三重大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　　2008,　第 28 号, 53 − 57 頁

高校数学における数学史の活用

― 円と球の求積をめぐって ―

上垣　　渉*・田中　伸明**

高等学校における積分法の学習で、高校生は、たとえば $\int_0^1 x^2dx$ の最後に付けられた記号「dx」を単なる飾りとしてしか認識していない場合が多いように思われる。これは曲線図形の面積を細長い長方形の面積の総和の極限として捉える考え方が確立していないことに起因していると考えられる。そこで、数学史からの知見を援用して、dx の意味理解をはかるための方法を提起した。

キーワード：円の面積、球の体積、求積法、数学史

[1] 古代オリエントにおける円の求積

(1) エジプトの場合

エジプトでは、「直径 9 ケトの丸い土地の問題、その面積はいくらか」（問題 50）という問題が扱われていて、その解は直径からその $\frac{1}{9}$ すなわち 1 を引いて 8 とし、8 を 8 倍して 64 と求められている。この解法は「円の面積とその円に外接する正方形の面積を比較せよ」という問題 48 に添えられた図を現代的に解釈した［図 1］から明らかなように、外接正方形の四隅を切り取ってできる 8 角形によって円を近似していることがわかる。この 8 角形の面積は、

$$9^2-4\times\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=81-18=63$$

となるが、エジプト人はこれを 64 すなわち 8^2 とした。つまり、直径 9 の円の面積を一辺 8 の正方形の面積にほぼ等しいとしたのである。

(2) バビロニアの場合

一方、バビロニアでは、［図 2］が示すように、円に内接・外接する正 12 角形の面積を求め、

（内接正 12 角形の面積）

　　＜（円の面積）＜（外接正 12 角形の面積）

という関係により、円の面積が近似的に求められている。半径 2 の円に内接する正 12 角形の面積は 12、外接正 12 角形の面積は 13 より小さいことから、

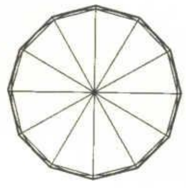
$$12 < （円の面積）< 13$$

となるから、バビロニア人は、

$$（円の面積）=\frac{1}{2}(12+13)=\frac{25}{2}$$

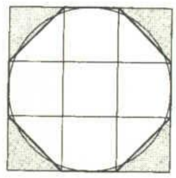
としたのである。

*三重大学教育学部数学教育講座
**三重県立津東高等学校



バビロニアの正12角形近似

［図 2］



エジプトの8角形近似

［図 1］

[2] アルキメデスによる円と球の求積

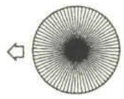
(1) 円の面積

アルキメデスは、円の無限分割によって円の面積公式を発見したと言われている。まず［図 3－1］のように、円を扇形に分割し、この分割を無限分割と考えると、扇形は 2 等辺 3 角形と見なしうる。次に、円周を 1 本の糸のように見なして直線と化すと、［図 3－2］のように、この直線上に 2 等辺 3 角形が並ぶ。ここで、2 等辺 3 角形の等積変形を適用する。

つまり、［図 3－2］の各2等辺3角形の頂点が点Aにくるように等積変形する。すると、［図3-3］のような「半径が直角をはさむ一辺に等しく、円周が底辺に等しいような直角 3 角形」に変形されることになる。かくして、円の面積はこの直角 3 角形の面積に等しいと考えられるのである。

［図 3－3］

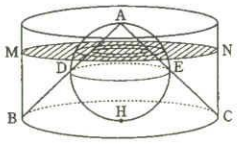
［図 3－2］



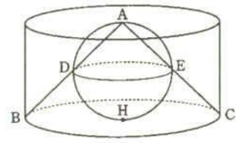
［図 3－1］

(2) 球の体積

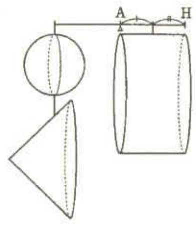
アルキメデスは「球の体積は、球の大円に等しい底面をもち、球の半径に等しい高さをもつ円錐の体積の4倍である」ことを発見したのであるが、それは天秤の釣り



