

二次元林分遷移の方程式とその応用に関する研究

田 中 和 博

Studies on the Two-Dimensional Forest Transition Equation and Its Application

Kazuhiro TANAKA

目 次

第1章 緒 言	4
第2章 二次元林分遷移の方程式の理論	5
2.1. 二次元林分遷移の方程式の誘導	5
2.2. 枯死の確率のより一般的な取扱い	8
2.3. 直感的に得られたBACHELIER型二次元林分遷移の方程式の基本解	9
2.4. BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の解法	12
2.4.1 係数関数の関数型	12
2.4.2 BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の解法	13
2.4.3 BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の基本解	17
2.5. BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の初期値解	18
第3章 林木の生長解析と確率論的生長モデルの構築	19
3.1. 確率論的生長モデルに対する基本的見解	19
3.1.1 白色雑音を含むLANGEVINの方程式とそれに従う過程の分散	20
3.1.2 基本となる4モデル	21
3.2. 東京大学千葉演習林固定試験地の資料	26
3.2.1 旧試験地の調査結果	27
3.2.2 新試験地の調査結果	34
3.3. 確率論的直径生長モデル	34
3.3.1 確率論的直径生長モデルの構築	34
i) ある林齢における定期直径生長量と直径の大きさとの関係	34
ii) 直線式のまわりの誤差変動の大きさ	34
iii) 誤差変動の大きさの林齢に伴う変化	45
iv) 誤差変動の自己回帰	45
v) 回帰直線の x 切片の林齢に伴う変化	45

vi) 確率論的直径生長モデル	45
3.3.2 確率微分方程式の解	48
i) 平均直径の生長	48
ii) 直径分散の増加	50
3.3.3 平均直径がMITSCHERLICHの生長法則に従う場合の直径分散の増加	53
i) 直径分散の増加式	53
ii) 直径分散の単調増加性	54
iii) 直径分散の上限値	55
iv) 直径分散増加曲線の形状	56
v) 直径分布の変動係数の林齢に伴う変化	57
3.3.4 今回構築した確率論的直径生長モデルの特徴	57
3.4. 確率論的樹高生長モデル	
なぜ樹高分布の変動係数は直径分布の変動係数よりも小さいのか	58
3.4.1 東京大学千葉演習林新試験地資料の解析結果	59
i) ある林齢における定期樹高生長量と樹高の大きさとの関係	59
ii) 各直径階および樹高階における定期生長量の変動の大きさ	69
iii) 誤差変動の大きさと定期生長量の平均値との関係	70
iv) 直径生長における回帰直線の x 切片の林齢に伴う変化	71
3.4.2 確率論的樹高生長モデルの構築	72
3.4.3 樹高分布の変動係数に関する考察	72
i) 樹高分布の変動係数	73
ii) 直径分布の変動係数	73
iii) 樹高の変動係数と直径の変動係数との関係	74
3.4.4 今回構築した確率論的樹高生長モデルの特徴	77
3.5. 直径生長と樹高生長の相関	77
3.5.1 直径生長の誤差変動量 ϵ_x と樹高生長の誤差変動量 ϵ_y との相関係数の推定	78
3.5.2 z 変換による相関係数の解析	79
3.5.3 ある林齢における直径生長量と樹高生長量の相関	79
3.5.4 直径生長量と樹高生長量に関するモデル	85
3.5.5 直径と樹高の相関係数の経時的変化に関する考察	86
第4章 二次元林分遷移に関する実証的解析	88
4.1. 秋田営林局管内収獲試験地の資料	88
4.2. 林齢に伴う直径・樹高二次元分布型の変化	
平坦地に位置する疎な無間伐林の例	96
4.2.1 深山試験地の概要	96
4.2.2 直径分布型および樹高分布型の変化	97
4.2.3 上層木集団の分布	97
4.2.4 二次元正規性の検定	99
4.2.5 上層木の樹高曲線	100

4.2.6	理論との一致	100
4.2.7	樹高分布のJ型化	101
4.3.	秋田営林局管内収穫試験地における直径・樹高二次元分布のパターン	101
4.3.1	林齢に伴う樹高分布の歪度の変化	103
4.3.2	直径・樹高二次元分布型の分類	103
4.3.3	直径・樹高二次元分布の遷移	108
4.4.	平均胸高直径の生長と直径分散の増加	111
4.4.1	解析対象試験地の選定	111
4.4.2	平均胸高直径の生長とMITSCHERLICHの生長法則	112
	i) 秋田地方スギ林分収穫表の平均直径の生長	112
	ii) 鈴木の研究	119
	iii) MITSCHERLICH式のパラメータIについて	121
4.4.3	直径分散の増加とGOMPERTZ式による近似	122
4.4.4	秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の平均直径の生長と分散の増加	123
4.5.	平均樹高の生長と樹高分散の増加	127
4.5.1	平均樹高の生長とMITSCHERLICHの生長法則	127
4.5.2	樹高分散の増加とMITSCHERLICH式	129
4.5.3	秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の平均樹高の生長と分散の増加	129
4.6.	林齢に伴う直径と樹高との相関係数の変化	133
4.6.1	秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の直径と樹高の相関係数の経時変化	135
4.6.2	直径と樹高の相関係数の経時変化に関する考察	135
4.7.	立木本数減少	137
4.8.	平均直径生長と平均樹高生長の関係	
	二次元分布の中心の軌跡	139
4.8.1	二次元分布の基底平面に平行な切断面	139
4.8.2	中心の軌跡を表わす理論式	139
4.8.3	秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における中心の軌跡	140
4.8.4	東京大学千葉演習林固定標準地における中心の軌跡	144
4.8.5	全国の主要収穫表における中心の軌跡	144
4.8.6	中心の軌跡に関する研究報告例	145
4.8.7	中心の軌跡の一般的な傾向	146
4.9.	林齢に伴う樹高曲線の傾きの変化	147
4.9.1	林齢に伴う楕円の主軸の回転	147
4.9.2	樹高曲線の傾きに関する理論的考察	147
	i) 直径分散の増加および樹高分散の増加がMITSCHERLICH式で表わされる場合の 樹高曲線の傾き	148
	ii) 直径分散の増加および樹高分散の増加がGOMPERTZ式で表わされる場合の 樹高曲線の傾き	149
	iii) 直径分散の増加がGOMPERTZ式、樹高分散の増加がMITSCHERLICH式で 表わされる場合の樹高曲線の傾き	149

4.9.3 郷台1号試験地の解析結果から推定した樹高曲線の傾き	150
4.9.4 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地の例	150
4.9.5 樹高曲線の傾きに関する研究報告例	153
4.9.6 林齢に伴う樹高曲線の傾きの変化の一般的傾向	155
4.10. BACHELIER型二次元林分遷移の例	155
第5章 二次元林分遷移の方程式の応用	158
5.1. 林齢に伴う材積分布の変化	158
5.1.1 材積計算の方法	158
5.1.2 材積分布の変化	158
5.2. 径級別丸太材積の収穫予測	159
5.2.1 用いた相対幹曲線式と計算方法	160
5.2.2 予測結果と考察	160
5.2.3 樹高分布を用いることの重要性	160
5.2.4 収穫予測への応用に対する筆者の立場	160
第6章 結 語	161
謝 辞	165
Summary	166
引用文献・報文目録	169

第1章 緒 言

林業経営において、将来の収穫材積を予測することが、きわめて重要な課題であることは論を待たずでもない。収穫材積を予測する手段として、古来、林分あるいは林木の生長に関する種々の生長式や生長モデルが提案されてきた。その中に、鈴木によって始められた林木の生長を確率過程としてみなす立場の研究がある。この立場の研究は、林分を構成する個々の林木の生長は、ある法則に従いはするものの、それ以外に記述しきれない数多くの生長要因が錯綜し、それによって作り出される変動量が偶然量として付け加わると仮定するものである。林分は、大小様々な大きさの林木から構成されているバラツキを持った集団であるが、このバラツキが偶然量の影響によって引き起こされるものであることを説明しようとするものである。このようなランダムな動きを持つ集団の変化は、これを確率過程とみなすことによって、見通しのよいものとすることができる。

林木の生長を確率過程とみなすこうした考え方は、まず、林齢に伴う直径分布の遷移に対して導入された。直径分布は、生長に伴い、平均値が増大し、同時にその形状が変化していくが、鈴木は1966年に、一斉同齢林直径分布の変化を表わす林分遷移の方程式を誘導した(鈴木 1966, SUZUKI 1971)。これはいわゆるKOLMOGOROVの方程式(KOLMOGOROV 1931)の右辺に、枯死

を表わす第3項が付け加わった方程式である。1967年に鈴木は、現実の林木の生長解析によって見出された事実から、この方程式の係数関数型を定め（鈴木 1967 a），係数関数が直径のみの関数の時の基本解（鈴木 1967 b）と、林齢のみの関数の時の基本解（鈴木 1967 c）を得た。1974年に梅村・鈴木は、吸収壁を持つという境界条件を付けた場合の林分遷移の方程式の解を得、これを直径分布が左偏している一斉同齢林の生長モデルとした（梅村・鈴木 1974, SUZUKI and UMEMURA 1974）。また、西ドイツ国のSLOBODAは、1976年に各時間断面において直径生長が直径の大きさに依存するモデルを発表し（SLOBODA 1976, 1977, 1984），1981年には樹幹形を考慮に入れたモデルを発表した（SLOBODA and SABOROWSKI 1981）。樹幹形の遷移モデルでは、幹曲線は平均幹曲線を中心として分布するとみなされ、その分布の林齢に伴う変化が極座標方向と時間との確率過程としてとらえられている。以上のように、一次元の林分遷移の方程式に関しては、一応の成果が得られている。

ところで、林分の状態を表わすもう一つの重要な因子は樹高であって、次の研究段階として、直径と樹高を2因子とする二次元分布の遷移を考えることは、こうした研究の自然の発展である。本論文は、二次元本数分布の遷移に関して研究したものであり、大きく分けると4つの内容から成り立っている。すなわち、第2章では、二次元林分遷移の方程式を誘導し、あわせてその基本解と初期値問題とについて理論的に考察した。第3章では、東京大学千葉演習林管内の固定試験地資料の解析結果に基づいて確率論的林分生長モデルを構築し、分散の増加を表わす理論式を誘導した。ここで、直径生長モデルは、SLOBODAのモデルを拡張したものである。第4章では、胸高直径と樹高の毎木調査が長年にわたって実施されてきた秋田営林局管内のスギ収穫試験地の資料をもとに、二次元本数分布の形状と二次元林分遷移の傾向について実証的に解析した。最後に、第5章では、二次元林分遷移の方程式を収穫材積の予測に適用した例を示した。

第2章 二次元林分遷移の方程式の理論

2.1 二次元林分遷移の方程式の誘導

林齢 τ における林木の直径を x 、樹高を y として、それらの直径、樹高をもつという事実を林木状態 (x, y) ということに定め、林齢 τ において林木状態 (x, y) を有する本数を $\phi(\tau; x, y)$ とする。林分遷移を考えるときには、正しくは時間も直径、樹高もすべて連続な変数とみなさなければならないはずであるがここでは鈴木の誘導（1979 b, 1983）にならって、すべてを離散的なものと考えておく。すなわち、林齢 τ と微小な時間間隔 $\Delta\tau$ を隔てた林齢 $\tau + \Delta\tau$ だけを取り上げ、直径 x と微小な間隔 Δx だけを離れた直径 $x + \Delta x$ 、あるいは樹高 y と微小な間隔 Δy を離れた樹高 $y + \Delta y$ などだけを考えることにする。

そして微小な時間間隔 $\Delta\tau$ の間の林木状態の遷移とその確率を、図-1のように仮定する。たとえば、ここで林木状態 $(x - \Delta x, y)$ から (x, y) への遷移確率は、 $p_1(x - \Delta x, y) \Delta\tau$ である。しかも、林木状態 (x, y) に関係するものは、その周辺6個の林木状態とその間の遷

移確率に限るものとする。これらの確率はいずれも林齢 τ と直径 x , 樹高 y の関数であるが, いずれも連続でかつ2回まで微分可能と仮定する。したがって, $p_1(x - \Delta x, y) \doteq p_1(x, y)$, $p_2(x - \Delta x, y - \Delta y) \doteq p_2(x, y)$, $p_3(x, y - \Delta y) \doteq p_3(x, y)$ であるから, これらを簡単に p_1 , p_2 および p_3 と書くこともある。また, 林木状態 (x, y) にとどまる確率を $q \Delta \tau$, そこから枯死する確率を $r \Delta \tau$ とすると, 上記の定義から,

$$p_1 \Delta \tau + p_2 \Delta \tau + p_3 \Delta \tau + q \Delta \tau + r \Delta \tau = 1 \quad (1)$$

となることは明らかである。

以上の確率を用いると, 林齢 $\tau + \Delta \tau$ に林木状態 (x, y) となる本数は,

$$\begin{aligned} \phi(\tau + \Delta \tau; x, y) &= \phi(\tau; x - \Delta x, y) p_1(x - \Delta x, y) \Delta \tau \\ &+ \phi(\tau; x - \Delta x, y - \Delta y) p_2(x - \Delta x, y - \Delta y) \Delta \tau \\ &+ \phi(\tau; x, y - \Delta y) p_3(x, y - \Delta y) \Delta \tau \\ &+ \phi(\tau; x, y) q(x, y) \Delta \tau \end{aligned}$$

である。この式の両辺から $\phi(\tau; x, y)$ を引いて、(1) 式を用いれば,

$$\begin{aligned} \phi(\tau + \Delta \tau; x, y) - \phi(\tau; x, y) &= \{ \phi(\tau; x - \Delta x, y) p_1(x - \Delta x, y) \\ &- \phi(\tau; x, y) p_1(x, y) \} \Delta \tau \\ &+ \{ \phi(\tau; x - \Delta x, y - \Delta y) p_2(x - \Delta x, y - \Delta y) \\ &- \phi(\tau; x, y) p_2(x, y) \} \Delta \tau \\ &+ \{ \phi(\tau; x, y - \Delta y) p_3(x, y - \Delta y) \\ &- \phi(\tau; x, y) p_3(x, y) \} \Delta \tau \\ &- \phi(\tau; x, y) r(x, y) \Delta \tau \end{aligned}$$

が得られる。この両辺を $\Delta \tau$ で割り、 $\Delta \tau \rightarrow 0$ の極限をとって、右辺を Δx , Δy のべき級数に展開すると,

図-1. 微小な時間間隔 $\Delta \tau$ の間の林木状態の遷移とその確率

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \doteq & - \frac{\partial (p_1 \phi)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p_1 \phi)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 \\ & - \frac{\partial (p_2 \phi)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial (p_2 \phi)}{\partial y} \Delta y \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p_2 \phi)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 (p_2 \phi)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p_2 \phi)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 - \frac{\partial (p_3 \phi)}{\partial y} \Delta y \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p_3 \phi)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 - r \phi \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \doteq & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (p_1 + p_2) (\Delta x)^2 \phi \} \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{ p_2 \Delta x \Delta y \phi \} \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (p_2 + p_3) (\Delta y)^2 \phi \} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \{ (p_1 + p_2) \Delta x \phi \} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \{ (p_2 + p_3) \Delta y \phi \} - r \phi \end{aligned} \tag{2}$$

が得られる。

ここで、直径の生長の平均値は、

$$\Delta \mu_x = 0 (p_3 + q + r) \Delta \tau + (p_1 + p_2) \Delta x \Delta \tau$$

であるから、両辺を $\Delta \tau$ で割って直径の生長速度

$$\frac{\Delta \mu_x}{\Delta \tau} = (p_1 + p_2) \Delta x \tag{3}$$

が得られる。

同様に、樹高の生長速度として、

$$\frac{\Delta \mu_y}{\Delta \tau} = (p_2 + p_3) \Delta y \tag{4}$$

が得られる。

また直径生長の分散の増加量は、

$$\Delta \sigma_x^2 = 0 (p_3 + q + r) \Delta \tau + (p_1 + p_2) (\Delta x)^2 \Delta \tau$$

であるから、その変化率は、

$$\frac{\Delta \sigma_x^2}{\Delta \tau} = (p_1 + p_2) (\Delta x)^2 \quad (5)$$

同様に樹高生長の分散の変化率は、

$$\frac{\Delta \sigma_y^2}{\Delta \tau} = (p_2 + p_3) (\Delta y)^2 \quad (6)$$

さらに、直径生長と樹高生長の共分散の増加量は、

$$\Delta \sigma_{xy} = 0 (p_1 + p_3 + q + r) \Delta \tau + p_2 \Delta x \Delta y \Delta \tau$$

であるから、その変化率は、

$$\frac{\Delta \sigma_{xy}}{\Delta \tau} = p_2 \Delta x \Delta y \quad (7)$$

である。これら (3) 式から (7) 式は、すべて林齢 τ と、直径 x 、樹高 y の関数であるが、それらをそれぞれ、 β_1 、 β_2 、 $\alpha_{1,1}$ 、 $\alpha_{2,2}$ および $\alpha_{1,2}$ と置けば、(2) 式から二次元林分遷移の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_{1,1} \phi) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (2 \alpha_{1,2} \phi) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha_{2,2} \phi) \right\} \\ & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\beta_1 \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta_2 \phi) \right\} \\ & - r \phi \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。

2.2 枯死の確率のより一般的な取扱い

一次元の林分遷移の方程式 (鈴木 1967 a)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha \phi) - \frac{\partial}{\partial y} (\beta \phi) - c \phi$$

においては、枯死の確率 c を一定と仮定し、

$$\phi = e^{-c\tau} \psi$$

と置いて、これを τ で微分し、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -c e^{-c\tau} \psi + e^{-c\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

これを代入して原方程式を、

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha \psi) - \frac{\partial}{\partial y} (\beta \psi)$$

に改めることができた。

この方法にならって、枯死の確率 γ が τ の関数の場合にも、

$$c(\tau) = \int \gamma(\tau) d\tau \tag{9}$$

と置いて、

$$\phi = e^{-c\tau} \psi \tag{10}$$

と置けば、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\gamma e^{-c(\tau)} \psi + e^{-c(\tau)} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \tag{11}$$

となるから、これを方程式 (8) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_{1,1}(\tau; x, y) \psi) \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\alpha_{1,2}(\tau; x, y) \psi) \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha_{2,2}(\tau; x, y) \psi) \right\} \\ & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\beta_1(\tau; x, y) \psi) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\beta_2(\tau; x, y) \psi) \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

となって、右辺に枯死を表わす第3項を欠いた方程式を得ることができる。

2.3 直観的に得られた BACHELIER 型二次元林分遷移の方程式の基本解

方程式 (12) の係数関数が、すべて林齢 τ のみの関数のとき、この方程式はつぎの (13) 式のような一種の BACHELIER 型の方程式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_{1,1}(\tau) \phi) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\alpha_{1,2}(\tau) \phi) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha_{2,2}(\tau) \phi) \right\} \\ & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\beta_1(\tau) \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta_2(\tau) \phi) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

ところで、この場合には、一次元の場合（鈴木 1967c）からの類推によって直観的に

$$\phi(\tau; x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}Q(x, y)} \quad (14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} Q(x, y) = & \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \\ & + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \end{aligned} \quad (15)$$

なる関数、すなわち二次元正規分布を基本解として選ぶことができる。ここで、 σ_x^2 、 σ_y^2 、 ρ 、 μ_x および μ_y などは、それぞれ直径生長の分散、樹高生長の分散、直径生長と樹高生長の相関係数、平均直径および平均樹高を表わすものとする。これらの係数をすべて林齢 τ のみの関数とすると、(14) 式が、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = & \sigma_x \sigma_x' \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ & + (\rho' \sigma_x \sigma_y + \rho \sigma_x' \sigma_y + \rho \sigma_x \sigma_y') \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ & + \sigma_y \sigma_y' \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \mu_x' \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_y' \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (16)$$

を満足することが知られる。ただし、ここで記号' は τ に関する微分を表わしている。いま、

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\sigma_x)^2 = \sigma_x \sigma_x' = \frac{1}{2} \alpha_{1,1}(\tau) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\rho \sigma_x \sigma_y) &= \rho' \sigma_x \sigma_y + \rho \sigma_x' \sigma_y + \rho \sigma_x \sigma_y' \\ &= \alpha_{1,2}(\tau) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\sigma_y)^2 = \sigma_y \sigma_y' = \frac{1}{2} \alpha_{2,2}(\tau) \quad (19)$$

$$\frac{d}{d\tau} \mu_x = \beta_1(\tau) \quad (20)$$

$$\frac{d}{d\tau} \mu_y = \beta_2(\tau) \quad (21)$$

などの微分方程式の解で、

$$\sigma_x(0) = 0, \quad \sigma_y(0) = 0, \quad \rho(0) = 0 \quad (22)$$

$$\mu_x(0) = 0, \quad \mu_y(0) = 0 \quad (23)$$

などの初期条件を満足する関数を選んで、(14) 式をつくれば、それは方程式 (13) の基本解となる。

なんとなれば、(14) 式は上記のとおり (13) 式を満足するが、さらに $\tau \rightarrow 0$ の極限において、 $\mu_x = \mu_y = \rho = 0$ となることから、

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

となり、これがさらに $\sigma_x = \sigma_y \rightarrow 0$ となることから、

$$\rightarrow \delta(x) \delta(y)$$

となるからである。このように $\tau \rightarrow 0$ のとき $\delta(x) \delta(y)$ に収束する関数を、一次元のときの δ 関数概念の拡張として、 $\delta(x, y)$ と書き、同じように δ 関数と呼ぶことにする。このような δ 関数についても、一次元の場合と同じように、任意の関数 $f(x, y)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) dx dy = f(0, 0) \quad (24)$$

が成り立つことは、それが $\delta(x)$ と $\delta(y)$ との積であることからただちに知られる。以下、基本解 (14) を $\phi_0(\tau; x, y)$ と書くことにする。これを用いれば、方程式 (8) に対する基本解は、

$$\phi_0(\tau; x, y) = e^{-c(\tau)} \phi_0(\tau; x, y) \quad (25)$$

である。

2.4 BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の解法

前節では、BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の基本解が、二次元正規分布であることを直観的に求めた。BACHELIER型の定義により、各係数関数は、林齢のみの関数である。したがって、直径生長の分散、樹高生長の分散、直径生長と樹高生長の相関係数、平均直径および平均樹高は林齢のみの関数として表現される。このうち、直径生長の分散と平均直径については、既に鈴木 (1967c) がある。本節では、樹高生長に対しても鈴木 (1967c) の直径生長に関するモデルを適用した場合についてBACHELIER型二次元林分遷移の方程式の解法を示す。なお、各係数関数の関数型についての詳細な検討は次章でおこなう。

2.4.1 係数関数の関数型

BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の係数関数のうち、直径生長の分散の変化率 $\alpha_{1,1}$ と、平均直径の生長速度 β_1 は、一次元の場合の研究から、

$$\alpha_{1,1}(\tau) = 4 a_1^2 k e^{-2 k \tau} \quad (26)$$

$$\beta_1(\tau) = b_1 l_1 k e^{-k \tau} \quad (27)$$

となることがわかっている (鈴木 1967c, 梅村・鈴木 1974)。すなわち、直径生長の分散 σ_x^2 、平均直径 μ_x の両者とも、

$$\sigma_x^2(\tau) = 2 a_1^2 (1 - e^{-2 k \tau}) \quad (28)$$

$$\mu_x(\tau) = b_1 (1 - l_1 e^{-k \tau}) \quad (29)$$

で表わされるMITSCHERLICHの式に従うことが確認されている。

ところで、平均直径を横軸に、平均樹高を縦軸にとり、各林齢における値をグラフに記してみると、これらの点が直線的に並ぶことがしばしば観察される。そこで、いま、平均直径と平均樹高との間に直線関係が成立するものと仮定する、すると平均樹高生長もMITSCHERLICHの生長法則に従うことになり、しかもパラメータ k の値は、同一の樹木における生長の勢いを表示するものと考えられるので、平均直径の生長の k と同じ値とすることができる。よって、樹高生長の分散の変化率 $\alpha_{2,2}$ と平均樹高の生長速度 β_2 は

$$\alpha_{2,2}(\tau) = 4 a_2^2 k e^{-2 k \tau} \quad (30)$$

$$\beta_2(\tau) = b_2 l_2 k e^{-k \tau} \quad (31)$$

と表わされ、樹高生長の分散 σ_y^2 、平均樹高 μ_y はそれぞれ、

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 a_2^2 (1 - e^{-2 k \tau}) \quad (32)$$

$$\mu_y(\tau) = b_2 (1 - l_2 e^{-k \tau}) \quad (33)$$

の式に従うことになる。

直径成長と樹高生長の共分散 σ_{xy} は一般に

$$\sigma_{xy}(\tau) = \rho(\tau) \sigma_x(\tau) \sigma_y(\tau) \quad (34)$$

と表わされる。 $\rho(\tau)$ は直径生長と樹高生長の相関係数であるが、これは後述するように、ほぼ一定であるとみなすことができるので、ここではその値を一定値 λ とする。よって、直径生長と樹高生長の共分散は、

$$\sigma_{xy}(\tau) = 2 \lambda a_1 a_2 (1 - e^{-2k\tau}) \quad (35)$$

となり、その変化率 $\alpha_{1,2}$ は

$$\alpha_{1,2}(\tau) = 4 a_1 a_2 \lambda k e^{-2k\tau} \quad (36)$$

となる。

要約すると、ここでは平均直径の生長、平均樹高の生長がともにMITSCHERLICHの生長法則に従い、しかもそのパラメータ k の値が共通であるという仮定を置いている。このことについて CZARNOWSKI (1961) は、特定の地位における同齢単純林では、以下の (37) 式が成立すると述べている。

$$d = \alpha (H - X) \frac{1}{z + 1} \quad (37)$$

ただし

d : 地上高 X で測定された林分の平均直径

α : 林分密度の大きさに依存する比例定数

H : 林分平均樹高

z : 林分密度指数 (単位面積当たりの正常林分の本数と現実林分の本数との比で表わす)

(37) 式は、地上高 X で測定された平均直径と X から平均樹高までの長さとの比例関係にあることを示している。つまり、平均直径と平均樹高との間に直線関係があることを示している。そして、両者の関係が直線関係からはずれるのは、林分の込み合い度の変化によると述べている。また、寺崎ら (1964) は、秋田スギの同齢人工林の資料をもとに、主林木平均直径と主林木平均樹高の関係を調べ、両者の間には直線式もかなりよい適合を示していることを報告している。このことから、上記の仮定は妥当と考えられる。

2.4.2 BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の解法

前述のように、各係数関数が (26) 式, (27) 式, (30) 式, (31) 式および (36) 式で表わされるような τ のみの関数であると仮定すれば、二次元林分遷移の方程式 (8) 式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (4 a_1^2 k e^{-2k\tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2})$$

$$\begin{aligned}
& + 8 a_1 a_2 \lambda k e^{-2 k \tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\
& + 4 a_2^2 k e^{-2 k \tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\
& - (b_1 l_1 k e^{-k \tau} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
& + b_2 l_2 k e^{-k \tau} \frac{\partial \phi}{\partial y}) - \gamma \phi
\end{aligned} \tag{38}$$

と書ける。ここで、

$$\phi(\tau; x, y) = e^{-\int \gamma(\tau) d\tau} \phi(\tau; x, y) \tag{39}$$

という変数変換を行うと、右辺に枯死を表わす第3項を欠いた方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} (4 a_1^2 k e^{-2 k \tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
& + 8 a_1 a_2 \lambda k e^{-2 k \tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\
& + 4 a_2^2 k e^{-2 k \tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}) \\
& - (b_1 l_1 k e^{-k \tau} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
& + b_2 l_2 k e^{-k \tau} \frac{\partial \phi}{\partial y})
\end{aligned} \tag{40}$$

を得ることができる。ここで $\phi(\tau; x, y)$ は枯死するものを除外した直径・樹高別の立木本数分布であり、

$$e^{-\int \gamma(\tau) d\tau}$$

という項は本数減少を示すものである。

ここで、

$$t = \int_0^\tau 2 k e^{-2 k s} ds = 1 - e^{-2 k \tau} \tag{41}$$

$$\xi = \frac{1}{a_1} \{x - b_1 (1 - l_1 e^{-k\tau})\} \quad (42)$$

$$\eta = \frac{1}{a_2} \{y - b_2 (1 - l_2 e^{-k\tau})\} \quad (43)$$

という変数変換を行えば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = & 2k e^{-2k\tau} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{b_1 l_1}{a_1} k e^{-k\tau} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ & - \frac{b_2 l_2}{a_2} k e^{-k\tau} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \quad (49)$$

となり、これらを (40) 式に代入すれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \quad (50)$$

となる。ここでさらに

$$u = \xi + \eta \quad (51)$$

$$v = \xi - \eta \quad (52)$$

とおけば

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \quad (55)$$

となり, (50) 式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 2(1+\lambda) \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + 2(1-\lambda) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \quad (56)$$

となる。また

$$X = \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda)}} u \quad (57)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2(1-\lambda)}} v \quad (58)$$

とおくと

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = \frac{1}{2(1+\lambda)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = \frac{1}{2(1-\lambda)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \quad (60)$$

となり, (56) 式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \quad (61)$$

に変形された。これは二次元の熱伝導の方程式にほかならない。

この方程式の特殊解をもとめるために,

$$\phi = \frac{1}{t} e^{-(X^2+Y^2)/4t} \quad (62)$$

という解を仮定してみる。両辺の対数をとれば

$$\log \phi = -\log t - \frac{X^2+Y^2}{4t} \quad (63)$$

となるから, これを t で微分すれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{t} + \frac{X^2+Y^2}{4t^2}\right) \phi \quad (64)$$

を得る。また

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -\frac{X}{2t} \phi \quad (65)$$

だから

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = -\frac{\phi}{2t} \left(1 - \frac{X^2}{2t}\right) \quad (66)$$

を得、同様に

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = -\frac{\phi}{2t} \left(1 - \frac{Y^2}{2t}\right) \quad (67)$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} &= -\frac{\phi}{2t} \left(1 - \frac{X^2}{2t} + 1 - \frac{Y^2}{2t}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{t} + \frac{X^2 + Y^2}{4t^2}\right) \phi \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (68)$$

となり、これは

$$\phi = \frac{1}{t} e^{-\frac{X^2 + Y^2}{4t}}$$

が方程式 (61) の解であることを示している。これの全区間での積分の値が 1 になるように 4π で割ったもの

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{X^2 + Y^2}{4t}} \quad (69)$$

を特殊解としておく。

2.4.3 BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の基本解

δ 関数を初期条件とする熱方程式の解を熱方程式の基本解という。特殊解 (69) 式は、 $\tau \rightarrow 0$ のとき $\delta(x) \delta(y)$ に収束するから基本解である。(69) 式における変数 X, Y を、変数変換の (57), (58) 式, (51), (52) 式, (41), (42) および (43) 式によって元の変数 τ, x, y にもどせば

$$\phi_0(\tau; x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\lambda^2}\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2(1-\lambda^2)}Q(x, y)} \quad (70)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\lambda(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \\ &\quad + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \end{aligned} \quad (71)$$

であり、

$$\mu_x = b_1 (1 - l_1 e^{-k\tau})$$

$$\sigma_x^2 = 2 a_1^2 (1 - e^{-2k\tau})$$

$$\mu_y = b_2 (1 - l_2 e^{-k\tau})$$

$$\sigma_y^2 = 2 a_2^2 (1 - e^{-2k\tau})$$

$$\lambda = \text{const}$$

である。

これに本数減少を示す項 $e^{-\int \gamma(\tau) d\tau}$ を (72) 式

$$\phi_0(\tau; x, y) = e^{-\int \gamma(\tau) d\tau} \phi_0(\tau; x, y) \quad (72)$$

のように付け加えれば、二次元林分遷移の方程式の基本解 $\phi_0(\tau; x, y)$ が得られる。これは前に直観的に求めた基本解と同じ二次元正規分布である。

