ならば $2r>r+1\geq l+r$ となるので $m=2r$ が成り立つ)．しかし $m+l=0$, $m=2r$ と (3.3)：

$$\underset{m+1}{p_1'} = 2\underset{m+l}{q_1p_1} + 4\underset{n+r}{q_2p_2} - \underset{0}{2\theta_2}$$

を使うと $r=1$ が得られるが，これは $m=2r=2<3$ を意味するので矛盾する．従って $m\geq 3$ はあり得ない．また同様の議論を行うと，$n\leq 2$ が示せる．□

【命題 3】 p_2 は $t=t_0$ で高々 1 位の極，すなわち $r\leq 1$ である．

《証明》$r\geq 2$ なら，$l\leq 1, m\leq 2$ より，$2r>r+1\geq l+r, 2r>m$ となる．これと ($\sharp$) を合わせると $\mu_{2,0}^2=0$ が得られるが，これは $\mu_{2,0}\neq 0$ に矛盾．□

以上の命題 1,2,3 を合わせると，定理 1 の (1) が得られる，

4 定理 1 の (2) の証明

定理 1 の (2) の主張もいくつかの命題に分けて示す．

命題 1,2,3 より，(1.1) の解は (2.1) の形をしているとしてよい．(このときの $\alpha_{1,0},\alpha_{2,0},\beta_{1,0},\beta_{2,0}$ は 0 であってもかまわない)．これらを (3.1),(3.2),(3.3),(3.4) に代入して $T^k\,(k\in\mathbb{Z})$ の係数を比較すると，

$$\left.\begin{aligned}
(n-1)\alpha_{1,n} &= \beta_{1,n}-\sum_{k=0}^{n}\alpha_{1,k}\alpha_{1,n-k}+\alpha_{2,n}-t_0\,\delta_{n,2}-\delta_{n,3},\\
(n-2)\alpha_{2,n} &= -4\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{1,k}+\beta_{2,k})\,\alpha_{2,n-k}+2(\theta_1+\theta_2)\delta_{n,3},\\
(n-2)\beta_{1,n} &= 2\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{1,k}\beta_{1,n-k}+2\alpha_{2,k}\beta_{2,n-k})-2\theta_2\delta_{n,3},\\
(n-1)\beta_{2,n} &= 2\sum_{k=0}^{n}\beta_{2,k}\beta_{2,n-k}-\beta_{1,n}+4\sum_{k=0}^{n}\alpha_{1,k}\beta_{2,n-k}
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

が得られる．(ただし n は 0 以上の整数で，$\delta_{i,j}$ はディラックのデルタである)．ここから次の命題が得られる．

【命題 4】 $(\alpha_{1,0},\alpha_{2,0},\,\beta_{1,0},\beta_{2,0})$ は ($\natural$) のいずれかである．また，$V_n={}^t[\alpha_{1,n}\,\alpha_{2,n}\,\beta_{1,n}\,\beta_{2,n}]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ と置いたとき，V_n は，漸化式

$$A_nV_n=B_n,\quad (n=1,2,3,\cdots),\tag{4.2}$$

$$A_n=\begin{bmatrix} n-1+2\alpha_{1,0} & -1 & -1 & 0\\ 4\alpha_{2,0} & n-2+4\alpha_{1,0}+4\beta_{2,0} & 0 & 4\alpha_{2,0}\\ -2\beta_{1,0} & -4\beta_{2,0} & n-2-2\alpha_{1,0} & -4\alpha_{2,0}\\ -4\beta_{2,0} & 1 & 0 & n-1-4\alpha_{1,0}-4\beta_{2,0}\end{bmatrix},$$

$$
B_n = \begin{bmatrix}
-\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{1,k}\alpha_{1,n-k} - t_0\,\delta_{n,2} - \delta_{n,3} \\
2\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{1,k}\beta_{1,n-k} + 2\alpha_{2,k}\beta_{2,n-k}) - 2\theta_2\delta_{n,3} \\
-4\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{1,k} + \beta_{2,k})\alpha_{2,n-k} + 2(\theta_1 + \theta_2)\delta_{n,3} \\
2\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{2,k}\beta_{2,n-k} + 4\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{1,k}\beta_{2,n-k}
\end{bmatrix}
$$

を満たす.

