三重大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　2013,　第 33 号，51 − 56 頁

数学的活動を通して学ぶ高等学校数学科の「課題学習」

−「モンティ・ホールのジレンマ」を題材として −

田中　伸明*・上野　祐一**

高等学校において、平成 24 年度から数学と理科で先行実施された「高等学校学習指導要領」では、数学科の科目である「数学Ⅰ」および「数学 A」に「課題学習」が位置付けられ、「数学的活動」を通して、「生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする」とされている。

本稿は、このような「新学習指導要領」の理念に沿って実践した確率の授業の実践報告である。「モンティ・ホールのジレンマ」を題材とした「数学的活動」により、確率の概念を獲得させることをねらい、さらに事象の考察に確率の考えを用いることのよさを実感させる実践の報告である。

キーワード：高等学校、課題学習、数学的活動、条件付き確率、モンティ・ホールのジレンマ

1．はじめに

三重県立白子高等学校には、生活創造科と普通科が設置されている。生活創造科には、食彩コース、服飾コース、普通科には文化教養（吹奏楽）コースが置かれ、特色ある教育課程を提供している。現在は 1 学年 7〜8 クラス編成で、男女比はほぼ 1：2 である。卒業後の進路希望先は超就職氷河期と言われる昨今、3：7 と就職希望者よりも進学希望者が多くなっている。

平成 24 年 4 月から先行実施された「高等学校学習指導要領」（以下「新学習指導要領」）において、数学科の目標は、

> 「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる」[1)]

とされている。目標の冒頭にある「数学的活動」とは、

> 「数学学習にかかわる目的意識をもった主体的な活動」[2)]

と定義されるもので、「新学習指導要領」では、「数学的活動」は、数学科の目標を達成するための最も重要な手段として位置付けられているのである。

三重県立白子高等学校では、確率の意味理解を図り、生徒にその概念を獲得させるための「数学的活動」として、グループによる実験を設定し、実験結果を受けて、生徒によるディスカッションを行うという実践に取り組んだ。さらに、確率に対する見方が広がるように配慮していき、新たな「課題学習」のテーマに発展させることができるようにした。本稿はその研究報告である。

なお、この指導案を練るにあたって、数学教育協議会「第 59 回全国研究（福井）大会」の加藤健治氏の発表を参考にさせていただいた。

2．課題の設定
— モンティ・ホールのジレンマ —

まず、「モンティ・ホールのジレンマ」（モンティ・ホールの問題）とは、以下の問題である。

> あなたは、このテレビのゲーム・ショーに出ているとする。このショーでは、ゲストであるあなたは、目の前の 3 つの扉のうち、当りと思う 1 つの扉を選ぶ。1 つの扉が当りで、その後ろには景品の自動車が置いてある。残りの 2 つの扉ははずれで、その後ろにはヤギがいる。
>
> 司会者は、扉の後ろに何があるかを知っているので、残った 2 つの一方を開けてみせる。すると、そこからはヤギが出てくる。そこで、司会者はあなたに向かって、こう尋ねる。
>
> 「あなたは、選んだ扉を変えますか。それともそのまま変えませんか。」
>
> さあ、あなたにとって、有利な選択はどちらでしょうか。

これは、1990 年、モンティ・ホール氏が司会を務めるアメリカの TV 番組ゲーム・ショー「Let’s make a deal」で取り上げられた問題である。このことを契機として、この問題は一つの社会現象となり、数学者でさえ間違ったと言われている。

試行を簡潔にし、授業では、次のような課題を設定した。

* 三重大学教育学部数学教育講座
** 三重県立白子高等学校数学科

オーナーが3枚のカードを持っていて、オーナー側からはカードが見える状態になっている。そのうち、当り（赤）が1枚で、はずれ（黒）は2枚である。挑戦者は、1枚カードを選び、当りを引こうとする。

① 挑戦者が、カードを1枚選ぶ（選ぶだけで、カードはまだ見れない）。
② オーナーは、2枚のはずれのうち挑戦者が選ばなかったものを1枚だけオープンし、これを挑戦者に見せる。
③ ここで挑戦者には、最初選んだカードを、まだオープンされていないもう一方のカードに、変更する権利が与えられる。