2.5 BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の初期値解

前述の基本解を用いれば、任意の初期分布 $f(x, y)$ に対応する初期値解は、一次元の場合 (鈴木 1967c) と同じように、この初期分布に基本解を“たたみ込む”ことによって得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \phi(\tau; x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \phi_0(\tau; x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (73)$$

とすればよいことが知られる。なぜなら、 $\tau \rightarrow 0$ のとき、

$$\phi_0(\tau; x - \xi, y - \eta) \rightarrow \delta(x - \xi, y - \eta) \text{ となることから、}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ = f(x, y) \end{aligned} \quad (74)$$

となるからである。

前述のような係数関数が τ のみの関数となる BACHELIER の放物型方程式は、いわゆる発展方程式であって、その初期値問題については、たとえば、HILLE-吉田の半群の理論を一般化した田辺らの理論によって、その解の存在と一意性が証明されている (田辺 1975)。したがって、今回

得た解も、原方程式を満足し、初期条件を満足していることから、その一意性のゆえをもって、それが唯一の解であることを主張することができる。

第3章 林木の生長解析と確率論的生長モデルの構築

3.1 確率論的生長モデルに対する基本的見解

前章で述べた林分遷移の方程式は、係数関数の関数型を与えることによって具体的なモデルとして表わされる。一次元の林分遷移の方程式を誘導した鈴木は、二つのモデルを提唱した。一つは、一連の報告の第III報に発表されたもので、係数関数が直径のみの関数となっているモデルである(1967b)。もう一つは、第IV報に発表されたもので、係数関数が林齢のみの関数となっているモデルである(1967c)。すなわち、BACHELIER型の場合である。ここで注目すべきことは、どちらのモデルにおいても、林分の平均直径の生長がMITSCHERLICHの生長法則に従うと仮定されていることである。いま、林齢 t における平均直径を $\bar{x}(t)$ すれば、MITSCHERLICHの生長法則は次式のように表わされる。

$$\bar{x}(t) = M(1 - l \exp(-kt)) \quad (75)$$

ここで M , k , l はパラメータである、この(75)式を、林齢 t について微分してみると、これは(76)式のように、 \bar{x} の関数としても表現できるし、また(77)式のように t の関数としても表現できる。

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = k(M - \bar{x}(t)) \quad (76)$$

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = Mk l \exp(-kt) \quad (77)$$

上述の鈴木モデルの場合、第III報のモデルでは(76)式が使われており、第IV報では(77)式が使われている。第III報のモデルの基本解は、

$$\phi_0(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 \tau}} e^{Q_3(\tau, x)} \quad (78)$$

である。ただし、

$$Q_3(\tau, x) = -c\tau - \frac{\{\log(M-x) - (a^2-b)\tau\}^2}{4a^2\tau} \quad (79)$$

である(1967b, 1979a)。第IV報の基本解は、

$$\phi_0(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(1 - \exp(-2k\tau))}} e^{Q_4(\tau, x)} \quad (80)$$

である。ただし、

$$Q_4(\tau, x) = -c\tau - \frac{\{x - M(1 - \exp(-k\tau))\}^2}{4a^2(1 - \exp(-2k\tau))} \quad (81)$$

である(1967c, 1979a)。ここで a 、 b 、 c 、 M および k は、パラメータである。(78)式で表わされる基本解は非対称な直径分布であり、 M よりも大きな直径をもつ林木は出現しない。これに対して、(80)式で表わされる基本解は正規分布であり、平均直径の生長限界は M であるが、十分な時間が経過した後では、林木のうち半数のものはその限界を超えている。このように、平均直径の生長に対して同じMITSCHERLICH式を仮定しても、それを直径の関数として表現するか、林齢の関数として表現するかで、結果が大きく変わってしまう。本節では、この点についての理解を深めることを目的として、基本となる4つのモデルについて考察する。本題に入る前に、LANGEVINの方程式とそれに従う過程の分散について説明しておく。

3.1.1 白色雑音を含むLANGEVINの方程式とそれに従う過程の分散

いま、粒子の位置 $x(t)$ を表わす(82)式のような線形非斉次微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \quad (82)$$

ここで、非斉次項 $f(t)$ は外力の意味をもっている。 $f(t)$ が普通の関数であるならば、初期条件を与えることによって、これを一意的に解くことができる。しかし $f(t)$ が確率的に変化する不規則な力であるならば、これを一意的に解くことはできない。一般に、確率的に変化する外力、すなわち確率過程で表わされる外力を非斉次項にもつ方程式をLANGEVIN方程式といい、その外力を揺動力とよんでいる。以下に、その例をあげる。ここで、 $F(t)$ は揺動力である。

$$\frac{dx}{dt} = F(t) \quad (83)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2c + F(t) \quad (84)$$

$$\frac{dx}{dt} + \lambda x = F(t) \quad (85)$$

(83)式は、粒子の動きが揺動力だけに支配される場合である。(84)式は、速さ $2c$ で移動している粒子に揺動力が働いている場合である。 c は漂速とよばれる。(85)式は、ある場所に向かって粒子を引っ張る力、すなわち、吸引力が働いている場合である。この方程式によって記述される確率過程はORNSTEIN-UHLENBECK過程とよばれている。

ここで、特別な場合のLANGEVIN方程式を考える。すなわち、揺動力が白色雑音の場合である。白色雑音とは、一定のスペクトル密度を有する不規則関数のことであるが、通俗的に解釈するならば、まったくでたらめな揺動力と考えてよい。この不規則関数は、光波ならば白色光であり、音波であるならば、ものすごい雑音として聞こえるものである。(83)式において、揺動力を白

色雑音に置き換えると、これはいわゆるBROWN運動を表わす方程式となる。この方程式によって記述される確率過程はWIENER過程とよばれている。

つぎに、白色雑音を含むLANGEVINの方程式によって記述される過程について、粒子の位置の期待値と分散を求めてみよう。例として、ORNSTEIN-UHLENBECK過程の場合を示す。いま、白色雑音を $P(t)$ で表わすと、同過程は、

$$\frac{d x}{d t} + \lambda x = P(t) \tag{86}$$

として表わされる。 $t = 0$ のときの初期値を x_0 として、この1階線形微分方程式を解けば、

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \xi} P(\xi) d \xi \tag{87}$$

となる。ここで、あとで行う説明の都合を考慮して、(87) 式を (88) 式のように変形しておく。

$$x(t) - x_0 e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \xi} P(\xi) d \xi \tag{88}$$

ところで、一般に

$$\Omega = \int_0^t \omega(\xi) P(\xi) d \xi \tag{89}$$

という量を考えると、その分布密度は

$$W(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \int_0^t \omega^2(\xi) d \xi}} \exp\left(-\frac{|\Omega|^2}{4D \int_0^t \omega^2(\xi) d \xi}\right) \tag{90}$$

で与えられる (堀 1977)。ただし、 D は白色雑音の強さである。(88) 式の右辺は (89) 式とちょうど同じ形をしている。よって、粒子の位置 $x(t)$ の分布密度は

$$W(x, t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi D (1 - e^{-2\lambda t})}} \exp\left(-\frac{\lambda |x - x_0 e^{-\lambda t}|^2}{2D (1 - e^{-2\lambda t})}\right) \tag{91}$$

と求まる。すなわち、 $x(t)$ の分散は

$$\sigma^2(t) = \frac{D}{\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \tag{92}$$

である。

3.1.2 基本となる4モデル

白色雑音を含むLANGEVINの方程式によって記述される過程について、その分布密度が一般的に示されたので、後述のような4つの単木直径生長モデルを想定し、それぞれのモデルに対する分散式を求めた。ただし、4モデルとも、林分の平均直径の生長はMITSCHERLICHの生長法則

$\bar{x}(t) = M(1 - l \exp(-kt))$ に従うものとした。ここで、 $\bar{\quad}$ は平均を意味し、 x は直径、 t は林齢、 M, k, l はパラメータである。また、4モデルとも、直径の生長速度を、MITSCHERLICHの生長法則を表わす項とランダム変動を表わす項との和とした。ここでは、ランダム変動を白色雑音 $P(t)$ と仮定し、その強さを D とした。以下、4つのモデルを順に説明する。

モデル1：MITSCHERLICHの生長法則は直径の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが一定な場合

これを微分方程式で表わせば、(93) 式となる。

$$\frac{dx}{dt} = k(M - x) + P(t) \quad (93)$$

これは、鈴木(1967a)の単木直径生長モデル(1967a)としてよく知られている。形式的には、漂速 $kM/2$ と吸引力をもったLANGEVINの方程式である。各時間断面における直径生長量を縦軸に、直径を横軸にとって図示すれば、このモデルでは図-2のように、両者の間には負の線形関係が成り立ち、右下がりの傾きをもった回帰直線が得られる。すなわち、各時間断面における直径生長量は、直径の大きな林木ほど小さい。このモデルの分散式を上述の方法に従って計算すると、(94)式が得られ、鈴木が導いた式(1967a)と一致する。

$$\sigma^2(t) = \frac{D}{k} (1 - e^{-2kt}) \quad (94)$$

このように、モデル1では、分散の増加もまたMITSCHERLICH式に従っている。

モデル2：MITSCHERLICHの生長法則は林齢の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが一定な場合

鈴木(1967a)の単木直径生長モデル(93)式においてMITSCHERLICHの生長法則の部分を実年齢の関数として表わせば、LANGEVINの方程式は(95)式となる。

$$\frac{dx}{dt} = Mkl e^{-kt} + P(t) \quad (95)$$

この場合は、各時間断面における直径生長量のうち、MITSCHERLICHの生長法則によって規定される量は、直径にかかわらず一定となる。すなわち、回帰直線は横軸に平行となる(図-2)。分散は、(96)式で示されるように、林齢に伴い直線的に増加する。

$$\sigma^2 = 2Dt \quad (96)$$

モデル1とモデル2は、ともに、直径の生長速度を、MITSCHERLICHの生長法則を表わす項とランダム変動を表わす項との和として考えているが、直径の関数とするか、林齢の関数とするかに応じて得られた分散は異なっている。モデル1の場合は吸引力があるため吸引と拡散との均衡点が存在し、その結果、分散の上限値が D/k となるが、モデル2の場合は、時間がどれほど経過しても、ランダム変動 $P(t)$ の影響がいつまでも存在するため、分散に上限値はない。

モデル3：MITSCHERLICHの生長法則は林齢の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例する場合

モデル2では、ランダム変動の大きさが一定であったため、その影響がいつまでも残り、分散は林齢に比例して増大していた。ランダム変動の大きさが林齢に伴い漸減し、究極的にゼロになるのであれば分散は上限値をもつものと考えられる。平均直径の生長速度がMITSCHERLICHの生長法則に従うと仮定しているため、この生長速度は林齢に伴い指数関数で減少するが、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例すると考えるのは、不自然な仮定ではない。いま、比例定数を r とすると、(95) 式のLANGEVINの方程式は (97) 式のように書き換えられる。

$$\frac{dx}{dt} = M k l e^{-k t} + r M k l e^{-k t} \cdot P(t) \quad (97)$$

この場合の分散式は (98) 式で与えられる。これは、モデル1と同様、MITSCHERLICH式である。ただし、上限値は異なり、その値は、パラメータ k および白色雑音の強さ D に比例し、またパラメータ M 、 l および比例定数 r に関してそれぞれの2乗に比例している。

$$\sigma^2(t) = D r^2 M^2 k l^2 (1 - e^{-2 k t}) \quad (98)$$

林分遷移の方程式において、その係数関数が林齢のみの関数であるとき、これをBACHELIER型と称する。BACHELIER型のモデルを作成する場合は、その係数関数の関数型を決定する段階から、林齢のみの関数で考察するのが合理的であると考えられる。ところで、梅村・鈴木は尾鷲市内のヒノキ林の資料を分析した結果、次のように述べている。『現実の直径遷移確率も主に林齢に関係しているが、個々の林分の直径には関係しないことがわかった。(中略)。その比(比較的短い時間に、一つ上の径級に進級する確率と元の径級にそのままとどまる確率との比：筆者注)を標準地別、林齢別、径級別に比較したところ、はじめの標準地と林齢には有意差があったが、径級には有意差はなかった。(中略)。このことによって、われわれが係数関数を τ のみの関数と考えたことが一応正しかったものと考えられる。しかしながら、この点はさらに詳細な検討を要するところであろう。』(1974)。ここで展開されている内容は、比較的短い期間の直径生長量は直径に依存しないというものであり、モデル2およびモデル3の考え方に近い立場である。しかしながら、この件に関しては、その後の発表はないようである。これは、一つには、モデル3の分散式とモデル1の分散式とが、どちらもMITSCHERLICH式で表わされ、よく似ていたため、実用上問題が生じず、その結果詳細に検討されなかったからではないかと考えている。もう一つの理由は、後で紹介するように、モデル3を一般化したものがSLOBODAによって発表された(1976)ためであろう。

モデル4：MITSCHERLICHの生長法則は直径の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例する場合

モデル3では、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例して減少することを仮定として採用したが、この考え方をモデル1に適用したのがモデル4である。この仮定に基づけば、

(93) 式のLANGEVINの方程式は (99) 式のように書き換えられる。また、分散は (100) 式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = k(M-x) + rMkl e^{-kt} \cdot P(t) \quad (99)$$

$$\sigma^2(t) = 2Dr^2M^2k^2l^2e^{-2kt} \cdot t \quad (100)$$

分散は最初は単調増加するものの、林齢 $1/(2k)$ で最大値に達し、その後は単調減少してゼロに収束する (図-2)。すなわち、最初のうちは生長に伴う分散の増加が認められるが、生長の衰えとともに吸引力の影響が絶大となる。

以上、4つのモデルについて、それぞれの分散式を求め、その特徴を考察したが、ここでそれらを整理し、比較する。図-2に、4モデルについて、各時間断面の模式図と林齢に伴う分散の変化図を一枚の図にまとめて示した。この図では、MITSCHERLICHの生長曲線のパラメータを以下のような値に指定した。すなわち、 $M=50$ 、 $k=0.02$ 、 $l=1.0$ 、 $r=0.3$ 、 $D=1.0$ である。これらのパラメータは、スギの同齢単純林の標準的な値である。

各時間断面の模式図では、縦軸に生長速度、横軸に直径をとり、直径に対する生長速度の回帰直線を示した。よって、モデル1と4では、回帰直線は右下がりの直線となっており、モデル2と3では、回帰直線は横軸に平行な直線となっている。時間断面は、林齢20年、40年および60年の場合を示し、図の尺度は同一とした。各時間断面において、縦軸はランダム変動の大きさを表わし、回帰直線との交点の x 座標はその時点における平均直径を、 y 座標は平均直径木の平均生長速度を示している。この場合、生長速度と直径の間に線形関係が成立しているから、平均直径木の平均生長速度は、全林木の生長速度の平均に等しい。なお、図に描かれているランダム変動の大きさは、図を見やすくするため、適宜縮小したものである。しかし、モデル1と2および3と4とでは同一の縮尺にした。

また、林齢20年、40年および60年の時間断面を一枚の図に表わしたのも添えた。モデル2および3には、右下がりの直線が描かれているが、これは、平均直径の生長がMITSCHERLICHの生長法則に従うことを示している。

林齢に伴う分散の変化を、図-2の下から2番目に示した。モデル3および4の分散は、モデル1および2のそれと比較して、相当小さい。モデル1と3は、上限値のみが異なる同じMITSCHERLICH式によって表されているが、モデル1の上限値が 50cm^2 であるのに対して、モデル3のそれは 4.5cm^2 と約10分の1の大きさである。

林齢に伴う変動係数の変化を図-2の一番下に示した。現実の同齢単純林では、直径分布の変動係数は20数%であり、生長に伴い微増する。モデル1では、変動係数は漸減しており、また、幼齢期の値は大きすぎると考えられる。モデル3でも、変動係数は漸減しており、その値も幼齢期を除いて全体に小さすぎる。これらの結果は、直径分散の増加には、ランダム変動以外の他の

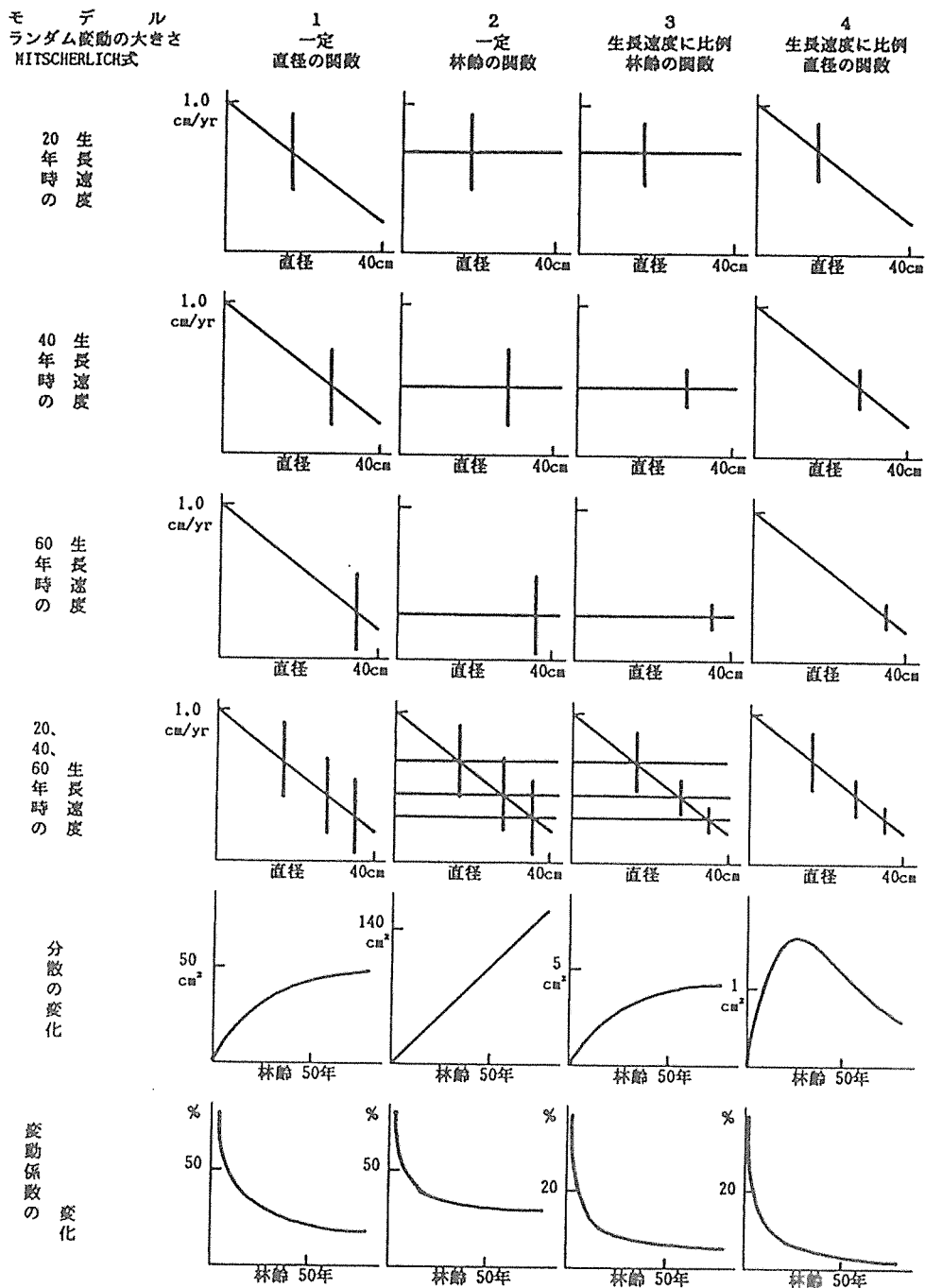


図-2. 4つのモデルの比較 ($M=50$, $k=0.02$, $l=1.0$, $r=0.3$, $D=1.0$)
各時間断面において、縦線はランダム変動の大きさを表わし、回帰直線との交点の x 座標はその時点における平均直径を、 y 座標は平均直径木の平均生長速度を示している。

要因も関与していることを示唆している。よって本研究では、まず、現実の林分の直径生長を詳細に解析することにした。次節では、解析に用いた東京大学千葉演習林の固定試験地の資料について説明する。

3.2 東京大学千葉演習林固定試験地の資料

本研究では、二次元林分遷移の方程式に関する研究の基礎として、BACHELIER型の場合の基本解の遷移について解析し考察することを目的としている。よって資料には、単純一斉同齡林で、しかも、間伐などの人為による影響をなるべく受けていない林分が適している。

ところで、二次元林分遷移を研究するには、胸高直径と樹高を毎木調査した資料が必須である。しかも、同一林分が、幼齡期から老齡期に至るまで長期にわたって測定されていることが望ましい。しかし、樹高測定は、多大の時間と労力を要するから、一般に、樹高の毎木測定は行われていない。よって、このような資料は、試験研究を目的とした固定標準地以外に見出すのは困難であると考えられる。

固定標準地は、林業試験場、大学の研究室および演習林によって数多く設定されているが、それらのうちの主なものを検討した結果、本研究では、秋田営林局管内のスギ収穫試験地の調査結果と東京大学農学部附属千葉演習林内の森林試験測定地の調査結果を用いることにした。秋田営林局管内のスギ収穫試験地は、胸高直径と樹高の毎木調査がほぼ5年おきに実施されており、二次元林分遷移を研究するには、わが国では、最も内容が充実している資料であろう。しかし残念なことに、個々の林木の生長経過は公表されていない。東京大学千葉演習林の試験地は、新旧の2種類がある。旧試験地は、樹高が標準木しか測定されていないものの、直径については個々の林木の生長経過を林齢10年から80年前後まで追跡することができ、しかも測定回数が一試験地当たり平均14.1回と多いため、林木の生長を解析するうえで貴重な資料である。また、新試験地は、まだ2回しか測定されていないものの、直径と樹高の両方について毎木測定が実施されている。

本章では、直径生長および樹高生長を解析した結果に基づいて、確率論的生長モデルを構築し、林分遷移の方程式の係数関数型を具体的に表現することを目的としている。よって、個々の林木の生長経過をたどることが可能な千葉演習林の資料を用いることにした。秋田営林局管内の収穫試験地資料は、係数関数型が確定したのちに利用することにしたので、資料の説明と解析は次章で行う。なお、千葉演習林の試験地については、筆者は、1983年（昭和58年）の夏から秋にかけて、現存する旧試験地の胸高直径と樹高の毎木調査に、1984年（昭和59年）四月には、新試験地の2回目の定期調査に、1986年（昭和61年）二月には、旧試験地の定期調査に参加し、それぞれ調査結果をとりまとめた。

以下、東京大学農学部附属千葉演習林内森林試験測定地の調査結果について、その概要を説明する。

3.2.1 旧試験地の調査結果

東京大学農学部附属千葉演習林内森林試験測定値は、吉田正男教授（当時）の発意により、1916年（大正5年）に21箇所設定された。その内訳は、スギ16箇所、ヒノキ4箇所、クスノキ1箇所であって、総面積は1.249haであった。その後、1940年（昭和15年）にスギ林1箇所が追加された。試験地の中には、台風の被害などにより試験打ち切りとなったり、周囲の林分とともに伐採されたものがあり、現在まで測定が継続されている試験地は、13箇所、総面積1.194haである。その内訳は、スギ8箇所、ヒノキ4箇所、クスノキ1箇所である。表-1に、現在まで測定が継続されているスギおよびヒノキ試験地の概要を示した。このうち、郷台1号、同2号、安野1号、同2号、南沢3号、牛ぼう沢および大平1号、同2号の8試験地については、竹内・長谷川によって、1971年（昭和46年）までの測定結果が整備され、林分生長資料として公表された（1975）。

これらの試験地では、胸高は地上4尺（1.21m）であり、その位置に墨で印が付けてある。胸高直径は、輪尺により直角な2方向を0.1cmまで測定してある。なお、本研究では、2方向の平均値を用いた。樹高は、当初はコンパスを用いて測定したが、最近ではブルーメライスを用いている。

次節での直径生長の解析には、郷台1号試験地の資料を用いた。これは、同林分の直径分布が正規分布に近い形状を示していたためである。筆者の経験では、立木密度が普通で地位上に属する林分は、単一斜面上に成林している場合は、しばしば、直径分布が正規分布に近い形状を呈するようである。本研究では、解析の都合上、測定期間がほぼ十年になるような林齢の調査結果のみを用いた。すなわち、林齢16年、25年、35年、45年、55年および65年の調査結果を用いた。林齢76年の調査結果は、林道工事のために生じた土砂による根元の埋もれの影響が一部に認められたので、使用しなかった。なお、被圧木の生長経過が解析結果に及ぼす影響をできるかぎりさけるため、調査木のうち78年生まで生存していた林木のみを解析の対象とした。また、生長経過から判断して、明らかに測定ミスと思われる資料は棄却した。

表一 1-1. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (郷台 1 号試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 11C, 面積: 0.14ha, 傾斜: 急, 樹種: スギ														
	1916	1921	1925	1930	1935	1940	1948	1950	1957	1960	1965	1970	1976	1981	1983
立木本数	541	492	271	238	238	192	131	131	131	130	129	123	107	107	107
立木密度 (本/ha)	3837	3489	1922	1688	1688	1362	929	929	929	922	915	872	759	759	759
平均直径 (cm)	12.4	14.4	18.1	20.2	21.8	24.3	28.5	29.4	31.4	31.9	33.4	34.7	36.8	38.0	37.9
直径分散 (cm ²)	10.86	12.87	12.09	16.11	21.82	26.51	36.63	41.41	53.78	57.53	68.03	74.31	71.97	84.63	85.45
直径変動係数 (%)	27	25	19	20	21	21	21	22	23	24	25	25	23	24	24
断面積合計 (m ² /ha)	49.46	60.50	51.46	55.97	66.08	66.16	61.83	65.98	75.89	77.89	84.88	87.35	85.11	90.89	90.68
樹高測定木本数	30	31	25	20	13	19	20	20	20	26	27	22	22	22	107
平均樹高 (m)	9.9	11.9	13.0	14.9	15.7	17.3	20.5	22.0	22.0	22.0	21.9	25.1	26.0	26.0	26.0
樹高分散 (m ²)	0.89	1.47	2.09	3.06	4.36	2.04	4.68	3.31	6.08	9.89	9.97	11.85	11.85	11.85	11.85
樹高変動係数 (%)	9	10	11	12	13	8	11	8	11	14	13	13	13	13	13

田 中 浩 幸

林齢65年までは、竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

表一 1-2. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (郷台 2 号試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 10C, 面積: 0.034ha, 傾斜: 緩, 樹種: スギ														
	1916	1921	1925	1930	1935	1940	1948	1950	1957	1960	1965	1971	1976	1981	1983
立木本数	100	100	68	61	61	39	25	25	25	25	25	23	23	22	20
立木密度 (本/ha)	2941	2941	2000	1794	1794	1147	735	735	735	735	735	676	676	647	588
平均直径 (cm)	11.6	13.4	17.3	18.8	20.0	23.8	27.0	28.9	31.2	31.9	34.0	35.7	36.3	38.4	40.4
直径分散 (cm ²)	10.53	17.43	11.03	15.12	24.33	31.34	48.36	59.55	88.96	98.07	120.00	121.62	141.85	172.52	152.67
直径変動係数 (%)	28	31	19	21	25	24	26	27	30	31	32	31	33	34	31
断面積合計 (m ² /ha)	33.30	45.26	48.71	51.86	59.98	53.83	45.02	51.61	61.35	64.50	73.69	73.99	77.34	83.14	82.63
樹高測定木本数	10	9	9	8	6	4	8	8	8	9	9	8	8	8	20
平均樹高 (m)	10.0	12.3	13.0	14.9	16.3	18.3	19.8	22.2	23.4	26.7	25.1	27.1	27.1	27.1	27.1
樹高分散 (m ²)	1.85	1.59	2.16	5.00	6.46	4.02	6.94	10.67	13.33	25.50	13.02	19.79	16.13	16.13	16.13
樹高変動係数 (%)	14	10	11	15	16	11	13	15	16	19	14	16	16	15	15

林齢69年までは、竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

表一 1 - 3. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (安野 1 号試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 2 C _s , 面積: 0.109ha, 傾斜: 緩, 樹種: スギ													
	1916	1921	1925	1930	1935	1941	1950	1957	1960	1965	1971	1976	1981	1983
立木本数	388	386	310	308	307	305	292	165	165	156	155	150	146	143
立木密度 (本/ha)	3560	3540	2844	2826	2817	2798	2679	1514	1514	1431	1422	1376	1339	1312
平均直径 (cm)	7.1	8.4	10.2	10.8	11.9	12.8	14.5	18.0	18.9	20.2	21.3	22.2	23.4	23.7
直径分散 (cm ²)	3.80	5.32	5.77	7.32	9.34	12.81	20.30	20.99	24.89	29.72	37.33	44.17	57.01	59.26
直径変動係数 (%)	28	27	23	25	26	28	31	25	26	27	29	31	33	33
断面積合計 (m ² /ha)	15.06	21.07	24.64	27.47	33.23	38.71	48.47	41.02	45.30	49.00	54.98	57.64	63.61	63.89
樹高測定木本数	30	28	29	29	26	23	35	35	41	41	41	41	41	143
平均樹高 (m)	5.6	7.2	7.6	8.8	9.4	9.9	12.3	14.2	15.3	15.1	16.4	16.4	16.4	18.6
樹高分散 (m ²)	0.77	1.61	1.34	1.94	2.74	0.88	2.99	3.17	5.47	7.74	5.96	5.96	5.96	8.81
樹高変動係数 (%)	16	18	15	16	18	10	14	13	15	18	15	15	15	16

林齢68年までは、竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

表一 1 - 4. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (安野 2 号試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 2 C _s , 面積: 0.073ha, 傾斜: 平, 樹種: スギ													
	1916	1921	1925	1930	1935	1941	1950	1957	1960	1965	1971	1976	1981	1983
立木本数	269	267	179	179	178	176	170	106	106	92	91	87	85	85
立木密度 (本/ha)	3685	3658	2452	2452	2438	2411	2329	1452	1452	1260	1247	1192	1164	1164
平均直径 (cm)	11.0	12.1	14.0	14.8	15.7	16.7	18.5	21.5	22.2	23.6	24.9	25.7	27.0	27.3
直径分散 (cm ²)	5.67	7.06	5.81	6.87	9.65	11.37	17.40	19.40	21.55	25.73	30.62	37.32	45.32	50.62
直径変動係数 (%)	22	22	17	18	20	20	23	21	21	21	22	24	25	26
断面積合計 (m ² /ha)	36.97	44.12	38.86	43.72	49.17	55.06	66.06	54.88	58.60	57.82	63.70	65.26	70.64	72.78
樹高測定木本数	20	18	18	18	13	19	16	16	26	21	21	21	21	85
平均樹高 (m)	8.2	9.4	9.8	11.4	11.8	13.3	15.5	17.7	18.9	18.4	18.8	18.8	18.8	22.6
樹高分散 (m ²)	0.52	0.51	0.45	0.62	1.03	0.32	0.53	2.20	2.38	5.63	5.80	5.80	5.80	4.30
樹高変動係数 (%)	9	8	7	7	9	4	5	8	8	13	13	13	13	9

林齢69年までは、竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

表一 1-5. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (南沢3号試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 45C ₁₀ , 面積: 0.090ha, 傾斜: 急, 樹種: スギ															
	1916	1919	1925	1930	1933	1935	1940	1949	1957	1960	1965	1970	1976	1981	1983	
立木本数	245	245	181	112	112	88	87	62	60	60	60	60	59	59	59	
立木密度 (本/ha)	2722	2722	2011	1244	1244	978	967	689	667	667	667	667	656	656	656	
平均直径 (cm)	16.6	17.4	20.9	24.4	25.7	27.6	29.7	33.9	37.1	37.9	40.2	40.4	42.3	44.8	40.9	
直径分散 (cm ²)	12.69	15.54	12.73	20.34	25.40	24.83	29.59	40.25	51.25	61.06	72.31	88.01	107.76	143.09	95.44	
直径変動係数 (%)	21	23	20	18	20	18	18	19	19	21	21	23	25	27	24	
断面積合計 (m ² /ha)	61.95	68.02	71.54	60.40	66.93	60.37	69.43	64.49	74.88	78.54	88.26	90.21	97.76	110.48	90.99	
樹高測定木本数	20	20	17	28	27	26	32	18	20	24	24	24	24	24	59	
平均樹高 (m)	12.7	13.3	16.0	16.7	18.6	18.3	19.9	20.9	23.9	25.2	25.1	25.9	25.9	26.9	26.9	
樹高分散 (m ²)	1.68	1.74	2.10	2.44	2.96	2.22	3.47	3.05	5.12	6.43	8.12	9.79	9.79	7.90	7.90	
樹高変動係数 (%)	10	10	9	9	9	8	9	8	9	10	11	12	12	10	10	

