

温度計の数理の授業試行

正田 良

県立高校で2年生を対象として「電子温度計の数理」と題する数学の授業を行なったことを報告する。数学と現実世界の関わりを生徒に味あわす科目として「数学基礎」が高等学校の学習指導要領改訂で誕生している。

この授業は、電子温度計で、コーヒーの出廻らしが冷めていく温度変化を調べたビデオを導入として、この現象から、等比数列（指数関数）が現れることを生徒へ提示することを狙った。授業へ至るまでの教材観、そして、授業の記録とを記述する。

キーワード：指数関数、温度変化、離散数学、電子温度計、現実世界

1. 授業を構想するための教材観

1.1 数学教育一般の特徴と「数学基礎」

国際数学教育調査などで、日本の数学教育は、

- (1) 計算力は良好である。
- (2) それに比べて応用は弱い。
- (3) 情意的領域は悪い。

と指摘されて来ている。平成11年の学習指導要領に「数学基礎」という科目が生まれた。その解説¹⁾によれば、具体的な事象の考察を通じて数学への興味・関心等を高め(p.12)、他の科目を履修するための基礎的・基本的な内容の習得を中心にするのではなく(p.12)数学と人間とのかかわりや文化や社会生活において数学が果たしている役割について理解(p.27)させるための科目である。この趣旨は、他の科目であっても、第1・第3の目標は言えることである。

アメリカの Mathematics: Modeling Our World²⁾ などを見ても、視聴覚教材やIT機器などを援用して多角的な教材提示が行なわれている。現実世界への扉を数学の授業へ設けることが意図されていると言えるだろう。実際、現実世界の現象を扱う場合に、生徒の予備知識の不足が気にことがないわけでもない。しかし、適宜IT機器などを用いて、必要な計算技能・概念を補う工夫は、ある程度可能である³⁾。

1.2 指数関数が持つ教材的価値と温度

高等学校の教材としては、中学校までの整多項式とは違って、初等超越関数が（選択ではあるが）扱われる。四則演算を有限回行なっても値を計算することが必ずしもできない関数ではあるが、現実世界との関わりを考えると、大変魅力的なものである。

指数関数に関わる例としては、バクテリアの増殖、核分裂、預貯金などが、扱われるが、温度⁴⁾は、手近に現

象を教室的な規模で起してみることのできる例である。しかし、授業時間全部を観察に費やしても意味がない。また、お湯などの液体を教室に持ち込むことは避けたい。電子温度計は、温度表示がビデオにとれるほど鮮明であるので、適宜早送りで、時間節約をしながら、現実味のある映像を提供できる。

温度変化（冷却）が指数関数を用いて表わされることは、本来1階線形微分方程式を解くことによって得られる。しかし、現象を一定時間ごとに調べて、数列として扱い、階差数列が等比数列であることを示す。即ち、離散的な扱いによって、高2の等比数列の発展として扱うことができる。ここでは、「数学基礎」的なアプローチを試みたい。即ち、数学の定理・公式を初めから出さずに、現象からアプローチをする。

2. 授業とその記録

今回の授業は、三重県総合教育センター主催の研修の一環として、三重県立津東高等学校の2年生の生徒さんに正田が、20名程度の三重県の先生方が参観される前での公開授業をする形で行なわれた。学習指導案などは、別に収められる⁵⁾予定であるので、ここでは、資料Aとして稿末に、ビデオから記録を起し、学習指導案との時間配分の異同をみるようにした。また、資料Bとして当日生徒に配付したプリントの概要を収めた。

第1、第3、第4の部分は予定に比べて、相対誤差20%の範囲であった。しかし「グラフであらわす」が予定よりも2倍の時間を要したので、最後の第5の部分「第2の動画」を大幅に端折ることになった。

2時間続きで扱うべき教材とも思ったが、この公開授業をなすというせっかくの機会を利用しようと、やや無理に1時間の授業として設計した。その意味では予想通

りと言える。記録にあるように「グラフであらわす」に関しては生徒の多様な活動が見られる。この予定の時間ではもったいないと思える。

3. 参加者の感想から

3.1 生徒の感想

資料 A にあるように、授業時間が押していたので、感想を記すための時間が充分にはとれてはいない。しかし、「死んでからの時間を測ることに今日の授業が関連していたとは、面白かった」、「温度の下がり方に一定の法則があるのはびっくりした。」「(予測型体温計は)公式を利用しているからあれだけ速いのだとわかった」などの記述を得ている。

