

中学校数学科における選択学習の試み

—「エッシャーに挑戦！」を試みて—

藪 裕子*・上垣 渉**

中学校数学科においては、生徒の個性あるいは自主選択能力の伸長などを図るため、生徒の興味・関心にもとづく選択学習が取り入れられてきている。本稿はそのような選択学習のための教材として、合同な平面図形をしきつめることによって構成される「エッシャー図」に関する実践的事例を提供するものである。

キーワード：選択学習、合同な平面図形によるしきつめ、エッシャー

1. はじめに

1996年8月に開催された数学教育協議会第43回全国研究大会に参加する機会を得ることができた。

そこでは、先生方の創意工夫された授業、教材・教具が発表されていた。特に、「ポスター展」では、授業で取り組まれた内容が、生徒の作品などととも展示され、目を引いた。その中に、筆者の一人が、今回の選択授業で取り組んだ「エッシャー図形」があった。この「エッシャー図形」とは、画家および版画家でもあるM. C. エッシャー（オランダ、1898-1972年）の作品「ペガサス」のように、合同な図形で平面をしきつめた図形のことをいう。

この「ポスター展」では、東京都の小寺隆幸氏が、生徒の作品を多数紹介されていた。次ページの作品はその一部である。

実際にきれいに色づけがなされているわけであるが、「合同な図形で平面をしきつめる」その巧妙さにひきつけられたし、生徒の創造力にも感心した。そして、「こんな取り組みができる授業時間、また先生方の準備・研究時間がよくある



エッシャーの作品「ペガサス」

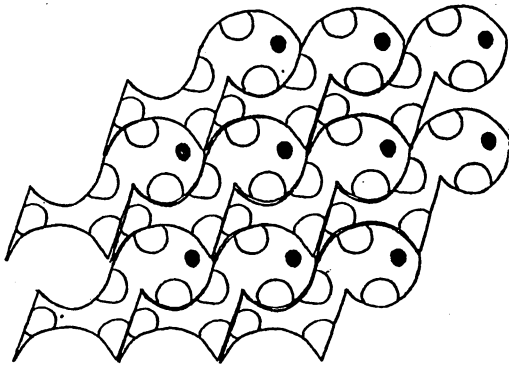
ものだ」と感心する一方、自分もいつか取り組んでみたいと思っていたところ、筆者の一人が勤務する中学校で1997年度から3年生に選択授業を取り入れようという声があがってきた。そこで、このチャンスを活かすことにしたのである。

まず、4月最初の職員会議で、各教科担当の側から、自分の教科の開設の希望を述べることができたので希望した。そして、内容も自分で「エッシャー図形の作成」と決めた。生徒がしたいことをするという方法もあるのだが、今回は特に生徒の柔軟な思考力・創造力によってどんなエッシャー図形ができあがるか、楽しみに感じたからである。

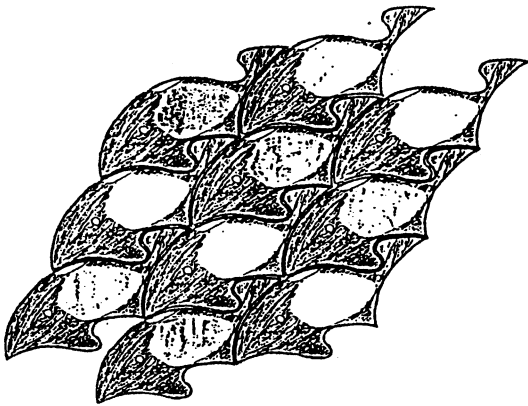
* 松阪市立大江中学校（教育実践研究指導センター研究協力員）

** 三重大学教育学部数学教室

小寺実践における生徒の作品



『PRETTY へびさん』



『シャチ』

生徒の個性を伸ばしたり、生徒に自主選択能力をつけることなどから、今、選択授業が多くの学校で取り入れられてきている。そうした中、「何をしたらいいのかわからない」「普段の授業の復習になってしまう」という先生方の声をよく聞く。そこで、この試みを紹介し、また、反省を今後にかかしていきたい。