林齢73年までは, 竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

表一 1-6. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (牛ばう沢試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 11C ₁ , 面積: 0.540ha, 傾斜: 中, 樹種: スギ															
	1940	1943	1948	1950	1957	1960	1965	1971	1976	1981	1983					
立木本数	458	326	326	325	324	321	319	303	298	296	291					
立木密度 (本/ha)	848	604	604	602	600	594	591	561	552	548	539					
平均直径 (cm)	26.5	29.3	31.9	33.0	35.8	36.7	38.3	39.8	40.6	42.1	43.9					
直径分散 (cm ²)	31.92	34.16	42.79	49.83	58.81	65.55	75.79	83.58	90.89	102.88	115.90					
直径変動係数 (%)	21	20	21	21	21	22	23	23	24	24	25					
断面積合計 (m ² /ha)	49.05	42.43	50.15	53.69	63.05	66.04	71.51	73.43	75.21	80.32	86.35					
樹高測定木本数	31	40	40	41	40	40	41	37	291	291	291					
平均樹高 (m)	21.9	25.6	25.1	28.3	28.7	29.4	31.4	31.4	32.6	32.6	32.6					
樹高分散 (m ²)	7.28	13.34	12.35	13.74	20.58	16.41	19.64	19.19	19.19	19.19	19.19					
樹高変動係数 (%)	12	14	14	14	13	16	14	14	13	13	13					

林齢66年までは, 竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

表一 1-9. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (大平 1 号試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 46C _s , 面積: 0.030ha, 傾斜: 急, 樹種: ヒノキ														
	1916	1919	1925	1930	1935	1940	1948	1950	1957	1960	1965	1970	1976	1981	1983
立木本数	158	158	108	74	74	73	73	42	41	41	39	38	27	27	27
立木密度 (本/ha)	5267	5267	3600	2467	2467	2433	2433	1400	1367	1367	1300	1267	900	900	900
平均直径 (cm)	8.2	9.4	11.7	14.7	15.7	16.6	17.5	20.0	21.4	21.6	22.7	23.2	23.6	25.1	26.0
直径分散 (cm ²)	3.66	7.44	8.70	7.18	9.05	11.12	15.29	10.76	14.68	14.48	12.61	13.59	14.05	15.84	17.23
直径変動係数 (%)	23	29	25	18	19	20	22	16	18	18	16	16	16	16	16
断面積合計 (m ² /ha)	29.34	39.96	40.94	43.27	49.52	54.63	61.68	44.96	50.80	51.68	53.98	54.95	41.45	45.52	48.99
樹高測定木本数	15	17	13	12	12	16	13	13	12	19	17	16	16	16	27
平均樹高 (m)	7.8	9.9	11.1	12.0	12.7	15.0	15.0	14.9	16.2	16.9	16.8	18.3	18.3	18.7	18.7
樹高分散 (m ²)	0.49	3.26	1.31	1.32	2.09	1.40	0.87	0.89	0.89	1.37	3.23	3.59	3.59	2.71	2.71
樹高変動係数 (%)	9	18	10	10	11	8	6	6	6	7	11	10	10	9	9

林齢70年までは、竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

表一 1-10. 東京大学千葉演習林旧試験地の生長結果 (大平 2 号試験地)

測定年度 林齢 (年)	林小班: 46C _s , 面積: 0.020ha, 傾斜: 急, 樹種: ヒノキ														
	1925	1930	1935	1940	1948	1950	1957	1960	1965	1970	1976	1981	1983	1983	1983
立木本数	125	125	124	123	110	107	98	97	86	78	68	68	66	66	66
立木密度 (本/ha)	6250	6250	6200	6150	5500	5350	4900	4850	4300	3900	3400	3400	3300	3300	3300
平均直径 (cm)	11.5	13.6	14.6	15.4	16.9	17.1	18.5	18.7	19.9	20.1	20.8	21.4	22.4	22.4	22.4
直径分散 (cm ²)	3.69	4.47	6.59	7.82	9.58	10.79	11.52	12.10	12.63	13.27	16.26	19.34	24.39	24.39	24.39
直径変動係数 (%)	17	16	18	18	18	19	18	19	18	18	19	21	22	22	22
断面積合計 (m ² /ha)	66.77	92.35	107.19	119.03	128.17	127.17	136.00	137.24	137.47	128.16	120.34	124.76	136.14	136.14	136.14
樹高測定木本数	10	10	9	19	18	17	16	22	22	18	18	18	66	66	66
平均樹高 (m)	8.0	9.1	10.5	10.9	12.7	12.7	14.2	14.8	15.0	16.3	16.3	16.1	16.1	16.1	16.1
樹高分散 (m ²)	2.34	2.48	2.83	2.03	2.82	2.03	2.70	2.87	3.67	5.14	3.51	3.51	3.51	3.51	3.51
樹高変動係数 (%)	19	17	16	13	13	11	12	11	13	14	12	12	12	12	12

林齢70年までは、竹内公男・長谷川茂のデータ (1975年) から引用した。

3.2.2 新試験地の調査結果

旧試験地が高齢となったため、1978年（昭和53年）に、新試験地が、スギ16年生林分に3箇所、ヒノキ17年生林分に2箇所設定された。これらの5試験地は、ともに、内区画とそれを取り囲む外区画とから成り立っており、内区画では直径と樹高の毎木が測定され、外区画では樹高は測定されず、直径のみが毎木測定されている。ただし、郷田倉無伐区の内区画では、樹高は標準木のみが測定されている。

胸高は1.3mであり、輪尺により直角な2方向を0.1cmまで測定し、樹高は、測竿により1cm単位で測定している。ただし、第2回目の調査では、鐘撞台の全林木と郷田倉間伐区および無伐区の一部の林木は、ブルーメライスで測定した。これは樹高が高く測竿が使用できなかったためである。

3.4節の樹高生長の解析、および3.5節の直径生長と樹高生長の相関係数の解析には、これら5試験地の内区画の調査結果を使用した。表-2に、各試験地の林分統計量を示す。なお、解析は、第2回の調査時に残存していた林木を対象とした。

3.3 確率論的直径生長モデル

確率論的直径生長モデルは、既に、鈴木、梅村、SLOBODAらによって発表されているが、現実の林分の生長を説明するにはまだ十分でない。とくに、直径分散の変化に関しては極めて不十分である。本節の内容は、同齢単純林の直径生長に関するSLOBODAのモデル（1976,1977,1984）を拡張し、そこから直径分散の増加式を新たに解析的に導いたものである。

3.3.1 確率論的直径生長モデルの構築

同齢単純林の直径生長モデルを構築するために、まず以下の5点について検討し、仮説をたてた。図-3は、ある時間断面におけるこのモデルのイメージを表わしている。表-3は、解析に用いた郷台1号試験地の96本の立木の統計量を示している。

i) ある林齢における定期直径生長量と直径の大きさとの関係

よく言われているように（PRODAN1951, 大隅に1971）、同齢単純林ではある林齢における定期直径生長量は、直径の大きさに対して、直線的関係を示すことが認められる。図-4は、郷台1号試験地の例を示したものである。本研究では、この事実をもとに、次の仮説をおいた。

仮説1. ある林齢における連年直径生長量と直径の大きさとの間には、正の直線関係が認められる。

ii) 直線式のまわりの誤差変動の大きさ

表-4は、郷台1号試験地について定期直径生長量の直径階別の平均と分散を求め、分散の大きさの直径階別の違いを検定したものである。この結果から、次の仮説をおくことにした。

仮説2. 仮説1で表わされる直線関係について、直線式のまわりの誤差変動の大きさは直径に

表一 2. 東京大学千葉演習林新固定試験地 5 林分の林分特性値

試験地名	鐘臺台		郷田倉間伐区		郷田倉無伐区		仙石疎区		仙石密区			
	1978.12	1984.4	1978.12	1984.4	1978.12	1984.4	1978.12	1984.4	1978.12	1984.4		
林小班		3 C ₁		25 C ₁		25 C ₁		33 D		33 D		
面積		0.041		0.038		0.04		0.03		0.03		
方位		—		—		—		W		W		
傾斜		平坦		平坦		平坦		20~25°		20~25°		
樹種		スギ		スギ		スギ		ヒノキ		ヒノキ		
調査年月		1978.12		1984.4		1978.12		1984.4		1978.12		1984.4
樹齢(年)	16	21	16	21	16	21	17	22	17	17	22	
立木本数	172	121	172	119	175	149	276	144	501	501	280	
立木密度(本/ha)	4195	2951	4526	3132	4375	3725	9200	4800	16700	16700	9333	
直径												
平均直径(cm)	9.5	12.3	10.3	13.7	11.0	13.1	5.9	9.3	5.1	5.1	7.5	
直径分布(cm ²)	2.94	5.04	5.41	8.97	9.98	13.15	3.82	4.20	2.76	2.76	3.60	
変動係数(%)	18.0	18.2	22.5	21.9	28.6	27.7	32.9	22.1	32.7	32.7	25.3	
直径歪度	0.28	0.23	0.48**	0.33	0.38*	0.40*	0.09	-0.03	0.03**	0.03**	0.25	
直径尖度	2.80	2.80	2.57	2.39	3.06	2.90	2.58	2.45	3.09	3.09	3.01	
断面積合計(m ² /ha)	30.87	36.27	39.78	48.16	45.34	54.06	28.20	34.05	37.49	37.49	43.85	
樹高												
測定本数	172	121	172	119	82	70	276	144	501	501	280	
平均樹高(m)	9.8	12.4	9.8	12.6	11.0	13.6	5.9	8.0	6.0	6.0	7.7	
樹高分散(m ²)	1.14	1.65	1.69	1.74	2.24	2.21	1.20	1.02	1.20	1.20	1.03	
変動係数(%)	10.9	10.3	13.2	10.5	13.6	11.0	18.4	12.6	18.3	18.3	13.1	
樹高歪度	-0.44*	-0.13	-0.26	-0.47*	-0.80**	-0.65*	-0.64**	-0.45*	-0.29**	-0.29**	-0.33*	
樹高尖度	4.48**	3.12	2.49	3.27	4.17*	2.85	3.04	3.37	3.44*	3.44*	3.03	
直径と樹高の相関係数	0.725	0.764	0.776	0.781	0.879	0.829	0.862	0.782	0.830	0.830	0.796	

*有意水準 5% で有意, **有意水準 1% で高度に有意

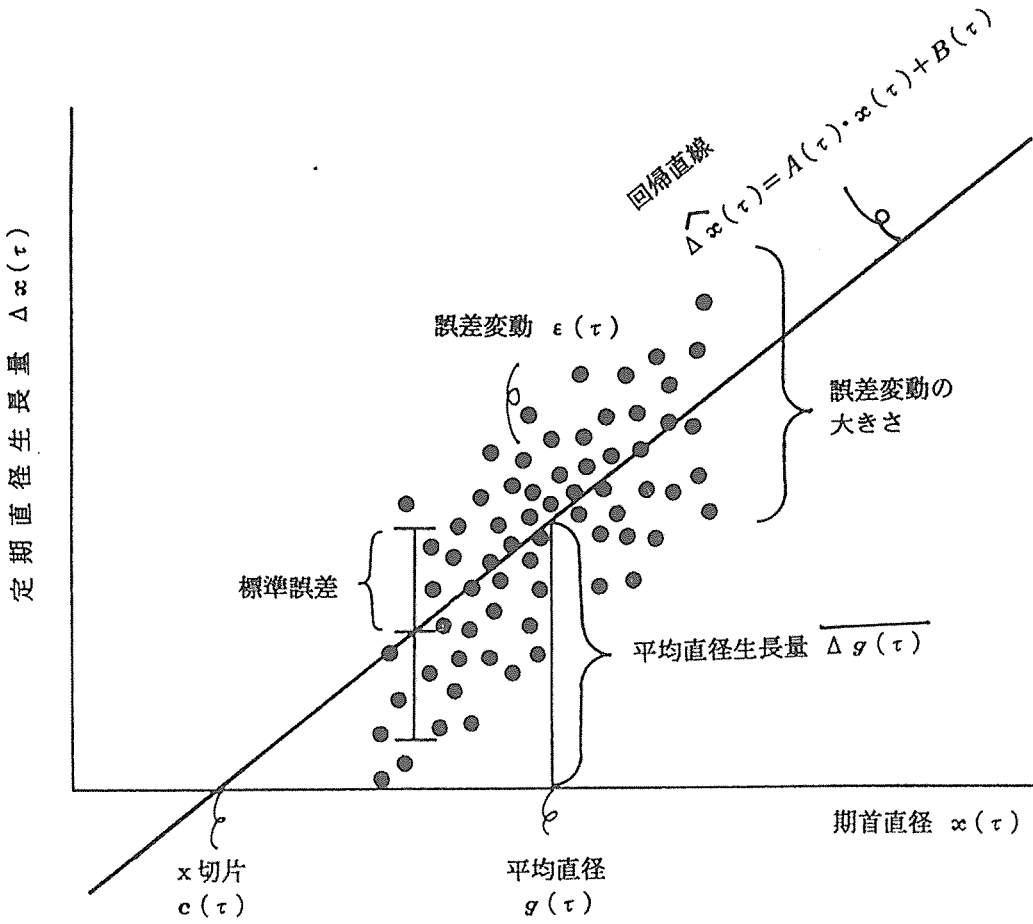


図-3. ある時間断面 τ における本モデルのイメージ

黒点は各林木の直径生長量を表わしている。

線形関係

$$\hat{\Delta x}(\tau) = A(\tau) \cdot x(\tau) + B(\tau)$$

$$= \frac{\Delta g(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} x(\tau) + \frac{\Delta g(\tau) c(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)}$$

を想定している。

表一 3. 東京大学千葉演習林郷台 1 号試験地の生長経過と解析木の統計量

		林小班：11C ₁ , 面積：0.141ha, 樹種：スギ														
測定年度	1916	1921	1925	1930	1935	1940	1948	1950	1957	1960	1965	1970	1976	1981	1983	
林齢 (年)	11	16	20	25	30	35	43	45	52	55	60	65	71	76	78	
測定結果*																
立木本数 (本)	541	492	271	238	238	192	131	131	131	130	130	126	107	107	106	
立木密度 (本/ha)	3837	3489	1922	1688	1688	1362	929	929	929	922	922	894	759	759	752	
平均直径 (cm)	12.3	14.4	18.0	20.1	21.7	24.3	28.4	29.3	31.4	32.0	33.4	34.5	36.8	38.0	37.9	
直径分散 (cm ²)	10.50	12.52	11.70	15.42	21.39	25.50	36.76	41.62	53.15	58.12	68.41	72.47	71.97	84.63	85.99	
直径変動係数 (%)	26.3	24.6	19.0	19.5	21.3	20.8	21.4	22.0	23.2	23.8	24.8	24.7	23.0	24.2	24.5	
解析木の統計量**																
立木本数 (本)		96		96		96		96		96		96				
平均直径 (cm)		17.5		22.0		26.1		30.0		32.8		35.1				
直径分散 (cm ²)		7.25		13.49		22.36		35.31		48.75		64.34				
直径変動係数 (%)		15.4		16.7		18.1		19.8		21.3		22.8				

* 竹内公男・長谷川茂のデータ (1975) を引用した。

** 解析は林齢78年まで生存した林木を対象とし, 明らかかな被圧木 (3本) および測定ミスがあると考えられる木 (7本) は削除した。

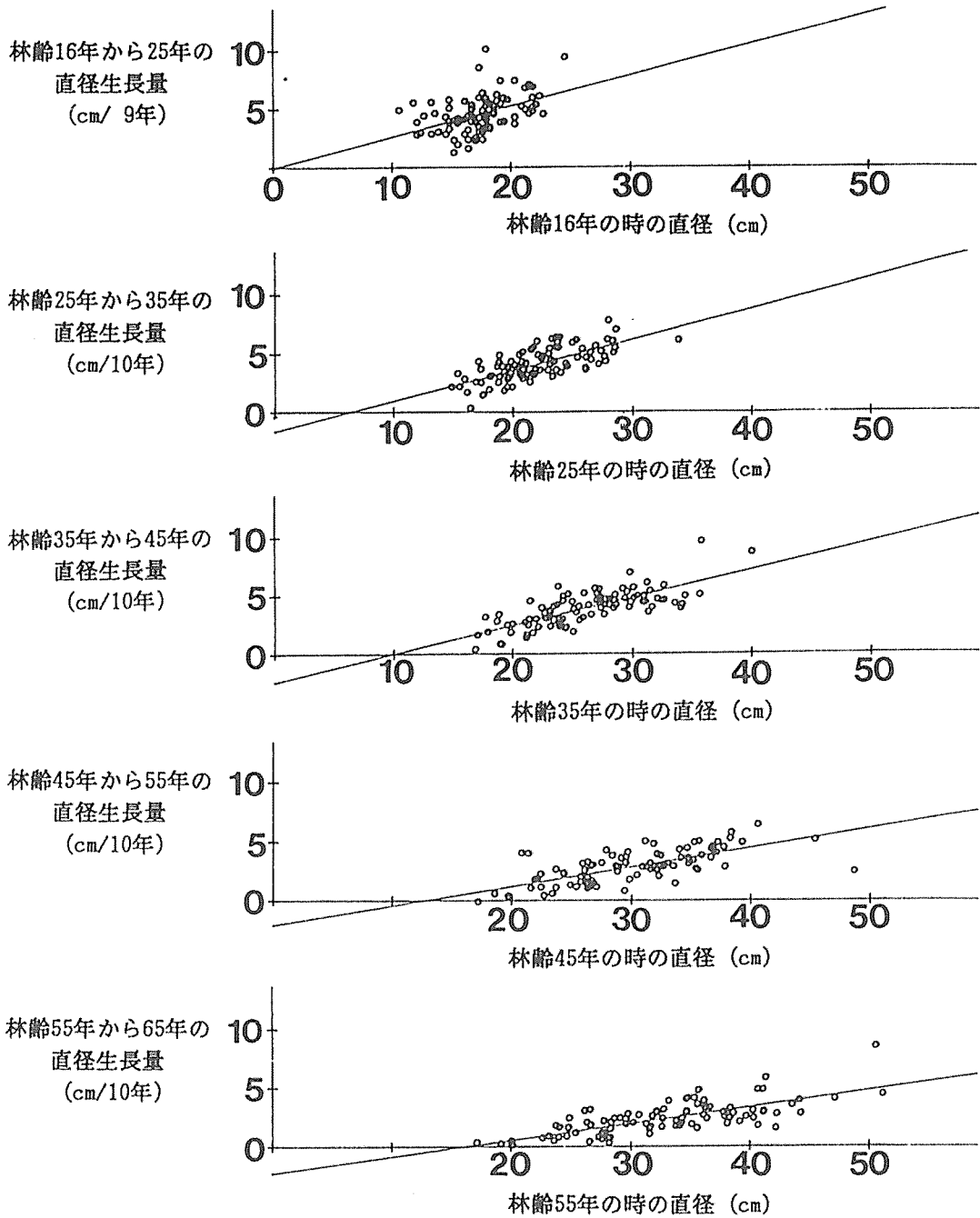


図-4. 定期直径生長量と期首直径との関係 (郷台1号試験地)
線形関係が観察される。回帰直線の係数を表-5に示した。

表一 4 - 1. 直径階別定期直径生長量の平均と分散および分散の大きさの違いをすべての組合についてF検定した結果 (郷台1号)

林齢16年から25年の直径生長量												
直径階 (cm)	10	12	14	16	18	20	22	24				
立木本数 (本)	1	5	10	20	37	10	12	1				
平均 (cm/9年)	4.9	3.9	4.1	3.6	4.6	5.3	5.7	9.4				
不偏分散 (cm/9年) ²	-	1.26	1.25	1.47	2.55	1.90	0.95	-				
不偏分散の比とF検定の結果												
直径階 (cm)	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	12	-	1.01	1.17	2.03	1.51	1.33	-	-	-	-	-
	14	-	-	1.18	2.05	1.52	1.32	-	-	-	-	-
	16	-	-	-	1.74	1.29	1.55	-	-	-	-	-
	18	-	-	-	-	1.35	2.70	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	2.00	-	-	-	-	-
	22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で高度に有意。

表一 4 - 2. 直径階別定期直径生長量の平均と分散および分散の大きさの違いをすべての組合についてF検定した結果 (郷台1郷)

林齢25年から35年の直径生長量												
直径階 (cm)	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	
立木本数 (本)	1	6	13	23	14	18	10	10	0	0	1	
平均 (cm/10年)	2.2	2.2	3.1	3.5	4.2	4.8	4.9	5.6	-	-	6.1	
不偏分散 (cm/10年) ²	-	1.09	1.21	0.68	1.07	1.17	0.76	1.42	-	-	-	
不偏分散の比とF検定の結果												
直径階 (cm)	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	16	-	1.11	1.61	1.02	1.08	1.44	1.30	-	-	-	-
	18	-	-	1.79	1.13	1.03	1.59	1.17	-	-	-	-
	20	-	-	-	1.59	1.74	1.12	2.09	-	-	-	-
	22	-	-	-	-	1.09	1.41	1.32	-	-	-	-
	24	-	-	-	-	-	1.54	1.21	-	-	-	-
	26	-	-	-	-	-	-	1.86	-	-	-	-
	28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で高度に有意。

表一 4-3. 直径階別定期直径生長量の平均と分散および分散の大きさの違いをすべての組合せについてF検定した結果 (郷台1郷)

林齢35年から45年の直径生長量		16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	
直径階 (cm)		16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	
立木本数 (本)		1	6	4	13	19	10	16	11	9	4	2	0	1	
平均 (cm/10年)		0.4	2.3	1.9	2.8	3.4	3.7	4.5	5.0	4.8	4.3	7.3	-	8.7	
不偏分散 (cm/10年) ²		-	0.96	0.63	0.82	1.29	1.21	0.30	0.66	0.70	0.20	10.58	-	-	
不偏分散の比とF検定の結果															
	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	18	-	-	1.53	1.17	1.34	1.26	3.25	1.46	1.38	4.82	10.99	-	-	-
	20	-	-	-	1.31	2.06	1.93	2.12	1.05	1.11	3.21	16.87	-	-	-
	22	-	-	-	-	1.58	1.48	2.77	1.24	1.17	4.19	12.89	-	-	-
	24	-	-	-	-	-	1.07	4.37	1.96	1.85	6.62	8.17	-	-	-
	26	-	-	-	-	-	-	4.09	1.83	1.74	6.20	8.72	-	-	-
	28	-	-	-	-	**	*	-	2.23	2.36	1.52	35.69	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	-	-	-	1.06	3.38	16.00	-	-	-
	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.57	15.14	-	-	-
	34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54.08	-	-	-
	36	-	*	-	**	*	*	**	**	**	*	-	-	-	-

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で有意に有意。

表一 4-4. 直径階別定期直径生長量の平均と分散および分散の大きさの違いをすべての組合せについてF検定した結果 (郷台1号)

林齢45年から55年の直径生長量		18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	
直径階 (cm)		2	4	7	6	17	8	8	15	9	10	6	2	0	0	1	1	
立木本数 (本)		0.3	1.3	1.8	1.7	1.9	2.9	2.8	3.2	3.3	3.9	4.6	5.7	-	-	5.2	2.5	
平均 (cm/10年)		0.21	3.43	1.31	0.67	0.59	0.86	1.26	0.68	0.77	0.75	1.05	1.13	-	-	-	-	
不偏分散 (cm/10年) ²		不偏分散の比とF検定の結果																
	18	-	16.22	6.20	3.18	2.81	4.05	5.96	3.24	3.64	3.53	4.95	5.33	-	-	-	-	
	20	-	-	2.62	5.10	5.77	4.01	2.72	5.01	4.46	4.59	3.28	3.05	-	-	-	-	
	22	-	-	-	1.95	2.21	1.53	1.04	1.92	1.70	1.76	1.25	1.16	-	-	-	-	
	24	-	-	-	-	1.13	1.27	1.88	1.02	1.15	1.11	1.56	1.68	-	-	-	-	
	26	-	*	-	-	-	1.44	2.12	1.15	1.29	1.26	1.76	1.89	-	-	-	-	
	28	-	-	-	-	-	-	1.47	1.25	1.11	1.15	1.22	1.31	-	-	-	-	
	30	-	-	-	-	-	-	-	1.84	1.64	1.63	1.20	1.12	-	-	-	-	
	32	-	*	-	-	-	-	-	-	1.12	1.09	1.53	1.65	-	-	-	-	
	34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.03	1.36	1.46	-	-	-	-	
	36	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.40	1.51	-	-	-	-	
	38	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.08	-	-	-	-	
	40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で有意

表一 4-5. 直径階別定期直径生長量の平均と分散および分散の大きさの違いをすべての組合せについてF検定した結果 (郷台1号)

林齢55年から65年の直径生長量		18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
直径階 (cm)		1	4	1	8	6	13	6	10	10	11	8	6	6	3	0	1	1	1
立木本数 (本)		0.4	0.3	0.8	1.3	2.0	1.2	2.4	2.2	2.8	3.2	2.6	2.8	3.5	3.4	-	4.1	8.5	4.5
平均 (cm/10年)		-	0.02	-	0.43	1.10	0.42	0.11	0.52	0.89	0.96	0.15	1.22	2.46	0.34	-	-	-	-
不偏分散 (cm ² /10年) ²																			
不偏分散の比とF検定の結果																			
直径階 (cm)		18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		-	-	-	17.80	45.36	17.58	4.74	21.63	36.69	39.76	6.31	50.30	101.93	14.10	-	-	-	-
		22	24	26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		24	*	-	-	2.55	1.01	3.75	1.21	2.06	2.23	2.82	2.83	5.73	1.26	-	-	-	-
		26	*	-	-	-	2.58	9.56	2.10	1.24	1.14	7.19	1.11	2.25	3.22	-	-	-	-
		28	*	-	-	-	-	3.70	1.23	2.09	2.26	2.79	2.86	5.80	1.25	-	-	-	-
		30				*		-	4.56	7.73	8.38	1.33	10.60	21.48	2.97	-	-	-	-
		32	*						-	1.70	1.84	3.43	2.33	4.71	1.53	-	-	-	-
		34	*					*		-	1.08	5.82	1.37	2.78	2.60	-	-	-	-
		36	*				*				-	6.30	1.27	2.56	2.82	-	-	-	-
		38				*				*	*	-	7.97	16.16	2.24	-	-	-	-
		40	**				*	*	*			*	-	2.03	3.57	-	-	-	-
		42	**		*		*	**	*		**	**		-	7.23	-	-	-	-
		44													-	-	-	-	-

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で有意

田 中 浩 晴

表-5. 直径 $x(\tau)$ に対する定期直径生長量 $\Delta x(\tau)$ の回帰直線 (郷台1号)

期首 林齢	期末 林齢	回帰係数	定数項	直径軸と 回帰直線 との交点 (x 切片)	回帰直線 の回りの 不偏分散	回帰直線 の回りの 標準偏差	決定係数	期首の 平均直径	定期直径 生長量の 平均
τ (年)	(年)	$A(\tau)$ (1/10年)	$B(\tau)$ (cm/10年)	$c(\tau)$ (cm)	$((\text{cm}/10\text{年})^2)$	(cm/10年)		$g(\tau)$ (cm)	$\Delta g(\tau)$ (cm/10年)
16	25	0.262	0.0	0.1	1.96	1.40	0.205	17.5	4.6
25	35	0.259	-1.6	6.3	0.97	0.99	0.486	22.0	4.1
35	45	0.239	-2.4	9.9	1.02	1.01	0.558	26.1	3.9
45	55	0.163	-2.1	12.7	1.00	1.00	0.486	30.0	2.8
55	65	0.141	-2.3	16.1	0.88	0.94	0.528	32.8	2.4

線形関係: $\hat{\Delta x}(\tau) = A(\tau) \cdot x(\tau) + B(\tau)$

$$= \frac{\Delta g(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} x(\tau) - \frac{\Delta g(\tau) \cdot c(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)}$$

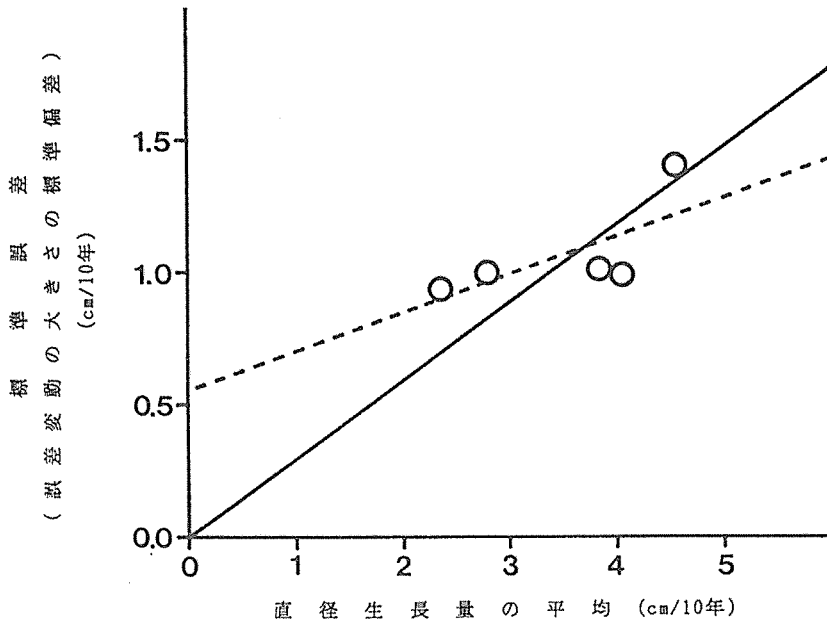


図-5. 標準誤差と直径生長量の平均との関係 (郷台1号試験地)

白丸は観測値を示す (表-5)。

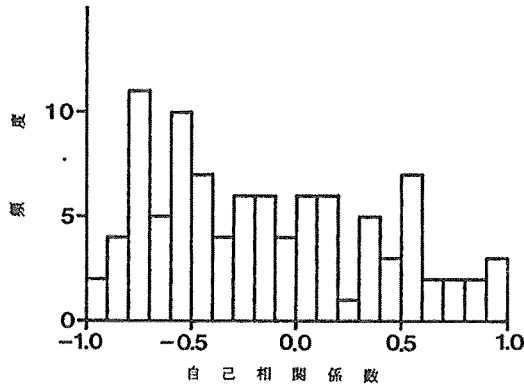
実線は比例関係を示し、その比例定数は0.294であった。

点線は回帰直線である。

回帰係数とその95%の信頼区間は以下の通りである。

$$-0.126 < \text{回帰係数} = 0.144 < 0.414$$

$$-0.420 < \text{定数項} = 0.558 < 1.537$$

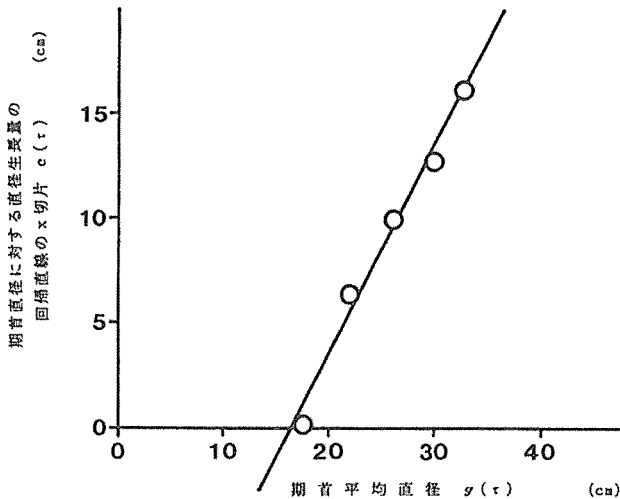


図一六. 隣り合う期間 (10年) の自己相関係数の分布 (郷台1号試験地)

