三重大学教育実践総合センター紀要　2000,　第20号，57－66頁

# 平方根の指導に関する一考察

## ― 数学史からの知見に依拠して ―

上垣　渉*・佐藤あつ子**

現行の中学校数学科の学習指導においては、3年生の初期の段階で「平方根」の学習が行なわれている。平方根は、生徒がそれ以前の学習によって獲得してきた数概念である有理数とは異なる数概念としての無理数の一例であって、生徒にとっては認識の飛躍が要求される内容の一つであるとも言える。

本研究は、そのような無理数概念の形成を平方根の指導を通して実現するために、数学史からの知見を活用しつつ、その指導のあり方を考察しようとするものである。

**キーワード**：平方根、無理数、ルート記号

## 1．はじめに

現行の学習指導要領（中学校数学科）では、中学校3年生の「数と式」の項において、

「正の数の平方根の意味とその必要性を理解し、それを用いることができるようにする。

ア　数の平方根の意味

イ　数の平方根を含む簡単な式の計算」

のように指導内容が示され、使用する用語・記号として「根号、有理数、無理数、$\sqrt{\ }$」が挙げられている。

数の範囲は、小学校において自然数から小数及び分数へ、さらに中学校1年生で負の数へと拡張されてきており、ここまでで有理数の学習を行なってきたことになる。このような数の拡張を方程式の解の存在と結びつけて扱う考え方がある。たとえば、文部省『中学校指導書　数学編』（平成元年7月）では、

「二つの自然数 $a$, $b$ に対して、一次方程式 $ax=b$ の解が存在するようにするためには、数を有理数の集合にまで拡張しなければならない。また、二つの正の有理数 $a$, $b$ に対し、$x+a=b$ の解が常に存在するようにするためには、負の数を導入して、数の範囲を正と負の有理数の集合にまで拡張しなければならない。」[1]

と述べられている。この考え方は数学的にはもちろん誤ってはいない。しかし、数学史的にみれば、方程式の解の存在が常に数の拡張をうながしたわけではない。

正の有理数（分数）の発生は古代バビロニアに遡ることができるが、その契機となったのは、単位量の分割であった[2]。また、負の数は方程式の解法とまったく無関係ではないが、発生的には「財産」と「負債」のような相対的な量に対する数学的表現として使用され始めたと言うことができる[3]。

このように、数学史からの知見によれば、分数は連続量の分割から、負の数は相対量の表現として発生したのである。では、無理数はどのような契機で発生したのであろうか。最初に、この問題を扱うことにする。

## 2．無理数の発生

有理数とは異なる数概念としての無理数を初めて認識した（正しくは「無理量の認識」）のは古代ギリシア人であった。一説によれば、ピュタゴラス派の人々は正方形の一辺と対角線を自然数の比で表現しようと試みたと言われている。

ピュタゴラス派の人々は「万物の根源をなすものは数（自然数）である」との教義にしたがっ

＊　三重大学教育学部数学教室

＊＊　津市立西橋内中学校教諭

て、正方形の一辺と対角線が自然数の比で表わされるはずだと考えたのである。つまり、下図1の正方形 $ABCD$ において、長さ $AB$, $AC$ がそれぞれ、互いに素な自然数 $n$, $m$ として表されたとすると、三平方の定理によって、

$n^2+n^2=m^2$　すなわち、$m^2=2n^2$

が成り立つことになる。

ここで簡単な注意をしておくと、もし自然数 $n$, $m$ が互いに素でなければ、その公約数によって約分し、互いに素であるようにしておくことができる。

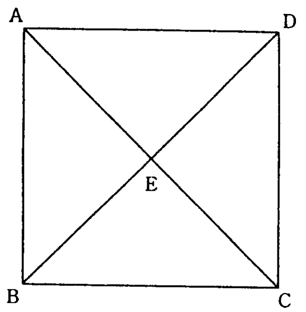


図1

さて、$m^2=2n^2$ の右辺である $2n^2$ は偶数であるから、左辺の $m^2$ も偶数でなければならないことになる。したがって、$m$ も偶数である。そして、$n$, $m$ は互いに素であるから、$n$ は奇数ということになる（ア）。

ところで、$m$ は偶数であったから、$m=2k$ と表されることになる。これを $m^2=2n^2$ に代入すると、$(2k)^2=2n^2$ となり、$n^2=2k^2$ が得られる。この式の右辺は偶数であるから、左辺の $n^2$ も偶数であることになり、それゆえに、$n$ は偶数であることになる（イ）。