2. 「エッシャーに挑戦！」の企画

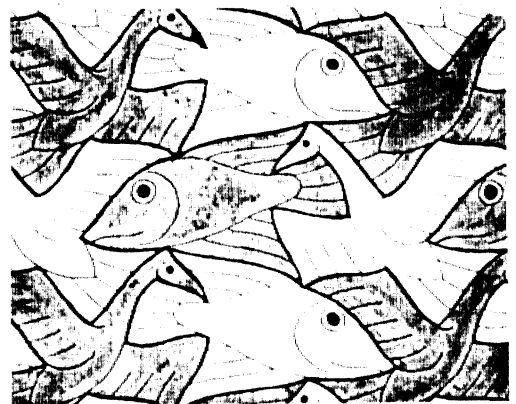
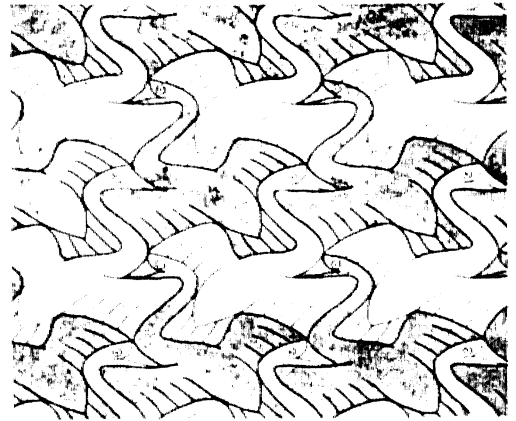
選択数学の授業を実施することに決まったのは、4月最初の職員会議である。計画性がないように思われるかも知れないが、本校は各学年1クラスの小規模校であり、各教科担当がほぼ1人ずつという状況の中では、異動が終了してからでないと、検討ができなかったのである。

先にも述べたように、選択授業の実施は各教

科担当の開設の希望によるものであった。希望したのは、国語・理科・体育・技術・数学の5教科の担当であった。技術の担当者が半年の実施を希望したことと、該当学年である3年生の生徒数が36人であり、4教科くらいが適切としたことから、数学の授業も半年にして、両方で通年とすることにした。

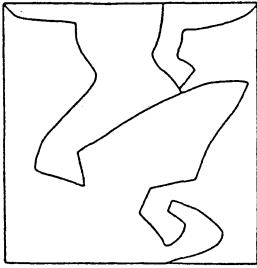
最初に、生徒に各教科担当から授業内容を説明することになった。そこで、数学では「エッシャー図形」を作成することを以下のように説明した。

まず、資料として、ベネディクト・タッシェン出版『M. C. エッシャー グラフィック』に掲載されているエッシャーの作品をいくつか紹介した。それが、下に示した「とり」と「さか

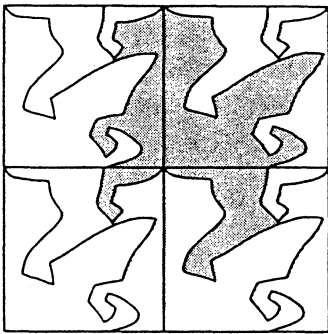


な」である。

そして、銀林浩編井上正允著『本日オープン！数学美術館 [平面図形]』（国土社）を利用して、エッシャーの作品の1つである「ペガサス」は、



基本ユニット



基本ユニット4枚のしきつめ

次ページのような正方形を基本ユニットとして平面にしきつめることによって作成されることを紹介した。

各教科の説明を聞いたあと、生徒たちは受講の第1希望・第2希望を書いた。人数の片寄り次第によっては、第2希望の教科に入る可能性もあるわけだが、今回は平均的に分かれたため、第1希望の11人の生徒でスタートすることになった。そして、実際の授業は次の順に進めた。

① 四角形のしきつめ

どんな四角形であっても、それぞれの四角形で平面がしきつめられること

② 基本ユニットによるしきつめ模様の構成

単純な基本ユニットであっても、回転・平行・対称の移動を駆使してしきつめることにより、さまざまなデザインができあがること

③ エッシャー図形の作成

以上の内容・順序に至ったのは、以下の理由からである。

まず、先に紹介した井上正允氏の著書を参考にした。この本は、読者が読みすすめていくとき、実際に紙やはさみを用いて、作品が制作で

きるように構成されている。そして、第5章の「エッシャーに挑戦!!」では、以下のように話が展開されている。

- M. C. エッシャーの紹介。
- 同じ正方形の基本ユニットを、対称・回転・平行の3つの移動を駆使して平面にしきつめて、美しいデザインを創ること。
- エッシャーの代表的な作品である「ペガサス」も、1つの正方形の基本ユニットをしきつめたデザインであること。
- エッシャーの作品には、正方形だけでなく、平行四辺形、正三角形、正六角形などを基本のユニットとしているものも多いこと。
- 1種類の正多角形によるしきつめ。
- 2種類以上の正多角形によるしきつめ。
- 一般の三角形、四角形によるしきつめ。
- エッシャーに挑戦して作品づくりに取り組んだ中学生の作品例。