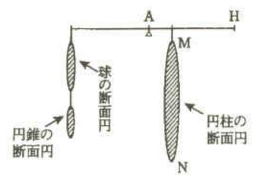
[図 4－2]



[図 4－1]



[図 4－4]



[図 4－3]

合いを利用する機械学的な方法によってであった。そのことは著作『エラトステネスあての機械学的定理についての方法』(以後、『方法』とする) の命題 2 に見られる。その概要を紹介する。

アルキメデスは [図 4－1] のように、円柱とその中の大円錐 ABC を想定する。さらに、円柱の上下面に接する球とその中の小円錐 ADE を考える。ここで、BC は DE の 2 倍になっている。[図 4－2] のように、任意の断面 MN を考えると、そこには、円柱の断面円、球の断面円、大円錐 ABC の断面円の 3 つが作られる。この 3 つの断面円を [図 4－3] のように天秤に吊すと、釣り合う。天秤は AH を A の方向に延長して作られたもので、その長さは球の直径の 2 倍になっている。

このような釣り合いは任意の断面において成立するから、円柱や球、円錐がそれぞれ無数の断面円によって構成されると考えると、[図 4－4] のように釣り合うことになる。したがって、

[(球)＋(円錐ABC)]：(円柱)＝1：2

となり、

2 (球) ＋2 (円錐 ABC) ＝ (円柱)

となる。そして、円柱は円錐ABCの3倍であるから、

2 (球) ＋2 (円錐 ABC) ＝3 (円錐 ABC)

2 (球) ＝ (円錐 ABC)

となる。

また、円錐 ABC と円錐 ADE を比較すると、高さも底面の半径もそれぞれ円錐 ABC の方が 2 倍になっているから、体積は 8 倍になっている。したがって、

2 (球) ＝ 8 (円錐 ADE)

となり、その結果、球の体積は円錐 ADE の 4 倍ということになる。

円錐 ADE は底面が球の大円に等しく、高さが球の半径に等しい円錐だから、球の体積はそのような円錐の体積の 4 倍であることが明らかになったわけである。今、球の半径を r とすると、円錐 ADE の体積は

$\frac{1}{3}\pi r^3$ であるから、球の体積は、$\frac{4}{3}\pi r^3$

という球の体積公式が得られるわけである。

上記の球の体積公式の導出の仕方では、球や円柱、円錐が無数の断面円から構成されると考えられていた。また、アルキメデスは『方法』命題 1 において、

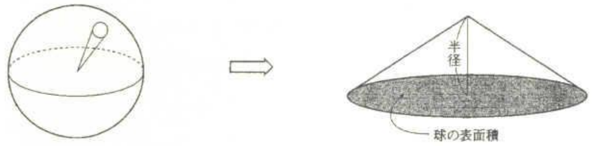
「直線と放物線によって囲まれる任意の切片の面積は、この切片と同底同高の 3 角形の面積の $\frac{4}{3}$ 倍である」

ことを、やはり天秤の釣り合いによって導出しているのであるが、そこでは、放物線の切片や 3 角形が無数の線分によって構成されると考えられている。

(3) 球の表面積

球の体積公式を発見的に導出したアルキメデスは、この体積公式を用いて球の表面積の求め方をも見出したと思われる。これに関しては、アルキメデスの「任意の円は、円周に等しい底辺と円の半径に等しい高さをもつ 3 角形に等積であることから推して、同様に、任意の球は、球の表面積に等しい底面と半径に等しい高さとをもつ円錐に等積であるということが予想される」という証言から、次のように推測される。

アルキメデスは円の面積を求める際に、円の無限分割法を用いていた。球の場合も同様に、球の中心を頂点とし、球の表面に底面をもつ無数の錐によって球が構成されると考えたのである。したがって、球の体積は球の表面積に等しい底面をもち、高さが半径に等しい円錐の体積に等積であると見なしたのである [図 5]。