したがって、（ア）と（イ）より、$n$ は奇数であると同時に偶数であることになるが、これは起こり得ないことである。なぜこのような不合理なことが生じたのか。それは、長さ $AB$, $AC$ がそれぞれ、互いに素な自然数 $n$, $m$ として表されうると考えたからである。したがって、正方形の一辺と対角線の長さは自然数の比として表せないということになる。この事実は「万物の根源をなすものは数（自然数）である」と考えたピュタゴラス派の人々にとっては信じがたいことであったに違いない。

以上の考察では、図1で、$AB=n$, $AC=m$ としたが、$AB=1$ とすると、$AC=\dfrac{m}{n}$ となるから、正方形の対角線の長さを有理数によって表すことは不可能だということになる。このような過程を通して、自然数の比によって表現することが不可能な実在量（上の例では“正方形の対角線の長さ”という量）の存在が認識されるに至ったのである。この事実は通常のギリシア数学史において、「無理量の発見」あるいは「通約不能量の発見」と呼ばれている[(4)]。

無理数の発生に関する数学史的考察から明らかになった教授学的視点の一つは、中学校3年生における平方根の指導を、それ以前に学習してきた数概念（すなわち、有理数）では処理できない量の存在の確認から出発すべきだということである。

## 3．$\sqrt{2}$ の近似値計算

一辺の長さが1の正方形の対角線の長さを有理数 $\dfrac{m}{n}$（$n$, $m$ は整数、$n\neq 0$）として表現できないとしても、その対角線の長さの近似的な値を知りたいという要求が中学生から出されることはあり得る。

このような要求に対しても、数学史からの知見が有効である。なぜなら、すでに、古代バビロニアの粘土板（エール大学バビロニア・コレクション、YBC 7289）において、$\sqrt{2}$ の近似値は小数点以下第5位まで正しく求められているからである[(5)]。

このエール大学所蔵の粘土板に記述されている図とそれに付随した楔形(せっけい)数字を今日の表記法で示したものが図2である。

この図2では、一辺30の正方形の対角線の長さが「42；25, 35」と求められているほか、一辺1の正方形の対角線の長さが「1；24, 51, 10」として求められている。この粘土板に60進法で記された値「1；24, 5, 10」を10進法に直すと、

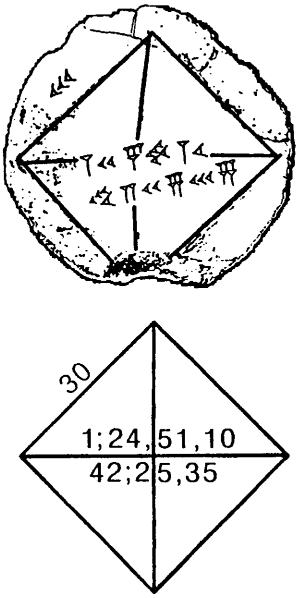


図2

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

であって、小数表示では、

$1.41421289\cdots$

となり、小数点以下第5位まで正確な値が求められていることがわかる。私たちは、このような正確な値を求めたバビロニア人の方法に学ぶべきであろう。その方法は次のようなアルゴリズムである。

正方形の一辺の長さを1とすると、対角線の長さは$\sqrt{2}$である。そして、この$\sqrt{2}$の値は明らかに1より大きく、2より小さい。さらに、「$\sqrt{2}^{\,2}=2$」である。よって、

$$\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdots①$$

となる。

ここで、$1<\sqrt{2}<2$より、$\sqrt{2}=1.5$として、これを①に代入し、小数第3位まで求めると、

$$1.5=\frac{2}{1.5}=1.333$$

となり、$\sqrt{2}=1.5$は真の値でないことがわかるが、同時に、真の値は1.333と1.5の間にあることもわかる。そこで、これら2つの値の平均をとって、