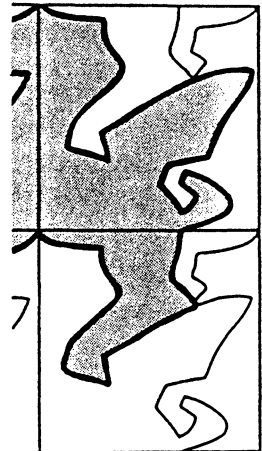
これを読むと、規則的で美しいデザインが、1つの同じ基本ユニットを平面にしきつめることによって作成されていることがよくわかる。

しかし、内容が豊富で、私自身授業にどれだけ時間がかかるのか、自分自身どこまで理解して生徒に伝えられるかわからなかった。そこで、内容の一部を利用させて頂くことにした。

また、エッシャー図形の作成に関する基本ユニットの作成が、この本ではたいへん難しく思われた。基本ユニットの作成の仕方は、先に示した「基本ユニット4枚のしきつめ」によって浮かび上がるペガサスに即して以下のように述べられている。

「4枚の基本ユニットを正方形状に並べるとまん中に「ペガサス」が浮かびあがる。これは、閉じた1本の線で描かれた図形である。

どんな切断線を



ひくと、このような閉じた曲線ができるのだろうか。上下2枚の基本ユニットで見よう。

2枚の基本ユニットに描かれた線が、つながるように工夫されていることがわかるよね。原理はじつに簡単なんだけど、このような見通しをもってユニットをつくることは意外と難しい。こうして決まった構図にコントラストが加わって、作品「ペガサス」ができあがる。」

このように、確かに原理はわかるのだが、では実際に自分が基本ユニットを作成しようとすると、難しいのである。これでは生徒は理解しがたいと思い、1997年5月10日～11日に京都で開催された数教協の全国中学校研究集会に参加して、先生方にお聞きすることにした。すると、ちょうど東京都町田市和光中学校に勤めておられる榛葉文枝氏の問題提起「学校五日制と数学教育——私学の小さな試み——」の中で、氏がエッシャー図形の作成に取り組まれたことがわかった。そこで、交流会でお話を伺うことにした。

榛葉氏には授業の内容や進める手順を教えてください、生徒の作品も見せて頂いた。また、そこには十数人の全国各地の先生方がおられたが、その中に、榛葉氏とはまた少し異なる内容と順番で、エッシャー図形作成の授業に取り組まれた小寺隆幸氏が出席されていた。

小寺氏にはエッシャー図形の作成の仕方を具体的に教えてくださいとともに、後日には、ご自身が作成された中学課題学習用ワーク試案である「エッシャーの絵の秘密」を送っていただいた。

その小寺氏の試案では、エッシャー図形の作

成の仕方は、作品「ペリカン」を用いて、次のように説明されている。

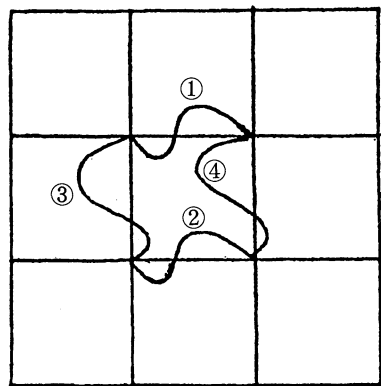
「上の辺から引いた線とおなじ線を下の辺から引き、左の線から引いた線と同じ線を右の辺から引けばよいのです。」

つまり、先の図において、上の辺CAからCFEAと線を引くならば、それと同じように下の辺DBからDHGBと線を引けばよいというのである。また、左の辺CDからCIDと線を引くのであれば、同じように右の辺ABからもAJBと線を引けばよいというのである。

そして、次のページには、「君もエッシャーに挑戦しよう」という題目で、まずアイデアスケッチに取り組むことが、下のようにならされている。

「さあ、理屈が分かったら実際にやってみましょう。美術が苦手でも大丈夫。色々描いてみるなかで、これは面白い、という形に出会えばいいのです。その形から何を連想するか、ちょっぴり想像力を働かせればいいのです。