あなたが挑戦者のとき、この状況のもとでカードを変更するかどうかを考えよう。
Ⅰ. 変更するほうがよい
Ⅱ. 変更しないほうがよい
Ⅲ. どちらも同じ

全体を見れば、挑戦者は、3枚から1枚の当りを引こうとすることは事実で、変更の権利が与えられた後も、確率は変化せず、「当る確率は1/3のままである」と考えてしまったり、あるいは、変更の場面で、挑戦者は、オープンされていない2枚から1枚の当りを引こうとするのだから、「当る確率は1/2に上がる」と錯覚したりする問題である。

授業では、アクティブ・ラーニングを取り入れ、4人1班としてグループ編成を行った。各班は、オーナーと挑戦者側の2人ずつに分かれた。オーナーと挑戦者を10回ずつで交替し、カードの様子が見えるオーナーを全員に体験させることとした。

さらに、実験として、以下の「Case.1」〜「Case.3」を設定し、3つの場合の結果を対照させた。

Case.1：カードを変更するかしないかは、挑戦者の自由とする。
Case.2：挑戦者は、カードを変更しない。
Case.3：挑戦者は、必ずカードを変更する。

それぞれの場合について、各40回ずつゲームを行い、40回中の当り回数を記録し、その相対度数を求めさせた。そして、実験の後、「直感で感じたこと」と「実験を通して分かったこと」の違いをディスカッションさせることにした。

3. 実験の予想と結果

この課題をA講座（40名）とB講座（22名）の2つの講座に与えた。実験を行う前の生徒の直感的な予想は以下であった。

実験を行う前の「直感」：
A講座（40名）
Ⅰ：カードを変更するほうがよい　→　5名
Ⅱ：カードを変更しないほうがよい → 35名
B講座（22名）
Ⅰ：カードを変更するほうがよい　→　3名
Ⅱ：カードを変更しないほうがよい → 19名

どちらの講座も、「Ⅱ：カードを変更しないほうがよい」とする生徒が多数を占めた。「変更してはずれると悔しい」と考えたものが大半で、「最初選んだ時から確率は1/3で変わらない」というものもあった。

少数であるが、「Ⅰ：カードを変更するほうがよい」と直感した生徒もいた。その理由は、「変更する時、2枚から1枚を選べるので、確率は1/3から1/2に上がる」というものが主であった。

さて、以下に、「Case.1」〜「Case.3」の実験結果を示す。2つの講座の実験結果は類似したものであったので、ここではA講座のものだけを提示する。

Case.1：カードを変更するかしないかは、挑戦者の自由とした場合

	当りの数	試行回数
1班（4人）	15	40
2班（4人）	21	40
3班（6人）	40	60
4班（4人）	22	40
5班（4人）	26	40
6班（6人）	36	60
7班（4人）	27	40
8班（4人）	24	40
9班（4人）	18	40
合　計	229	400

試行回数に占める当りの相対度数は、

$$\frac{229}{400} = 0.5725$$

である。結果から見ると、予想された確率 $\frac{1}{2}$ を超えている。

Case.2：挑戦者が、カードを変更しなかった場合

	当りの数	試行回数
1班（4人）	17	40
2班（4人）	18	40
3班（6人）	27	60
4班（4人）	22	40
5班（4人）	17	40
6班（6人）	23	60
7班（4人）	11	40
8班（4人）	15	40
9班（4人）	20	40
合　計	170	400

この場合の当りの相対度数は、

$$\frac{170}{400} = 0.425$$

となった。確率 $\frac{1}{2}$ を下回る結果となっている。

Case.3：挑戦者が、必ずカードを変更した場合

	当りの数	試行回数
1班（4人）	31	40
2班（4人）	17	40
3班（6人）	35	60
4班（4人）	27	40
5班（4人）	27	40
6班（6人）	39	60
7班（4人）	24	40
8班（4人）	32	40
9班（4人）	24	40
合　計	256	400

当りの相対度数が、

$$\frac{256}{400} = 0.64$$

となった。$\frac{1}{2}$ を大きく上回る結果となっている。

4．生徒によるディスカッションと感想

この活動を通して、「直観で感じたこと」と「実験を通して分ったこと」の違いをグループでディスカッションさせた。さらにその理由も考え、最後にグループごとに発表する場を設けた。「学びの共同体」[3)]の考えを大切にし、「一人ひとりの違いに気付き、違いから学び合う」ことを大切にしながらグループ学習を行うことで、普段は「やんちゃ」な生徒も授業中は集中し、グループ討議にも積極的に参加していた。