次の6つ観点に関して、6点法⁹⁾による評定を依頼した。生徒23名からの評定の平均を、それぞれの項目の右に記す。

(1) むずかしいか	3.8
(2) 興味深いか	4.1
(3) 理解できたか	4.2
(4) 目新しいか	4.3
(5) 教科書の内容と関連があるか	4.0
(6) 日常生活との関連があるか	3.6

概ね肯定的な評価である。強いて申せば、(5)の高さと(6)の低さが他項目に比べて相対的に注目される。少し前の授業での学習内容と関連づけが生徒の内面で行なわれているのだろうか。

3.2 参観者である教員の感想

「興味深く拝見しました」という感想の一方で「比例定数をkとせず、このデータからの具体的な値にした方が、生徒には分かりやすかったのでは」との示唆を戴いた。定数を表わす文字があることで難しい印象を持つので、その通りだと思う。

4. まとめと今後の課題

前節にみたように概して、教科書的な内容の発展として、それほど難度がなく、日常生活との関わりを感じさせる題材であるので、授業時間を割く価値はあるように思える。

前節に触れた以外に参観者からの質問紙への回答なども得ているが、紙幅の関係でそれらの分析は他日を期したい。

付 記

この公開授業は、三重県総合教育センター及び三重県

高等学校数学教育研究会のご尽力があっはじめて行なえたものである。また、三重大学教育学部数学教室並びに会場校である三重県立津東高等学校には条件・環境整備に関するご協力を得た。またビデオ撮影に関しては、三重大学教育学部4年生の山脇紀子さんの協力を得た。ここに記して謝意を表したい。

注

- 1) 文部省、『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』実教出版、1999
- 2) http://www.whfreeman.com/highschool/mmow_guide/#elOne
- 3) 正田 良 (編著)、『Excelが教師 高校の数学を解く』(技術評論社)、2003
- 4) 既に、黒田俊郎先生が、武蔵工業大学での「数学科教育法」で実践されている。
- 5) 正田 良、「電子温度計の数理」、『三重県高等学校数学教育研究会会誌』第49号、2005(投稿中)
- 6) 肯定だと数が大きく、否定だと数が小さくなるような評定。最大値が6(大変そう思う)、最小値が1(全然そうは思わない)。

資料 A : () は授業開始を0分とした予定時刻、
< > は授業試行の際の時刻である。単位は分である。
[] は授業内容の概要。

(0) 《0》 [温度計の提示]

きょう皆さんにお付き合い願うのは、電子温度計の数理という、テーマを作りました。これがそうなんだけど、見たことあるかな、ちょっと回そう(回覧しよう)か? <と、電子温度計を示す> あ、この教室暑いと思ったら、28℃。ここに電線の端っこみたいのあるでしょ。さわるとね、温度が変わるんだよ。手の先が熱いから、ここの先の温度を測ることができるんだね。両方温度が書いてあるのは、この温度計自体の温度。それから上のところが時刻。これは電池を入れてから何時間何分たったのかという時刻。(中略) いま回覧してもらっている電子温度計なんですけど、その映像を…映しました。

《4》 [映像の提示]

これ自慢じゃないけどつまらない映像です。コーヒーのでがらしを入れています。そうすると温度が変わって来るんですね。これは(電池を入れてから)56分後の状態ですが63.2℃という、水温がでてますね。これ(検温部)は水の中にいれるといけないので、サランラップに巻いて検温部を中に入れてあります。

はい、ということで、見てもらっています。こんな形

のものなので、保証付きでつまらない。だいたいこの手の映像と言うのは、猫がやってきて蹴飛ばすとか、金魚が飛び込んで泳ぐとか、近所の子がやってきてオジサンこれなにやってるの?とか、おもしろいことが起るよね。普通はね。でも、皆さんに申し訳ないけど、これは保証付きでつまらない。だから、何も事件が起らずに、ただ淡々と、ずーと撮っているだけの映像です。つまらないよね。さて、つまらないんだけど、これから先、どんなことが起るのか予想できちゃうんだよね。