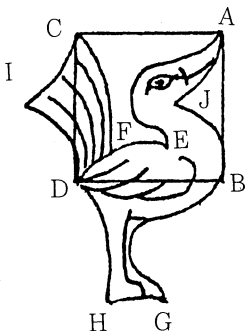
例えば、下の図を見て下さい。①と同じように②、③と同じように④の線を適当に引いただけです。でもじっと見ると鳥に見えませんか。そう思ったら目や羽の模様を描いて出来上がり。



この鳥は立派に平面をしきつめます。」

つまり、最初から「〇〇を作ろう」と思うと難しいので、適当に線を引いていき、想像力を働かせて、「これは！…」と思うものに出会えばよいというわけである。

この方法なら何とかかなと思った。井上氏の著書に書かれた方法では、先に基本ユニットを



ペリカン

考えなくてはならないが、小寺氏の方法では、作品が完成したところで、基本ユニットが何であるかわかってくるのである。

小寺氏にこの方法を教えて頂いて、「なるほど…」と思い、しばらく自分で描いてみたが、なかなか想像力も働かずアイデアが浮かばない。しかし、榛葉氏が「自分ができなくても、子どもたちにはできる。子どもの想像力は、本当にすごいよ。」といわれるのを聞いて、とにかくこの方法でいくことにした。このようにして、作品の制作方法に納得がいったので、次に作成に至るまでの授業の流れについて考えた。

このエッシャー図形の作成の授業は、最初、工藤滋『図形の移動と模様作り』（青森県国民教育研究所刊『子供たちとともに』所収）で提案されたものであるという。そして、その後多くの先生によって実践がなされたが、工藤・小寺・榛葉の3人の先生方の実践は、榛葉氏の提案資料の中に以下のように紹介されている。

◇青森・「工藤滋実践」

図形の移動



多角形の模様



「あっ」と驚くエッシャーの絵



「へえー」と感心する絵の構造



「なるほど」と納得する模様づくりの秘訣



模様づくり

◇東京・「小寺隆幸実践」

平面の四角形によるしきつめ



移動



正多角形によるしきつめ



エッシャー図形に挑戦

◇東京・「榛葉文枝実践」

分析と総合（タングラムで遊ぼう）



エッシャーの絵と数学



エッシャー図形に挑戦（問題提起）



平面のしきつめ



多角形の内角と外角



移動・正多角形によるしきつめ



ペガサスの秘密



エッシャー図形に挑戦



平行線と角

そこで、これらの先生方の実践と井上氏の著書を参考に、今回の自分のプランを考えた。

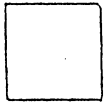
まず、「平面のしきつめ」についてであるが、とくに四角形について、どんな四角形であっても平面をしきつめられることを押さえておくことにした。それは、正方形・長方形・平行四辺形についてはエッシャー図形の作成に利用するわけであり、また、どんな四角形でも平面をしきつめられるということは、意外性はあるかもしれないが、当然のこととして知っておくことよと思ったのである。しかし、1種類または2種類以上の正多角形のしきつめについては、少し複雑さを感じたことと、直接エッシャー図形の作成には結びつかないと思ったことから省略することにした。

また、「移動」については、平行・回転・対称移動に関しては、この学年は3年生であり、すでに1年生で学んでいることから省略することにした。しかし、単純な基本ユニットであっても、これらの3つの移動を駆使してしきつめをすることにより、全く感じの異なるデザインになることは押さえておくことにした。

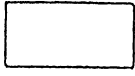
そして、最後にエッシャー図形の作成に取り組むことにしたのである。

3. 四角形のしきつめ

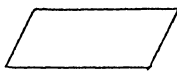
授業では、まず最初に「四角形のしきつめ」を行なった。四角形は、以下のように、全部で9種類に分類される。