標準誤差に対する直線式のまわりの誤差変動の比の自己相関を調べた。

共通の母相関を持つという仮説の検定と共通の母相関の推定

相関関係の個数	96
各相関関係の重み	2
重みの総和	192
加重した z の総和	-32.116
χ^2 の値	112.785
自由度	93
有意水準 5% で, 帰無仮説は棄却されなかった。	
z の平均値	-0.167
共通の母相関の推定値	-0.166



図一七. 期首平均直径 $g(\tau)$ と 期首直径に対する直径生長量の回帰直線の x 切片 $c(\tau)$ の関係 (郷台1号試験地)

白丸は観測値を示す (表-5)。

実線は $g(\tau)$ に対する $c(\tau)$ の回帰直線を示す。

$$c(\tau) = 1.0 g(\tau) - 16.6$$

依存しない。

iii) 誤差変動の大きさの林齢に伴う変化

上記のように、直線式のまわりの誤差変動の大きさが、直径の大きさに依存しないことが示されたので、直径に対する定期直径生長量の回帰直線を求めた。表-5がその結果である。回帰直線のまわりの誤差変動の大きさの標準偏差、以下これを標準誤差と呼ぶが、これは林齢の上昇に伴い減少していた。図-5は、林齢ごとの標準誤差と直径生長量の平均(=平均直径木の平均生長量)との関係を示したものである。この関係に直線式をあてはめた結果に基づき、次の仮説をおくことにした。

仮説3. 仮説2で表わされる直線式のまわりの標準誤差は林齢の上昇に伴い減少し、その大きさはその時の直径生長量の平均に比例する。

iv) 誤差変動の自己回帰

直線式のまわりの誤差変動をその時の標準誤差で除したものを全林木について単木ごとに調べ、その自己相関について検討した。この場合、各林木について時系列データが5点しかないため、ここでは隣り合う期間(10年)の自己相関係数だけを計算した。図-6は、自己相関係数の分布である。96林木のうち94林木が相関関係があると言い難いと判定された。また、これら96個の相関が共通の母相関から取り出されたものであるという仮説を χ^2 検定したが、帰無仮説は棄却されなかった。なお、共通の母相関の推定値は-0.167であった。ここで、相関係数の検定および母相関の推定には、 z 変換した値を用いた。 z 変換については、3.5節で説明する。以上の結果から次の仮説をおく。

仮説4. 仮説1で表わされる直線式のまわりの誤差変動は、全くランダムであって、いわゆる白色雑音である。

ここで、白色雑音とは、自己相関係数が0関数であるような確率過程のことである。BROWN運動過程の数学モデルがいわゆるWIENER過程であるが、WIENER過程は白色雑音を積分したものである。

v) 回帰直線の x 切片の林齢に伴う変化

図-7は、回帰直線の x 切片と平均直径との関係を示したものである。明瞭な正の直線関係が認められ、決定係数は0.986であった。よって仮説5をおく。

仮説5. 仮説1で表わされる直線式の x 切片と平均直径との間には線形関係が成立する。

vi) 確率論的直径生長モデル

以上の5つの仮説を用いて、同齢単純林の直径生長モデルを構築するのであるが、その前にさらにもう一つの仮説をおく。

仮説6. 平均直径生長はある生長曲線に従う。

ここで、これらの仮説を、数式で表現しよう。林齢 τ における直径を $x(\tau)$ とし、その定期生長量を $\Delta x(\tau)$ とすれば、仮説1で仮定された線形関係は、

$$\widehat{\Delta x}(\tau) = A(\tau) \cdot x(\tau) + B(\tau) \quad (101)$$

となる。ここで、 $A(\tau)$ と $B(\tau)$ は、林齢 τ における回帰係数である。記号 $\widehat{\Delta x}$ は、観測値 $\Delta x(\tau)$ とそれに対応する回帰直線上の値 $\widehat{\Delta x}(\tau)$ とを区別するために用いている。回帰係数 $A(\tau)$ と $B(\tau)$ は、図-3 より、以下のように表わされる。

$$A(\tau) = \frac{\Delta g(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} \quad (102)$$

$$B(\tau) = \frac{\Delta g(\tau) c(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} \quad (103)$$

ただし、 $g(\tau)$: 林齢 τ における平均直径

$\Delta g(\tau)$: 林齢 τ における定期直径生長量の平均

$c(\tau)$: 林齢 τ における定期直径生長量の直径に対する回帰直線の x 切片

である。

ここで、白色雑音を $P(\tau)$ とし、回帰直線の回りの誤差変動を $\varepsilon(\tau)$ とすれば、この誤差変動は、仮説 2, 3, 4 より、

$$\varepsilon(\tau) = \gamma \Delta g(\tau) P(\tau) \quad (104)$$

と表わされる。ただし、 γ は、比例定数である。定義により、

$$\Delta x(\tau) = \widehat{\Delta x}(\tau) + \varepsilon(\tau) \quad (105)$$

である。(101) 式から (104) 式を、(105) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Delta x(\tau) &= A(\tau) \cdot x(\tau) + B(\tau) + \varepsilon(\tau) \\ &= \frac{\Delta g(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} x(\tau) - \frac{\Delta g(\tau) c(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} \\ &\quad + \gamma \Delta g(\tau) P(\tau) \end{aligned} \quad (106)$$

となる。(106) 式の両辺を、 $\Delta \tau$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x(\tau)}{\Delta \tau} &= \frac{\Delta g(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} x(\tau) - \frac{\Delta g(\tau) c(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} \\ &\quad + \gamma \frac{\Delta g(\tau)}{\Delta \tau} P(\tau) \end{aligned} \quad (107)$$

を得る。このモデルを連続として表現するために、変数に関して以下のように変換しよう。

$$\frac{\Delta x(\tau)}{\Delta \tau} \longrightarrow \frac{dx(\tau)}{d\tau} \quad (108)$$

$$\frac{\Delta g(\tau)}{\Delta \tau} \longrightarrow \frac{dg(\tau)}{d\tau} = \Delta g'(\tau) \quad (109)$$

ここで、' は林齢 τ に関する微分を表わしている。この変換により (107) 式は (110) 式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{dx(\tau)}{d\tau} = & \frac{g'(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} x(\tau) - \frac{g'(\tau)c(\tau)}{g(\tau) - c(\tau)} \\ & + r g'(\tau) P(\tau) \end{aligned} \quad (110)$$

生長モデルを構築する場合、時間離散モデルとするか、時間連続モデルとするかが問題となる。本研究では、林分遷移の方程式への応用およびSLOBODAのモデルとの比較を考慮して、時間連続モデルとした。

仮説5は

$$c(\tau) = a g(\tau) + b \quad (111)$$

と表わされる。ただし、 a 、 b は定数である。仮説1より、回帰直線の x 切片は平均直径より小さくなくてはならないから、

$$g(\tau) > c(\tau) = a g(\tau) + b \quad (112)$$

すなわち、

$$(1-a) g(\tau) > b \quad (113)$$

となる。ここで $1 < a$ のとき (113) 式は $g(\tau) < b / (1-a)$ となるが、 $g(\tau) > 0$ であるから、これが成り立つには $b < 0$ でなくてはならない。 $a = 1$ のときは (113) 式の条件より $b < 0$ となる。 $a < 1$ のときは、 $g(\tau) > b / (1-a)$ となり $g(\tau) > 0$ とくに $g(\tau) \equiv 0$ であるから $b / (1-a) \leq 0$ すなわち $b \leq 0$ となる。このように b はいずれの場合にも非正となる。

ここで、同齡単純林の直径生長モデル (110) 式を、定数 a 、 b を用いて表現すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dx(\tau)}{d\tau} = & \frac{g'(\tau)}{(1-a)g(\tau) - b} x(\tau) - \frac{g'(\tau)(ag(\tau) + b)}{(1-a)g(\tau) - b} \\ & + r g'(\tau) P(\tau) \end{aligned} \quad (114)$$

となる。これはいわゆるLANGEVINの方程式であり、SLOBODAによって提唱された直径生長の一般モデル (1976, 1977, 1984) に属する。SLOBODAが具体的に提唱したモデル (1976, 1977, 1984) との相違は以下の通りである。SLOBODAのモデルでは、 $g(\tau)$ はMITSCHERLICH式であり、 $c(\tau)$ はゼロとなっている。すなわち、誤差変動を考慮にいれなければ、SLOBODAのモデルでは、直径と直径生長量は比例していて、全林木の直径生長率が平均直径木のそれと等しくなっ

ている。これに対して、本モデルは x 切片を持っており、直径生長率は直径が大きい林木ほど高くなっている。

3.3.2 確率微分方程式の解

i) 平均直径の生長

(114) 式を初期条件

$$x(0) = g(0) \quad (115)$$

のもとで解くと、 $a \neq 1$ のときは

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \left\{ (1-a)g(\tau) - b \right\}^{1/(1-a)} \\ &\quad \cdot \left[\int_0^\tau \left\{ (1-a)g(\xi) - b \right\}^{-1/(1-a) - 1} \right. \\ &\quad \quad \cdot \left. \left\{ -g'(\xi)(ag(\xi) + b) \right\} d\xi \right. \\ &\quad + \int_0^\tau \left\{ (1-a)g(\xi) - b \right\}^{-1/(1-a)} \\ &\quad \quad \cdot \left. r g'(\xi) P(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{g(0)}{\left\{ (1-a)g(0) - b \right\}^{1/(1-a)}} \right] \\ &= \left\{ (1-a)g(\tau) - b \right\}^{1/(1-a)} \\ &\quad \cdot \left[\frac{g(\tau)}{\left\{ (1-a)g(\tau) - b \right\}^{1/(1-a)}} \right. \\ &\quad + \int_0^\tau \left\{ (1-a)g(\xi) - b \right\}^{-1/(1-a)} \\ &\quad \quad \cdot \left. r g'(\xi) P(\xi) d\xi \right] \\ &= g(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ (1-a) g(\tau) - b \}^{1/(1-a)} \\
& \cdot \int_0^\tau \{ (1-a) g(\xi) - b \}^{-1/(1-a)} \\
& \cdot r g'(\xi) P(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{116}$$

となる。 $a=1$ のときは

$$\begin{aligned}
x(\tau) &= e^{-g(\tau)/b} \\
& \cdot \left[\int_0^\tau e^{g(\xi)/b} \cdot \frac{g'(\xi) \{g(\xi) + b\}}{b} d\xi \right. \\
& + \int_0^\tau e^{g(\xi)/b} \cdot r g'(\xi) P(\xi) d\xi \\
& \left. + g(0) \cdot e^{g(0)/b} \right] \\
&= e^{-g(\tau)/b} \\
& \cdot \left[e^{g(\xi)/b} \cdot g(\tau) \right. \\
& \left. + \int_0^\tau e^{g(\xi)/b} \cdot r g'(\xi) P(\xi) d\xi \right] \\
&= g(\tau) \\
& + e^{-g(\tau)/b} \int_0^\tau e^{g(\xi)/b} \cdot r g'(\xi) P(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{117}$$

となる。

ランダム変動についての平均をとる意味で平均の記号 E を使うと、誤差変動 $P(\tau)$ は白色雑音であったから、 $a \neq 1$ のときは

$$\begin{aligned}
& E \left[\int_0^\tau \{ (1-a) g(\xi) - b \}^{-1/(1-a)} \cdot r g'(\xi) P(\xi) d\xi \right] \\
&= \int_0^\tau E \left[\{ (1-a) g(\xi) - b \}^{-1/(1-a)} \cdot r g'(\xi) P(\xi) \right] d\xi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{118}$$

$a=1$ のときは

$$\begin{aligned} E \left\{ \int_0^\tau e^{g(\xi)/b} \cdot r g'(\xi) P(\xi) d\xi \right\} \\ = \int_0^\tau E \left\{ e^{g(\xi)/b} \cdot r g'(\xi) P(\xi) \right\} d\xi = 0 \end{aligned} \quad (119)$$

となって

$$\overline{x(\tau)} = g(\tau) \quad (120)$$

が得られる。したがって、単木の生長式としての (114) 式は、平均直径の生長に関する仮説 6 に抵触しない。

ii) 直径分散の増加

すでに述べたように、 $P(\xi)$ を白色雑音と仮定した場合、一般に、

$$\Omega = \int_0^\tau \omega(\xi) P(\xi) d\xi \quad (121)$$

という量を考えると、その分布密度の分散は、

$$\sigma^2(\tau) = 2D \int_0^\tau \omega^2(\xi) d\xi \quad (122)$$

で与えられる。ただし、 D は白色雑音の強さである (掘 1977)。

(116) 式、(117) 式の右辺の第 2 項は、(121) 式と同じ形をしている。よって直径分散は、 $a \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) = 2Dr^2 \left\{ (1-a) g(\tau) - b \right\}^{2/(1-a)} \\ \cdot \int_0^\tau \frac{\{g'(\xi)\}^2}{\{(1-a)g(\xi) - b\}^{2/(1-a)}} d\xi \end{aligned} \quad (123)$$

$a=1$ のとき

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) = 2Dr^2 e^{-2g(\tau)/b} \\ \cdot \int_0^\tau \left\{ e^{g(\xi)/b} \cdot g'(\xi) \right\}^2 d\xi \end{aligned} \quad (124)$$

となる。(123) 式の積分は、部分積分を行うことにより、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \frac{\{g'(\xi)\}^2}{\{(1-a)g(\xi) - b\}^{2/(1-a)}} d\xi \\
 &= \frac{-1}{1+a} \left[g'(\xi) \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-1-a}{1-a}} \right]_0^\tau \\
 &+ \frac{1}{1+a} \int_0^\tau g''(\xi) \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-1-a}{1-a}} d\xi
 \end{aligned} \tag{125}$$

ここで $a \neq 0$ のときは、(125) 式の積分は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau g''(\xi) \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-1-a}{1-a}} d\xi \\
 &= \frac{-1}{2a} \left[\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-2a}{1-a}} \right]_0^\tau \\
 &+ \frac{1}{2a} \int_0^\tau \frac{g'''(\xi)g'(\xi) - g''(\xi)g''(\xi)}{\{g'(\xi)\}^2} \\
 &\quad \cdot \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-2a}{1-a}} d\xi
 \end{aligned} \tag{126}$$

よって、直径分散を表わす (123) 式は、 $a \neq 0$ のときは次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(\tau) &= 2Dr^2 \{(1-a)g(\tau) - b\}^{2/(1-a)} \\
 &\quad \cdot \left(\frac{1}{1+a} \right) \left[- \left[g'(\xi) \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-1-a}{1-a}} \right]_0^\tau \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2a} \left[\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-2a}{1-a}} \right]_0^\tau \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2a} \int_0^\tau \frac{g'''(\xi)g'(\xi) - g''(\xi)g''(\xi)}{\{g'(\xi)\}^2} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \{(1-a)g(\xi) - b\}^{\frac{-2a}{1-a}} d\xi \right]
 \end{aligned} \tag{127}$$

同様に $a = 0$ のときは、(125) 式の積分は (128) 式のように変形でき、

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau g''(\xi) \{g(\xi) - b\}^{-1} d\xi \\
&= \left[\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} \ln \{g(\xi) - b\} \right]_0^\tau \\
&\quad - \int_0^\tau \frac{g'''(\xi) g'(\xi) - g''(\xi) g''(\xi)}{\{g'(\xi)\}^2} \\
&\quad \cdot \ln \{g(\xi) - b\} d\xi
\end{aligned} \tag{128}$$

直径分散を表わす (123) 式は次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\tau) &= 2Dr^2 \{g(\tau) - b\}^2 \\
&\quad \cdot \left[- \left[g'(\xi) \{g(\xi) - b\}^{-1} \right]_0^\tau \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} \ln \{g(\xi) - b\} \right]_0^\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau \frac{g'''(\xi) g'(\xi) - g''(\xi) g''(\xi)}{\{g'(\xi)\}^2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \ln \{g(\xi) - b\} d\xi \right]
\end{aligned} \tag{129}$$

$a=1$ のときは, (124) 式の積分は同様の変形により次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\tau) &= 2Dr^2 e^{-2g(\tau)/b} \\
&\quad \cdot \left[\left[g'(\xi) \frac{b}{2} e^{2g(\xi)/b} \right]_0^\tau \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} \frac{b^2}{4} e^{2g(\xi)/b} \right]_0^\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\tau \frac{g'''(\xi) g'(\xi) - g''(\xi) g''(\xi)}{\{g'(\xi)\}^2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{b^2}{4} e^{2g(\xi)/b} d\xi \right]
\end{aligned} \tag{130}$$

3.3.3 平均直径がMITSCHERLICHの生長法則に従う場合の直径分散の増加

i) 直径分散の増加式

平均直径の生長経過に対して、MITSCHERLICHの生長曲線がよい適合を示すことが知られている（鈴木 1961, 南雲・佐藤 1965）。そこで、直径分散の増加について具体的に考察するため、仮説6を次のように改める。

仮説6' . 平均直径の生長は、次式のMITSCHERLICHの生長法則に従う。

$$g(\tau) = M(1 - l \exp(-k\tau)) \quad (131)$$

ただし、 M , k , l はパラメータである。

MITSCHERLICH式の1次、2次および3次の導関数は以下のようになる。

$$g'(\tau) = kMl \exp(-k\tau) \quad (132)$$

$$g''(\tau) = -k^2Ml \exp(-k\tau) \quad (133)$$

$$g'''(\tau) = k^3Ml \exp(-k\tau) \quad (134)$$

これらを(114)式に代入すれば、LANGEVINの方程式は(135)式のように具体的に表現される。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = & \frac{kMl \exp(-k\tau)}{(1-a)M(1-l \exp(-k\tau)) - b} x \\ & - \frac{kMl \exp(-k\tau) \{aM(1-l \exp(-k\tau)) + b\}}{(1-a)M(1-l \exp(-k\tau)) - b} \\ & + r kMl \exp(-k\tau) \cdot P(\tau) \end{aligned} \quad (135)$$

また、直径分散の増加を表わす(127)式は、

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) = & 2Dr^2 \{(1-a)M(1-l e^{-k\tau}) - b\}^{2/(1-a)} \\ & \cdot \frac{k}{1+a} [-Ml e^{-k\tau} \{(1-a)M(1-l e^{-k\tau}) - b\}^{-2/(1-a)} + 1 \\ & + Ml \{(1-a)M(1-l) - b\}^{-2/(1-a)} + 1 \\ & + \frac{1}{2a} \{(1-a)M(1-l e^{-k\tau}) - b\}^{-2/(1-a)} + 2 \\ & - \frac{1}{2a} \{(1-a)M(1-l) - b\}^{-2/(1-a)} + 2 \end{aligned} \quad (136)$$

となり、(127)式の積分はゼロとなった。(136)式は、RICHARDS生長曲線の2乗に誤差変動に関連した項を乗じた形になっている。同様に、 $a=0$ の場合は、(129)式は(137)式となり、

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= 2 D r^2 \{M(1 - l \exp(-k\tau)) - b\}^2 \\ &\cdot k \left[-\frac{M l \exp(-k\tau)}{M(1 - l \exp(-k\tau)) - b} + \frac{M l}{M(1 - l) - b} \right. \\ &\quad \left. - \ln \left\{ \frac{M(1 - l \exp(-k\tau)) - b}{M(1 - l) - b} \right\} \right] \end{aligned} \quad (137)$$

これは、MITSCHERLICH生長曲線の2乗に誤差変動に関連した項を乗じた形になっている。(137)式で $b = 0$ とおけば、SLOBODAが導いた直径分散の増加式と一致する。

$a = 1$ の場合は、(130)式は(138)式のように表わされ、

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= 2 D r^2 e^{-2M(1 - l \exp(-k\tau))/b} \\ &\cdot k \left[\frac{b}{2} M l \left\{ e^{\frac{2M(1 - l \exp(-k\tau))/b - k\tau}{-e^{\frac{2M(1 - l)/b}}}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{b^2}{4} \left\{ e^{\frac{2M(1 - l \exp(-k\tau))/b}{-e^{\frac{2M(1 - l)/b}}} \right\} \right\} \right] \end{aligned} \quad (138)$$

これはGOMPertz生長曲線に誤差変動に関連した項を乗じた形になっている。

MITSCHERLICH生長曲線やGOMPertz生長曲線は、RICHARDS生長曲線の特別の場合と考えることができ、さらに、RICHARDS生長曲線の2乗はまたRICHARDS生長曲線で表わすことができるから、一般に、つぎのように結論できる。すなわち、平均直径の生長がMITSCHERLICHの生長法則に従う場合は、直径分散の増加は、RICHARDS生長曲線に誤差変動に関連した項を乗じた形の関数で表現することができる。

ii) 直径分散の単調増加性

一般に、正の単調増加関数と正の単調増加関数との積で表わされる関数はまた単調増加関数である。ここではこれを利用して、直径分散が単調増加することを示す。まず、 $0 < a < 1$ のときについて考える。いま(136)式を、生長曲線の2乗で表わされる項と誤差変動に関連した項とに分割し、前者を B 、後者を R で表わすことにする。すなわち、

$$B = 2 D r^2 \{(1 - a) M(1 - l e^{-k\tau}) - b\}^2 / (1 - a) \quad (139)$$

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{k}{1+a} \left[-M l e^{-k \tau} \left\{ (1-a) M (1-l e^{-k \tau}) - b \right\}^{-2/(1-a) + 1} \right. \\
 & + M l \left\{ (1-a) M (1-l) - b \right\}^{-2/(1-a) + 1} \\
 & + \frac{1}{2a} \left\{ (1-a) M (1-l e^{-k \tau}) - b \right\}^{-2/(1-a) + 2} \\
 & \left. - \frac{1}{2a} \left\{ (1-a) M (1-l) - b \right\}^{-2/(1-a) + 2} \right] \quad (140)
 \end{aligned}$$

とする。

パラメータ b は非正, r, D, M, k および l は非負であったから, B は常に正である。 B を林齢 τ で微分すれば (141) 式となるが, これも正である。

$$\begin{aligned}
 B' = & 2 D r^2 \left(\frac{2}{1-a} \right) \left\{ (1-a) M (1-l e^{-k \tau}) - b \right\}^{2/(1-a) - 1} \\
 & \cdot \left\{ (1-a) M k l e^{-k \tau} \right\} \quad (141)
 \end{aligned}$$

よって, B は正の単調増加関数である。 R を林齢 τ で微分すれば (142) 式となり,

$$R' = \left[M k l e^{-k \tau} \left\{ (1-a) M (1-l e^{-k \tau}) - b \right\}^{-1/(1-a)} \right]^2 \quad (142)$$

これは常に正である。 $\tau = 0$ のとき $R = 0$ であるから, R は正の単調増加関数である。よって, 直径分散の単調増加性が証明された。 $a = 1, a = 0$ の場合も, 同様の方法で容易に証明できる。

iii) 直径分散の上限値

上述のように直径分散の単調増加性が示されたので, 林齢が無限大のときの値, すなわち, 直径分散の上限値を示しておく。

(136) 式, (137) 式, (138) 式の上限値はそれぞれ (143) 式, (144) 式, (145) 式となる。

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(\tau) \Big|_{\tau=\infty} = & 2 D r^2 \left\{ (1-a) M - b \right\}^{2/(1-a)} \\
 & \cdot \frac{k}{1+a} \left[M l \left\{ (1-a) M (1-l) - b \right\}^{-2/(1-a) + 1} \right. \\
 & + \frac{1}{2a} \left\{ (1-a) M - b \right\}^{-2/(1-a) + 2} \\
 & \left. - \frac{1}{2a} \left\{ (1-a) M (1-l) - b \right\}^{-2/(1-a) + 2} \right] \quad (143)
 \end{aligned}$$

$$\sigma^2(\tau) \Big|_{\tau=\infty} = 2 D r^2 (M-b)^2 \cdot k \left[\frac{Ml}{M(1-l) - b} - \ln \left(\frac{M-b}{M(1-l) - b} \right) \right] \tag{144}$$

$$\sigma^2(\tau) \Big|_{\tau=\infty} = 2 D r^2 \left(-\frac{b}{2} \right) \cdot k \left\{ \left(Ml + \frac{b}{2} \right) e^{-2Ml/b} - \frac{b}{2} \right\} \tag{145}$$

いずれの場合も、直径分散の上限値は、パラメータ k に比例し、 r^2 に比例していた。

iv) 直径分散増加曲線の形状

(136) 式, (137) 式, (138) 式において, RICHARDS生長曲線の形状は既に知るところであるが, それに修正項を乗じた形で表現される直径分散増加曲線の形状は, 容易に想像がつかない。

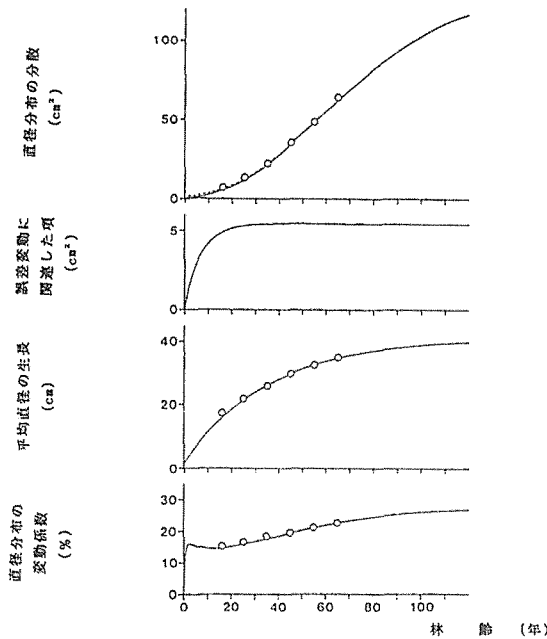


図-8. 直径分散の増加とそれに関連する現象 (郷台1号試験地)

白丸は観測値を示している (表-3)。

直径分散の図の実線は, (138) 式であり, そのパラメータは, $a=1.0$, $b=-16.6$, $\gamma=0.294$, $D=1.0$, $M=41.6$, $k=0.027$, $l=0.95$ である。 a , b は図-7 より, γ は図-5 より引用した。 M , k , l は, 最小2乗法により推定した。点線は, 対応する GOMPERTZ 曲線である。平均直径生長の図の曲線は, MITSCHERLICH 曲線である。パラメータ M , k , l は, 直径分散の場合と同じにしたが, よい適合を示している。変動係数の図は, 直径分散の図および平均直径生長の図の値をもちいて作したが, これもよい適合を示している。

図-8に郷台1号試験地の例を示した。図-8の上の図の白丸は各林齢の直径分散を示している。直径分散は生長の初期から中期にかけて下に凸な増加傾向を示していた。実線は、直径分散増加曲線である。郷台1号試験地の場合は、 $a = 1$ 、 $b = -16.6$ 、 $r = 0.294$ であったので、(138)式を最小2乗法であてはめ、パラメータ M 、 k 、 l を推定した。なお、 $D = 1$ とした。なぜならば、白色雑音の強さはすでに r によって与えられているからである。点線は対応するRICHARDS生長曲線（この場合は $a = 1$ だからGOMPertz曲線）である。すなわち、誤差変動に関連した項の代わりに、その上限値を乗じた場合の曲線である。2番目の図に示したように、誤差変動に関連した項の値は、林齢に伴い急速に一定値に近づいていた。これらの図から、誤差変動が及ぼす影響が、生長中期以後はほぼ一定となることがわかる。よって、生長中期以後の直径分散の増加に対してRICHARDS生長曲線をあてはめても実用上は問題がないといえる。なお、郷台1号試験地の例では $a = 1$ であり、直径分散増加曲線はGOMPertz生長曲線に修正項を乗じた形で表わされていた。 $a = 1$ が一般的な傾向かどうかについては、筆者は実証するだけの十分な数の資料にあたっていないことを述べておく。

v) 直径分布の変動係数の林齢に伴う変化

平均直径生長を図-8の3番目に、直径分布の変動係数の林齢に伴う変化を、図-8の一番目の図に示した。パラメータ M 、 k 、 l は、直径分散の増加に(138)式を最小2乗法であてはめて推定したものであるが、平均直径や変動係数の変化に対してもよい適合を示していた。今回のモデルによれば、変動係数は必ずしも単調増加するとは限らない。図-8の例では、変動係数は生長の初期に若干減少していた。

3.3.4 今回構築した確率論的直径生長モデルの特徴

本モデルの構築に際しては、SLOBODAのモデルを拡張し、一般化することを目的とした。とくに、同齢単純林に認められる以下の三つの経験的な事実を説明できるモデルを作成することに主眼をおいた。すなわち、同林齢では直径生長率は直径が大きい林木ほど大きいこと、直径分散は生長の初期から中期にかけて下に凸な増加傾向を示すこと、直径分布の変動係数は比較的安定しているものの微増の傾向にあることである。モデルを解析学的に扱うために仮説はできるかぎり単純なものを採用した。これは、単純な仮説から始め必要に応じて複雑にしていくという筆者の基本的方針に基づくものである。その結果、直径分散の増加式の一般型をある程度まで解析的に解くことができた。とくに、平均直径の生長がMITSCHERLICH曲線に従うと仮定した場合は、直径分散の増加式をRICHARDS生長曲線と誤差変動に関連した項との積として表わすことができた。この直径分散の増加式を現実の林分に適用したが、良い適合を得た。適用例が一例しかないのは、この研究がSLOBODAのモデルを拡張することにあつたからである。

今回設定した仮説に対して、なお検討の余地があることを認める。事実、仮説2については、直線式のまわりの誤差変動の大きさが直径階によって異なる例も報告されている(白石 1985)。また、誤差変動の自己回帰について自己相関があることを示した報告もある。(鈴木・村松 1985)。

よって、今回のような単純な仮説に基づくモデルは、おそらく、ある特定の条件下の林分の生長経過しか説明できないものと思われる。その特定の条件については、残念なことに、まだ解明できていない。

このモデルが本数減少について言及していないことを、モデルとして不十分であると考え向きがあるかもしれない。筆者は、林木生長を、種内競争がない場合とある場合とに区別して考えようとしている。今回のモデルは、種内競争がない場合のモデルである。よって、郷台1号試験地の生長経過に適用するにあたっては、林齢78年まで生存していた林木の資料を用いた。種内競争がある場合には、生長に遅れをとった林木は、主林木とは異なる生長経過をたどるものと考えている。この考え方は、次章で述べるように、同齢単純林の直径階別・樹高階別二次元分布の形状を解析した結果から推察しているものである。

3.4 確率論的樹高生長モデル

なぜ樹高分布の変動係数は

直径分布の変動係数よりも小さいのか

一般に、同齢単純林の直径分布の変動係数は20数%であり、生長に伴い微増する傾向がある。一方、樹高分布の変動係数は10数%であって、直径分布の変動係数の約半分の大きさであり、しかも生長に伴い減少する傾向がある。吉田・平田は、東京大学千葉演習林管内の植栽林の林木の構成状態を統計的に解析し、つぎのように述べている。『林齢増すに従い増加の傾向を示すものは、胸高直径、樹幹直径の偏差率であり、減少の傾向を示すものは、樹高、枝下高、胸高形数、枝下高率、幹距数であり、傾向の定まらないのは幹材積、形率、直径率である。地位良好なるに従い、偏差率の増加するものは樹高だけであり、他の要素ではすべて傾向不定である。』（1955）。『林分内、単木の直径のC. V. と、その樹高、幹材積のC. V. とは密接な関係にあり、樹高のC. V. は直径のC. V. の約(1/2~1)倍であり、材積のC. V. は直径のその約(2~2.5)倍であることを知った。』（1956)。ここで、偏差率およびC. V. は変動係数を意味している。よって、直径生長と樹高生長とでは、生長のメカニズムが異なると考えられる。本節では、まず、直径生長を解析したのと同様の手法で、樹高生長を解析し、確率論的樹高生長モデルを構築した。つぎに、得られたモデルから林齢に伴う樹高分布の分散の増加式を誘導し、これを前節で求めた直径分布の分散の増加式と比較することによって、樹高分布の変動係数と直径分布の変動係数との関係について考察した。