では、生徒はどう考え、何を感じ取ったか。ディスカッションから得られた生徒の感想を以下に掲げる。

①変更した方が当りやすい。理由は、3枚のうちから1枚引くより、1枚はすでに分かっているので、2分の1になってから引く方が当る率が高いから。

②Case.3が一番当る確率が高い。理由は、Case.3は、3つのうちから2つを引くのに対して、Case.2は、3つのうちから1つを引かなければならないからです。

③Case.1、2の当る確率は3分の1、Case.3の当る確率は3分の2だと思ったけど、結果はそうはいかなかった。

④自分の好きなカードを引くよりも、ルールにしたがって引いた方が当る確率が高い。自分の直感よりも変更した方が当りやすいと思いました。

⑤必ず変更して戦った場合、当る確率が3分の2となるので当りやすい。好きなように戦った場合とカードを変更しない場合の確率はほぼ同じである。変更した方が当る確率が高い。Case.1、2は3分1、Case.3は3分の2。

⑥Case.1、Case.2は3分1、Case.3は3分の2の確率になることは分かったが、まだ何かすっきりしない。

⑦変更できない時はオープンしても変えられないからオープンしないのも一緒である。

⑧3枚あって、変更する場合は間違っている方。つまり、はずれを引いたら絶対当りになる。

⑨変更しない場合、3枚のうちから1枚選ぶ。変更する場合は3枚から2枚選んだことになる。

⑩変更したほうがいい。はずれが2枚あって、はずれを引く方が確率が高い。はずれを引いていたら、変えたら絶対当りになる。

⑪私は数学があまり好きではないけれど、とても楽しめました。確率と聞いてもなんとなくしか分かってなかったけど、やっと意味が分かったような気がします。

⑫確率のことはまあまあ知っていたつもりだったけど、ここまで深くやった事はなかったので、今まであやふやだったことがすっきりしてよかったです。数学が面白い事が再認識できました。

⑬絶対に自分の確率2分の1があっていると思ったが、周りの人の意見を聞いて納得できた。一人ではなく、みんなでやることはとても大切なことだと分かった。実際に実験してみるのはとても楽しかった。

⑭ただただ楽しかった。はじめの予想と違っていて意外でした。

⑮人間、はずれを引くのが好きみたいです。結果的にそんな気がします。

⑯人生、当りばかりは引けないらしいです。

生徒の感想から見えることを述べる。

「①，④」は、自分が挑戦者やオーナーの立場になって、カードを変更する「Case.3」が当りやすいことに気付いたものである。次に、「②，③，⑤，⑥」は、オーナーになってカードの動きを見ることを通して、「Case.3」での当る確率が2/3であり、「Case.2」での確率が1/3であることを理解したことが見て取れる。「⑦，⑧，⑨，⑩」は、当初カードを選ぶ「最初の試行」の結果と、変更の権利が与えられた後の「後の試行」との因果関係を捉え、それを自分の言葉で表現したものと見て良い。「⑪，⑫，⑬，⑭」は、実験やディスカッションという「数学的活動」から、楽しさやよさを感じと取ってくれている。「⑮，⑯」は、生徒の個性が見える感想と言ってよい。

5．実験での観察　―カードの動き ―

生徒たちは、実験を通して、「条件付き確率」の基本

的な概念を、自らの中に構成できたといってよいだろう。それはオーナー側から見える「カードの動き」を、読み取ることから得られたものである。

生徒が体験した試行の様子を、図を用いて示したい。

挑戦者がいったんカードを選択する時は、どの「Case」でも、「○」（当り）を選ぶ確率は 1/3 であり、「×」（はずれ）を選ぶ確率は 2/3 であることは容易に分かる。（図 1）