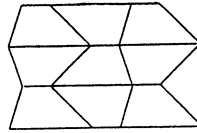
正方形



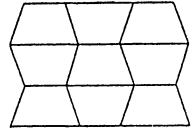
長方形



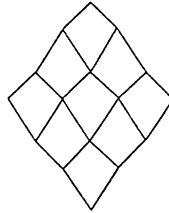
平行四辺形



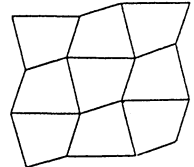
台形



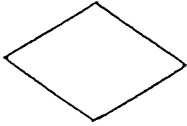
等脚台形



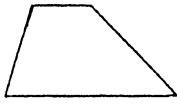
たこ形



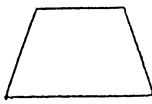
凸四角形



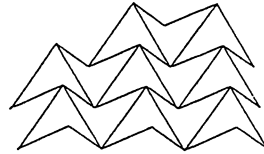
ひし形



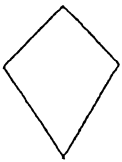
台形



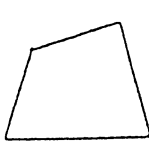
等脚台形



凹四角形



たこ形



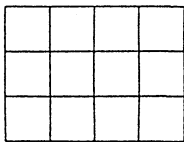
凸四角形



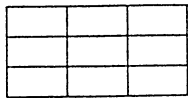
凹四角形

これらの四角形は、以下に示すように平面を隙間なく、重複もなくしきつめる。

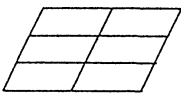
つまり、四角形の内角の和は 360° であるから、1つの点に四角形のそれぞれ異なる4つの頂角を集めれば、平面がしきつめられるわけで



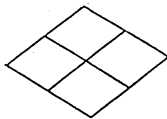
正方形



長方形



平行四辺形



ひし形

ある。

生徒には、最初、「四角形にはどんな種類があるか」と問いかけた。そこで、正方形、長方形、平行四辺形、台形の5つは出てきたので、あとの4つを紹介した。それらの9つの四角形のモデルを黒板に提示し、「どの四角形でも、平面をしきつめることができるのだろうか。」と問いかけた。生徒は、正方形・長方形などは明らかにしきつめられことがわかるのであるが、他のものになってくるとわからない。そこで、実際に確かめてみることにした。なお、教師の方で事前に、以下のものを用意しておいた。

- 9種類の四角形：それぞれ15~20枚ずつ (色上質紙)
- B4の上質紙：9枚
- のり

特に、9種類の四角形を用意するには時間がかかった。これは、先に色上質紙にしきつめて書いたものを、ナイフで切りとって作ったのである。これらを手にした生徒は、まず最初にのりをつけずに紙だけをしきつめていた。そして、きちんとしきつめられること、またそれぞれの位置を確認してからのりづけをした。また、し

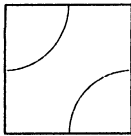
きつめ終わったものには、用紙の上の方に「正方形」などと、名前を書いていた。

各種のしきつめでは、たこ形で少し時間のかかる生徒、凸四角形・凹四角形でかなり時間を要する生徒がいた。また、速い生徒は2時間ほどで完成させ、時間のかかる生徒では3時間かかって完成せず、空き時間等で完成させたようである。

すべてしきつめられることがわかってから、何故どんな四角形でもしきつめられるのかとたずねてみると、内角の和が 360° であることが一部の生徒からすぐに答えられた。理屈でもわかり、また実際に実物で確かめてみたことは、記憶にも残りやすく、よかったのではないかと思う。

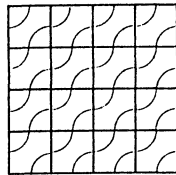
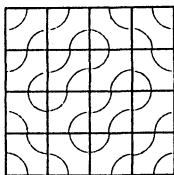
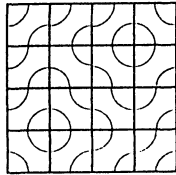
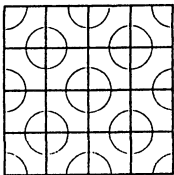
4. 基本ユニットによるしきつめ模様の構成

次に、同じ正方形の基本ユニットでも、3つの移動を駆使してしきつめることによって、感じの異なるデザインができることを押さえることにした。そこで、榛葉氏が利用された下のような基本ユニットを1人に80枚ほどずつ配布した。

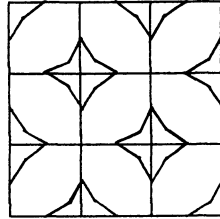


基本ユニット

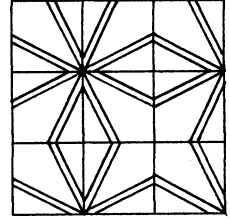
生徒はこの基本ユニットで、3つの移動を駆使して、いくつかのデザインをつくった。それが以下の作品である。