だからこのプリントわかる? つまらないビデオですって題名を付けさせてもらいましたけど〈と、机間巡視して、重なって見つけにくいものを探して出させる〉このつまらないビデオですって先がその様子を書いてもらいます。いいですか。まず、室温はと書いてあります。

〈と、プリントの空所補充のデータ、室温 23℃、測りはじめは、66.6℃、その5分後には、60.7℃。と板書し補充させる〉

《7》 [言葉で表わす]

それからお湯の温度は…こっから先のストーリー、特別な事件はまったく起きません。つまらない映像です。「それから先の温度はまったく平凡に変わって…」じゃなくて、もうちょっと具体的にどんな風が変わって行くのかということを書いてみて下さい。〈机間巡視し、生徒の記述のキーワードをメモする〉《10》

〈ホワイトボード(以下、「WB」と略す)にキーワードを板書する。「どんどん下がる」「少しずつ下がり続ける」「さめて低くなる」と、まで書いて)はい、ありがとうございます。皆さんの書いてくれたものから典型的なものを選んで、WBに書かせてもらいました。読むと…。なるほどねと思うこともあるけど、どうかな?というのね。お、すごいなと思ったことを書いてくれた人がいるんだけど、

〈板書して〉最終的に室温と同じくらいになる。これいいよね。すごいよね。というのは、…どんどん下がるって言ったら、0℃よりも下がって、氷になってもまだまだ下がって、絶対零度まで下がって行っちゃいそうな感じがするでしょ。低くなるなりかたとしては、限度があるわけで、最終的に室温と同じくらいになるという、

〈と、「室温と同じ」に下線を引く〉これは、キーワードとして重要なことなんじゃないかと思えます。ですから、変化していくことは確かなんだけど、どんなふうに変化していくのかということところが重要だね。

《12》 (10) [グラフであらわす]

さて、この内緒のシール、外してみよう。2ページ目を見て下さい。これはある本に出ている話なんですけど、タンチョウツルが環境問題で数が変化する。これからどんな風に変化していくのかを、生徒さんに予想してもらった授業です。グラフで、どんな風に変化して行くのかな

て書くことができますよね。

さて、こんどは皆さんの番です。いま、皆さんが言葉で書いてくれたこと、…予想ができてきましたけども、下がって来る様子をグラフに書くことができるかな。まず、データとして重要なのは、横軸が0分のところに66.6℃。丸でも付けといてくと、グラフの縦横軸を書き、(0, 66.6)あたりに●を記す)〈机間巡視〉で、次は、「5分後に、60.7℃」そこにも丸を付けて下さい。これで、2つの点をとることができたよね。最終的に室温と同じくらいになるということだから、室温ってどれくらいなのか、横線でも引いてみようか。WBのグラフに23℃を表わす一点鎖線の横線を引く)この3つの情報をもとに、このお湯の温度をその後を占ってみましょう。グラフを完成させてみてください。《16》〈机間巡視〉《20》工夫だなと思ったのは、彼だな〈と対応する生徒を指さす)補助線を引いているんだ。これは感心した。この2つの点があるでしょ。〈と、WBで説明)2つの点を通して、この点線(2つの点を通る直線を点線で書いた)みたいのを書くわけさ。それから、だんだん室温に近づくのだから、

これって、温度の変わりかたが急だと、縦に近くなってくるね。ゆるやかだと、横に寝てくる。だから、はじめの様子はこんな感じだけどだんだん、…この補助線よりも寝てくる。面白い考え方だね。

《22》 (15) [法則の提示]