$$\sqrt{2}=\frac{1.333+1.5}{2}=1.4165$$

とし、さらに①に代入すると、

$$1.4165=\frac{2}{1.4165}=1.41193$$

となって、左辺と右辺の値が先ほどよりは近くなってきたことがわかる。

つまり、真の値は1.41193と1.4165の間にあることになる。そこで、その平均をとって、

$$\sqrt{2}=\frac{1.41193+1.4165}{2}=1.414215$$

となり、これを①に代入すると、

$$1.414215=\frac{2}{1.414215}=1.4142125$$

となって、左辺と右辺の値が一層近くなってきたことがわかる。

この計算を繰り返していけば、$\sqrt{2}$の近似値を求めていくことができる。先の計算から、

$$\sqrt{2}=1.41421\cdots$$

であることがわかる。

一般的には、$\sqrt{n}$の第1近似値を$x_1$とすると、第2近似値は$x_2$、

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{n}{x_1}\right)$$

として求められる。そして、この操作を繰り返していけば、$\sqrt{n}$のよりよい近似値が求められるわけである[6]。

## 4. $\sqrt{n}$の線分化

平方根の意味及びその近似値の計算法が明らかになった後、平方根の値を数直線上に目盛ることが必要である。たとえば、$\sqrt{2}$の値は次のように目盛ることができる。

まず、図3のように、数直線上に一辺が1の正方形$ABCD$を描くと、$BD=\sqrt{2}$であるから、点$B$を中心として半径$BD$の円を描く。この円と数直線との交点を$E$とすると、長さ$BE$が$\sqrt{2}$である。

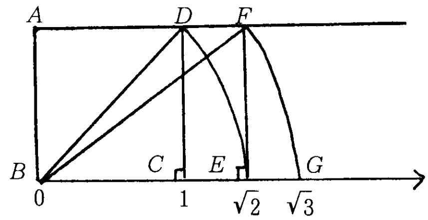


図3

また、点$E$から数直線$EF$に垂線を立てれば、$BF=\sqrt{3}$ であるから、この長さを数直線上に移した$BG$が$\sqrt{3}$ である。以下同様にしていけば、図4のように、$\sqrt{n}$ の値が数直線上に目盛られることになる。

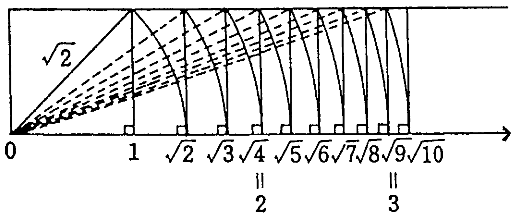


図4

このように、$\sqrt{n}$ の値を数直線上に目盛ることによって、$\sqrt{n}$ が線分表示できることになり、それを用いて平方根の計算を視覚的に説明することが可能になってくる。

## 5. $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$, $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ の説明

ここでは、平方根の加法と乗法を考えてみよう。加法・乗法の計算規則が明らかになれば、減法・除法の計算規則も明らかになる。まず最初に、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は$\sqrt{5}$ になるかどうかを考えてみよう。これは、すでに近似値計算を終わっているから、

$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.414$

$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.732$

$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236$

となり、明らかに$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$ であることがわかるが、平方根の線分表示を用いると次のようになる。

前節の図4から、数直線の部分だけを取り出して図5を作る。

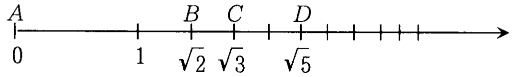


図5

この図5において、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ はそれぞれ線分$AB$, $AC$, $AD$の長さによって表示されている。したがって、もし$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ が正しいなら、$AB+AC=AD$が成り立つことになるが、図5より明らかに$AB+AC>AD$であるから、$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$ であることがわかる。

たとえば、$\sqrt{3}+\sqrt{3}$ の場合は、$2\sqrt{3}$ のように1つの項にすることができるが、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の場合は1つの項にすることはできないことになる。

次に、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ が$\sqrt{6}$ になるかどうかを考えてみよう。近似値で計算してみると、

$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.414$

$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.732$

$\sqrt{6}\fallingdotseq 2.449$

であるから、

$1.414\times 1.732=2.449048$

によって、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ は$\sqrt{6}$ に等しくなりそうであるが、正確に$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ が成り立つことはどのようにして説明されうるのであろうか。教科書での説明は、機械的な代数計算によるもので、生徒は実感を持って理解するには至っていないようである。

そこで、平方根の線分表示を用いて説明することにしよう。$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ は縦と横の長さがそれぞれ$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ の長方形として考えるのが自然であろう。そこで、図6のように、$AB=\sqrt{2}$、$BC=\sqrt{3}$ の長方形$ABCD$を厚紙で作る。

さて、この長方形を3つのパーツに裁断し、組み替えることによって、一辺が1の長方形を作るのである。そして、この長方形の他の一辺を、あらかじめ作っておいた数直線に表示されている長さ$\sqrt{6}$ の線分と比較するのである。こ