《証明》(4.1) で $n=0$ とすると

$$
-\alpha_{1,0} = \beta_{1,0} - \alpha_{1,0}^2 + \alpha_{2,0}, \quad -2\alpha_{2,0} = -4\,(\alpha_{1,0} + \beta_{2,0})\,\alpha_{2,0},
$$

$$
-2\beta_{1,0} = 2\,(\alpha_{1,0}\beta_{1,0} + 2\alpha_{2,0}\beta_{2,0}), \quad -\beta_{2,0} = 2\,\beta_{2,0}^2 - \beta_{1,0} + 4\,\alpha_{1,0}\beta_{2,0}.
$$

これを解けば ($\natural$) が得られる. また, (4.1) で, 添え字が n のものを右辺, そうでないものを左辺に持って行けば (4.2) が得られる. $\square$

【命題 5】　$\mathcal{N}$ は, 定理 1 の (2) の表で与えられるものである.

《証明》どれでも同じなので, $(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{1,0}, \beta_{2,0})$ が ($\natural$) の $(1,0,0,0)$ である場合のみ示す.

$(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{1,0}, \beta_{2,0}) = (1,0,0,0)$ のとき, V_0 および $\det(A_n)$ は

$$
V_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A_n) = \begin{vmatrix} n+1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & n+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n-5 \end{vmatrix} = (n+2)(n+1)(n-4)(n-5)
$$

である. よって, $\det(A_i) \neq 0$ $(i = 1,2,3)$ と (4.2) より, V_1, V_2, V_3 は次の形：

$$
V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -t_0/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} (2\theta_1 + 12\theta_2 - 5)/20 \\ 2(\theta_1 + \theta_2)/5 \\ 2\theta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}
$$

に, 一意的に表せることが分かる. また, A_4 と B_4 を計算すると,

$$
A_4 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -t_0^2/9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

だから $\operatorname{rank} A_4 = \operatorname{rank}[A_4\ B_4] = 3$ となることが分かり, $A_4V_4 = B_4$ は $4 - \operatorname{rank} A_4 (=1)$ 個のパラメータを含む解

$$
V_4 = \begin{bmatrix} (9a - t_0^2)/45 \\ 0 \\ a \\ a \end{bmatrix} \quad (a \text{ は任意パラメータ})
$$

を持つことが分かる．同様に A_5 と B_5 を計算すると，

$$A_5 = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} (2\theta_1 + 12\theta_2 - 5)t_0/30 \\ 8(\theta_1 + \theta_2)t_0/15 \\ -4\theta_2 t_0/3 \\ -4\theta_2 t_0/3 \end{bmatrix}$$

だから $\operatorname{rank} A_5 = \operatorname{rank}[A_5\ B_5] = 3$ となることが分かり，$A_5 V_5 = B_5$ は $4 - \operatorname{rank} A_5 (= 1)$ 個のパラメータを含む解

$$V_5 = \begin{bmatrix} (6\theta_1 - 36\theta_2 - 7)t_0/252 \\ 8(\theta_1 + \theta_2)t_0/105 \\ -4\theta_2 t_0/3 \\ b \end{bmatrix} \quad (b \text{ は任意パラメータ})$$

を持つことが分かる．さらに $n \geq 6$ のとき，$\det(A_n) \neq 0$ より，V_n にパラメータが入らないことが分かる．これらより $\mathcal{N}$ は 2 となり，定理 1 の (2) の表と一致する．□

注意 2 コーシー・コワレフスカヤの定理より，どのような複素数 a_1, a_2, b_1, b_2 を与えても，$t = t_0$ で正則な (1.1) の解 (q_1, q_2, p_1, p_2) で，$q_1(t_0) = a_1$, $q_2(t_0) = a_2$, $p_1(t_0) = b_1$, $p_2(t_0) = b_2$ となるものが存在する．また，野田氏，吉田氏により，ベックルンド変換（つまり，パラメータ以外の形を変えない方程式の変換）が与えられている（[3],[5] 参照）．これらを使うと，(2.1) の収束性の別証明を与えることができる．さらに，この概念が初期値空間と関係する．（詳しくは，牛久祥聡の修士論文参照）．

参考文献

[1] 牛久 祥聡, II 型行列パンルヴェ方程式の初期値空間, 準備中.

[2] H. Kawakami, A. Nakamura, and H. Sakai, Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations, arXiv:1209.3836.

[3] 野田 真司, A_4 型笹野系の有理解の分類, 三重大学教育学部修士論文 (2011).

[4] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, preprint, University of Tokyo, Mathematical Sciences (2010).

[5] 吉田 和史, 結合型パンルヴェ第 II 方程式のベックルンド変換とソリトン解, 三重大学教育学部修士論文 (2011).