[図 5]

[3] 古代中国における円と球の求積

(1) 劉徽による円の求積と円周率

『九章算術劉徽註』における円周率計算では、まず半径 1 尺 (10 寸) の円に内接する正 6 角形から出発して、内接する正 12 角形、正 24 角形、正 48 角形、正 96 角形の一辺の長さが求められ、最後に、内接正 192 角形の面積が

$$314\frac{64}{625}\ (\text{平方寸})$$

と求められている。計算結果は次ページの [表 1] の通りである。ここでの「差冪」とは、面積相互の差を意味している。

劉徽は、「次々に差冪を加えていく」として、
「内接正 192 角形の面積に $\frac{36}{625}$ を加えた値が円の面積になる」
と述べているが、この $\frac{36}{625}$ という値はどこから得られたのであろうか。

正多角形	面　積	差　冪	比　率
正 12 角形	300		
		$\frac{6614}{625}$	
正 24 角形	$310\frac{364}{625}$		0.2532506
		$\frac{1675}{625}$	
正 48 角形	$313\frac{164}{625}$		0.2507462
		$\frac{420}{625}$	
正 96 角形	$313\frac{584}{625}$		0.2500000
		$\frac{105}{625}$	
正 192 角形	$314\frac{64}{625}$		

［表 1］

［表 1］における比率が約 $\frac{1}{4}$ であることに注目し、内接正 96 角形の面積と内接正 192 角形の面積の差が $\frac{105}{625}$ であることから、内接正 384 角形の面積は、

$$314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\cdot\frac{1}{4}$$

と推測され、さらに内接正768角形の面積は、

$$314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\cdot\frac{1}{4}+\frac{105}{625}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

と推測される。したがって、「次々に差冪を加えていく」という文章の意味するところを計算すると、

$$\frac{105}{625}\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=\frac{105}{625}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{105}{625}\cdot\frac{1}{3}=\frac{35}{625}$$

となって、$\frac{35}{625}$ という値が得られるのである。この値 $\frac{35}{625}$ を $314\frac{64}{625}$ に加えるのであるが、この分子が 64 であることから、$\frac{35}{625}$ の分子を36とし、$\frac{36}{625}$ としたのではないかと考えられる。劉徽が上記のようにして $\frac{36}{625}$ という値を得たとすれば、彼は公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数の求和法に知悉していたということになる。彼は、$314\frac{64}{625}$ に $\frac{36}{625}$ を加えた値が円の面積になると言っているのであるから、

$$314\frac{64}{625}+\frac{36}{625}=314\frac{100}{625}=314\frac{4}{25}$$

となって、円周率は 3.1416 となる。これが劉徽によって得られた値なのである。

(2) 祖沖之とその息子・祖暅之による円周率及び球の体積

『随書』律暦志の記述によれば、祖沖之による円周率の値は、

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

となっており、小数点以下第7位まで正しいことがわかる。この値は、当時の世界で最も良い値であった。

また、祖沖之は分数表記の値として、

「約率：$\frac{22}{7}$」と「密率：$\frac{355}{113}$」

を与えている。約率は古代ギリシアのアルキメデスが用いた近似値であるが、密率はヨーロッパでは、ようやく 1573 年にドイツ人オットーによって求められた値で、祖沖之にくらべて約千余年も遅れている。

一方、祖沖之の息子・祖暅之は球の体積公式を正しく導き出したことで知られている。小立方体とそれに含まれる内棊についての［図 6］を参照していただきたい。この小立方体の一辺を r として、高さ h で水平に切断したときの切断面を考えてみよう。内棊の切断面の面積は三平方の定理によって、r^2-h^2 となる。また、r^2 は立方体の切断面の面積だから、h^2 は立方体と内棊との隙間にできている切断面の面積となる。