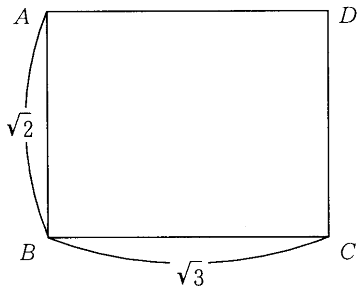


図6

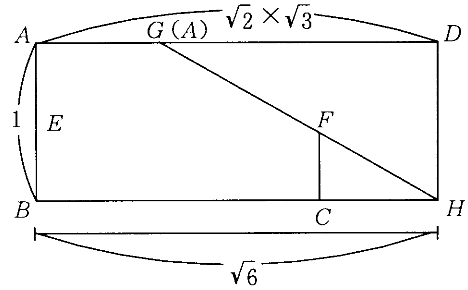


図8

れが一致すれば、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ が成り立つことになるわけである。

具体的には次のように進める。

①図6の長方形 $ABCD$ の面積が $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ であることを確認しておく。

②長方形 $ABCD$ において、$BE=1$，$DF=1$ となるように点 $E$, $F$ をとり、点 $E$ から $AB$ に垂線 $EG$ を立てる（図7）。

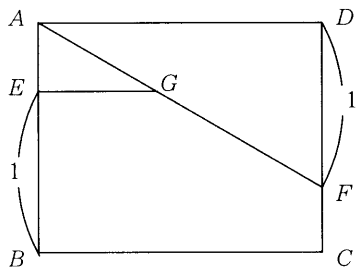


図7

③図7において、裁断線 $AF$, $EG$ によって、長方形を3つのパーツに分解する。

④この3つのパーツを組み合わせると、図8のような長方形ができる。この長方形の面積は $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ であり、$BE=1$ であるから、$BH=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ となっているはずである。この長さ $BH$ と、あらかじめ作っておいた $\sqrt{6}$ の線分とを比較すると一致することがわかる。

以上のような、厚紙を用いた具体的作業を通して、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ が成り立つことの直観的説明を行なうことには、一定の教育的意義があると考える。このような具体物を用いた作業に関しては、当然のことながら生じる微少な誤差を問題視する意見も見られるが、実践的には多くの生徒に歓迎される傾向が強い[7]。

## 6. ルート記号の起源

平方根の指導過程において、生徒が抱く抵抗感の1つは、今まで見たこともない新しい記号である「$\sqrt{\ }$」(以下、ルート記号と呼ぶ）が登場することである。

たとえば、$\sqrt{2}$ を例にとると、ここでのルート記号は「2」という数と一体になって「2乗すると2になる数そのもの」を意味するという側面と、「2という数に対して開平計算を行なえ」という演算記号としての側面という二重の意味を荷なっているのである。こうした数学的慣習は珍しいものではないが、生徒にとっては、抵抗感を感じるものと思われる。そこで、ルート記号の起源について一定の解説を試みることは無意味なことではないと思われる。

ルート記号の起源と歴史については、フロリアン・カジョリ（Florian Cajor, 1859～1930）の名著『数学的表記法の歴史』(A HISTORY OF MATHEMATICAL NOTATIONS）に詳しく記述されている[8]。この著書によれば、古代エジプトのカフン・パピルスには「厂」が平方根の記号として使用されていたとのことである。また、インドのブラフマグプタ（7世紀）はいろいろな言葉の縮約を数学記号として使用していて、平方根の場合は、無理（surd）という意味の言葉である「*carani*」の頭文字「*c*」を用いて、$\sqrt{18}+\sqrt{3}$ が「*c*18*c*3」と書かれているし、アラビアのアル=クァラサディ（15世紀）は平方根を意味する言葉「*jidr*」のアラビア語頭

文字「⊃」を用いて、$\sqrt{60}$ を「$\overset{\supset}{60}$」と書いている。

ところで、現在のルート記号は「根」を意味するラテン語「*radix*」に由来している。このラテン語は、ユークリッド『原論』第X巻の注釈書がアラビア語からラテン語訳されるときに、平方根に対して使用された用語である。この用語に関しては、D. E. スミス（David Eugene Smith, 1860～1944）の『数学の歴史』（HISTORY OF MATHEMATICS）の中で次のように解説されている[9]。

アラビアの著者は平方数が根から生じるもののようにみなし、ラテン世界の著者は幾何図形としての正方形の面と考えた。それ故に、アラビア語からの翻訳の際に、「根」という意味の「*radix*」あるいは、「面」という意味の単語である「*latus*」を用いたのである。アラビア人は平方根を求めることを「根を引き出す」すなわち、ex（外へ）＋trahere（引き抜く）という単語の合成から英語の「extraction」（開平）が作り出されたのである。