解析した資料は、東京大学農学部附属千葉演習林管内に設定されている新固定試験地の測定結果である。直径生長の解析に用いた旧固定試験地では、樹高は毎木測定されていないので、今回の解析には用いることができなかった。なお、新固定試験地は、まだ2回しか定期測定が行われていないので、仮説4における誤差変動のランダム性については解析しなかった。また、郷田倉無伐区では、樹高の毎木測定は行われていない。

3.4.1 東京大学千葉演習林新試験地資料の解析結果

直径生長モデルの仮説に表現されているような関係が、樹高生長にも認められるかどうかについて検討した。すなわち、定期樹高生長量と樹高との関係を解析した。

i) ある林齢における定期樹高生長量と樹高の大きさとの関係

図-9に、1978年12月から1984年4月までの定期生長量と期首の大きさとの関係を、直径生長、樹高生長別に5試験地について示した。図中の各点は各林木の生長量を表わしている。また、直径階(2 cm)および樹高階(1 m)別の生長量の平均と標準偏差を求め、各階級の平均値を折線で結び、各階級の標準偏差を平均値の上下に縦線で示した。縦線の長さが標準偏差の大きさを表わしている。

直径生長では、明瞭な正の直線関係が認められ、前節で報告した直径生長に関する仮説1を確認することができた。一方、樹高生長においては定期生長量と期首の樹高の大きさとの間には相関関係がほとんど認められなかった(表-6)。なお、郷田倉無伐区の樹高生長は他の試験地と

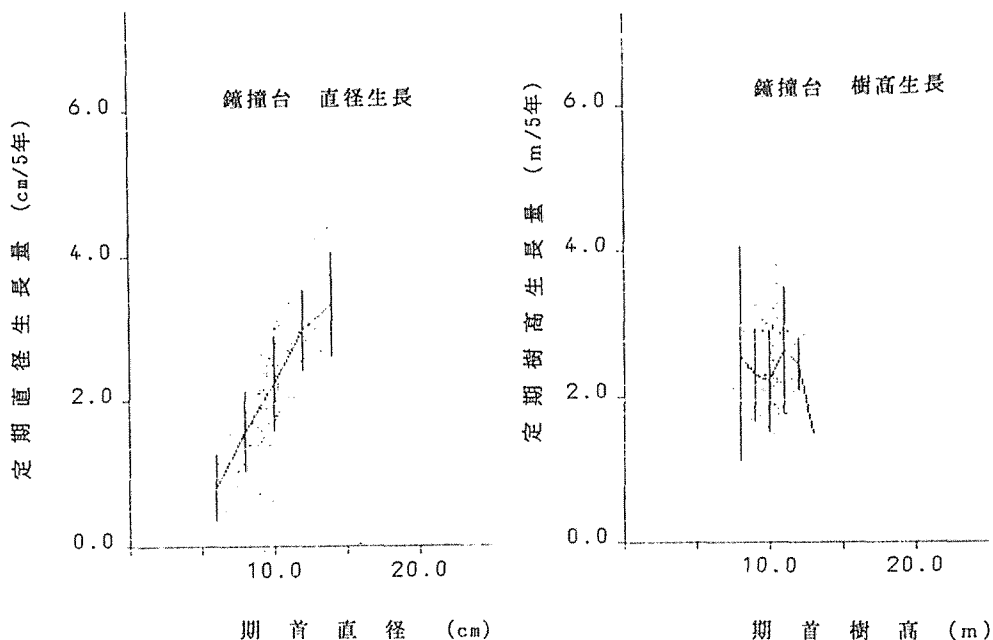
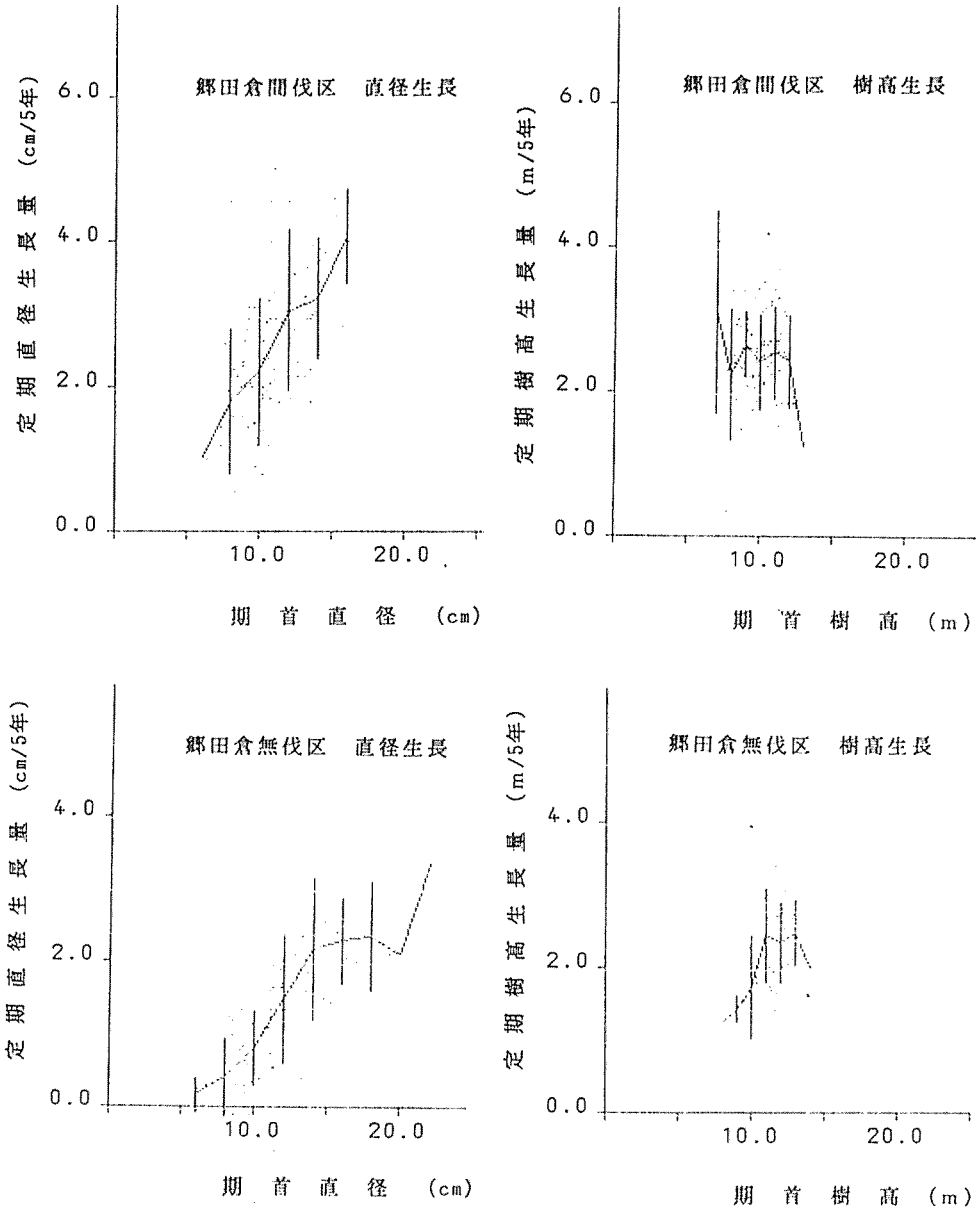


図-9-1. 定期生長量と期首の大きさとの関係
(東京大学千葉演習林新固定試験地)

点は、個々の林木の1978年12月から1984年4月までの生長量を表わしている。直径階(2 cm)および樹高階(1 m)別の生長量の平均と標準偏差を求め、各階級の平均値を折線で結び、各階級の標準偏差を平均値の上下に縦線で示した。縦線の長さが標準偏差の大きさを表わしている。

定期生長量と期首の大きさの間には、直径生長では明瞭な正の直線関係が認められるが、樹高生長では相関関係がほとんど認められない。



図一 9 - 2. 定期生長量と期首の大きさとの関係
(東京大学千葉演習林新固定試験地)

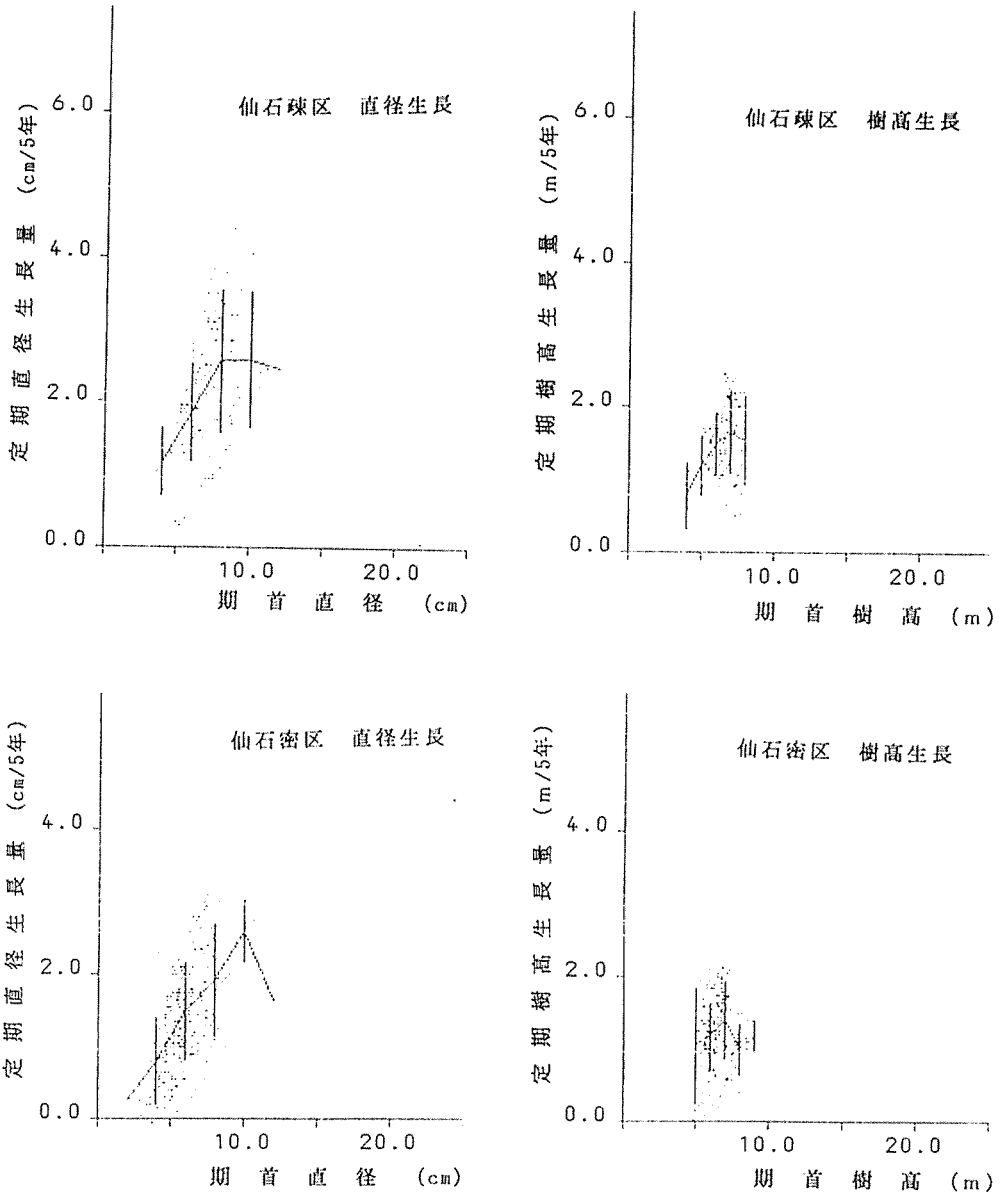


図-9-3. 定期生長量と期首の大きさとの関係
(東京大学千葉演習林新固定試験地)

表-6-1. 期首の大きさに対する定期生長量の回帰直線 (東京大学千葉演習林新固定試験地)

試験地名	期首 林齢	期末 林齢	回帰係数	定数項	横軸と 回帰直線 との交点 (x 切片)	回帰直線 の回りの 不偏分散	回帰直線 の回りの 標準偏差	相関係数	決定係数	期首の 平均値	定期 生長量 の平均
τ	(年)	(年)	$A(\tau)$	$B(\tau)$	$c(\tau)$	$((\text{cm}/5\text{年})^2)$	$(\text{cm}/5\text{年})$		$g(\tau)$	$g(\tau)$	$\Delta g(\tau)$
鐘 撞 台	16	21	0.349	-1.2	3.5	0.35	0.59	0.687*	0.472	10.0	2.3
郷田倉間伐区	16	21	0.282~0.416 ¹⁾	-1.9~-0.5 ¹⁾	2.3	0.93	0.96	0.559*	0.313	11.1	2.6
郷田倉無伐区	16	21	0.215~0.375	-1.6~0.2	6.3	0.53	0.73	0.699*	0.488	11.7	1.4
			0.212~0.296	-2.1~-1.1							
1978年12月の時点での樹高が10.5m以上であった樹高測定木54本について											
	16	21	0.199	-0.8	4.2	0.65	0.81	0.562*	0.316	13.2	1.8
仙石疎区	17	22	0.118~0.281	-1.9~0.3	-1.2	0.72	0.85	0.420*	0.177	7.1	2.2
仙石密区	17	22	0.172~0.361	-0.4~1.0	1.3	0.45	0.67	0.529*	0.280	6.0	1.5
			0.249~0.365	-0.8~0.0							

1) : 回帰係数および定数項に対する95%の信頼区間。

* : 5%水準で有意。

表-6-2. 期首の大きさに対する定期生長量の回帰直線 (東京大学千葉演習林新固定試験地)

試験地名	期首 林齢	末期 林齢	回帰係数	定数項	横軸と 回帰直線 との交点 (x切片)	回帰直線 の回りの 不偏分散	回帰直線 の回りの 標準偏差	相関係数	決定係数	期首の 平均値	定期 生長量 の平均
τ	(年)	(年)	$A(\tau)$	$B(\tau)$	$c(\tau)$	$(m/5年)^2$	(m/5年)			$g(\tau)$	$\Delta g(\tau)$
樹高生長	(年)	(年)	(1/5年)	(m/5年)	(m)		(m/5年)			(m)	(m/5年)
鐘 撞 台	16	21	0.035	2.0	-58.2	0.62	0.79	0.044	0.002	10.0	2.4
			-0.111~0.180 ¹⁾	0.6~3.5 ¹⁾							
郷田倉間伐区	16	21	-0.027	2.8	102.0	0.42	0.65	0.049	0.002	10.1	2.5
			-0.128~0.074	1.7~3.8							
郷田倉無伐区	16	21	0.226	-0.3	1.4	0.37	0.61	0.381*	0.145	11.3	2.2
			0.093~0.358	-1.8~1.2							
1978年12月の時点での樹高が10.5m以上であった樹高測定木54本について											
	16	21	-0.045	2.9	65.0	0.31	0.56	0.064	0.004	11.8	2.4
			-0.240~0.150	0.6~5.2							
仙石疎区	17	22	0.147	0.6	-4.0	0.27	0.52	0.210*	0.044	6.5	1.5
			0.035~0.260	-0.1~1.3							
仙石密区	17	22	0.029	1.0	-35.2	0.28	0.53	0.047	0.002	6.5	1.2
			-0.044~0.103	0.6~1.5							

1) : 回帰係数および定数項に対する95%の信頼区間。

* : 5%水準で有意。

表一 7 - 1. 階級別定期生長量の平均と分散および
分散の大きさの違いをすべての組合せについて F 検定した結果
(鐘撞台)

林齢16年から21年の直径生長量							
直径階(cm)	6	8	10	12	14		
立木本数(本)	2	28	60	25	6		
平均(cm/5年)	0.8	1.6	2.3	3.0	3.3		
不偏分散((cm/5年) ²)	0.21	0.29	0.42	0.31	0.51		
不偏分散の比と F 検定の結果							
直径階(cm)	6	—	1.35	1.99	1.48	2.44	
	8		—	1.48	1.09	1.80	
	10			—	1.35	1.22	
	12				—	1.65	
	14					—	
林齢16年から21年の樹高生長量							
樹高階(m)	8	9	10	11	12	13	
立木本数(本)	7	25	46	35	7	1	
平均(m/5年)	2.6	2.3	2.2	2.6	2.4	1.5	
不偏分散((m/5年) ²)	2.16	0.39	0.47	0.74	0.12	—	
不偏分散の比と F 検定の結果							
樹高階(m)	8	—	5.52	4.60	2.93	17.77	—
	9	**	—	1.20	1.89	3.22	—
	10	**		—	1.57	3.86	—
	11	*			—	6.07	—
	12	**			*	—	—
	13						—

* : 5%水準で有意, ** : 1%水準で高度に有意。

表一 7 - 2. 階級別定期生長量の平均と分散および
分散の大きさの違いをすべての組合せについてF検定した結果
(郷田倉間伐区)

林齢16年から21年の直径生長量								
直径階(cm)	6	8	10	12	14	16		
立木本数(本)	1	19	47	24	22	6		
平均(cm/5年)	1.0	1.8	2.2	3.1	3.2	4.1		
不偏分散((cm/5年) ²)	—	1.00	1.01	1.25	0.68	0.42		
不偏分散の比とF検定の結果								
直径階(cm)	6	—	—	—	—	—	—	
	8		—	1.01	1.24	1.48	2.40	
	10			—	1.23	1.49	2.42	
	12				—	1.83	2.98	
	14					—	1.63	
	16						—	
林齢16年から21年の樹高生長量								
樹高階(m)	7	8	9	10	11	12	13	
立木本数(本)	2	8	22	38	33	15	1	
平均(m/5年)	3.1	2.2	2.7	2.4	2.5	2.4	1.2	
不偏分散((m/5年) ²)	1.96	0.80	0.21	0.42	0.41	0.39	—	
不偏分散の比とF検定の結果								
樹高階(m)	7	—	2.45	9.29	4.69	4.81	5.00	—
	8		—	3.79	1.91	1.96	2.04	—
	9	*		—	1.98	1.93	1.86	—
	10				—	1.03	1.07	—
	11					—	1.04	—
	12						—	—
	13							—

* : 5%水準で有意, ** : 1%水準で高度に有意。

表一 7 - 3. 階級別定期生長量の平均と分散および
 分散の大きさの違いをすべての組合せについてF検定した結果
 (郷田倉無伐区上層木 (1978年12月の時点で樹高が10.5m以上であった樹高測定木
 54本))

林齢16年から21年の直径生長量								
直径階(cm)	8	10	12	14	16	18	20	22
立木本数(本)	1	9	21	10	7	5	0	1
平均(cm/5年)	1.3	1.0	1.5	2.2	2.5	2.4	—	3.4
不偏分散((cm/5年) ²)	—	0.18	1.16	0.36	0.50	0.57	—	—
不偏分散の比とF検定の結果								
直径階(cm)	8	—	—	—	—	—	—	—
	10	—	6.29	1.97	2.74	3.07	—	—
	12	*	—	3.20	2.30	2.05	—	—
	14	—	—	—	1.39	1.56	—	—
	16	—	—	—	—	1.12	—	—
	18	—	—	—	—	—	—	—
	20	—	—	—	—	—	—	—
	22	—	—	—	—	—	—	—
林齢16年から21年の樹高生長量								
樹高階(m)	11	12	13	14				
立木本数(本)	22	19	12	1				
平均(m/5年)	2.4	2.3	2.5	2.0				
不偏分散((m/5年) ²)	0.40	0.29	0.20	—				
不偏分散の比とF検定の結果								
樹高階(m)	11	—	1.39	1.99	—			
	12	—	—	1.44	—			
	13	—	—	—	—			
	14	—	—	—	—			

* : 5%水準で有意, ** : 1%水準で高度に有意。

表一 7 - 4 . 階級別定期生長量の平均と分散および
分散の大きさの違いをすべての組合せについてF検定した結果
(仙石疎区)

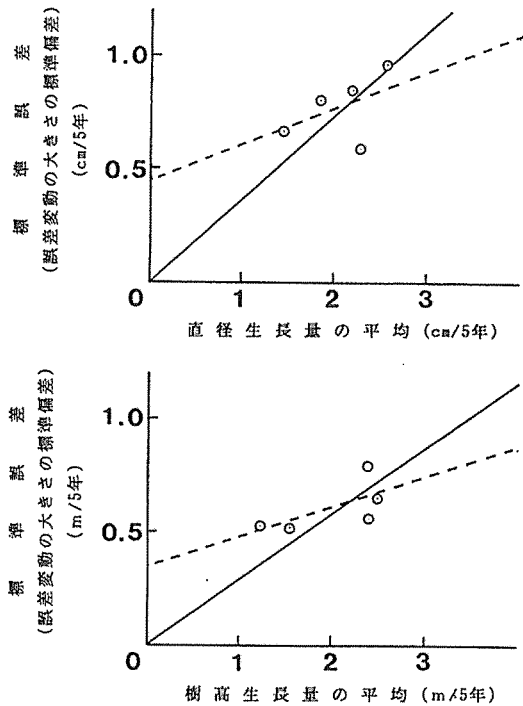
林齢17年から22年の直径生長量						
直径階(cm)	4	6	8	10	12	
立木本数(本)	9	58	63	13	1	
平均(cm/5年)	1.2	1.9	2.6	2.6	2.5	
不偏分散((cm/5年) ²)	0.21	0.44	0.98	0.89	—	
不偏分散の比とF検定の結果						
直径階(cm)	4	—	2.10	4.64	4.21	—
	6		—	2.21	2.01	—
	8	*	**	—	1.10	—
	10	*			—	—
	12					—
林齢17年から22年の樹高生長量						
樹高階(m)	4	5	6	7	8	
立木本数(本)	2	9	56	65	12	
平均(m/5年)	0.8	1.2	1.5	1.7	1.5	
不偏分散((m/5年) ²)	0.21	0.16	0.18	0.33	0.38	
不偏分散の比とF検定の結果						
樹高階(m)	4	—	1.29	1.16	1.54	1.81
	5		—	1.11	1.99	2.34
	6			—	1.80	2.11
	7			*	—	1.17
	8					—

* : 5%水準で有意, ** : 1%水準で高度に有意。

表一七—五. 階級別定期生長量の平均と分散および
分散の大きさの違いをすべての組合せについてF検定した結果
(仙石密区)

林齢17年から22年の直径生長量						
直径階(cm)	2	4	6	8	10	12
立木本数(本)	1	61	150	63	4	1
平均(cm/5年)	0.3	0.8	1.5	1.9	2.6	1.7
不偏分散((cm/5年) ²)	—	0.36	0.45	0.59	0.18	—
不偏分散の比とF検定の結果						
直径階(cm)	2	—	—	—	—	—
	4	—	1.25	1.64	1.98	—
	6	—	—	1.31	2.47	—
	8	—	—	—	3.24	—
	10	—	—	—	—	—
	12	—	—	—	—	—
林齢17年から22年の樹高生長量						
樹高階(m)	5	6	7	8	9	
立木本数(本)	25	119	94	37	5	
平均(m/5年)	1.1	1.2	1.4	1.0	1.2	
不偏分散((m/5年) ²)	0.63	0.22	0.29	0.13	0.05	
不偏分散の比とF検定の結果						
樹高階(m)	5	—	2.89	2.18	5.01	12.09
	6	**	—	1.32	1.74	4.19
	7	**	—	—	2.30	5.54
	8	**	—	**	—	2.41
	9	*	—	—	—	—

* : 5%水準で有意, ** : 1%水準で高度に有意。



図一10. 標準誤差と定期生長量の平均との関係
(東京大学千葉演習林新固定試験地)

白丸は観測値を示す(表一6)。

実線は比例関係を示し、点線は回帰直線である。

比例定数は、直径生長が0.369、樹高生長が0.292であった。

回帰係数の95%の信頼区間は以下の通りである。

直径生長

$$-0.375 < \text{回帰係数} = 0.158 < 0.690$$

$$-0.665 < \text{定数項} = 0.452 < 1.570$$

樹高生長

$$-0.145 < \text{回帰係数} = 0.127 < 0.400$$

$$-0.211 < \text{定数項} = 0.353 < 0.918$$

は異なる傾向を示していた。すなわち、樹高階11m以上においては定期生長量と期首の樹高との間に相関関係は認められなかったが、それ以下の樹高階では、樹高が低いほど定期生長量も小さくなっていた。これは、当試験地が無伐区であるので樹高階10m以下の林木が被圧されているためと解釈できる。

ii) 各直径階および樹高階における定期生長量の変動の大きさ

図一9の縦線に示されているように、各直径階および樹高階における定期生長量の変動の大きさは、それぞれ直径および樹高に依存しないようである。表一7に、各階級の生長量の分散につ

いて、その大きさの違いをF検定した結果を示す。これによれば、2、3の例外はあるものの、定期生長量の分散は各階級によって異なるとは言い難い。ここでも、直径生長に関しては、前節で報告した仮説2を確認することができた。この生長量の変動を誤差変動に基づくものと考え、以下、平均値のまわりの変動を誤差変動と呼ぶことにする。

iii) 誤差変動の大きさと定期生長量の平均値との関係

直径生長モデルの仮説3では、誤差変動の大きさの標準偏差は生長量の平均値に比例すると仮定されていた。ここでは、期首の大きさに対する定期生長量の回帰直線を求め、回帰直線式のまわりの誤差変動の大きさの標準偏差と定期生長量の平均値との関係を解析した。なお、時系列データが得られていないため、各試験地の値を同一図面上にプロットして傾向をみることにした(図-10)。また、郷田倉無伐区は、前述したように一部の林木に被圧が認められたので、1978年12月の樹高が10.5m以上の樹高測定木のみに対して回帰直線をあてはめた。直径生長、樹高生長の両者とも、定期生長量の平均値が大きいほど誤差変動の標準偏差も大きくなる傾向が認められた。

定期生長量の平均(X)に対する誤差変動の標準偏差(Y)の回帰直線は、直径生長の場合は $Y=0.158X+0.452$ 、樹高生長の場合は $Y=0.127X+0.353$ となった。有意水準5%での信頼区間は図-10の注に示した通りである。定数項の信頼区間にゼロが含まれるため、直線が原点を通ると仮定した。その結果比例定数は、直径生長の場合が0.369、樹高生長の場合が0.292となった。また、前節の確率論的直径生長モデルでは比例定数は0.294であった。よって、スギ、ヒノキでは、直径生長の比例定数は約0.3であると推察される。樹高生長の比例定数も、今回の結果から判断すれば、直径生長の比例定数に近い値であると考えられる。しかし、今回の結果は、時系列データを解析したものではなく、くわえて林齢20年前後の若い林分の資料だけを解析した結果であるので、まだ検討を要する。表-8は、定期生長量の平均値に対する誤差変動の標準偏差の比を求め、樹高生長の値が直径生長の値の何倍であるかを、各試験地について示したものである。鐘撞台では、1.27と樹高の値の方が大きかったが、他の試験地では、いずれも1よりも小さかつ

表-8. 定期生長量の平均値に対する誤差変動の標準偏差の比の値の直径生長と樹高生長との比較

	記号	試 験 地 名				
		鐘撞台	郷田倉 間伐区	郷田倉 無伐区 (上層木)	仙石 疎区	仙石 密区
定期直径生長量の平均 (cm/5年)	A	2.28	2.59	1.79	2.19	1.45
直径生長量の誤差変動の標準偏差(cm/5年)	B	0.59	0.96	0.81	0.85	0.67
直径生長の比	$C=B/A$	0.26	0.37	0.45	0.39	0.46
定期樹高生長量の平均 (m/5年)	D	2.38	2.48	2.40	1.54	1.23
樹高生長量の誤差変動の標準偏差(m/5年)	E	0.79	0.65	0.56	0.52	0.53
樹高生長の比	$F=E/D$	0.33	0.26	0.23	0.34	0.43
樹高生長の比の直径生長の比に対する比	$G=F/C$	1.27	0.71	0.51	0.87	0.93

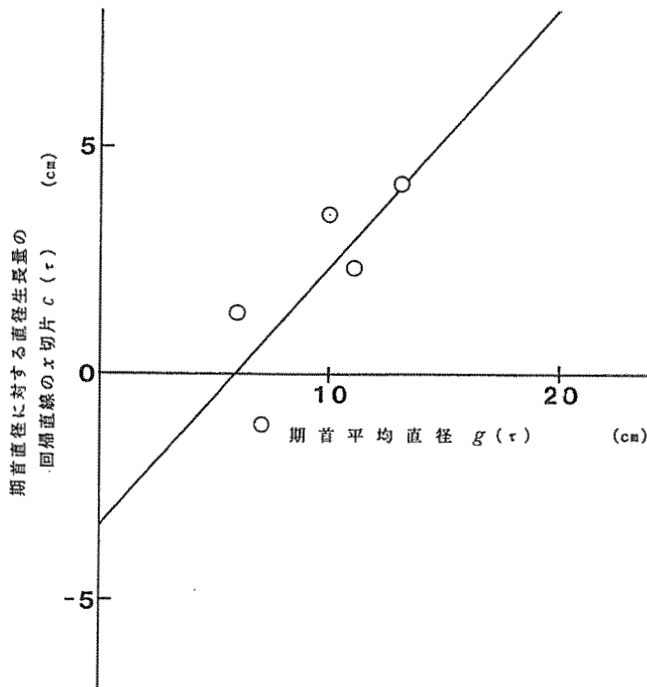


図-11. 期首平均直径 $g(\tau)$ と
期首直径に対する直径生長量の回帰直線の x 切片 $c(\tau)$ の関係
(東京大学千葉演習林新固定試験地)

白丸は観測値を示す(表-6)。

実線は $g(\tau)$ に対する $c(\tau)$ の回帰直線を示す。

$$c(\tau) = 0.567g(\tau) - 3.3$$

た。ヒノキの場合は、比較的1に近い値であった。このように、樹高生長の比例定数の直径生長の比例定数に対する比は、試験地によって異なり、その比の値は少なくとも0.5から2.0の範囲にあるものと思われた。吉田・平田は、地位が良好なるに従い樹高の変動係数だけが増加すると報告しているが(1955)、樹高生長の比例定数が地位の影響を受けていることも考えられる。

iv) 直径生長における回帰直線の x 切片の林齢に伴う変化

仮説4の誤差変動のランダム性については、時系列データがないので、今回は検討しなかった。仮説5の x 切片の変化については、直径生長についてのみ解析した。なぜならば、樹高生長では回帰係数がゼロであるとみなすことができるので、 x 切片について検討することは無意味であると思われるからである。図-11に各試験地の値を示した。全体に正の相関関係が認められる。仮説5は、同一林分内での変化について述べたものであるが、仮説3の時と同様に、各試験地の値に回帰直線をあてはめてみた。回帰係数は0.567であり、前節で報告した値1.0との間には5%水準で有意差はなかった。

3.4.2 確率論的樹高生長モデルの構築

以上の結果を基に、同齡単純林の樹高生長に関して以下のような5つの仮説を立てた。

仮説7. ある林齡における連年樹高生長量と樹高の大きさとの間には、相関関係は認められない。すなわち、回帰係数はゼロである。

仮説8. ある林齡における各林木の連年樹高生長量の相違が、誤差変動に基づくものと考えるとき、この誤差変動の大きさは樹高に依存しない。

仮説9. 仮説8で表わされる誤差変動の標準偏差は生長に伴い減少し、その大きさはその時の樹高生長量の平均に比例する。

仮説10. 誤差変動は全くランダムであって、いわゆる白色雑音である。

仮説11. 平均樹高生長はある生長曲線に従う。

この5つの仮説を基に、確率論的樹高生長モデルを構築すれば、時間連続モデルでの数学的表現は(146)式となる。

$$\frac{d y}{d \tau} = g_y'(\tau) + \gamma_y g_y'(\tau) P(\tau) \quad (146)$$

ただし、 y は樹高、 τ は林齡、 g_y は平均樹高の生長曲線、 γ_y は仮説9での比例定数、 P は白色雑音を表わし、また $'$ は林齡 τ に関する微分を表わしている。