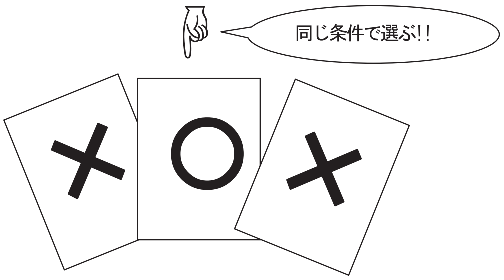

図 1

「Case.2」では、1 枚のはずれがオープン（裏返し）されて、挑戦者側から見えるようになっても、実質的に、挑戦者は、1 枚の当りを含む 3 枚のカードから、等しい条件で 1 枚を選んだことには変わりはない。したがって、オーナ側からは、当る確率は、当初の 1/3 から変化しないことが読み取れる。（図 2）

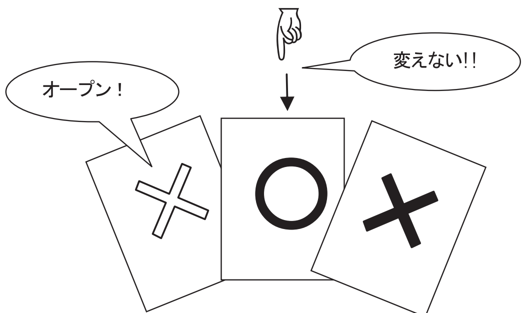

図 2

一方、「Case.3」では、オープンされた後、挑戦者は選んだカードを変える。このとき、オーナー側から見ると、オープンされずに残っているものは 2 枚であり、最初選んでいたものが「当り」であったなら「はずれ」へと（図 3）、最初選んでいたものが「はずれ」ならば

図 3

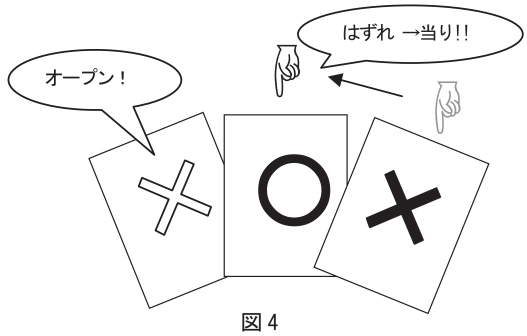

図 4

「当り」へと（図 4）、変更されることが見てとれる。

つまり、「Case.3」においては、最初に選んだものが「当り」ならば最後は「はずれ」、「はずれ」ならば「当り」となるのである。したがって、最終的に「当る」確率は、「図 1」で示した、当初の段階で「はずれ」を選ぶ確率である 2/3 に等しく、最終的に「はずれる」確率は、当初「当り」を選ぶ確率である 1/3 と等しくなる。

結論をまとめると、以下である。

結論

i）カードを変更する場合、当る確率 P(H)は、

$$P(H) = \frac{2}{3}$$

ii）カードを変更しない場合、当る確率 P(H)は、

$$P(H) = \frac{1}{3}$$

ゆえに、カードを変更したほうが有利である。

以上のような「活動」を通しての理解は、モンティ・ホールのジレンマの解答を、明快な「数学的論拠」をもって示したわけではないが、生徒なりに納得・理解が得られる形で問題解決が出来たものと考えて良い。これは、「数学的活動」の賜物である。

6．確率の乗法定理とモンティ・ホールのジレンマ

確率の計算で、事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる確率は、A のもとでの B が起こる「条件付き確率」と言われ、記号 $P_A(B)$ で表される。条件付き確率は、事象 A を起こりうる全ての場合（全事象）と捉えなおし、そのもとで B の起こる事象 $A \cap B$ の割合を求めるものである。$P_A(B)$ は、「確率の乗法定理」として、次で示される。

定理（確率の乗法定理）

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

つまり、

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

モンティ・ホールのジレンマは、この定理を使えば、以下のように解決できる。

解 挑戦者が、最初に当りを選択する事象をA、最後に当てる事象をHとする。まず、いったん挑戦者が当りを選択する確率P（A）、そうでない確率P（$\bar{A}$）について、

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(\bar{A})=\frac{2}{3}\quad \cdots ①$$

となるのは明らかである。(「図1参照」)

i）Case.3

まず、必ずカードを変更する「Case.3」から考える。この場合、「図3，4」で示したように、事象Aが起これば必ずはずれ、事象Aが起こらなければ必ず当るから、以下が成り立つ。

$$P_A(H)=0,\ P_{\bar{A}}(H)=1\quad \cdots ②$$

最終的に当る確率P（H）は、P（A∩H）＋P（$\bar{A}$∩H）であるから、これに乗法定理を適用し、

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A\cap H)+P(\bar{A}\cap H) \\ &= P(A)\times P_A(H)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(H) \\ &= \frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 1 \qquad (\because ①,②) \\ &= \frac{2}{3} \qquad \therefore P(H)=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii） Case.2