現在のルート記号「$\sqrt{\ }$」の直接的な起源は、上記の「*radix*」の頭文字「*r*」から派生した「√」に由来するものであるが、「√」以前には記号「℞」あるいは「R」が使用されていた。特に「℞」は「*Radix*」の最初と最後の2文字の縮約によって生まれたものと考えられ、よく使用された。この「℞」の初見書は、F. カジョリによれば、フィボナッチという通称名で有名なピサのレオナルド（13世紀）の『実用幾何学』（Practica Geometriae, 1220）であるとのことである。この記号はL. パチオリの『集成』（Summa, 1494）において多用されていて、たとえば、

$\sqrt{200}$ に対しては、「℞. 200.」

$\sqrt[3]{64}$ に対しては、「℞. cuba. de. 64.」

$\sqrt[4]{120}$ に対しては、「℞℞. 120.」

のように使用されている。

記号「√」が最初に見い出される印刷書はC. ルドルフ（Christoff Rudolff、1499～1545）の『代数』（Coss、1525）であり、上記のF. カジョリの著書では下記のような一例が示されている[10]。

dañ √ 4 ist 2. √ 9 ist 3. pringen in einer summa 5

Exempl von communicanten

√ 8 zů √ 18　item √ 20 zů √ 45　item √ 27 zů √ 48

fa: √ 50　facit √ 125.　fa: √ 147

√ $6\frac{2}{3}$ zů √ $41\frac{2}{3}$ it. √ $12\frac{1}{2}$ zů √ $40\frac{1}{2}$ it. √ 8 zů √ $12\frac{1}{2}$

fa: √ $81\frac{2}{3}$　fa: √ 98　fa: √ $40\frac{1}{2}$

Exempl von irracionaln

√ 5 zů √ 7 facit √ des collects 12 + √ 140

item √ 4 zů √ 13 facit √ des collects 17 + √ 208

他方、C. ルドルフは立方根及び4乗根に対して、それぞれ「ﾍﾍ√」、「ﾍ√」という記号も使用しているが、この記号は、現在使用されている等号記号「＝」の発明者であるイギリスのR. レコード（Robert Recorde, 1510～1558）の著書『知恵の砥石』（Whetstone of Witte, 1557）でも、下記のように使用されている[11]。

Examples of zenzizenzike rootes.

w. 15.　w. 204.　w. 162.

w. 7.　w. 26.　w. 32.

w. 105.　w. 5304.　w. 5184. that is. √. 72.

w. 7.　w. 27.

w. 4.　w. 12.

w. $5\frac{19}{25}$. that is. √. $2\frac{2}{5}$.　w. 324. that is. √. 18.

そして、今日のルート記号「$\sqrt{\ }$」のように、記号「√」の上に横棒を付け加えて使用し始めたのはフランスの哲学者、数学者であるR. デカルト（Rene Descartes, 1596～1650）であった。その一例は、『幾何学』（La Geometrie, 1637）において、下記のように見られる[12]。

angle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$z \propto \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$.

Que ſi iay $yy \propto -\,ay + bb$, & qu'$y$ ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt $y$ la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \propto -\,ax^2 + b^2$. P M ſeroit $x^2$. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}}$: & ainſi des autres.

## 7．有理数と無理数

中学校3年生に、知っている数を挙げさせると、数学用語は別として、自然数、0、負の数、小数、分数を挙げる。しかし、それらの数がどのような階層をなしているかという問題についての理解は稀薄である。そこで、平方根を学習した後に、数に関する一定のまとめをしておくことが望ましいと思われる。

第2節で無理数の発生を扱ったが、そこでは、正方形の一辺と対角線を整数の比で表すことが不可能であることがわかった。したがって、正方形の一辺の長さを1としたとき、対角線の長さを$\frac{m}{n}$（$m$, $n$は整数、$n \neq 0$）のように分数の形で表現できないことになる。このような例から、一般に、

「$\frac{m}{n}$（$m$, $n$は整数、$n \neq 0$）という形で表すことのできる数を“有理数”といい、表すことのできない数を“無理数”という。」

と定義すればよい。

そして、生徒の知っている数を挙げさせて、その数が分数の形で表せるかどうかを調べるのである。この過程において、小数と分数の関係が問題となってくると思われる。すなわち、