(146)式を初期条件

$$y(0) = g_y(0) \quad (147)$$

のもとで解くと

$$y = g_y(\tau) + \gamma_y \int_0^{\tau} g_y'(\xi) f(\xi) d\xi \quad (148)$$

となる。また、樹高分散は

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 D_y \gamma_y^2 \int_0^{\tau} \{g_y'(\xi)\}^2 d\xi \quad (149)$$

で与えられる。ただし、 D_y は白色雑音の強さである。いま、平均樹高の生長が(150)式のようなMITSCHERLICH曲線に従うと仮定すれば、(149)式の樹高分散は(151)式で表わされる。

$$y(\tau) = M_y (1 - l_y \exp(-k_y \tau)) \quad (150)$$

$$\sigma_y^2(\tau) = D_y \gamma_y^2 M_y^2 k_y l_y^2 (1 - \exp(-2 k_y \tau)) \quad (151)$$

3.4.3 樹高分布の変動係数に関する考察

一般に、同齡単純林の直径分布の変動係数は20数%であり、生長に伴い微増する傾向がある。一方、樹高分布の変動係数は10数%であって、直径分布の変動係数の約半分の大きさであり、しかも生長に伴い減少する傾向がある。ここでは、まず樹高分布の変動係数について考察し、つぎに直径分布の変動係数との関係について検討する。

i) 樹高分布の変動係数

平均樹高の生長がMITSCHERLICH曲線に従う場合の樹高分布の変動係数は、(152)式のように表わされ、その値は r_y に比例し、 M_y とは無関係である。

$$C.V._y = \frac{\sqrt{D_y k_y} r_y l_y \sqrt{1 - \exp(-2 k_y \tau)}}{1 - l_y \exp(-k_y \tau)} \quad (152)$$

これを林齢 τ について微分すれば、樹高分布の変動係数が林齢 $-1/k_y \cdot \ln l_y$ まで単調増加し、それ以後単調減少することが容易に証明できる。 l_y の値はほとんど1なので、変動係数の最大は生長のごく初期に生じる。よって、一般には樹高分布の変動係数は単調減少すると言ってよい。これは、直径分布の変動係数が壮齢期以後単調に微増するのと対照的である。

ii) 直径分布の変動係数

平均直径の生長がMITSCHERLICH曲線に従う場合の直径分布の変動係数は、(153)、(154)、(155)式で近似的に表わされた。ここで C は誤差変動の項の上限値を表わしている。いずれの場合も、直径の変動係数は r_x に比例し、 M_x とも密接な関係にある。

$a \neq 0, a \neq 1$ のとき

$$C.V._x = \frac{\sqrt{2 D_x C} r_x \{(1-a) M_x (1 - l_x \exp(-k_x \tau)) - b\}^{1/(1-a)}}{M_x (1 - l_x \exp(-k_x \tau))} \quad (153)$$

$a = 0$ のとき

$$C.V._x = \frac{\sqrt{2 D_x C} r_x \{M_x (1 - l_x \exp(-k_x \tau)) - b\}}{M_x (1 - l_x \exp(-k_x \tau))} \quad (154)$$

$a = 1$ のとき

$$C.V._x = \frac{\sqrt{2 D_x C} r_x e^{-M_x (1 - l_x \exp(-k_x \tau))} / b}{M_x (1 - l_x \exp(-k_x \tau))} \quad (155)$$

これらを林齢 τ について微分し、かつ、各パラメータのとりうる値を林学における常識的な範囲で考察すれば、以下に述べるような傾向を証明することができる。すなわち、(153)式は、 $0 < a < 1$ の範囲では、単調減少ののち単調増加に転じ、その変曲点は $-1/k_x \cdot \ln \{(a M_x + b) / (a M_x l_x)\}$ であって、 a が小さいほど単調減少の期間が長くなる。(154)式は、 $b < 0$ のとき単調減少する。(155)式は、変曲点 $-1/k_x \cdot \ln \{(M_x + b) / (M_x l_x)\}$ で単調減少から単調増加に転ずる。

iii) 樹高の変動係数と直径の変動係数との関係

ここでは $a = 1$ のときの関係について考察する。これは前節の解析で郷台1号試験地の a がほぼ1であったためである。さて、初期の生長現象を考慮に入れなければ、樹高分布の変動係数は単調に減少し、直径分布の変動係数は単調に増加していた。正の単調減少関数を正の単調増加関数で除した関数は単調減少関数であるから、樹高の変動係数の直径の変動係数に対する比は単調に減少する。 $a = 1$ のときについて、比の究極の値、すなわち林齢が無限大の時の値を求めてみると (156) 式のようになる。

$$U.V.R. = \frac{\overline{D_y k_y r_y l_y}}{\sqrt{2 D_x r_x^2 \left(-\frac{b}{2}\right) k_x \left\{ (M_x l_x + \frac{b}{2}) e^{-2/b \cdot M_x l_x} - \frac{b}{2} \right\}}}$$

$$M_x \tag{156}$$

D , r , k , l の値は直径生長と樹高生長とは大差はないから、ここで同じ値であると仮定すれば、(156) 式は結局パラメータ M_x と b とで決定されることになる。このように、樹高の変動係数と直径の変動係数との決定的な差異はパラメータ M_x と b 、すなわち、各時間断面における連年直径生長量の直径に対する回帰直線の傾きにあると言える。これは、一般に、確率変数 X が平均 μ 、分散 σ^2 をもつならば、確率変数 $X^* = aX + b$ ($a \neq 0$) は、平均 $\mu^* = a\mu + b$ と分散 $\sigma^{*2} = a^2 \sigma^2$ とをもつから、直径分布の分散の増加に回帰直線の傾きが影響するのは当然の結果である。

以上のように、究極の時の比の値については考察できたので、つぎに、各パラメータにスギ林分の一般的な値を代入し、樹高の変動係数と直径の変動係数との比の値の生長に伴う変化について計算した。直径生長に関するパラメータは、前節で示した郷台1号試験地の値を参考にして、 $M_x = 40$, $k_x = 0.027$, $l_x = 0.95$, $a = 1.0$, $b = -15$, $r_x = 0.3$, $D_x = 1.0$ とした。樹高生長に関するパラメータについては、一般に形状比が0.75であるから $M_y = 30$ とし、 k_y は k_x の約1.1倍であることが多いから、 $k_y = 0.03$ とした。また、 $l_y = 1.0$, $D_y = 1.0$ とした。 r_y については、まだ十分に研究されておらず、その一般的な傾向が不明なので、ここでは r_x の2.0倍、1.0倍および0.5倍の3通りについて計算することにした。すなわち、 $r_y = 0.6$, $r_y = 0.3$, $r_y = 0.15$ の3通りとした。表-9に示したように、直径分布の変動係数は、林齢3年で極大値16.2%を、林齢10年で極小値15.5%を示し、その後は単調に増加して、林齢50年では22.8%、林齢70年では26.4%となった。このように、壮齢期の直径分布の変動係数は20数パーセントの値を示しながら単調に微増する結果となったが、これは通説をよく説明しているといえる。一方、樹高分布の変動係数は、 $r_y = 0.6$ の場合は、林齢1年時に84.9%と非常に高い値を示すが、急速に単調減少して、林齢10年で26.9%、林齢20年で19.3%となり、その後は緩やかに単調減少して、林齢50年で

表一 9-1. 直径の変動係数と樹高の変動係数の比較

林齢 (年)	直径生長			樹 高 生 長									
	平均 (cm)	分散 (cm ²)	変動 係数 cvd (%)	$r_s=0.6$			$r_s=0.3$			$r_s=0.15$			
				平均 (m)	分散 (m ²)	変動 係数 cvh (%)	比 cvh/ cvd	分散 (m ²)	変動 係数 (%)	比 cvh/ cvd	分散 (m ²)	変動 係数 (%)	比 cvh/ cvd
1	3.0	0.20	14.8	0.9	0.57	84.9	5.75	0.14	42.4	2.88	0.04	21.2	1.44
2	4.0	0.41	16.1	1.7	1.10	60.0	3.74	0.27	30.0	1.87	0.07	15.0	0.93
3	5.0	0.65	16.2	2.6	1.60	49.0	3.02	0.40	24.5	1.51	0.10	12.3	0.76
4	5.9	0.90	16.1	3.4	2.07	42.5	2.64	0.52	21.2	1.32	0.13	10.6	0.66
5	6.8	1.17	15.9	4.2	2.52	38.0	2.39	0.63	19.0	1.19	0.16	9.5	0.60
6	7.7	1.47	15.8	4.9	2.94	34.7	2.20	0.73	17.3	1.10	0.18	8.7	0.55
7	8.5	1.79	15.6	5.7	3.33	32.1	2.05	0.83	16.1	1.03	0.21	8.0	0.51
8	9.4	2.13	15.6	6.4	3.71	30.1	1.93	0.93	15.0	0.97	0.23	7.5	0.48
9	10.2	2.50	15.5	7.1	4.06	28.4	1.83	1.01	14.2	0.91	0.25	7.1	0.46
10	11.0	2.90	15.5	7.8	4.39	26.9	1.74	1.10	13.5	0.87	0.27	6.7	0.43
11	11.8	3.33	15.5	8.4	4.70	25.7	1.66	1.17	12.8	0.83	0.29	6.4	0.41
12	12.5	3.79	15.6	9.1	4.99	24.6	1.58	1.25	12.3	0.79	0.31	6.2	0.40
13	13.2	4.28	15.6	9.7	5.26	23.7	1.52	1.32	11.8	0.76	0.33	5.9	0.38
14	14.0	4.80	15.7	10.3	5.52	22.8	1.46	1.38	11.4	0.73	0.35	5.7	0.36
15	14.7	5.36	15.8	10.9	5.77	22.1	1.40	1.44	11.0	0.70	0.36	5.5	0.35
16	15.3	5.95	15.9	11.4	6.00	21.4	1.35	1.50	10.7	0.67	0.37	5.4	0.34
17	16.0	6.58	16.0	12.0	6.22	20.8	1.30	1.55	10.4	0.65	0.39	5.2	0.32
18	16.6	7.24	16.2	12.5	6.42	20.2	1.25	1.60	10.1	0.63	0.40	5.1	0.31
19	17.2	7.94	16.3	13.0	6.61	19.7	1.21	1.65	9.9	0.60	0.41	4.9	0.30
20	17.9	8.67	16.5	13.5	6.79	19.3	1.17	1.70	9.6	0.58	0.42	4.8	0.29
21	18.4	9.45	16.7	14.0	6.96	18.8	1.13	1.74	9.4	0.56	0.44	4.7	0.28
22	19.0	10.26	16.8	14.5	7.12	18.4	1.09	1.78	9.2	0.55	0.45	4.6	0.27
23	19.6	11.11	17.0	15.0	7.27	18.0	1.06	1.82	9.0	0.53	0.45	4.5	0.26
24	20.1	12.01	17.2	15.4	7.42	17.7	1.03	1.85	8.8	0.51	0.46	4.4	0.26
25	20.7	12.94	17.4	15.8	7.55	17.4	1.00	1.89	8.7	0.50	0.47	4.3	0.25
26	21.2	13.91	17.6	16.2	7.68	17.1	0.97	1.92	8.5	0.48	0.48	4.3	0.24
27	21.7	14.91	17.8	16.7	7.80	16.8	0.94	1.95	8.4	0.47	0.49	4.2	0.24
28	22.2	15.96	18.0	17.0	7.91	16.5	0.91	1.98	8.2	0.46	0.49	4.1	0.23
29	22.6	17.05	18.2	17.4	8.01	16.2	0.89	2.00	8.1	0.45	0.50	4.1	0.22
30	23.1	18.17	18.5	17.8	8.11	16.0	0.87	2.03	8.0	0.43	0.51	4.0	0.22
31	23.5	19.34	18.7	18.2	8.21	15.8	0.84	2.05	7.9	0.42	0.51	3.9	0.21
32	24.0	20.53	18.9	18.5	8.30	15.6	0.82	2.07	7.8	0.41	0.52	3.9	0.21
33	24.4	21.77	19.1	18.9	8.38	15.4	0.80	2.09	7.7	0.40	0.52	3.8	0.20
34	24.8	23.04	19.3	19.2	8.46	15.2	0.78	2.11	7.6	0.39	0.53	3.8	0.20
35	25.2	24.35	19.6	19.5	8.53	15.0	0.77	2.13	7.5	0.38	0.53	3.7	0.19
36	25.6	25.69	19.8	19.8	8.60	14.8	0.75	2.15	7.4	0.37	0.54	3.7	0.19
37	26.0	27.06	20.0	20.1	8.66	14.6	0.73	2.17	7.3	0.37	0.54	3.7	0.18
38	26.4	28.47	20.2	20.4	8.73	14.5	0.72	2.18	7.2	0.36	0.55	3.6	0.18
39	26.7	29.90	20.4	20.7	8.78	14.3	0.70	2.20	7.2	0.35	0.55	3.6	0.18
40	27.1	31.37	20.7	21.0	8.84	14.2	0.69	2.21	7.1	0.34	0.55	3.5	0.17

直径生長には (131) 式, 直径分散には (138) 式を用い, そのパラメータは $M_s=40$, $k_s=0.027$, $l_s=0.95$, $\alpha=1.0$, $\beta=-15$, $r_s=0.3$, $D_s=1.0$ である。

樹高生長には (150) 式, 樹高分散には (151) 式を用い, そのパラメータは $M_h=30$, $k_h=0.030$, $l_h=1.00$, $D_h=1.0$ である。 r_s については0.6, 0.3, 0.15の3通りを計算した。

表一 9 - 2. 直径の変動係数と樹高の変動係数の比較

林齡 (年)	直径生長			樹 高 生 長									
	平均 (cm)	分散 (cm ²)	変動 係数 cvd (%)	$r_s=0.6$			$r_s=0.3$			$r_s=0.15$			
				平均 (m)	分散 (m ²)	変動 係数 cvh (%)	比 cvh/ cvd	分散 (m ²)	変動 係数 (%)	比 cvh/ cvd	分散 (m ²)	変動 係数 (%)	比 cvh/ cvd
41	27.4	32.86	20.9	21.2	8.89	14.0	0.67	2.22	7.0	0.34	0.56	3.5	0.17
42	27.8	34.38	21.1	21.5	8.94	13.9	0.66	2.23	7.0	0.33	0.56	3.5	0.16
43	28.1	35.92	21.3	21.7	8.98	13.8	0.65	2.25	6.9	0.32	0.56	3.4	0.16
44	28.4	37.49	21.5	22.0	9.03	13.7	0.63	2.26	6.8	0.32	0.56	3.4	0.16
45	28.7	39.08	21.8	22.2	9.07	13.5	0.62	2.27	6.8	0.31	0.57	3.4	0.16
46	29.0	40.70	22.0	22.5	9.10	13.4	0.61	2.28	6.7	0.31	0.57	3.4	0.15
47	29.3	42.33	22.2	22.7	9.14	13.3	0.60	2.29	6.7	0.30	0.57	3.3	0.15
48	29.6	43.98	22.4	22.9	9.17	13.2	0.59	2.29	6.6	0.30	0.57	3.3	0.15
49	29.9	45.65	22.6	23.1	9.21	13.1	0.58	2.30	6.6	0.29	0.58	3.3	0.15
50	30.1	47.34	22.8	23.3	9.24	13.0	0.57	2.31	6.5	0.29	0.58	3.3	0.14
51	30.4	49.04	23.0	23.5	9.26	12.9	0.56	2.32	6.5	0.28	0.58	3.2	0.14
52	30.7	50.75	23.2	23.7	9.29	12.9	0.55	2.32	6.4	0.28	0.58	3.2	0.14
53	30.9	52.47	23.4	23.9	9.32	12.8	0.55	2.33	6.4	0.27	0.58	3.2	0.14
54	31.2	54.20	23.6	24.1	9.34	12.7	0.54	2.33	6.4	0.27	0.58	3.2	0.13
55	31.4	55.94	23.8	24.2	9.36	12.6	0.53	2.34	6.3	0.26	0.59	3.2	0.13
56	31.6	57.68	24.0	24.4	9.38	12.5	0.52	2.35	6.3	0.26	0.59	3.1	0.13
57	31.8	59.44	24.2	24.6	9.40	12.5	0.52	2.35	6.2	0.26	0.59	3.1	0.13
58	32.1	61.19	24.4	24.7	9.42	12.4	0.51	2.36	6.2	0.25	0.59	3.1	0.13
59	32.3	62.95	24.6	24.9	9.44	12.3	0.50	2.36	6.2	0.25	0.59	3.1	0.13
60	32.5	64.71	24.8	25.0	9.45	12.3	0.50	2.36	6.1	0.25	0.59	3.1	0.12
61	32.7	66.47	24.9	25.2	9.47	12.2	0.49	2.37	6.1	0.24	0.59	3.1	0.12
62	32.9	68.22	25.1	25.3	9.48	12.2	0.48	2.37	6.1	0.24	0.59	3.0	0.12
63	33.1	69.68	25.3	25.5	9.50	12.1	0.48	2.37	6.1	0.24	0.59	3.0	0.12
64	33.2	71.73	25.5	25.6	9.51	12.0	0.47	2.38	6.0	0.24	0.59	3.0	0.12
65	33.4	73.48	25.6	25.7	9.52	12.0	0.47	2.38	6.0	0.23	0.60	3.0	0.12
66	33.6	75.22	25.8	25.9	9.53	11.9	0.46	2.38	6.0	0.23	0.60	3.0	0.12
67	33.8	76.95	26.0	26.0	9.55	11.9	0.46	2.39	5.9	0.23	0.60	3.0	0.11
68	33.9	78.68	26.1	26.1	9.56	11.8	0.45	2.39	5.9	0.23	0.60	3.0	0.11
69	34.1	80.39	26.3	26.2	9.57	11.8	0.45	2.39	5.9	0.22	0.60	2.9	0.11
70	34.3	82.10	26.4	26.3	9.57	11.8	0.44	2.39	5.9	0.22	0.60	2.9	0.11
71	34.4	83.79	26.6	26.4	9.58	11.7	0.44	2.40	5.9	0.22	0.60	2.9	0.11
72	34.6	85.48	26.8	26.5	9.59	11.7	0.44	2.40	5.8	0.22	0.60	2.9	0.11
73	34.7	87.15	26.9	26.6	9.60	11.6	0.43	2.40	5.8	0.22	0.60	2.9	0.11
74	34.8	88.81	27.0	26.7	9.61	11.6	0.43	2.40	5.8	0.21	0.60	2.9	0.11
75	35.0	90.45	27.2	26.8	9.61	11.6	0.42	2.40	5.8	0.21	0.60	2.9	0.11
76	35.1	92.08	27.3	26.9	9.62	11.5	0.42	2.40	5.8	0.21	0.60	2.9	0.11
77	35.2	93.69	27.5	27.0	9.62	11.5	0.42	2.41	5.7	0.21	0.60	2.9	0.10
78	35.4	95.29	27.6	27.1	9.63	11.4	0.41	2.41	5.7	0.21	0.60	2.9	0.10
79	35.5	96.87	27.7	27.2	9.64	11.4	0.41	2.41	5.7	0.21	0.60	2.9	0.10
80	35.6	98.44	27.9	27.3	9.64	11.4	0.41	2.41	5.7	0.20	0.60	2.8	0.10

直径生長には (131) 式, 直径分散には (138) 式を用い, そのパラメータは $M_s=40$, $k_s=0.027$, $l_s=0.95$, $\alpha=1.0$, $\beta=-15$, $r_s=0.3$, $D_s=1.0$ である。

樹高生長には (150) 式, 樹高分散には (151) 式を用い, そのパラメータは $M_s=30$, $k_s=0.030$, $l_s=1.00$, $D_s=1.0$ である。 r_s については 0.6, 0.3, 0.15 の 3 通りを計算した。

は13.0%、林齢70年では11.8%となった。壮齢期の樹高分布の変動係数は、10数パーセントの値を示しながら単調に減少し、直径分布の変動係数に対する比も0.5前後となった。この結果も通説をよく説明しているといえる。樹高分布の変動係数は r_y に比例しているので、 $r_y=0.3$ 、 $r_x=0.15$ の場合は、 $r_y=0.6$ の場合の半分および4分の1になる。その結果、樹高分布の変動係数の直径分布の変動係数に対する比は、林齢50年で、それぞれ、0.286、0.143となり、経験的に知っている値よりもかなり低かった。

以上のように、今回構築したモデルによって、樹高分布の変動係数が直径分布の変動係数よりも一般に小さいことを説明することができた。とくに、 r_y が r_x の2倍の大きさのときは、林齢50年前後で、樹高分布の変動係数が直径分布の変動係数の約半分であることを示すことができた。

3.4.4 今回構築した確率論的樹高生長モデルの特徴

同齢単純林の林分生長量の各林木への配分を調べた結果、直径生長と樹高生長とでは、そのメカニズムがまったく異なることが認められた。すなわち、直径生長の場合は、定期生長量と直径の大きさとの間に線形関係が見出され、直径が大きな林木ほどより大きな定期生長量を持っていたが、樹高生長の場合は、定期生長量と樹高の大きさとの間には相関関係は見出されず、各林木にはほぼ均等に生長量が配分されていた。いま、縦軸に定期生長量を取り、横軸に期首の大きさをとったグラフで考えれば、直径生長の場合は右上がりの回帰直線が得られるが、樹高生長の場合は横軸に平行な回帰直線が得られることになる。この違いが、直径分布の変動係数が樹高分布の変動係数よりも大きくなる原因であった。一般に、樹高は地位の指標として扱われることが多いが、上述のような樹高生長の特徴からして妥当であると思われる。

本論文では、こうした樹高生長の特徴を考慮して、確率論的樹高生長モデルを構築した。仮説8および仮説9の内容は、前節で報告した同齢単純林の確率論的直径生長モデルの仮説2および仮説3と同じである。仮説10は、今回の資料では解析できなかったので、直径生長モデルの仮説4と同じにした。この樹高生長モデルによれば、樹高分布の変動係数は、生長のごく初期をのぞけば、林齢に伴い単調減少することになる。この点については、吉田・平田も同様の傾向を報告している(1955)。今回構築した樹高モデルおよび前節で報告した直径モデルの各パラメータに、スギ林分における一般的な値を代入した結果、 r_y が r_x の2倍の場合は、樹高分布の変動係数が直径分布の変動係数の約半分であるという通説をよく説明することができた。しかし、今回の結果は、若齢林分のわずか二時期間の資料を解析したにすぎないので、とくに r_y の経時変化については再検討を要する。

3.5 直径生長と樹高生長の相関

同齢単純林の生長に関して、3.3節では(110)式のような確率論的直径生長モデルを、3.4節では(146)式のような確率論的樹高生長モデルを構築した。(110)式は各時間断面における直径別の直径生長量を、(146)式は各時間断面における樹高別の樹高生長量を表わしている。本節では、各時間断面における直径生長量と樹高生長量との相関関係を、直径階別・樹高階

別に検討し、3.3節で報告した確率論的直径生長モデルと、3.4節で報告した確率論的樹高生長モデルとの関係について考察したものである。

なお、(110)式および(146)式は若干複雑であるため、本節では、それぞれ(157)式、(158)式のように書き改めて考察することにした。

$$X = ax + b + \varepsilon_x \quad (157)$$

$$Y = cy + d + \varepsilon_y \quad (158)$$

(157)式は、直径 x の林木の現実の直径生長量 X が、直径 x の一次関数で表わされる量 $ax + b$ と誤差変動量 ε_x との和として表わされることを示している。(158)式も同様である。ただし、樹高生長モデルでは、樹高生長量は樹高に依存しないと仮定したので、(158)式の c は本来ゼロとすべきである。しかし、ここでは一般的に考察する都合も考えて、 cy の項を付け加えておいた。

3.5.1 直径生長の誤差変動量 ε_x と樹高生長の誤差変動量 ε_y との相関係数の推定

本節の研究の第一の目的は、直径生長の誤差変動量 ε_x と樹高生長の誤差変動量 ε_y との相関係数 ρ の解析である。われわれは、現実の直径生長量 X と現実の樹高生長量 Y との相関係数 P については、資料から計算することができる。よって、まず、 ρ と P との関係について検討する。

いま、 ε_x および ε_y の平均がともにゼロであるとすれば、 ε_x と ε_y の相関係数 ρ は、

$$\frac{\sum \varepsilon_x \cdot \sum \varepsilon_y}{\sqrt{\sum \varepsilon_x^2 \cdot \sum \varepsilon_y^2}} = \rho \quad (159)$$

となる。(157)式より、

$$X - \bar{X} = a(x - \bar{x}) + \varepsilon_x \quad (160)$$

(158)式より、

$$Y - \bar{Y} = c(y - \bar{y}) + \varepsilon_y \quad (161)$$

である。ただし、 $\bar{\quad}$ は平均を意味する。よって、 X と Y との相関係数 P は、

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sum \{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\}}{\sqrt{\sum \{(X - \bar{X})^2\} \sum \{(Y - \bar{Y})^2\}}} \\ &= \frac{ac \sum \{(x - \bar{x})(y - \bar{y})\} + \sum (\varepsilon_x \varepsilon_y)}{\sqrt{[a^2 \sum \{(x - \bar{x})^2\} + \sum \varepsilon_x^2] [c^2 \sum \{(y - \bar{y})^2\} + \sum \varepsilon_y^2]}} \end{aligned} \quad (162)$$

と表わされる。ここで、非常に狭い直径・樹高階の中での X と Y の相関係数を求めることにする。すると、

$$x - \bar{x} \doteq 0, \quad y - \bar{y} \doteq 0 \quad (163)$$

だから、

$$\begin{aligned}\Sigma \{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} &\doteq 0, \\ \Sigma \{(x-\bar{x})^2\} &\doteq 0, \\ \Sigma \{(y-\bar{y})^2\} &\doteq 0\end{aligned}\quad (164)$$

となり、結局 X と Y との相関係数 P は、 ϵ_x と ϵ_y の相関係数 ρ で近似できることになる。

本研究では、直径階を 2 cm、樹高階を 1 m として解析したが、(163) 式および (164) 式の仮定は妥当であった。また、現実には、 $c = 0$ であり、 a も約 0.25 であるから、 a^2 は 0.0625 となり、 $a^2 \Sigma \{(x-\bar{x})^2\}$ は十分に小さい量であった。よって、各直径・樹高階の中では、 ϵ_x と ϵ_y の相関係数 ρ は、 X と Y との相関係数 P で推定できる。

3.5.2 z 変換による相関係数の解析

相関係数について仮説の検定を行う場合は、通常の方法がそのまま適用できないので、注意を要する。これは、相関係数のとりうる値が -1 から 1 の範囲に限られているからである。たとえば、母相関が 0.8 の場合、標本の値はこれを 0.2 以上超えることはできないが、この母数よりも小さい方には 1.8 も動くことができる。よって、その標本の頻度分布は正規型にはならず、著しく歪をもった分布となる。

FISHER は、相関係数 ρ を、標準誤差

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (165)$$

ただし、 n は要素の数

をもってほぼ正規分布をする量 z へ変換する工夫をした。これは、 z 変換と呼ばれ (166) 式で与えられる。

$$z = \frac{1}{2} \{1 \text{ n } (1+\rho) - 1 \text{ n } (1-\rho)\} \quad (166)$$

この変換により、標本相関係数の標準誤差は、その標本が取り出された母集団の相関の値とほとんど独立となる。よって、仮説の検定は、 z 変換された値で行われなければならない。たとえば、相関係数の信頼区間を求めようとするときは、まず、 z 変換をし、 z の値について信頼区間を求め、つぎに、その限界値を逆変換することによって、相関係数の限界値を得なければならない。なお、詳しくは、スネデカー・コクラン (1972) を参照されたい。

3.5.3 ある林齢における直径生長量と樹高生長量の相関

本節では、各時間断面における各直径・樹高階の直径生長量と樹高生長量の相関係数を求め、これが林分全体で共通であるか否かについて解析する。用いた資料は、確率論的樹高生長モデルを構築する時に用いた資料と同一である。すなわち、東京大学農学部附属千葉演習林管内に設定されている鐘撞台、郷田倉間伐区、郷田倉無伐区、仙石疎区および仙石密区の新固定試験地 5 林分の調査結果である。よって、各試験地の林分統計量については、3.2.2 の表-2 を参照され

表-10-1. 各直径・樹高階における直径生長量と樹高生長量との相関 (鐘撞台)

樹高階 (m)	直 径 階 (cm)												
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	
13						1 3.10 — — — — — — — — — — —							
12					2 2.85 0.845 32.3 — — 2.59 0.065 9.8 — -1.000	2 2.58 0.001 1.4 — — 2.04 0.003 2.8 — 1.000	3 3.57 0.823 25.4 -0.264 2.61 0.103 12.3 — -0.579 0.826						
11				2 1.38 0.101 23.1 — — 1.39 0.490 50.5 — 1.000	14 2.34 0.101 13.6 -0.051 2.26 0.266 22.9 0.499 0.217	16 3.11 0.268 16.6 0.896 3.14 0.717 27.0 -0.505 0.300	3 3.12 0.311 17.9 0.606 2.64 0.603 29.4 0.707 0.983						
10			1 0.50 — — — — 0.82 — — — —	12 1.34 0.366 45.1 1.130* 1.78 0.421 36.4 0.290 0.403	29 2.24 0.501 31.6 0.113 2.39 0.357 25.0 0.231 0.132	4 2.43 0.443 27.4 0.278 2.61 0.264 19.7 -0.771 0.404		【各直径・樹高階の統計量 (上から順に)】					
9			1 1.15 — — — — 1.20 — — — —	10 1.86 0.210 24.7 -0.641 1.98 0.231 24.3 0.178 0.237	12 2.29 0.228 20.9 -0.032 2.53 0.295 21.5 0.274 0.420	2 3.35 0.000 0.0 — 3.04 0.135 12.1 — 1.000		直径生長量の歪度 樹高生長量の平均 (m/5年) 樹高生長量の分散 ((m/5年) ²) 樹高生長量の変動係数 (%) 直径生長量の歪度 直径生長量と樹高生長量の相関係数					
8				4 1.70 0.022 8.7 0.543 2.74 1.008 36.6 0.578 -0.344	3 1.55 1.923 89.5 -0.703 2.35 4.839 93.6 -0.360 0.928			【検定結果】 林木数の総和 101 重みの総和 77 加重した z の総和 19.537 加重した z ² の総和 6.406 加重した z の平均値 0.254 χ^2 の値 1.449 自由度 7 共通の相関係数 0.294					

太枠で囲んだ部分は、 χ^2 検定の結果、共通の相関係数を持つと判定された直径・樹高階である。(ただし、林木数が4以上の直径・樹高階について)

表一〇一 各直径・樹高階における直径生長量と樹高生長量との相関 (郷田倉間伐区)