次に、カードを変更しない「Case.2」は、前節「図2」で見た通り、事象Aが起これば必ず当り、事象Aが起こらなければ必ずはずれる。

$$P_A(H)=1,\ P_{\bar{A}}(H)=0\quad \cdots ③$$

したがって、

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A\cap H)+P(\bar{A}\cap H) \\ &= P(A)\times P_A(H)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(H) \\ &= \frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times 0 \qquad (\because ①,③) \\ &= \frac{1}{3} \qquad \therefore P(H)=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

以上で、前頁右段枠内の「結論」が得られた。

iii）Case.1

一方、カードを変更するかしないかを挑戦者の自由とした「Case.1」を考えてみたい。

挑戦者がカードを変更するという事象をBとし、挑戦者はk（$0\leqq k\leqq 1$）の確率（頻度）でカードを変更する癖を持っているとする。すなわち、

$$P(B)=k,\ P(\bar{B})=1-k\quad \cdots ④$$

である。ここで、いったん当りを選択する事象Aが起きた場合、その後、変更しない事象$\bar{B}$が起こることで最後は当る。また、はずれを選択する事象$\bar{A}$が起きた場合、変更する事象Bが起こることで最後は当る。したがって、

$$A\cap H=A\cap\bar{B},\ \bar{A}\cap H=\bar{A}\cap B\quad \cdots ⑤$$

また、事象AとBは独立であるから、

$$P_A(\bar{B})=P(\bar{B}),\ P_{\bar{A}}(B)=P(B)\quad \cdots ⑥$$

よって、

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A\cap H)+P(\bar{A}\cap H) \\ &= P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B) \qquad (\because ⑤) \\ &= P(A)\times P_A(\bar{B})+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B) \\ &= P(A)\times P(\bar{B})+P(\bar{A})\times P(B) \quad (\because ⑥) \\ &= \frac{1}{3}\times(1-k)+\frac{2}{3}\times k \qquad (\because ①,④) \\ &= \frac{1+k}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore P(H)=\frac{1+k}{3}\ (0\leqq k\leqq 1)\quad \cdots ⑦$$

注）⑦の（ ）内の等号成立時は、それぞれ「Case.2」、「Case.3」の場合を示している。

7．おわりに

本研究は、「新学習指導要領」の眼目に据えられている「数学的活動」を通した「課題学習」が、生徒の「確率」概念の獲得のため有効に作用する場面を探ったものである。

「直観と実際との違い」を孕んだ「モンティ・ホールのジレンマ」は、「確率」•「条件付き確率」の考えを用いて、数学的に考えることの「必要性」や「よさ」を体験させる良い題材である。生徒は、最初直感で正しいと思ったことが実は誤りであることを知り、真理を見極めるには、数学的な思考と判断が必要となることも学んだと言える。

今回の「課題学習」は、これから学ぶ「確率」の導入として、確率の知識があまりない段階で行った。実験が進むにつれ、様々な生徒の「気付き」を目の当りにすることが出来、授業者の側から見ていても、楽しい実践であった。生徒たちの反応もよく、終始、楽しそうに実験を行いながら、ある段階に入ると急に考え込み、「なぜだろうか？」と考え込む生徒も出て、後のディスカッションも活発となった。中には、原理を理解するところまで到達した生徒も数多くおり、腑に落ちた瞬間、彼らは、「スーッとしたもの」を感じたように見えた。

ただ、理解したことを言葉や文字や式で表現できるまでには、まだかなりのギャップがある。「理解」を「表現」へと持ち上げるための実践方法を生み出すことは、今後の課題といえる。しかしながら、言語や数式での「表現」にたどりつけなくとも、「理解」を得、「概念」を獲得するためには、「数学的活動」が極めて有効な手段であることが改めて認識できた。活動を通して獲得した「理解」、「概念」は、たとえ高度な言語活動に及ばなくても価値の高いものだからである。