さて、4ページ目を見て下さい。〈次の見開きなので生徒はページをめくる)法則があつてね。読みますよ。お湯の温度が変化する速さは、他の条件が同じなら、室温との差に比例する。どういうことかということ、ちょっとこちら見て下さい。これ、室温です。〈と、WBの横線を指さす)室温との差がこれだけあるね。そうすると、速さは、これくらい(傾きをなぞる)になっています。でも、だんだん冷めて行って、室温との差が、なくなると、こんどは変化が緩やかになる。だからこの傾きが、寝てくる。傾きの値が小さくなる。だから、傾きの様子がだんだんこんな感じで寝ていくというのは室温との差が小さくなっていることと、比例している、という法則があります。そりゃそうだよね。温度の差が大きいと、熱が動きやすいでしょ。温度の差がないと熱は動かないですよ。ですから、なぜつまらないかということ、予想できちゃうからだよ。

これ〈WBにある3つの温度を指す)だけのデータがあると、もう先はかなり正確に予想できる。ということが言えますね。

《23》 [表の空所補充]

残念ながらこの計算を始めると、電卓でも使わないと、大変になっちゃうので、ちょっと、人工的だけど、計算しやすいデータでやってみたいと思います。〈WBにプ

リントの表を写す) じゃあ、この差を計算すると、…
 (10分後の室温との差を表に) 入れてみて。〈机間巡視〉(中略) 2列目ひとつだけ残っているな。これどうしたらいいかな。ここで青い枠を囲ったところ(法則)効いてくる訳さ。〈法則を読む〉速さって、この10分間にどれだけ変化したのかという変化した量が速さだよな。だから、この32というのは、10分間に変化した量だけど、室温との差に比例するというのだから、この差が64のときに32だ。じゃあこの差が32のときは、ここは?(中略) 比例するってことは、半分になるんだったらこっちも半分になる。これが、16度ってことになる。ってことは3列目が計算できる。(中略)

《30》(25) [表から発見]

どうかな。この表を途中まで書いてみると、ははんとすることはないかな?気が付いたことをお隣の人、へ耳打ちしてあげて下さい。(中略) どんな見通しが付くのかというと、こちらから言っちゃうけど、半分半分になっていく。ここの変化が、「 $\times 0.5$ 」、「 $\times 0.5$ 」…〈と、板書しながら〉変わっていくのさ。それをちょっと数学的にみてみようというのが、5頁。ちょっと、難しく書きすぎちゃったから、簡単に説明しようね。〈と、数列の引数を観測回数にしたもので説明〉この関係をもてみると、これ、ある性質もってるな。何とか数列って業界用語で言うのだけど。…お隣の人にささやいて。そう、お隣は僕だものな。等比数列になっている。じゃあ、どうしてこういう性質を持っていると等比数列になるのかというと、〈2つの等式を辺々引いて説明。〉「次の10分間の変化」というのが階差数列にあたっているのだけど、これが、等比数列になっている。

《42》(35) [第2の動画]

さっきこの画像を見てもらいましたけど、〈と、パソコンを操作して、〉これ何を測っているんでしょう。温度計の検温部の先は見えていません。根拠はまったくないのですが、予想してみてください。こんな感じの温度の変化をしています。はい、残念ながら時間がないから、こちらで答えを言っちゃうね。実はこの温度計の検温部の先は、私の腋の下。〈生徒、ちょっと笑う〉

あたって?体温計って何分計ってあるじゃない。3分ずっとやってないといけないとかさ。でも、はやい時間にピピッとなってわかっちゃうのがあるでしょ。実測型というのと、予測型というのと2つの種類があるのね。

実測型というのは、そのときそのときの温度を、本当に測っているやつ。予測型というのは、実はこういう法則があるから、どうせ階差数列が等比数列になるんだということがわかっていると、どこに近付いて行くのかが予想できちゃう。体温計と言うのは、はじめは部屋の温度と同じわけさ。それが腋の下にはさむと、温められていくよね。体温と同じ温度になって、そこで体温をやっと

測れる。温まるまで待ちきれない。その先を予測して計算で出してしまえというのが予測型という体温計。(中略)

《49》 [第3の事例]

温度を(さっきは)予想したわけですけど、逆に(温度が)下がり始めた時間を予想することもできそうですね。それが使われているのが捜査一課です。人間の身体って死ぬと、体温冷めてくじゃないですか。〈死亡推定時刻を遺体温で知る方法の説明。その途中でチャームがなる〉あ、時間になっちゃった。申し訳ないけど、手元のアンケートを書いて出してくれる?