この小立方体に含まれる陽馬を考えると、それを高さ h で切断したときの切断面の面積は明らかに h^2 である。よって、先の結果と合わせると、小立方体と内棊の隙間にできている立体と陽馬とは、高さ h における断面積が等しいことになり、劉徽－祖暅之原理（カヴァリエリの原理に同じ）によって、この双方の立体は同体積であることになる。よって、

（内棊の体積）

＝（小立方体の体積）－（陽馬の体積）

となる。祖暅之はすでに、

（陽馬の体積）＝ $\frac{1}{3}$（小立方体の体積）

であることを知っていたから、

（内棊の体積）＝ $\frac{2}{3}$（小立方体の体積）

を導き出すことができた。内棊 8 個によって合蓋が構成されていること、

（内棊の体積）＝ $\frac{2}{3}r^3$

であることから、

（合蓋の体積）＝ $\frac{16}{3}r^3$

となることがわかる。

次に、祖暅之は合蓋に内接する球の考察に進む。［図 7］のように、正方形 ABCD に平行な平面で合蓋および内接球を切断すると、［図 8］のように、正方形とそれに内接する円が現れる。

円周率を $\frac{22}{7}$（約率）とすると、

（正方形の面積）：（内接円の面積）＝14：11

となるから、

（合蓋の体積）:（球の体積）＝14：11

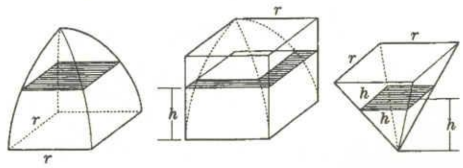
と考え、

（合蓋の体積）$= \dfrac{16}{3} r^3$

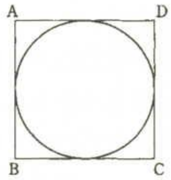
と合わせて、

（球の体積）$= \dfrac{16}{3} r^3 \times \dfrac{11}{14} = \dfrac{22}{7} \times \dfrac{4}{3} r^3 = \dfrac{4}{3} \pi r^3$

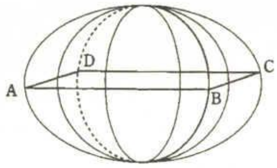
と、祖暅之は結論づけたのである。



[図 6]



[図 8]



[図 7]

[4] 高校 3 年生対象の積分の授業例

曲線図形あるいは曲面立体の面積，表面積は線分の総和ではなく、幅をもった長方形などの面積の総和の極限として求められることを理解させることを目標とした授業案を示す。

「今日は積分計算について考えてみたいと思います。微分・積分が発明されたのは 17 世紀で、イギリスのニュートンとドイツのライプニッツによってですが、積分に近い考え方はすでに 2200 年以上も前に、古代ギリシアのアルキメデスによって使用されていました」というイントロで授業を始める。

「アルキメデスは円周率の値を 3.14 と小数点以下第 2 位まで計算した最初の人でもありますし、$S=\pi r^2$ という円の面積公式を最初に発見した人でもあります。皆さんが円の面積の求め方を初めて学んだのは小学校 5 年のときだと思いますが、どうやって勉強したか憶えていますか。たぶん、こうやって勉強したはずです」と、円を無限分割する方法を紹介する。

「アルキメデスはまた、放物線の切片の面積が内接 3 角形の面積の $\dfrac{4}{3}$ 倍であることを導き出したのですが、そこでは、無数の線分が集まって放物線の切片が構成されるという考え方をしています。円が無数の線分の集まりによって構成されているという考えにしたがって、半径 r の円の面積を計算してみましょう」と授業を進める。

第 1 象限の四分円の面積を求めて、それを 4 倍することにする。点（$\chi, 0$）に立てた線分は

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

だから、これを $\chi=0$ から $\chi=r$ まで積分する。つまり、

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

を計算する。

$x = r\sin\theta$ と置くと、$\dfrac{dx}{d\theta} = r\cos\theta$ であり、

積分範囲が $\theta=0$ から $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となるから、

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2\theta} \cdot r\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2\theta} \cdot r\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= r^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