樹高階 (m)	直 径 階 (cm)											
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
13						1 5.40 — — 1.24 — — —						
12						1 4.85 — — — 3.42 — — — —	10 3.39 0.755 — 25.6 -0.485 2.20 0.389 — 28.3 — 0.291 — 0.640	4 4.38 0.074 — 6.2 -0.686 2.68 0.082 — 10.7 1.120 — 0.625				
11				1 1.60 — — — 2.70 — — — — —	11 1.91 0.681 43.3 0.052 2.14 0.543 34.5 -0.428 0.508	10 2.57 0.441 25.8 -0.505 2.60 0.257 19.5 -0.506 0.333	9 3.26 0.522 22.1 -0.172 2.91 0.266 17.7 0.228 0.100	2 3.50 0.845 26.3 — 2.76 0.002 1.5 — 1.000				
10				5 1.37 0.553 54.3 0.084 2.07 0.232 23.3 0.885 0.897	21 1.97 0.563 38.0 0.058 2.28 0.415 28.2 -0.772 0.508	9 3.12 1.041 32.7 0.386 2.85 0.414 22.6 -0.173 0.791	3 2.48 0.681 33.2 0.478 2.51 0.128 14.3 -0.618 0.404	【各直径・樹高階の統計量 (上から順に)】 林木数 (本) 直径生長量の平均 (cm/5年) 直径生長量の分散 ((cm/5年) ²) 直径生長量の変動係数 (%)				
9				7 2.00 0.248 24.9 -1.453* 2.24 0.169 18.3 -0.584 0.129	13 2.91 1.543 42.7 0.831 2.82 0.110 11.7 0.419 0.407	2 2.20 0.005 3.2 — 3.00 0.320 18.9 — 1.000		直径生長量の歪度 樹高生長量の平均 (m/5年) 樹高生長量の分散 ((m/5年) ²) 樹高生長量の変動係数 (%) 樹高生長量の歪度 直径生長量と樹高生長量の相関係数				
8			1 1.00 — — — 2.04 — — — —	4 1.94 4.084 104.3 0.326 2.12 1.616 60.1 -0.610 0.928	2 1.90 1.125 55.8 — 2.20 0.186 19.7 — 1.000	1 5.00 — — — 2.92 — — — —		【検定結果】 林木数の総和 103 重みの総和 70 加重した z の総和 39.467 加重した z ² の総和 29.417 加重した z の平均値 0.564 χ ² の値 7.164 自由度 10 共通の相関係数 0.511				
7				2 2.03 0.661 40.2 — 3.09 1.960 45.3 — 1.000								

太枠で囲んだ部分は、χ²検定の結果、共通の相関係数を持つと判定された直径・樹高階である。(ただし、林木数が4以上の直径・樹高階について)

表-10-3. 各直径・樹高階における直径生長量と樹高生長量との相関 (郷田倉無伐区)

樹高階 (m)	直 径 階 (cm)											
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
14											1 3.35 — — 2.00 — — —	
13						1 2.30 — — 2.87 — — — —	2 2.25 0.720 37.7 — 2.53 2.64 0.109 10.9 — 1.000	4 2.53 0.434 26.1 -0.127 2.23 2.23 0.308 12.5 0.717 0.103	5 2.35 0.565 32.0 0.197 2.23 0.308 24.9 1.098 0.346			
12					2 1.38 0.061 18.0 — 1.88 0.101 17.0 — -1.000	8 1.76 0.460 38.6 -0.310 2.24 0.319 25.2 0.094 -0.275	7 2.29 0.396 27.5 -0.573 2.58 0.275 20.3 0.076 0.553	2 2.05 1.125 51.7 — 2.37 0.289 22.7 — 1.000				
11				1 1.25 — — — 2.95 — — — —	7 0.89 0.173 47.0 -0.577 2.30 0.362 26.1 0.025 0.766	12 1.30 1.661 99.5 0.893 2.36 0.416 27.3 0.354 0.481	1 1.85 — — — 3.50 — — — —	1 2.95 — — — 2.75 — — — —	【各直径・樹高階の統計量 (上から順に)】			
10			1 0.45 — — — 3.05 — — — —	7 0.45 0.270 115.5 0.447 1.55 0.467 44.1 0.139 0.907	5 0.33 0.180 128.4 0.271 1.68 0.335 34.4 -0.253 0.937				直径生長量の歪度 樹高生長量の平均 (m/5年) 樹高生長量の分散 ((m/5年) ²) 樹高生長量の変動係数 (%) 樹高生長量の歪度 直径生長量と樹高生長量の相関係数			
9				2 -0.08 0.001 -47.1 — 1.43 0.034 12.9 — 1.000					【検定結果】 林木数の総和 55 重みの総和 31 加重した z の総和 20.133 加重した z ² の総和 23.772 加重した z の平均値 0.649 χ ² の値 10.697 自由度 7 共通の相関係数 0.571			
8			1 0.30 — — — 1.25 — — —									

太枠で囲んだ部分は、χ²検定の結果、共通の相関係数を持つと判定された直径・樹高階である。(ただし、林木数が4以上の直径・樹高階について)

表-10-5. 各直径・樹高階における直径生長量と樹高生長量との相関 (仙石密区)

樹高階 (m)	直 径 階 (cm)																
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24					
9				4 1.08 0.062 23.3 0.323 1.11 0.047 19.5 0.479 -0.452		1 1.65 — — — 1.40 — — — —											
	8			13 0.90 0.046 24.0 -0.257 0.77 0.065 33.0 -0.487 -0.220	22 1.48 0.232 32.7 0.371 1.12 0.119 30.9 -1.003* 0.524	2 2.38 0.281 22.3 — 1.30 0.072 20.7 — -1.000											
		7		4 0.16 0.014 72.7 -0.689 0.40 0.022 36.8 -0.543 -0.240	55 1.58 0.596 49.0 0.030 1.27 0.214 36.4 -0.293 0.684	33 2.32 0.573 32.6 -0.380 1.74 0.179 24.4 -0.518 0.689	2 2.83 0.061 8.8 — 1.81 0.490 38.8 — 1.000										
			6		40 0.95 0.329 60.6 0.374 0.93 0.238 52.4 -0.264 0.610	75 1.56 0.380 39.6 -0.023 1.32 0.163 30.5 0.129 0.500	4 1.99 0.162 20.3 -0.476 1.45 0.047 14.9 0.687 -0.153										
				5	1 0.25 — — 0.08 — — — —	17 0.57 0.328 101.4 -1.041* 0.88 0.397 71.8 0.271 0.248	7 1.49 0.135 24.6 0.155 1.62 0.835 56.4 0.721 0.598										
					【各直径・樹高階の統計量 (上から順に)】												
					林木数 (本)												
					直径生長量の平均 (cm/5年)												
					直径生長量の分散 ((cm/5年) ²)												
					直径生長量の変動係数 (%)												
直径生長量の歪度																	
樹高生長量の平均 (m/5年)																	
樹高生長量の分散 ((m/5年) ²)																	
樹高生長量の変動係数 (%)																	
樹高生長量の歪度																	
直径生長量と樹高生長量の相関係数																	
【検定結果】																	
林木数の総和											274						
重みの総和											241						
加重した z の総和											148.903						
加重した z ² の総和											108.244						
加重した z の平均値											0.618						
χ ² の値											16.244						
自由度											10						
共通の相関係数											0.550						

太枠で囲んだ部分は、χ²検定の結果、共通の相関係数を持つと判定された直径・樹高階である。(ただし、林木数が4以上の直径・樹高階について)

たい。これらの5試験地は、まだ2回しか定期調査が実行されていないので、前節での解析と同様、2回目の調査時に生存していた林木のみを解析の対象とした。

解析にあたっては、小標本のものには小さい重みを付けることにし、各直径・樹高階の相関係数を z 変換して得られた z の値を、分散((165)式)の逆数によって重みづけした。相関係数が林分全体で共通であるか否かの仮説の検定は、もし k 個の正規変量 z_i がすべて同一の平均の推定値ではあるが、その分散が異なるならば、分散の逆数によって重みづけられた残差平方和は、自由度 $k-1$ をもつ χ^2 分布をする、という一般的な結果に基づく方法(スネデカー・コ克蘭(1972))によった。

表-10は、各直径・樹高階について、林木数、直径生長量および樹高生長量の平均、分散、変動係数、歪度、そして直径生長量と樹高生長量との相関係数を表わしたものである。

直径生長量の平均は直径階が大きくなるほど大きくなる傾向が認められた。一方、樹高生長量の平均は、すべての直径・樹高階において、あまり差はなかった。これらの結果は、仮説1および仮説7に抵触しないといえる。

表-10において、太枠で囲んだ部分は、 χ^2 検定の結果、直径生長量と樹高生長量との相関係数が共通であると判定された直径・樹高階である。このように、一部の直径・樹高階をのぞけば、相関係数は共通であると考えられる。

3.5.4 直径生長量と樹高生長量に関するモデル

以上の結果をふまえ、直径生長量と樹高生長量に関する5つの仮説を設定した。

仮説12. ある林齢における連年直径生長量は、直径の大きさのみに依存し、樹高の大きさには依存しない。すなわち、直径階が同じであるすべての樹高階において等しい。

仮説13. ある林齢における連年直径生長量の分散は、直径の大きさにも樹高の大きさにも依存しない。すなわち、すべての直径・樹高階において等しい。

仮説14. ある林齢における連年樹高生長量は、直径の大きさにも樹高の大きさにも依存しない。すなわち、すべての直径・樹高階において等しい。

仮説15. ある林齢における連年樹高生長量の分散は、直径の大きさにも樹高の大きさにも依存しない。すなわち、すべての直径・樹高階において等しい。

仮説16. ある林齢における直径生長の誤差変動量と樹高生長の誤差変動量との相関係数は、直径の大きさにも樹高の大きさにも依存しない。すなわち、すべての直径・樹高階について共通である。

仮説12から15は、仮説1から11の内容を、直径と樹高とを2因子とする二次元空間で、あらためて表現し直したものにすぎない。なお、この他に、考察のために、次の仮説を加えた。

仮説17. 直径生長の誤差変動量と樹高生長の誤差変動量との相関係数は、経時的に変化しない。仮説17は、経時的資料が無いために設定したものであって、現在のところ何の根拠もないものである。しかし、最も単純な仮定であるので、この場合について考察しておくことは理論的解析を

進める上で基礎になると考える。

3.5.5 直径と樹高の相関係数の経時的変化に関する考察

仮説12から17を仮定した場合に、直径・樹高二次元分布の相関係数が、生長に伴いどのように変化するのか考察してみよう。いま、仮説16および17で仮定されている直径生長の誤差変動量 ϵ_x と樹高生長の誤差変動量 ϵ_y との相関係数を ρ とする（(159)式）。林齢 τ における直径を x_τ 、樹高を y_τ とすれば、林齢 $\tau + 1$ における直径 $x_{\tau+1}$ と樹高 $y_{\tau+1}$ は、(157)式、(158)式により、それぞれ

$$x_{\tau+1} = (1+a)x_\tau + b + \epsilon_x \quad (167)$$

$$y_{\tau+1} = (1+c)y_\tau + d + \epsilon_y \quad (168)$$

と表わされる。 $x_{\tau+1}$ と $y_{\tau+1}$ との相関係数を λ とすれば、その2乗は、

$$\lambda^2 = \frac{N_{um}}{D_{en}} \quad (169)$$

ただし、

$$\begin{aligned} N_{um} = & (1+a)^2 (1+c)^2 [\Sigma \{(x_\tau - \bar{x}_\tau)(y_\tau - \bar{y}_\tau)\}]^2 \\ & + 2(1+a)(1+c) \Sigma \{(x_\tau - \bar{x}_\tau)(y_\tau - \bar{y}_\tau)\} \Sigma (\epsilon_x \epsilon_y) \\ & + \{\Sigma (\epsilon_x \epsilon_y)\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{en} = & [(1+a)^2 \Sigma \{(x_\tau - \bar{x}_\tau)^2\} + \Sigma (\epsilon_x^2)] \\ & \times [(1+c)^2 \Sigma \{(y_\tau - \bar{y}_\tau)^2\} + \Sigma (\epsilon_y^2)] \end{aligned}$$

となる。

ここで、直径・樹高二次元分布の相関係数が、林齢に伴い変化せず一定である場合の条件を考えてみよう。この場合、直径・樹高二次元分布が林齢ゼロの時 δ 関数であると仮定すれば、直径と樹高の相関係数は、当然、誤差変動量の相関係数 ρ に等しくなるはずである。よって、(170)式の関係が成り立つことになる。

$$\frac{[\Sigma \{(x_\tau - \bar{x}_\tau)(y_\tau - \bar{y}_\tau)\}]^2}{\Sigma \{(x_\tau - \bar{x}_\tau)^2\} \Sigma \{(y_\tau - \bar{y}_\tau)^2\}} = \frac{\{\Sigma (\epsilon_x \epsilon_y)\}^2}{\Sigma (\epsilon_x^2) \Sigma (\epsilon_y^2)} = \rho^2 \quad (170)$$

この関係を(169)式に代入すれば(171)式となる。

$$\lambda^2 = \frac{N_{um}}{D_{en}} \quad (171)$$

ただし、

$$\begin{aligned} N_{um} = & (1+a)^2 (1+c)^2 \rho^2 \Sigma \{(x_\tau - \bar{x}_\tau)^2\} \Sigma \{(y_\tau - \bar{y}_\tau)^2\} \\ & + 2(1+a)(1+c) \rho^2 \sqrt{\Sigma \{(x_\tau - \bar{x}_\tau)^2\} \Sigma \{(y_\tau - \bar{y}_\tau)^2\}} \\ & \quad \cdot \sqrt{\Sigma (\epsilon_x^2) \Sigma (\epsilon_y^2)} \\ & + \rho^2 \Sigma (\epsilon_x^2) \Sigma (\epsilon_y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{on} &= (1+a)^2 (1+c)^2 \rho^2 \Sigma \{(x_r - \bar{x}_r)^2\} \Sigma \{(y_r - \bar{y}_r)^2\} \\
&\quad + (1+a)^2 \Sigma \{(x_r - \bar{x}_r)^2\} \Sigma (\epsilon_y^2) \\
&\quad + (1+c)^2 \Sigma \{(y_r - \bar{y}_r)^2\} \Sigma (\epsilon_x^2) \\
&\quad + \Sigma (\epsilon_x^2) \Sigma (\epsilon_y^2)
\end{aligned}$$

ここで,

$$(1+a)^2 \Sigma \{(x_r - \bar{x}_r)^2\} \Sigma (\epsilon_y^2) = A \quad (172)$$

$$(1+c)^2 \Sigma \{(y_r - \bar{y}_r)^2\} \Sigma (\epsilon_x^2) = B \quad (173)$$

$$\begin{aligned}
(1+a)^2 (1+c)^2 \rho^2 \Sigma \{(x_r - \bar{x}_r)^2\} \Sigma \{(y_r - \bar{y}_r)^2\} \\
+ \Sigma (\epsilon_x^2) \Sigma (\epsilon_y^2) = C
\end{aligned} \quad (174)$$

とおけば, (171) 式は,

$$\lambda^2 = \rho^2 \frac{2\sqrt{AB} + C}{A + B + C} \quad (175)$$

と表わされる。ところで, A' , B' を正の実数とすると, 一般に,

$$A' + B' \geq 2\sqrt{A'B'} \quad (176)$$

という不等式が成り立ち, 等号が成立するのは $A' = B'$ の場合だけである。いま, A , B はともに正の実数であるから, (176) 式の不等式より,

$$\lambda^2 \leq \rho^2 \quad (177)$$

なる関係が得られる。等号が成り立つのは, $A = B$ の場合であるから, (172) 式, (173) 式より,

$$\begin{aligned}
(1+a)^2 \Sigma \{(x_r - \bar{x}_r)^2\} \Sigma (\epsilon_y^2) = \\
(1+c)^2 \Sigma \{(y_r - \bar{y}_r)^2\} \Sigma (\epsilon_x^2)
\end{aligned}$$

の場合である。両辺を, $(1+c)^2 \Sigma \{(y_r - \bar{y}_r)^2\} \Sigma (\epsilon_y^2)$ で割ると,

$$\frac{(1+a)^2 \Sigma \{(x_r - \bar{x}_r)^2\}}{(1+c)^2 \Sigma \{(y_r - \bar{y}_r)^2\}} = \frac{\Sigma (\epsilon_x^2)}{\Sigma (\epsilon_y^2)} \quad (178)$$

が得られ, 結局, 樹高の分散の $(1+c)^2$ 倍に対する直径の分散の $(1+a)^2$ 倍の比が, 樹高生長の誤差変動の分散に対する直径生長の誤差変動の分散の比に等しい時に限り, 直径と樹高の相関係数が変化しないことになる。前節での解析の結果では, $c = 0$ とみなせたので, 一般には, 直径と樹高の相関係数は, 生長に伴い減少していくものと推察される。現実の林分の林齢に伴う直径と樹高の相関係数の変化については, 4. 6 節で検討する。

第4章 二次元林分遷移に関する実証的解析

4.1 秋田営林局管内収穫試験地の資料

農林水産省林業試験場の収穫試験地調査中間報告書の序文によれば、わが国の収穫試験は1934年（昭和9年）に始まり、ドイツの1871年に遅れること63年であった。1932年（昭和7年）に国有林野事業規定の一部が改正され、各営林局においても試験業務ができるようになり、ついで1934年（昭和9年）に収穫試験施行方法が定められ、以来、収穫試験は各営林局によって本格的に着手された。試験地の中には、第二次世界大戦のため、試験測定の一部が中絶したり、あるいは誤乱伐されたりして、改廃の余儀なきにいたったものも少なくなかった。

1958年（昭和33年）と1963年（昭和38年）に、林業試験場によって、これらの収穫試験地の中間報告が発表された。それは、青森、秋田、前橋、東京、長野、大阪、高知、熊本の8営林局のものについてであった。このうち、秋田営林局管内のものは、すべての試験地について、胸高直径および樹高の毎木調査が継続的に実施されており、その結果がいわゆる直径対樹高相関表、すなわち、2 cm括約の直径階別、1 m括約の樹高階別の立木本数表にまとめてあった。しかし、他の営林局管内のものは、始めのうちこそ胸高直径および樹高の毎木調査が実施されていたが、やがて、多くの試験地で樹高の測定が毎木から標本木へと切り替わってしまっており、本研究の資料として使用するには不十分であった。よって、本研究では、資料として、秋田営林局管内の報告書、すなわち、収穫試験地調査報告第2号秋田営林局管内収穫試験地調査中間報告書（林業試験場1958）と同第10号同収穫試験第2次中間報告書（林業試験場1963）を用いることにした。

この報告書には、秋田県、山形県内の30地域の人工同齢単純林について、その直径対樹高相関表がほぼ5年おきに記載されている。報告例は各地域3林分、計90林分であり、そのうち87林分がスギで、あとの3林分がカラマツである。ここでは、資料数が多いスギを考察の対象とした。

スギ87林分の毎木調査はのべ535回で1林分当たり平均6.1回実施された。表-11は、各試験地の地貌、傾斜、地位、毎木調査が実施された時の林齢および間伐が実行された時の林齢をまとめたものである。試験地の番号は3桁の数字で表わすことにした。始めの2桁は地域を示し、これは林業試験場の中間報告書にある試験地番号と同一の番号にした。末尾の数字は各地域内の3試験地を表わしており、上述の中間報告書で、優良林分、中庸林分、貧弱林分と表わされていたものを、ここではそれぞれ、1、2、3と番号にした。地位は、試験地設定の際に、あらかじめ優良林分、中庸林分、貧弱林分と分類されていたが、これが必ずしも実情に即している訳でもなかったため、各林分の生長経過を、林野庁（藤 信夫、大内 晃）によって調製された秋田地方スギ林林分収穫表（1949）と比較検討することによって地位上、地位中、地位下の3通りに分類した。地貌は、試験地の位置によって、裾野、中腹および尾根の3通りに分類し、傾斜は、平（5度未満）、緩（15度未満）、中（30度未満）および急（30度以上）の4通りに分類した。林齢は、植栽年度を第1年としてこれを起算し、その年度の始まりは、実際の生長現象を考慮にいれて、7月

表-11-1. 毎木調査時の林齢と間伐の有無 (秋田営林局管内スギ収穫試験地)

試験地 番号	11	12	13	21	22	23	31	32	33	41	42	43	51	52	53
地 貌 傾 斜 地 位	裾野 平 下	裾野 中 下	裾野 中 下	裾野 緩 上	山腹 中	尾根 緩 下	山腹 急 中	山腹 急 下	山腹 急 下	裾野 緩 上	裾野 緩 中	裾野 緩 中	裾野 緩 上	裾野 緩 上	裾野 中 下
林 齢															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18							T	T	T				T	T	T
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28													●T×	●T×	*
29															
30															
31	○T×	○T×	*T×	○	○	*	●	*	*				×	×	●
32															
33															
34															
35										T	T	T			
36	×T×	×T×	*T×	○T×	○T×	*				T×	T×	T×			
37															
38															
39															
40															
41	×T×	×T×	*T×				●	●	*	×T×	×T×	×T×			
42													●	●	●
43															
44															
45	×	×	×												
46				●	●	*									
47							●T×	●T×	●T×						
48				T	T								●T×	●T×	●T×
49															
50															
51	●T×	●T×	*T×	×	×	*				●T×	●T×	●T×			
52															
53															
54															
55				×	×	*									
56										×T×	×T×	×T×			
57															
58															
59															
60															
61										×T×	×T×	×T×			
62															
63															
64															
65															
66															
67															
68															
69															
70															

○：無間伐， T：間伐の実行， ×：間伐後10年未満， ●：間伐後10年以上。
*：小径木の一部が測定されなかった。

表-11-2. 毎木調査時の林齢と間伐の有無 (秋田営林局管内スギ収穫試験地)

試験地 番号	61	62	63	71	72	73	81	82	83	91	92	93	101	102	103
地 貌	山腹	山腹	山腹	裾野	裾野	裾野	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹
傾 斜	平	平	中	中	中	急	緩	緩	中	緩	緩	緩	緩	緩	中
地 位	上	中	下	中	中	下	中	中	中	上	中	下	中	中	下
林 齢															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25	T	T	T	○	○	*				○			T	T	T
26													×T×	×T×	×T×
27	T	T	T				*		○		●T×	●			
28				○	○	○									
29															
30										○			×T	×T	×T
31															
32															
33															
34															
35	T	T	T	○	○	○									
36															
37															
38															
39	×	×	×				○T×	○	○						
40															
41															
42															
43															
44	×	×	×	○T×	○T×	*T×	×	○	○				○T×		
45															
46															
47															
48															
49															
50															
51															
52															
53															
54	●T×	●T×	●T×												
55															
56															
57															
58															
59	×	×	×												
60															
61															
62															
63															
64	●T×	●T×	●T×												
65															
66															
67															
68															
69															
70															

○：無間伐， T：間伐の実行， ×：間伐後10年未満， ●：間伐後10年以上。
 *：小径木の一部が測定されなかった。

表-11-3. 毎木調査時の林齢と間伐の有無 (秋田営林局管内スギ収穫試験地)

試験地 番号	111	112	113	121	122	123	131	132	133	141	142	143	151	152	153
地 貌 傾 斜 地 位	裾野 緩 上	裾野 緩 中	裾野 中 下	山腹 緩 上	山腹 緩 中	山腹 緩 下	裾野 緩 中	裾野 緩 中	裾野 緩 下	山腹 緩 上	山腹 中 中	山腹 緩 中	山腹 中 中	山腹 中 中	山腹 中 中
林 齢															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24							T	T	T						
25															
26				○T×	○T×	○T×									
27										T	T	T			
28													T	T	T
29															
30															
31				xT×	xT×	x	x	x	x				x	x	*
32	○T×	○T×	*T×												
33															
34										x	x	x			
35															
36							●T×	●T×	●T×				x	x	x
37	xT×	x	x												
38															
39															
40															
41				●	●	●							●	●	●
42	x	●	●												
43															
44										●T×	●T×	●T×			
45															
46				●T×	●T×	*T×	●T×	●T×	●T×				●	●	●
47	●T×	●T×	●T×												
48															
49										x	x	x			
50				x	x	xT×									
51													●	●	●
52	xT×	xT×	xT×												
53															
54										●T×	●T×	●T×			
55							xT×	xT×	xT×						
56															
57															
58															
59															
60															
61															
62															
63															
64															
65															
66															
67															
68															
69															
70															

○：無間伐， T：間伐の実行， ×：間伐後10年未満， ●：間伐後10年以上。
*：小径木の一部が測定されなかった。

表-11-4. 毎木調査時の林齢と間伐の有無 (秋田営林局管内スギ収穫試験地)

試験地 番号	161	162	163	171	172	173	181	182	183	191	192	193	201	202	203
地 貌	裾野	裾野	裾野	裾野	裾野	裾野	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹	山腹
傾 斜	平	中	平	緩	平	緩	急	急	急	緩	中	中	緩	緩	緩
地 位	上	中	下	中	中	下	中	下	下	上	上	中	中	中	下
林 齢															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20													T	T	T
21				○	○	*							T	T	T
22															
23															
24															
25															
26				○	○	○									
27													x	x	*
28															
29															
30															
31	○T×	*T×	○T×	○	○	○				○T	○T	○T	●	●	*
32															
33															
34							○	○	*						
35															
36	x	x	x							x	x	x			
37															
38															
39															
40															
41	●T×	●T×	●T×	○T×	○T×	○T×				●T×	●T×	●T×	●T×	●T×	●
42															
43															
44							○	○	○						
45															
46	x	x	x												
47													x	x	*
48															
49															
50							○T×	○T×	○T×						
51	●T×	●T×	●T×												
52															
53															
54							x	x	x						
55															
56															
57															
58															
59															
60															
61															
62															
63															
64															
65															
66															
67															
68															
69															
70															

○：無間伐， T：間伐の実行， x：間伐後10年未満， ●：間伐後10年以上。
*：小径木の一部が測定されなかった。

表-11-5. 毎木調査時の林齢と間伐の有無 (秋田営林局管内スギ収穫試験地)

試験地 番号	211	212	213	221	222	223	231	232	233	241	242	243	251	252	253
地 貌 傾 斜 地 位	裾野 急 上	裾野 急 中	裾野 急 下	裾野 緩 中	裾野 緩 中	裾野 緩 中	山腹 緩 中	山腹 急 中	山腹 急 下	裾野 中 中	裾野 中 中	裾野 中 下	裾野 中 下	裾野 中 下	裾野 中 下
林齢															
10							*	○	*				○	○	○
11															
12															
13															
14	*	*	*												
15							○T×	○	○	○	○	○	○	○	○
16				*	*	*									
17															
18															
19	○	○	*												
20										○	○	*			
21				○	○	○							○	○	○
22															
23															
24	○T	○T	○				●T×			○	○	○			
25															
26															
27															
28	*T×	×T×	○T×												
29															
30							T	○	○	○	○	○			
31															
32				○T×	*T×	○T×									
33															
34	×T×	×T×	*T×				×T×	○T×	○T×						
35										○T×	○T×	*T×			
36				×T×	×T×	×T×									
37															
38															
39															
40															
41				×T×	×	×T×									
42															
43															
44															
45															
46															
47															
48															
49															
50															
51															
52															
53															
54															
55															
56															
57															
58															
59															
60															
61															
62															
63															
64															
65															
66															
67															
68															
69															
70															

○：無間伐， T：間伐の実行， ×：間伐後10年未満， ●：間伐後10年以上。
*：小径木の一部分が測定されなかった。

表一11-6. 毎木調査時の林齢と間伐の有無 (秋田営林局管内スギ収穫試験地)

試験地 番号	261	262	263	271	272	273	281	282	283	291	292	293	301	302	303
地 貌 傾 斜 地 位	山腹 中	山腹 中	山腹 下	山腹 中 下	山腹 中 下	山腹 中 下	山腹 緩 下	山腹 緩 下	山腹 緩 下	裾野 緩 中	裾野 急 下	裾野 緩 下	山腹 緩 上	山腹 緩 上	山腹 緩 中
林 齢															
10															
11				*	*	*	○		○		*	*			
12															
13															
14															
15							○								
16				○	○	*		○	○	*	○	○	*T×	○	*
17															
18															
19															
20															
21	○	○	*										×	○	*
22															
23															
24															
25				○	○	*	○			○		○			
26	○	○	○	○	○	*		○	○				●T	○T	○T
27															
28															
29															
30										○T×	○T×	○			
31	○	○	*	○	*	*	○T×								
32															
33															
34															
35															
36															
37															
38															
39															
40															
41	○T×	○T×	○T×												
42															
43															
44															
45															
46															
47															
48															
49															
50															
51															
52															
53															
54															
55															
56															
57															
58															
59															
60															
61															
62															
63															
64															
65															
66															
67															
68															
69															
70															

○：無間伐， T：間伐の実行， ×：間伐後10年未満， ●：間伐後10年以上。
 *：小径木の一部が測定されなかった。

表一12. 秋田営林局管内スギ収穫試験地の地貌別資料数

	裾野	中腹	全体
林分数	39(46.4%)	45(53.6%)	84(100.0%)
調査回数	228(49.8%)	230(50.2%)	458(100.0%)

表一13. 秋田営林局管内スギ収穫試験地の傾斜別資料数

	平	緩	中	急	全体
林分数	6(7.1%)	40(47.6%)	25(29.8%)	13(15.5%)	84(100.0%)
調査回数	44(9.6%)	236(51.5%)	123(26.9%)	55(12.0%)	458(100.0%)

表一14. 秋田営林局管内スギ収穫試験地の地位別資料数

	上	中	下	全体
林分数	14(16.7%)	39(46.4%)	31(36.9%)	84(100.0%)
調査回数	92(20.1%)	231(50.4%)	135(29.5%)	458(100.0%)

表一15. 秋田営林局管内スギ収穫試験地の毎木調査時の間伐実行状況

間伐の実行	無間伐	間伐直後	10年未満	10年以上	全体
林分数	135	131	110	82	458
百分率	(29.5%)	(28.6%)	(24.0%)	(17.9%)	(100.0%)

表一16. 秋田営林局管内スギ収穫試験地の毎木調査時の齢級

齢級	1 齢級：10年						全体
	II 齢級	III 齢級	IV 齢級	V 齢級	VI 齢級	VII 齢級	
林分数	29	82	128	148	59	12	458
百分率	(6.3%)	(17.9%)	(27.9%)	(32.3%)	(12.9%)	(2.6%)	(100.0%)

表一17. 秋田営林局管内スギ収穫試験地の毎木調査時の立木密度 (本/h a)

立木密度	~1000	~2000	~3000	~4000	~5000	~6000	全体
林分数	186	189	74	6	2	1	458
百分率	(40.6%)	(41.3%)	(16.2%)	(1.3%)	(0.4%)	(0.2%)	(100.0%)

とした。表一11のなかで、記号Tは間伐の実行を示し、白丸は毎木調査が実施された時にその林分がまだ無間伐であったことを、×印は間伐後10年未満であったことを、黒丸は間伐後10年以上経過していたことを示している。*印は、ある直径階以上の林木しか測定されなかった場合の調査を示しており、これは当然その統計量に偏りを含むので、考察の対象から外した。このような

偏りを含むと思われる調査はのべ77回あった。よって、本研究では、84林分、のべ458回の毎木調査結果を解析の対象とした。

解析に用いた林分を地貌、傾斜、地位で分類すれば、表-12、表-13、表-14のようになる。地貌では、尾根に属するものはなく、裾野と中腹は林分数においても調査回数においてもほぼ半々であった。傾斜は、緩が約半分を、中が四分の一強を占めており、あと、急、平の順であった。この比率は、裾野においても中腹においてもほぼ同様であった。地位は、中が約半分、下が約三分の一を占めていた。地位上は傾斜の平、緩に、地位下は傾斜の中、急に多くなる傾向があった。地位と地貌には、特に明瞭な関係はないようである。

表-15は、毎木調査と間伐との関係を示したものである。無間伐林分の調査結果は135例あり、全調査回数の約30%であった。表-16は、毎木調査時の齢級を示したもので、調査はII齢級からVII齢級にわたっているものの、IV齢級、V齢級が中心となっていた。表-17は、毎木調査時の林分の立木密度を示したもので、ha当たり2,000本以下の林分の調査結果が大半を占めていた。

以上が、資料に用いた秋田営林局管内スギ収穫試験地とその毎木調査状況の概要である。なお、これらの収穫試験地については、寺崎ら(1964)によって、その沿革から、調査方法および林分構造と生長の解析に至るまで、詳細に報告されている。