そして、次に生徒自身が簡単な基本ユニットを考え、それをすでにしきつめた9つの正方形に書き込んでデザインを作成をした。以下がその作品の一部である。



基本ユニット

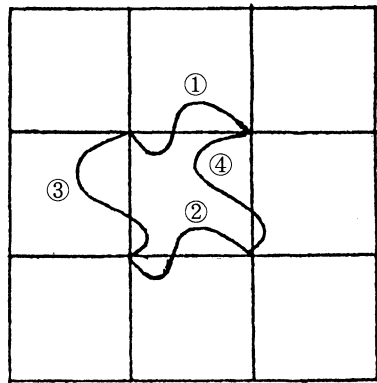


基本ユニット



5. 「エッシャー図」に挑戦!

最後に、実際にエッシャー図形を作成していくことにした。まず、生徒に正方形を9枚ならべた用紙を配布して、作成の仕方を説明した。作成の方法は先に述べた小寺氏の方法である。つまり、下の図で、①と同じように②、③と同じように④を適当に書いて、想像力を働かせるのである。

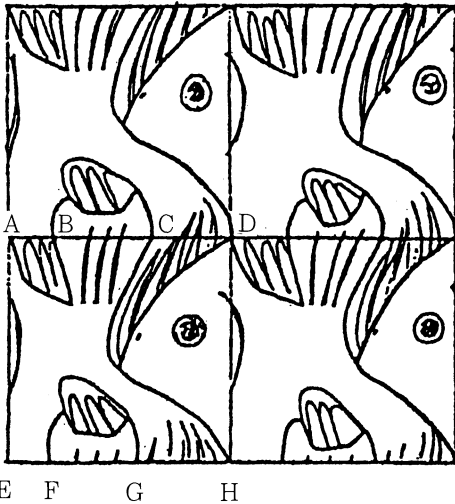


生徒は2時間ほどで、おもしろい作品を作り上げてきた。しかし、全くできない生徒もいたことから清書は夏休みの課題とした。

清書の方法としては、まず12個の正方形をしきつめたものに丁寧に描いたところで、それをコピーして、升目など不必要な線を修正液で

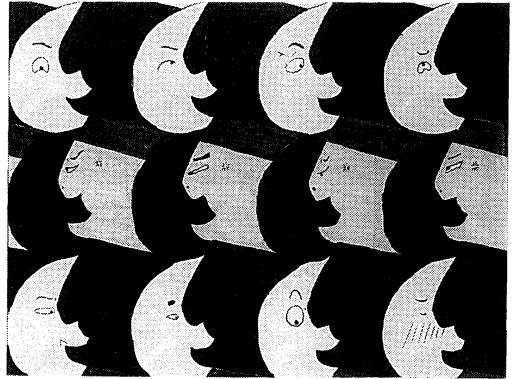
消すことにした。そして、それをさらにコピーして、色付けするのである。

この方法は、小寺氏の実践とは異なっている。小寺氏の実践では、手書きでは①と②、③と④の平行移動を正確に描くことが難しいことから、アイデアが決まったら一枚の正方形に清書して、それを必要な数だけコピーする。そして、それを丁寧に切って、台紙の上に張り合わせるのである。このとき気をつけることは、下に示したような、ある生徒の作品「金魚」の制作過程を例にとって、「ここで大切なのは $AB = EF$ 、 $BC = FG$ 、 $CD = GH$ など、対応する長さを正確に等しく取ることです。そうしないと張り合わせたときずれてしまいます。」のように説明されている。

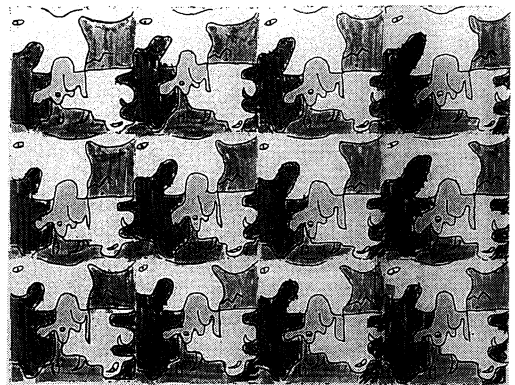


こうして出来上がった作品では、どの金魚も合同になり、美しい仕上がりになる。私の場合は、同じ正方形を数枚コピーするのがめんどうであることと、紙が無駄に遣われる部分が多いことから、子どもたちに手書きをさせることにしたのである。