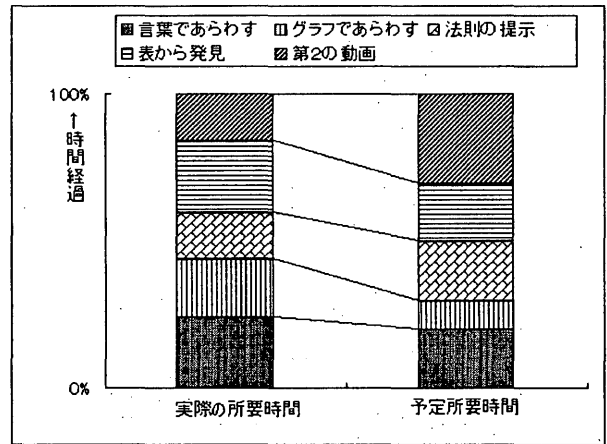


図1 時間配分の予定と実際

資料B：生徒に配付したプリントの概要

2 頁目以降は袋とじにしてあって、当初は1 頁目のみしか見ることができない。袋とじは時間中に開ける。B 5 版8 頁組のプリントである。

(1 頁目)

1. すぐくつまらないビデオです

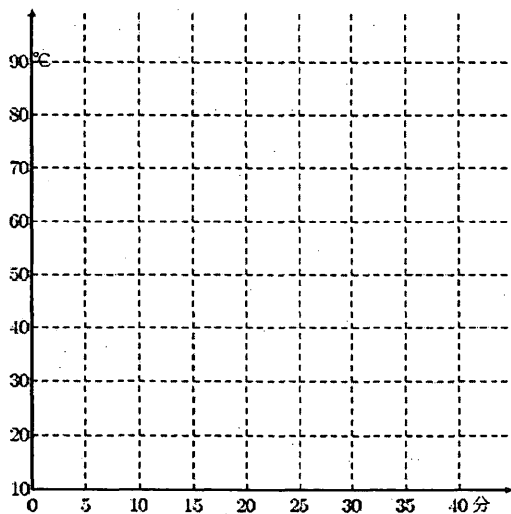
室温は _____℃です。
 測り始めは _____℃でしたが、
 その分後には、 _____℃になりました。
 それからお湯の温度は、

(2 頁目)

小寺隆幸, 2004 『数学で考える環境問題』(明治図書)
 p.70 の図版を紹介した。

(3 頁目)

2.2 グラフにかくとどんな感じ？



(4 頁目)

3 こんな言い方もできます

3.1 公式を導く

熱伝導の法則

湯温が変化する速さは、他の条件が同じなら室温との差に比例する。

式であらわしてみよう。

測り始めてから、 n 分後の湯温を a_n °C、室温を c 、比例定数を k とおくと、

(湯温が変化する速さ) = $k \times$ (室温との差)

$$\frac{a_n - a_{n+5}}{5} = k \times (a_n - c)$$

3.2 計算しやすい例で公式を使ってみよう

室温が 15°C のところで、10 分ごとに測ったとする。すると上の公式は、

$$\frac{a_n - a_{n+10}}{10} = k \times (a_n - c)$$

測り始めからの経過時間 (分)	0	10	20	30	40	50	60	70
湯温 (°C)	79	47						
室温 (°C)	15	15	15	15	15	15	15	15
室温との差	64							
次の 10 分間の変化								-

問 1: $n=0$ のときの値を上式の式に当てはめると、 k の値を求めることができるか？

問 2: (次の 10 分間の変化) を、(室温との差) で表わすことはできるか？

問 3: 上の表の空欄を埋めることはできるか？

問 4: 上の表をみて気が付くことはないか？

(5 頁目)