この実践では、カードを3枚だけ与えて行ったが、3枚のカードを4枚、5枚、…と増やしていき、同様のルールで行ったり、当りの枚数を増やして行ったりしたら面白い「課題学習」が展開できるであろう。試行自体は複

雑にはなるが、その場合でも、活動を通すことによって、問題の本質を直感的に感じ取れるのではないかと考える。

まず原理・原則を導き、それを利用しながら問題を解決するという通常の授業ではなく、今回の活動は、実験を通して答えを導き、その後、その理論的なことを考えていくという方法を取った。その方法自体も、生徒たちには、新鮮に映ったかもしれない。

最後に、筆者が定期的に配布している「数学通信」（図 5）を紹介しておく。「数学通信」を利用し、事前学習として、確率を学ぶことが日常生活のどのようなところに生かされるのかを紹介した。また、事後学習として、大学で学ぶベイズの定理についても少し触れ、確率について深めることもねらったのである。

引用・参考文献

1）文部科学省『高等学校学習指導要領』、東山書房、p.53、2009.9.30.

2）文部科学省『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』、実教出版、p.5、2009.12.15.

3）佐藤学『学校の挑戦―学びの共同体を創る』、小学館、2006.6.10.

三重県立白子高等学校　数学通信　第12号　上野担当クラス

凡事徹底（ぼんじてってい）

誰にでもできる平凡なことを、誰にもできないくらい徹底してやる

日常生活における確率

私たちが暮らしている日常の中にも様々なところで、確率が登場してきます。少し紹介しますので、見てみ[て]
また、興味があるもの、不思議に思うものは自分で確認してみましょう。

(1)生まれてくる子どもの確率
女の子の確率 ： 49／100
男の子の確率 ： 51／100

(2)三毛猫の確率
オスの三毛猫が生まれる確率 ： 1／30, 000

(3)ガリガリ君の当たりが出る確率 ： 1／25

(4)当たり付き自動販売機の確率 ： 1／100前後

(5)ホールインワンの確率
アマチュアゴルファー ： 1／33, 000
男子プロ ： 1／3, 700
女子プロ ： 1／4, 600

(6)宝くじ一等の当たる確率 ： 1／10, 000, 000

(7)落雷に関する確率
雷にうたれる確率 ： 1／10, 000, 000
雷が直撃して、即死する確率 ： 4／5

(8)自動車事故に関する確率
自動車事故で死ぬ確率 ： 1／10, 000
50年で事故に遭う確率 ： 1／3
一生涯で交通事故で死傷する確率 ： 1／2

(9)一生の内で, 救急車に乗る確率 ： 1／26

(10)四つ葉のクローバができる確率 ： 1／100, 000

(11)黒ひげ危機一髪の当たる確率 ： 100回刺して7. 7回

(12)隣人の確率
隣の人が警察官の確率 ： 1／533
隣の人が消防士の確率 ： 1／833
隣の人が教師の確率 ： 1／95
隣の人が公務員の確率 ： 1／35
隣の人が社長の確率 ： 1／8. 5

(13)血液型に関する確率
血液型がA型の確率 ： 4／10
血液型がO型の確率 ： 3／10
血液型がB型の確率 ： 2／10
血液型がAB型の確率 ： 1／10

(14)週間天気予報で, 7日後の天気が当たる確率(気象庁より) ： 64%
明日 ： 82%
明後日 ： 77%
3日後 ： 71%
4日後 ： 69%
5日後 ： 67%
6日後 ： 65%

(15)浅草寺(東京)のおみくじの確率
大吉 ： 17%
吉 ： 35%
小吉 ： 4%
末吉 ： 6%
末小吉 ： 3%
凶 ： 30%

(16)三択問題10問をヤマカンで答えて6問正解で合格する確率 ： 27. 08%

(17)マンボウの子が大人になる確率 ： 1／3, 000, 000
コメント：3億個くらい卵を産むが、その中で成長するのは、3匹いるかいないかだそうです

(18)アフガニスタンにおける確率
子どもが1歳の誕生日を迎えることなく亡くなる確率 ： 1／9
子どもが5歳未満で亡くなる確率 ： 1／6
15歳以上の人が文字を読めない確率 ： 7／10
家庭がトイレを持っていない確率 ： 1／3
就学年齢の女子が学校に通っていない確率 ： 3／5