① すべての分数は小数で表されるか。

また逆に、

② すべての小数は分数で表されるか。

という問題であるが、これを生徒に議論させるとおもしろい。

結論的には、①は正しく、②は正しくないわけであるが、その過程において、小数や分数は有理数の表現形態であることの理解が図られると思われる。つまり、数概念としての小数、分数があるのではなく、それらは有理数という数概念の表示法なのである。たとえば、「$\frac{1}{\sqrt{2}}$は分数ですか、分数ではありませんか。」という質問をすると、多くの生徒は「分数です。」と答える。これは$\frac{1}{\sqrt{2}}$がいわゆる分数形をしているからであるが、$\frac{1}{\sqrt{2}}$を$\frac{1}{2}\sqrt{2}$と変形してみると、無理数であることがわかり、$\frac{m}{n}$（$m$, $n$は整数、$n \neq 0$）という形では表せないことがわかる。したがって、外見上、分数形をしていることと数概念としての有理数とは別物なのである。このような理解は重要である。

また、無理数は循環しない無限小数として表示されることになり、したがって、$\sqrt{2}$などの平方根以外にも無理数があることがわかる。いわゆる円周率$\pi$もその例であるが、たとえば、

0.1010010001000010000 0•••

のように作られた数も循環しない無限小数となるから、無理数ということになる。

さらに、有理数と無理数の理解のために、たとえば、

（有理数）＋（無理数）
（無理数）＋（無理数）
（有理数）×（無理数）
（無理数）×（無理数）

などが無理数になるかどうかを考えさせることも意味のあることだと思われる。

ところで、有理数とか無理数という用語はいつ頃からのものなのだろうか。日本の数学用語に関しては、西洋数学が輸入された明治時代に訳語として整備されていったことが知られている。明治10年に設立された東京数学会社（日本数学会の前身）に「數學譯語會」が設置され、そこで多くの数学用語が整備されていったのである。

この数学訳語会では、明治14年9月17日に開会された第12回目の会議において、有理数を「可盡根數」(Rational root)、無理数を「不盡根數」(Surd) と議定している[13]。この「盡」という漢字は「尽」であって、「つきる。すっかりなくなる。」という意味である。このような漢字が使用されるに至った背景を理解するには古代ギリシアのピュタゴラス派の考え方にまで遡る必要がある。

第2節でも述べたように、彼らは「万物の根源をなすものは数（自然数）である」と考え、森羅万象を数によって説明しようとしたと伝えられている。したがって、彼らはどんな2つの線分についても、ある適当な単位線分をもってすれば、必ず双方とも自然数で表現できると考えていたのである。たとえば、図9のように、今日の私たちの表現では $1\frac{1}{2}$ と $2\frac{1}{3}$ に相当する2線分があったとしよう。この2線分は、$\frac{1}{6}$ を単位線分とすれば、それぞれ9、14と表現できる。

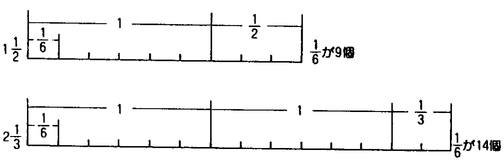


図9

言い換えれば、この2線分は $\frac{1}{6}$ という単位線分によって「測りつくす」ことができるということになる。あるいは、この線分から $\frac{1}{6}$ を取り去っていくと、最後は「すっかりなくなる」ことになる。これは線分が有理数で表現されている場合のことである。しかし、第2節で見たように、正方形の一辺と対角線という2線分は自然数の比で表現し得なかったのであるから、どのような単位線分をもってしても、一辺と対角線を「測りつくす」ことはできないのである。このような背景から、漢字「尽」、「不尽」が使用されたのである。

ところで、明治15年5月6日に開かれた第18回訳語会では「Rational」、「Irrational」にそれぞれ「有理」、「無理」という訳語が案として出され、議論されたが、そこでは削除が議定されている(14)。

日本の数学教育に大きく貢献した藤澤利喜太郎（東京帝国大学教授、1861～1933）は『数学用語英和対訳字書』（明治22年）において、有理数、無理数に対して、「盡數」及び「不盡數」という訳語を当てている(15)。ただし、それらに対応する英語は、それぞれ「commensurable number」,「incommensurable number」である。また、藤澤は「surd」を「不盡根數」と訳している(16)。しかし、有理数及び無理数に対する通常の英語は「rational number」及び「irrational number」である。藤澤はここで使用されている英語「rational」と「irrational」に対しては、それぞれ「有理」、「非理」と訳している(17)から、このあたりから「比」ではなく「理」という訳語が使用されたのであろう。