となる。したがって、これを 4 倍して、円の面積公式である πr^2 が得られる。

しかし、この考え方はいつも正しいとは限らない。そもそも、線分には面積がない。面積 0 の線分をどれだけ集めても、面積は 0 だからである。円の場合は、上の計算のように、うまくいったが、たとえば球の表面積の場合はどうだろうか。

点（$\chi, 0$）での円周を $\chi=0$ から $\chi=r$ まで集めると、半球の表面積（$2\pi r^2$）が求められると考えられるから、これを計算してみよう。

点（$\chi, 0$）での円周は、円の半径が、

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

だから、

$$2\pi\sqrt{r^2 - x^2}$$

となる。よって、半球の表面積は、

$$\int_0^r 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

を計算することになる。さて、

$$\int_0^r 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

となるが、

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{4}$$

であったから、

$$\int_0^r 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{\pi^2 r^2}{2}$$

となって、$2\pi r^2$ にはならない。このように、線分が無数に集まって面積ができるという考え方は正しくないということがわかる。

では、正しくはどのように考えればよいのだろうか。それは、幅を持った長方形あるいは長方形状の図形の面積の総和として面積を考えるのである。長方形には面積があるから、それを集めると、やはり面積が生まれる。この考えを用いて、球の表面積を求めてみる。

点（χ,0）と点（$\chi+\Delta\chi$,0）で夾まれた帯が球面に巻き付けられていると考える［図 9］。この帯の面積を $\chi=0$ から $\chi=r$ まで集めると、半球の表面積が求められる。帯の面積は、

$$PQ\cdot 2\pi RC$$

で求められる。

ところが、$\triangle PQH$ と $\triangle ORC$ は相似だから、

$$PQ:QH = OR:RC$$

であり、

$$OR = r、QH = \Delta x$$

だから、

$$PQ = \frac{r\cdot\Delta x}{RC}$$

となる。よって、

$$PQ\cdot 2\pi RC = \frac{r\cdot\Delta x}{RC}\cdot 2\pi RC = 2\pi r\cdot\Delta x$$

となる。この $2\pi r\cdot\Delta\chi$ を $\chi=0$ から $\chi=r$ まで集めて、$\Delta\chi$ を限りなく 0 に近づけていくと、区分求積法の考えである、

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum \Delta x = \int dx$$

を用いて、

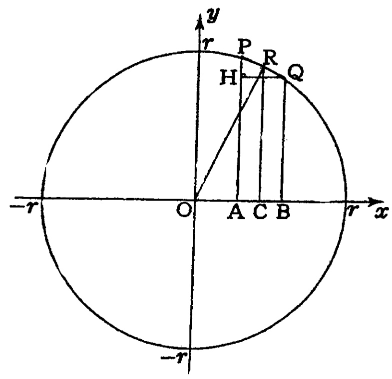
$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_0^r 2\pi r\cdot\Delta x = \int_0^r 2\pi r\,dx$$

となる。これを計算すると、半球の表面積が得られる。

$$\int_0^r 2\pi r\,dx = 2\pi r\int_0^r dx = 2\pi r\,[x]_0^r = 2\pi r^2$$

となって、半球の表面積が正しく求められることがわかる。

このように、面積は線分の総和ではなく、幅をもった長方形状の図形の面積の総和の極限として求められるのである。



$A(\chi,0)$　$B(\chi+\Delta\chi,0)$

点 C は AB の中点

PQ は点 R における接線

［図 9］

［参考文献］

(1) A. B. Chace、平田寛監修・吉成薫訳『リンド数学パピルス』朝倉書店、1985

(2) 近藤洋逸『数学の誕生』現代数学社、1977 年

(3) 上垣　渉『アルキメデスを読む』日本評論社、1999 年

(4) 科学の名著 2『中国天文学・数学集』藪内清編、朝日出版社、1980