定理

湯温と室温の差と、湯温が変わる速度とが比例するとき、湯温の一定時間毎の変化は、等比数列になる。

問 5: 式で確かめることはできるだろうか。

d 分ごとに温度を測っているとすると、測り始めてから n 分後を基準にした「次の d 分間の変化」を b_n とすると(さめているときは)、

$$b_n = a_n - a_{n+d}$$

法則を導いた公式は

$$\frac{a_n - a_{n+d}}{d} = k \times (a_n - c)$$

だから、

$$a_n - a_{n+d} = kd \times (a_n - c)$$

$$b_n = kd \times (a_n - c) \quad \dots(1)$$

測り始めてから n 分後を基準にした式だが、この d 分前を基準にすると、

$$b_{n-d} = kd \times (a_{n-d} - c) \quad \dots(2)$$

が成り立つ。ここで、(2)-(1) を実行すると、

$$b_{n-d} - b_n = kd(a_{n-d} - a_n)$$

$$b_{n-d} - b_n = kd(b_{n-d})$$

問 6: 後半の映像は何を測っているのだろうか？

(6 頁目)

3.3 実際との比較

表計算ソフトを使ってグラフを書きました。

(以下、図 2 として後に収める。)

(7 頁目)

山村美紗, 1976 『死体はクーラがお好き』

[初出] 『小説サンデー毎日』昭和 46(1971)年 6 月増刊号
 [単行本] 立風書房, 1976. [この引用の底本] 文春文庫,
 1981. (文春文庫本, pp.238-239, p.262) の抜粋である。

(8 頁目) 図 3 として後に収める。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
経過時間 (分)		0	5	10	15	20	25	30	35	40
湯温		66.6	60.7	56.0	51.9	48.7	46.1	43.5	41.1	39.5
室温		22.9	24.1	24.6	24.7	24.6	24.4	24.2	24.0	23.8
理論値		66.6	61.6	57.2	53.3	49.8	46.8	44.0	41.6	39.5

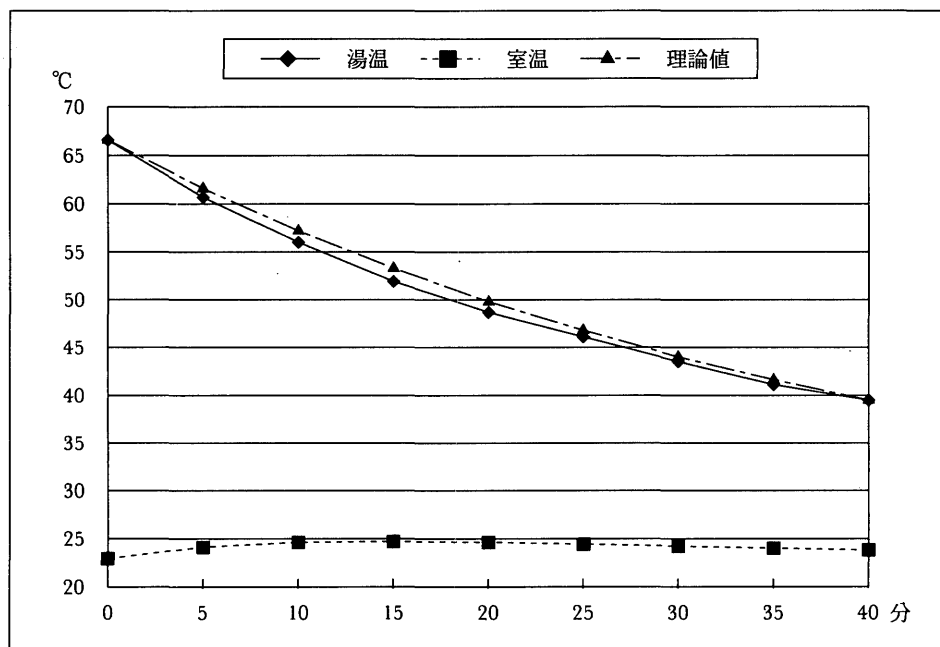


図 2 : 湯温の理論値と実際との比較 (プリント 6 頁より)

4 他にもこのような例

エピソード	恒温体 (いつも一定の温度)	伝導物	変温体	何を知る?
コーヒーのでがらし がさめていく	部屋の空気	容器	コーヒーの でがらし	(法則?)
			温度計の感温部	恒温体の温度
	部屋の空気	衣服・皮膚		

図 3 : いろいろな事例の比較 (プリント 8 頁)