この「irrational number」という英語は否定を意味する「ir」と「比」を意味する「ratio」の合成語「irratio」として作られているのであり、この単語はラテン語にまで遡ることができる。つまり、否定を意味する接頭語であるラテン語は「in」であるが、「ir」はそれが変化したものなのである。接頭語「in」は、その後に続く単語がどのようなアルファベットから始まるかによってさまざまに変化する。例をあげれば、

「l」で始まる単語では「il」と変化する。
「r」で始まる単語では「ir」と変化する。
「p」で始まる単語では「im」と変化する。

などがあり、それぞれ、

「illiterate」（読み書きができない、文盲の）
「irrational」（理性のない、無理な）
「impossible」（不可能な、ありえない）

などの単語がある。

ところで、「比」を意味する「ratio」も、ラテン語の「ラチオ」（ratio）に由来している。そして、ラテン語の「ratio」はギリシア語の「ロゴス」（λόγος）にその起源を持っているのである。このギリシア語は「比」という意味で使用されているから、無理数は「比を持たない数」という意味であると考えればよいわけである。したがって、有理数、無理数はそれぞれ「有比数」、「無比数」と訳すほうが適切であると言うことができる(18)。ただ、ロゴス（λόγος）という単語の第一義的な意味は、実は「言葉」なのである。したがって、「irrational number」という用語は、本来の意味から考えれば、「言

葉を持たない数」というように解釈することができる。言い換えれば、《言外すべからざる数》とでも言うことができる。

つまり、「万物の根源をなすものは数（自然数）である」と考えたピュタゴラス派の人々は、正方形の対角線が自然数の比で表せないことを知った結果、自分たちの信条を脅かすような事柄は部外秘にしようとしたと言われている。その結果、「他に漏らしてはならない数」「言外すべからざる数」という意味を込めて、否定を意味するギリシア語の接頭語である「ア」（ἀ）をつけて、「アロゴス」（ἄλογος）な数と呼んだとも伝えられている。

## 8．$\sqrt{2}$ の利用の一例

最後に、平方根の応用に触れておくことにしよう。教科書の多くは、平方根の計算が学習の中心になっていて、その応用的な扱いはほとんど見られない。これでは、数学は現実から遊離したもので、何の役にも立たないものであると思われても仕方がない。やはり、1つでも2つでも、現実生活で数学が使われていることを紹介することが大切である。ここでは、大工さんが使用している曲尺（かねじゃく）に隠された、$\sqrt{2}$ の秘密について紹介することにしよう[19]。

この曲尺には、表と裏の両方に目盛りが刻まれている。筆者の一人が所有する曲尺では、表の目盛りは1分（ぶ）きざみの目盛りが刻まれており、1寸（すん）ごとに1から16までの自然数が刻印されている。ちなみに、1寸は約3.03 ㎝であり、1寸＝10分である。

日本の家屋の柱には、切り口が正方形の四角柱であるものが多い。この四角柱の木材は「角材」と呼ばれていて、切り口の正方形の一辺の長さが4寸の角材を「4寸角」、5寸の角材を「5寸角」と呼んでいる。大工さんにとっては、目前にある丸太から何寸角の角材がとれるかが重要なことなのである。これを知るために、曲尺の裏の目盛りを使うのである。

曲尺は図10のような道具で、直角が測れるようになっている。図11の円を丸太の断面とみなして、図のように、曲尺の直角の部分を点Bの箇所にあてるのである。すると、線分ACがこの丸太の直径であることになる。このことは、円周角の定理を用いなくても、三角形の内角和が180°であることと、二等辺三角形の両底角が等しいことの逆から容易に導き出される。

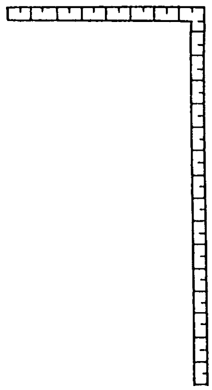

図10

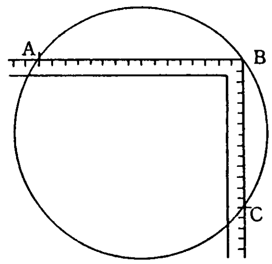


図11

さて、ここで、点AとCに印を付けて、曲尺の裏の目盛りで線分ACの長さを測定するのである。もし、裏の目盛りで「5」であったとすれば、この丸太からは5寸角の角材がとれることになる。それはなぜなのか。