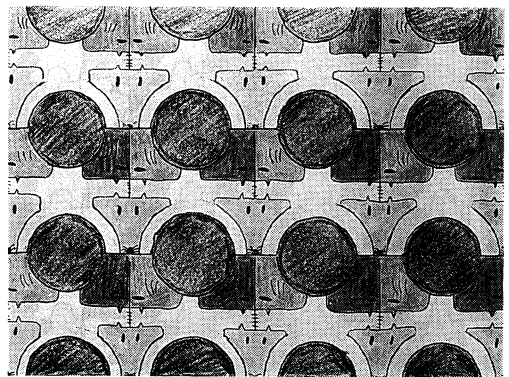
以下の作品は、生徒の作品の一部である。確かに正確さには欠けるが、緻密な作品もできあがった。



『笑う月 怒る人』



『Paradise』



『人間と鳥そして狐』

6. おわりに

初めての試みであり、生徒の反応を見て思ったことは、エッシャー図形の作成に関しては、個人差が大きいということであった。つま

り、簡単に思いついて作成できる子どもがいる反面、とても苦心する子どもがいるということである。時間差が激しかったため、最終的には完成を夏休みの宿題としたのであるが、結局作成できなかった生徒もいた。

また、授業の内容としては、図形のしきつめの学習ならば、さらに多くの内容を盛り込めたいと思うし、また、エッシャー図形の作成だけを目的にするのなら、四角形のしきつめや、しきつめ模様の構成をする必要はなかったと思う。それは、以下の3つの理由からである。

- ① エッシャー図形の作成に利用する正方形や長方形、平行四辺形だけなら、それらが平面をしきつめることは、中学生には周知のことである。
- ② 今回のエッシャー図形の作成の方法では、平行移動のみしか使っていない。したがって、同じ基本ユニットでも、いろいろな移動を駆使してしきつめられることにより、異なる感じのデザインができるということは、直接エッシャー図形の作成のヒントにはならない。
- ③ しきつめ模様とエッシャー図形とでは作成の方法が異なる。つまり、しきつめ模様の構成では最初に基本ユニットから作成をするが、エッシャー図形では、作品が出来上がってから、基本ユニットが何であるかわかるのである。

したがって、今回はしきつめのいくつかの内容を取り入れたが、生徒にはそれがエッシャー図形の作成に何の関係があるのかわかりにくかったと思う。そして、エッシャー図形の作成のみを目的とするなら、まず、エッシャーの作品を紹介し、それが同じ基本ユニットのしきつめであることを解き明かし、その後、小寺氏の方法を説明すればよいのである。

しかし、それだけなら、生徒の作品完成に要する時間差もあることから、長期休業に入るま

での2時間ほどをエッシャー図形の紹介、作成の説明などにあてて、作品の完成を長期休業中の課題とすればよいことである。選択授業の内容とするならば、やはり、図形のしきつめ全般について学習し、その中の内容の1つとしてエッシャー図形の作成を取り入れればよいのだと思った次第である。

また、選択の授業では、生徒自身がそれぞれ興味・関心に基づくことをして、それを教師が手助けしていくという方法がある。生徒はそれぞれ異なる課題をもって取り組むわけであるが、教師自身が力をつけるためにも、そうした方法も取り入れていくべきだと思った。

最後に、このエッシャー図形作成の授業ができたのは著書を参考にさせて頂いた井上氏、直接教えて頂いた榛葉および小寺の両氏のおかげであり、先生方に深く感謝する次第である。

参考文献

- (1) 『M. C. エッシャー グラフィック』、1993年、Benedikt Taschen 出版社
- (2) 井上正允著『本日オープン！数学美術館 [平面図形]』(銀林浩編) [数学ワンダーランド 3]、1995年11月、国土社
- (3) 小寺隆幸「エッシャーの絵の秘密 平面をしきつめる不思議な絵を描いてみよう」〈中学課題学習用ワーク試案〉1995年8月
これは、小寺隆幸氏が1993年に著されたブックレット『エッシャーに挑戦』(東京書籍)を生徒用ワークとして再構成されたものである。
- (4) 榛葉文枝「学校5日制と数学教育～一私学の小さな試みを通して～」
これは、1997年5月10日に開催された数学教育協議会全国中学校研究集会で発表されたレポートである。
- (5) 数学教育協議会編『数学教室』1995年12月号 No.529、国土社