三重県立白子高等学校　数学通信　第13号　上野担当クラス

凡事徹底（ぼんじてってい）

誰にでもできる平凡なことを、誰にもできないくらい徹底してやる

確率とは？

中学校でも少し習ったことのある確率。よく、「サイコロを振ったとき、1の目が出る確率は6分の1である」といいます。「サイコロを6回振れば、1回くらいは1が出るだろう」ということでしょうか？
実際、実験したことのある人なら分かると思いますが、そうとは限らないということを知っているでしょう。
ある教科書には、確率について次のように書かれています。

ある事柄の起こることが期待される程度を表す数を、その事柄の起こる確率という

もう少し、分かりやすく言うと次のようなイメージです。

① 偶然的なできごとを何度も観察(もしくは実験)し、ある事柄が起きた回数を数える。

② ある事柄が起きた回数を観察(もしくは実験)した回数で割り、その事柄が起きた割合(相対度数)を求める。

③ 観察や実験の回数が多ければ、ある事柄が起きた割合(相対度数)は、一定の値に近づく。この値のことを、ある事柄が起きる「確率」という。

まとめると、下のようになります。

◆確率とは、ある事柄の「起こりやすさの目安」◆

ex. 1の目が出る確率

1が出た回数 / 振った回数 → 振る回数を増やす → 一定の値 に近づく

↑ 相対度数 という　　↑ 確率 という

「モンティ・ホールのジレンマ」の実験を終えて

今回は、3枚のトランプを用いて、それぞれ10回ずつ実験してもらいました。最初、感じていたことと、実験を通して出てきた答えとが違い、その違いに驚いている人もたくさんいました。中には、どうしてその答えになるのだろうと疑問に思い、数式を用いて、証明しようと試みている生徒もいました。きちんとした説明はまだできないため、今回は簡単な説明に留めておきました。もう少し確率を深めて学んでいくと、これらのことを数式を用いて表現できるようになります。大学で習う公式も含めて、最後に少し紹介しておきます。

<実験を終えての感想>

- 変更した方が当たりやすい。理由は，3枚のうちから1枚引くより，1枚はすでに分かっているので，2分の1になってから引く方が当たる率が高いから。
- Case.3が一番当たる確率が高い。理由は，Case.3は，3つのうちから2つを引くのに対して，Case.2は，3つのうちから1つを引かなければならないからです。(おそらく，原理が分かったのでしょう)
- 必ず変更して戦った場合，当たる確率が3分の2となるので当たりやすい。好きなように戦った場合とカードを変更しない場合の確率はほぼ同じである。
- Case.1，2は3分1，Case.3は3分の2の確率になることは分かったが，まだ何かすっきりしない。
- 変更できない時はオープンしても変えられないからオープンしないのも一緒である。
- 3枚あって，変更する場合は間違っている方。つまり，はずれを引いたら絶対当たりになる。
- 変更しない場合，3枚のうちから1枚選ぶ。変更する場合は3枚から2枚選んだことになる。
- 変更したほうがいい。はずれが2枚あって，はずれを引く方が確率が高い。はずれを引いてたら，変えたら絶対当たりになる。
- ただただ楽しかった。はじめの予想と違っていて意外でした。
- 人間，はずれを引くのが好きみたいです。結果的にそんな気がします。
- 人生当たりばかりは引けないらしいです。

(1)確率の乗法定理

Thm. (確率の乗法定理)

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A B \quad \text{または} \quad P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

が成り立つ。

(2)ベイズの定理(大学の範囲です)

ベイズの定理は，これとは逆に $P_B(A)$ という確率を求めるための公式である。すなわち，Aという原因でBが起こったときに，その原因の起こる確率を求めようとするものである。
そこで，$P(A)$ を原因Aの存在確率(事前確率)，$P_B(A)$ を原因の確率(事後確率)という。 また、$P_B(A)$ には、次のような解釈もできる。

Thm. (ベイズの定理)(Essay Toward Solving a Problem in the Doctorine of Chances)1764年

事象Bは互いに排反な事象 A_1，A_2，･･･，A_n のどれかが起こったときに，初めて起こるものとする。
ただし，$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$ とする。
このとき，

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

が成り立つ。

表記方法をかえると，次のようにも書くことができる。

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k\cap B)}{P(B)}$$

ただし，$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$

図　5