実は、曲尺の裏の目盛りは表の目盛りの $\sqrt{2}$ 倍になるように目盛られているのである。したがって、裏の目盛りで測定して、その目盛りがたとえば「$x$」であったとすれば、それは実際は「$\sqrt{2}x$ 寸」の長さだということになる。

実際、図12より明らかなように、正方形の対角線の長さが $\sqrt{2}x$ 寸ならば、その正方形の一辺の長さは $x$ 寸ということになる。

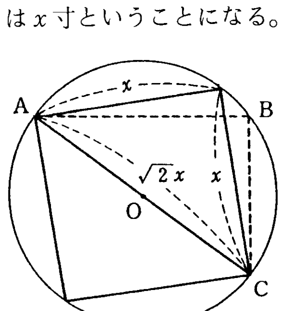


図12

このように、大工さんは曲尺の裏の目盛りを丸太の直径にあてて、その目盛りを読みとるだけで、その丸太から何寸角の角材が取れるかを知ることができるのである。$\sqrt{2}$ という無理数はこのような所で役にたっているのである。

## 9．おわりに

本稿では、中学校3年生での学習事項である平方根について、その指導上の留意点を主として数学史的知見から述べてきたが、その中では、たとえば第2節での記述に見られるように、三平方の定理が前提として使用されている。しかし、現行の教科書では、三平方の定理は平方根の指導の後に位置づけられているのである。このことをもってして、本稿の主張が非現実的であると思われるかもしれない。この点について一言しておきたい。

今日の数学教育では、個々の数学的概念や原理・法則などをあまりにも個別的に扱いすぎる傾向にある。その結果、教材の順序性が硬直化していると思われる。このような硬直化は数学の形成過程と無縁である。すなわち、重要な原理・法則は繰り返し出現するのである。したがって、教科書において「平方根→三平方の定理」となっていても、三平方の定理が示す事実を平方根の指導の中で先取することはあり得ることであるし、そのほうが教育的であるとも言えるのである。三平方の定理が示す内容の証明には、数式などまったく不要であり、中学校1年生でも理解可能である。

筆者は、硬直化しつつある今日の数学教育を、より柔軟性に富んだものに改善していきたいと考えている。

## [注]

(1) 文部省『中学校指導書　数学編』平成元年7月、p. 65

(2) 上垣渉「分数の起源に関する史的考察」(『三重大学教育学部研究紀要第47巻（自然科学)』1996年3月に所収)

(3) 上垣渉「負の数と方程式の指導に関する数学史的考察」(『三重大学教育学部研究紀要第48巻（教育科学)』1997年3月に所収)

(4) 上垣渉『ギリシア数学のあけぼの』日本評論社、1995年12月、pp. 155－162

(5) ヴァン・デル・ウァルデン著　村田全・佐藤勝造訳『数学の黎明』みすず書房、1984年7月、p. 45

(6) 上垣渉・何森仁『数とその歴史53話』三省堂、1996年4月、pp. 116－119

(7) 河村旬一郎「$\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ と $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ の指導について」（数学教育協議会編『数学教室』No. 511、1994年6月号に所収）pp. 51－56　も参考になる.

(8) F. Cajori, A HISTORY OF MATHEMATICAL NOTATIONS, Vol. Ⅰ, THE OPEN COURT PUBLISHING COMPANY, 1951、pp. 360－379

(9) D. E. Smith, HISTORY OF MATHEMATICS, Vol. Ⅱ, DOVER, 1958, pp. 144－151

(10) 前掲書(8)、p. 135

(11) 前掲書(8)、p. 167

(12) 前掲書(8)、p. 207

(13) 東京數學會社『東京數學會雜誌』第四拾壹號、十頁、明治十四年十一月十六日發行

(14) 同上書、第四拾九號、十頁、明治十五年七月一日發行

(15) 藤澤利喜太郎『數學ニ用井ル辭ノ英和對譯字書』博聞本社、明治二十二年二月、p. 7及びp. 18

(16) 同上書、p. 33

(17) 同上書、p. 29　及びp. 20

(18) 前掲書(4)、p. 161

(19) 雫石重一郎「曲尺を使って、丸太から角材を」(吉田稔・飯島忠編集『話題源数学上』とうほう、平成元年10月に所収）pp. 266－267を参考にさせていただいた。