4.2 林齢に伴う直径・樹高二次元分布型の変化

平坦地に位置する疎な無間伐林の例

二次元林分遷移について検討する前に、まず、林齢に伴う現実林分の直径分布型および樹高分布型の変化について調べ、直径と樹高を2因子とする二次元分布について検討する。ところで、傾斜地に位置する林分では、斜面上部の林木が斜面下部の林木よりも小さいことがしばしば観察され、この場合は当然、斜面の有無が分布型に影響を及ぼすと考えられるので、ここでは、平坦地に位置する林分を解析の対象とした。また、間伐も分布型に直接の影響を及ぼすので、無間伐の林分を解析の対象とした。前述の秋田営林局管内スギ収穫試験地の中で、上記の2条件に該当する林分は、試験地番号172の深山人工林A種収穫試験地第2分地(中庸林分)のみであった。本節では、この同齢単純林の直径分布型と樹高分布型の林齢に伴う変化を、特にその歪度に着目して解析する。

4.2.1 深山試験地の概要

深山人工林A種収穫試験地第2分地(中庸林分)は、秋田県由利郡八塩山山麓に位置し、試験地の全面積は1.25haである。1916年(大正5年)11月にスギ3年生苗木が4,280本/ha植栽された。第2分地は、そのうちの0.42haをしめ、その標準地は平坦地に位置し、面積は0.2haである。林齢21年以前に2回の除伐が実施されており、最初の間伐は林齢42年で実行されている。最初の間伐が実行される以前に、合計4回にわたる毎木調査が行われ、胸高直径階・樹高階別の立木本数分布(胸高直径と樹高の相関表)が報告されている。表-18に、各調査時点における立木本数分布に関する統計量を示した。なお、材積は二変数立木幹材積表(林野庁計画課1970)から求

めた。

4.2.2 直径分布型および樹高分布型の変化

深山試験地第2分地の直径分布および樹高分布の変化は図-12のとおりである。両分布とも、林齢21年では、正規分布に近い分布をしていたが、高齢になるに従い、J型分布になる傾向が観察された。とくに樹高分布のJ型化が顕著であった。分布の歪度を表-19に示した。両分布の歪度とも、単調に減少していたが、直径分布の歪度の減少幅にくらべて、樹高分布の歪度の減少幅は大きかった。これらの分布に正規分布をあてはめた結果を表-19に示す。正規性の検定として、 χ^2 適合度検定、歪度の有意点を用いる検定（竹内 1975, 柴田 1981）および尖度の有意点を用いる検定（竹内 1975, 柴田 1981）の三通りを用いた。直径分布では、林齢31年まで正規分布があてはまったのに対して、樹高分布では、林齢を経るに従い高度に有意に正規分布から離れていった。直径、樹高の両分布とも正規分布に近い林齢21年では、若齢林としては立木密度が著しく低いことが観察された。

4.2.3 上層木集団の分布

図-12の林齢42年の樹高分布は、二つの集団に分割できそうである。一つは林分の上層を構成している主要な集団であり、もう一つは下層を構成している副次的な集団である。上層を構成している集団の分布は、正規分布に近い形をしている。そこで、歪度を指標にして、上層と下層とに分割してみよう。つまり、樹高分布において、低い木から順に下層木に指定し、そのつど上層木の分布の歪度を計算して、歪度が一番ゼロに近いところで計算をやめ、そこを上層と下層の分割点とするのである。図-12で、斜線をほどこしてある部分が下層木に指定された集団である。

表-18. 各林齢における立木本数分布に関する統計表（深山試験地第2分地）

林齢 (年)	胸 高 直 径		樹 高		立木密度 (本/ha)	材積 (m ³ /ha)
	平均 (cm)	分散 (cm ²)	平均 (m)	分散 (m ²)		
21	12.8	12.7	8.1	4.2	1110	70.5
26	14.7	17.4	10.5	6.4	1120	118.7
31	18.1	20.5	12.0	8.2	1035	179.7
42	21.9	38.4	16.1	19.2	1075	377.2

表-19. 直径分布および樹高分布の正規性の検定（深山試験地第2分地）

林齢 (年)	立木本数 (本/plot)	胸 高 直 径				樹 高			
		χ^2 適合度検定		歪度	尖度	χ^2 適合度検定		歪度	尖度
		d.f.	χ^2			d.f.	χ^2		
21	222	5	3.98	0.05	2.41	6	6.54	-0.06	2.26*
26	224	6	3.67	0.02	2.63	9	20.11*	-0.40*	2.98
31	207	7	13.05	-0.21	2.63	10	26.96**	-0.53**	2.74
42	215	10	19.36*	-0.32	2.57	12	78.93**	-0.90**	3.07

*: 5%水準で有意。 **: 1%水準で高度に有意。

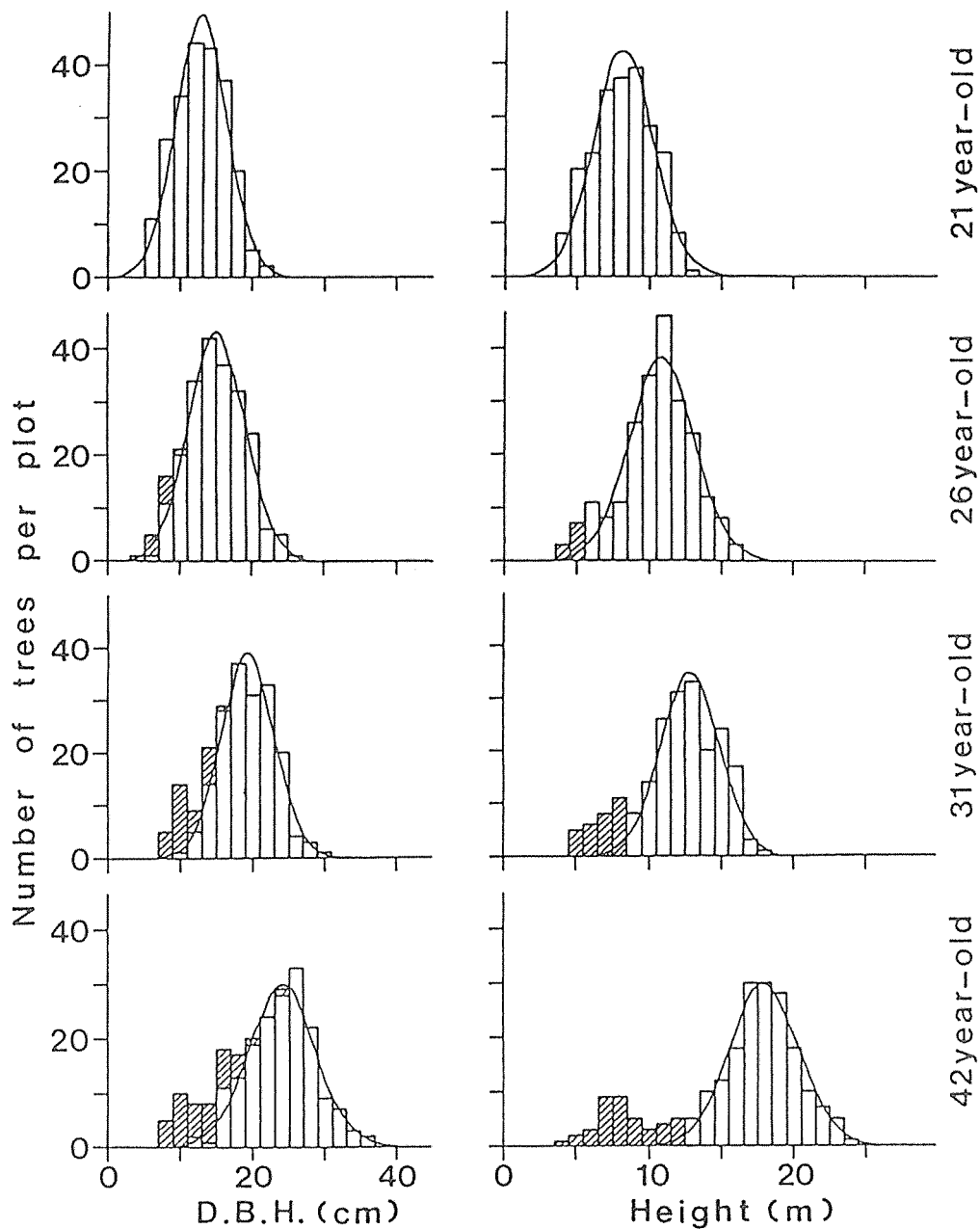


図-12. 直径分布と樹高分布の経時変化（深山第2試験地）

斜線がほどこしてある部分は下層木に指定された集団である。

上層木集団に対して、正規分布はよい適合を示している。

林分統計量および正規性の検定結果を、表-18~21に示した。

なお、この図の直径分布にほどこされた斜線部分は、樹高分布において決定された下層木に対応するものである。これを各林齢について実行した。林齢21年では、図-12に示してある樹高分布の歪度が一番ゼロに近く、上層と下層の分割はできなかった。このようにして分割した上層木集団の統計量を表-20に示す。表-21は上層木集団の直径分布および樹高分布に正規分布をあてはめた結果を示している。樹高分布はほぼ正規分布に近い形をしていたが、これは、歪度が一番ゼロに近くなる点で上層と下層とを分割したから当然の結果である。しかし、上層と下層を、樹高を基準として分割したにもかかわらず、上層木集団の直径分布には正規分布がよくあてはまっていた。上層木集団は、立木本数で全体の80%強をしめ、材積で95%強をしめていた(表-20)。

4.2.4 二次元正規性の検定

図-13は、各林齢における立木本数分布を、直径・樹高平面上に等本数線図として表わしたものである。図中の横線(点線)は、上層木集団と下層木集団との境界線を示している。各林齢とも上層木集団の等本数線は、楕円に近い形を呈している。このことは、上層木集団が、直径分布と樹高分布がともに正規分布、すなわち二次元正規分布を呈している可能性を示すものである。

本研究では、二次元正規性の検定を二次元正規分布の三次以上の同時キユムラントがすべてゼロになることを利用した検定法(竹内 1975, 柴田 1981)で行った。この検定法を林木全体および上層木集団に適用した結果を表-22に示す。林木全体に対して行った検定結果では、林齢31年と42年の分布が1%水準で高度に有意であった。しかし、それを除いた他の分布や上層木集団では、いずれも5%水準で有意差はみられず、それらはすべて、一応は二次元正規分布であると考えることができる。

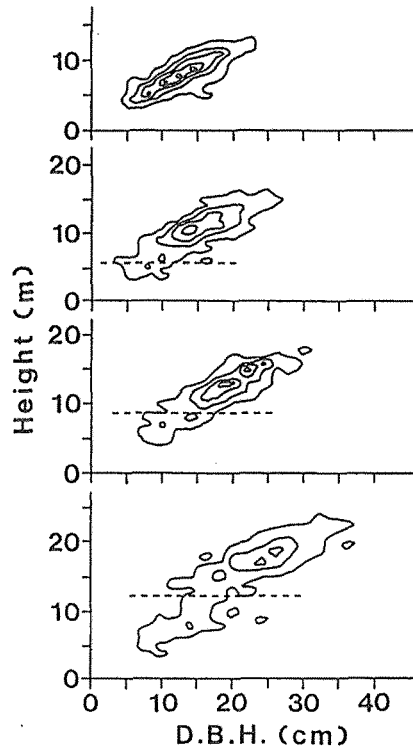
表-20. 各林齢における上層木の立木本数分布に関する統計量(深山試験地第2分地)

林齢 (年)	胸高直径		樹高		立木密度 (本/ha)	上層木 本数の 割合 (%)	材積 (m ³ /ha)	上層木 材積の 割合 (%)
	平均 (cm)	分散 (cm ²)	平均 (m)	分散 (m ²)				
21	12.8	12.7	8.1	4.2	1110	100.0	70.5	100.0
26	15.0	15.6	10.8	5.0	1070	95.5	118.1	99.5
31	19.3	13.2	12.9	4.1	885	85.5	174.1	96.9
42	24.0	21.9	17.9	5.5	870	80.9	363.4	96.3

表-21. 上層木の直径分布および樹高分布の正規性の検定(深山試験地第2分地)

林齢 (年)	上層木 本数 (本/plot)	胸高直径				樹高			
		χ^2 適合度検定		歪度	尖度	χ^2 適合度検定		歪度	尖度
		d.f.	χ^2			d.f.	χ^2		
21	222	5	3.98	0.05	2.41	6	6.54	-0.06	2.26*
26	214	5	1.77	0.09	2.74	7	9.42	-0.13	2.81
31	177	5	3.48	0.11	2.80	6	9.14	0.08	2.27*
42	174	6	2.94	-0.01	2.85	7	3.15	0.09	2.74

*: 5%水準で有意。



図一13. 直径・樹高二次元分布の経時変化（深山第2試験地）
 等本線数を，0本から4本間隔で示した。
 点線は，上層木集団と下層木集団の境界を示している。
 上層木集団に対して，二次元正規分布がよい適合を示した。
 図一12に表わした林分の資料を用いた。
 二次元正規性の検定結果を，表一22に示した。

4.2.5 上層木の樹高曲線

上層木集団が二次元正規分布をしているとすれば，その樹高曲線は直線になるはずである。上層木の直径を横軸に，樹高を縦軸にとって，二次式を曲線回帰し，分散分析をしてみると，いずれの林齢においても，二次成分は有意でなかった。このことは，上層木の樹高曲線は，一次式ですませてよいことを示している。

4.2.6 理論との一致

第2章で論じたように，林木の生長を確率過程としてとらえた場合，BACHELIER型の二次元林分遷移の方程式の基本解は二次元正規分布であった。上述の結果から推定すれば，この深山試験地第2分地の上層木集団の分布が，BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の基本解になっていると解釈できる。すなわち，ここに報告した林分の上層木集団のように，平坦地に位置するために

表一22. 上層木の直径・樹高二次元分布に対する二次元正規性の検定（深山試験地第2分地）

林齢 (年)	全 立 木				上 層 木			
	立木本数 (本/plot)	直径と樹高の 相関係数	$K_{2,1}$	$K_{1,2}$	立木本数 (本/plot)	直径と樹高の 相関係数	$K_{2,1}$	$K_{1,2}$
21	222	0.876	-0.029	-0.035	222	0.876	-0.029	-0.035
26	224	0.843	-0.120	-0.240	214	0.818	0.008	-0.035
31	207	0.893	-0.329*	-0.435**	177	0.820	0.069	0.063
42	215	0.880	-0.487**	-0.670**	174	0.789	0.037	0.091

* : 5%水準で有意, ** : 1%水準で高度に有意。

$$K_{2,1} = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$K_{1,2} = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right\}}}$$

斜面の影響も受けておらず、また、若齢時の立木密度が低いために種内競争の影響も比較的少ないような状況のもとでは、林木の大きさのちらばり具合は、おおかた、偶然変動によって説明できるようである。

4.2.7 樹高分布のJ型化

材木の樹高分布がJ型になることは、以前から指摘されている傾向である（四手井 1956）。草本においても、草丈の分布がJ型になると報告されている。（中山 1962, 沼田 1970）から、J型化の現象は、広く伸長生長一般に認められる傾向であると考えられる。林齢が経つにつれ樹高分布がJ型分布を呈するのは、生長競争に遅れをとった木が、樹高の低い下層木集団を形成するためであると考えられる。それに比べて、直径分布では、上層木集団と下層木集団の区別は明瞭ではないようである。解析に用いた深山収穫試験地第2分地では、下層木の直径生長は樹高生長ほど衰えておらず、このため、図一12の林齢42年の分布が示すように、下層木としては直径生長がよい木の直径の大きさと、上層木としては直径生長が劣る木の直径の大きさには、大差は見られなかった。その結果、直径分布は林齢が経っても明確なJ型分布を示さなかった。樹高分布および直径分布に関するこうした性質により、材木全体では、樹高曲線は上に凸な曲線になるものと考えられる。

4.3 秋田営林局管内収穫試験地における直径・樹高二次元分布のパターン

前節では、林地の傾斜や間伐が、直径や樹高の分布型に影響を及ぼすかもしれないということ considering して、平坦地の無間伐林分についてのみ解析した。その結果、林齢に伴い樹高分布がJ型化し、上層木集団が二次元正規分布を呈することを得、二次元林分遷移の方程式による現実林の生長予測の可能性が示された。しかし、実務的な立場からすれば、前節で得られた知見が、他の林分について、どの程度成り立つかということは、重要な問題である。そこで、本節では、秋田営林局管内スギ収穫試験地のすべての毎木調査結果について、まず、林齢に伴う樹高分布の歪度の変化を調べ、つぎに、直径と樹高を二因子とする二次元分布について検討した。

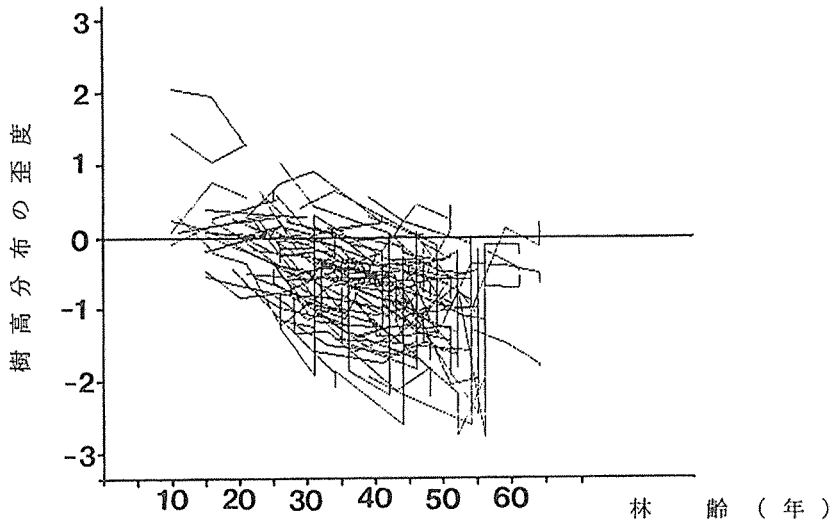


図-14. 林齢に伴う樹高分布の歪度の変化
 (秋田営林局管内スギ収穫試験地84林分のべ458回の調査結果より)
 樹高分布の歪度は、林齢に伴い正から負へ変化している。

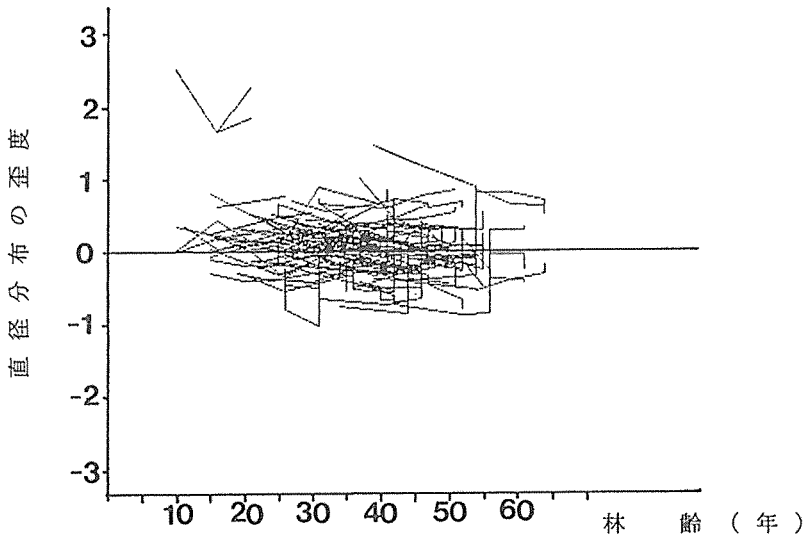


図-15. 林齢に伴う直径分布の歪度の変化
 (秋田営林局管内スギ収穫試験地84林分のべ458回の調査結果より)
 直径分布の歪度は、林齢に対して比較的安定している。

4.3.1 林齢に伴う樹高分布の歪度の変化

図-14は、林齢に伴う樹高分布の歪度の変化を示したものである。この図は、上述の収穫試験地のすべての調査結果、すなわち、458個の測定値について描いたものであるが、全体として、樹高分布の歪度が、林齢に伴い正から負へ、すなわち、L型分布からJ型分布へと、変化していく傾向をよく表わしている。図上では、横軸が林齢であるため、間伐前後の変化は、垂直方向の変化としてしか描かれない。よって、樹高の歪度が減少していく傾向は、生長現象に伴う固有の変化であるといえる。

これに対して、林齢に伴う直径分布の歪度の変化は、図-15に示したように、比較的安定しており、大半のものが-1から1の範囲にあった。なお、直径分布の歪度の全体の平均は、0.082であり、これは、直径分布が少々左偏、すなわち、若干L型分布になっていることを示している。

4.3.2 直径・樹高二次元分布型の分類

458個の毎木調査結果について、直径階別樹高階別の本数分布の二次元正規性を検定し、その結果によって、直径・樹高二次元分布型を類別した。二次元正規性の検定には、前節と同じく、二次元正規分布の三次以上の同時キュムラントがすべてゼロになることを利用した検定法（竹内 1975、柴田 1981）を用い、有意水準は5%とした。ところで、二次元正規性の検定の結果、二次元正規分布ではないとはいえない林分でも、直径分布や樹高分布の正規性を個別に検定してみると、歪度や尖度について正規性が棄却される場合がある。ここでは、このような場合の二次元分布を準正規型と定義することにした。なお、有意水準は、この場合も5%とした。よって、直径・樹高二次元分布型は、正規型、準正規型および非正規型の三通りに分類されることになる。これを、全立木および上層木に対して適用した。この際、上層木は、前節と同じく、以下のように定義した。樹高分布の歪度が負の値を示す林分、すなわち、樹高分布がJ型分布を示している

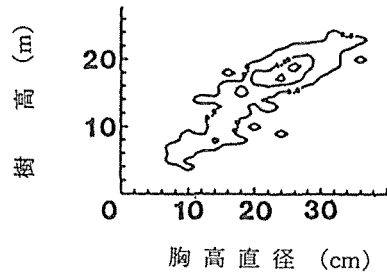
表-23. 直径階別樹高階別本数分布の分類

全 木	上層木	分 類
正 規	正 規	正 規 型
正 規	準 正 規	
正 規	非 正 規	
準 正 規	正 規	上層木正規型
準 正 規	準 正 規	準 正 規 型
準 正 規	非 正 規	
非 正 規	正 規	上層木正規型
非 正 規	準 正 規	上層木準正規型
非 正 規	非 正 規	非 正 規 型

林分について、樹高の低い木から順次下層木に指定し、そのつど上層木の歪度を計算して、歪度の絶対値が最小になる点を求め、そこを上層木と下層木の分割点とした。以上の定義により、直径階別樹高階別の本数分布は、表-23のように、機械的に9通りに分類されるが、このままでは取り扱いにくいので、表-23の右端にあるように5通り、すなわち、上層木正規型、上層木準正規型、正規型、準正規型および非正規型に分類して考察することにした。なお、上層木が定義できない林

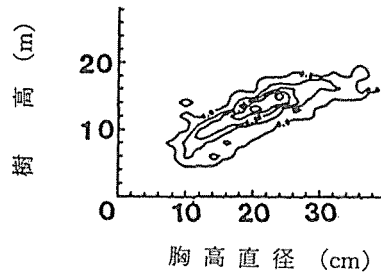
上層木正規型

試験地番号：172
 林 齢：42年
 平均直径：21.9 cm
 平均樹高：16.1 m
 本数密度：1075.0本/ha
 断面積合計：43.7 m²/ha
 地位中，傾斜平坦，裾野，無間伐



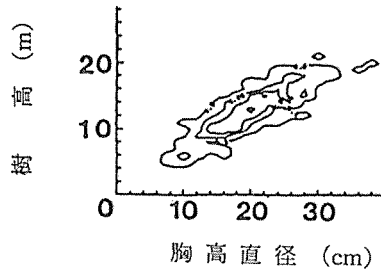
上層木準正規型

試験地番号：291
 林 齢：30年
 平均直径：20.6 cm
 平均樹高：12.7 m
 本数密度：2125.0本/ha
 断面積合計：76.8 m²/ha
 地位中，傾斜緩，裾野，無間伐



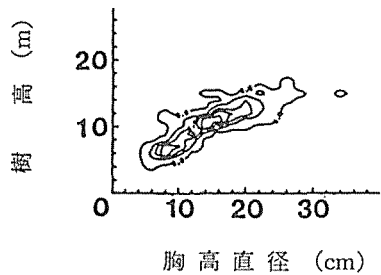
正 規 型

試験地番号：303
 林 齢：35年
 平均直径：19.7 cm
 平均樹高：12.7 m
 本数密度：1513.0本/ha
 断面積合計：49.1 m²/ha
 地位中，傾斜緩，山腹，間伐直後



準正規型

試験地番号：12
 林 齢：31年
 平均直径：14.5 cm
 平均樹高：10.2 m
 本数密度：1556.7本/ha
 断面積合計：28.7 m²/ha
 地位下，傾斜中，裾野，無間伐



非正規型

試験地番号：183
 林 齢：39年
 平均直径：15.3 cm
 平均樹高：10.0 m
 本数密度：1400.0本/ha
 断面積合計：28.1 m²/ha
 地位下，傾斜急，山腹，無間材

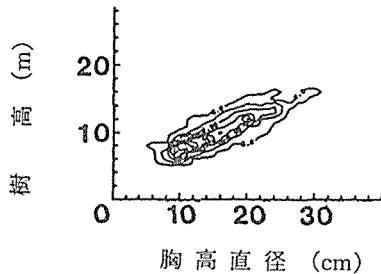


図-16. 二次元本数密度分布の典型的な5つのパターン

林分数と百分率

表-24. 樹高の歪度と二次元正規性との関係

樹高分布の歪度	~-2.0	~-1.5	~-1.0	~-0.5	~0.0	~0.5	~1.0	~1.5	~2.0	2.0~
上層木正規型	7(58.4%)	27(73.0%)	51(64.5%)	56(47.8%)	16(13.0%)	-(%)	-(%)	-(%)	-(%)	-(%)
上層木準正規型	4(33.3%)	9(24.3%)	24(30.4%)	45(38.5%)	15(12.2%)	-(%)	-(%)	-(%)	-(%)	-(%)
正規型	-(%)	-(%)	-(%)	-(%)	30(24.4%)	11(15.3%)	-(%)	-(%)	-(%)	-(%)
準正規型	-(%)	-(%)	-(%)	9(7.7%)	55(44.7%)	21(29.2%)	-(%)	-(%)	-(%)	-(%)
非正規型	1(8.3%)	1(2.7%)	4(5.1%)	7(6.0%)	7(5.7%)	40(55.5%)	11(100.0%)	5(100.0%)	1(100.0%)	1(100.0%)
計	12(100.0%)	37(100.0%)	79(100.0%)	117(100.0%)	123(100.0%)	72(100.0%)	11(100.0%)	5(100.0%)	1(100.0%)	1(100.0%)

林分数と百分率

表-25. 間伐と二次元正規性との関係

間伐の実行	無間伐	間伐直後	間伐後		計
			10年未満	10年以上	
上層木正規型	37(27.4%)	51(38.8%)	43(39.1%)	26(31.7%)	157(34.2%)
上層木準正規型	25(18.5%)	23(17.6%)	23(20.9%)	26(31.7%)	97(21.2%)
正規型	8(5.9%)	23(17.6%)	6(5.5%)	4(4.9%)	41(9.0%)
準正規型	25(18.5%)	22(16.8%)	26(23.6%)	12(14.6%)	85(18.6%)
非正規型	40(29.7%)	12(9.2%)	12(10.9%)	14(17.1%)	78(17.0%)
計	135(100.0%)	131(100.0%)	110(100.0%)	82(100.0%)	458(100.0%)

林分数と百分率

表-26. 地貌と二次元正規性との関係

地貌	種野		尾根		計
	中腹	尾根	中腹	尾根	
上層木正規型	78(34.2%)	79(34.3%)	-(%)	-(%)	157(34.2%)
上層木準正規型	55(24.1%)	42(18.3%)	-(%)	-(%)	97(21.2%)
正規型	16(7.0%)	25(10.9%)	-(%)	-(%)	41(9.0%)
準正規型	38(16.7%)	47(20.4%)	-(%)	-(%)	85(18.6%)
非正規型	41(18.0%)	37(16.1%)	-(%)	-(%)	78(17.0%)
計	228(100.0%)	230(100.0%)	-(%)	-(%)	458(100.0%)

表-27. 傾斜と二次元正規性との関係
林分数と百分率

傾斜	平	緩	中	急	計
上層木正規型	18(40.9%)	102(43.3%)	27(22.0%)	10(18.2%)	157(34.2%)
上層木準正規型	8(18.2%)	56(23.7%)	24(19.5%)	9(16.4%)	97(21.2%)
正 規 型	6(13.6%)	23(9.7%)	7(5.7%)	5(9.1%)	41(9.0%)
準 正 規 型	9(20.5%)	28(11.9%)	28(22.8%)	20(36.3%)	85(18.6%)
非 正 規 型	3(6.8%)	27(11.4%)	37(30.0%)	11(20.0%)	78(17.0%)
計	44(100.0%)	236(100.0%)	123(100.0%)	55(100.0%)	458(100.0%)

表-28. 地位と二次元正規性との関係
林分数と百分率

地 位	上	中	下	計
上層木正規型	45(49.0%)	98(42.4%)	14(10.4%)	157(34.2%)
上層木準正規型	23(25.0%)	58(25.1%)	16(11.9%)	97(21.2%)
正 規 型	12(13.0%)	17(7.4%)	12(8.9%)	41(9.0%)
準 正 規 型	6(6.5%)	31(13.4%)	48(35.5%)	85(18.6%)
非 正 規 型	6(6.5%)	27(11.7%)	45(33.3%)	78(17.0%)
計	92(100.0%)	231(100.0%)	135(100.0%)	458(100.0%)

林分数と百分率, 1齡級:10年

齡級	林分数と百分率, 1齡級:10年						
	II	III	IV	V	VI	VII	計
上層木正規型	3(10.3%)	21(25.6%)	46(35.9%)	61(41.2%)	23(39.0%)	3(25.0%)	157(34.2%)
上層木準正規型	2(6.9%)	13(15.9%)	32(25.0%)	36(24.3%)	12(20.3%)	2(16.7%)	97(21.2%)
正規型	5(17.2%)	1(1.2%)	11(8.6%)	10(6.8%)	10(16.9%)	4(33.3%)	41(9.0%)
準正規型	7(24.1%)	18(22.0%)	21(16.4%)	29(19.6%)	7(11.9%)	3(25.0%)	85(18.6%)
非正規型	12(41.5%)	29(35.3%)	18(14.1%)	12(8.1%)	7(11.9%)	—(—%)	78(17.0%)
計	29(100.0%)	82(100.0%)	128(100.0%)	148(100.0%)	59(100.0%)	12(100.0%)	458(100.0%)

林分数と百分率

立木密度(本/ha)	立木密度と二次元正規性との関係				
	~1000	~2000	~3000	~4000	~5000 ~6000
上層木正規型	96(51.6%)	55(29.0%)	5(6.8%)	1(16.7%)	—(—%)
上層木準正規型	37(19.9%)	51(27.0%)	9(12.2%)	—(—%)	—(—%)
正規型	27(14.5%)	9(4.8%)	3(4.1%)	2(33.3%)	—(—%)
準正規型	20(10.8%)	40(21.2%)	25(33.8%)	—(—%)	—(—%)
非正規型	6(3.2%)	34(18.0%)	32(43.1%)	3(50.0%)	2(100.0%)
計	186(100.0%)	189(100.0%)	74(100.0%)	6(100.0%)	2(100.0%)

表-30. 立木密度と二次元正規性との関係

林分数と百分率

計

分は全立木が上層木であると考えて分類した。図-16に、各分布型の典型的な例を示した。

二次元正規性の検定の結果、上層木正規型は157例 (34.3%)、上層木準正規型は97例 (21.2%)、正規型は41例 (9.0%)、準正規型は85例 (18.6%)、そして非正規型は78例 (17.0%) あった。この結果は、現実林分のうち約8割のものは、その直径階別樹高階別本数分布や上層木のそれが、二次元正規分布で近似できることを示している。この結果と各調査結果の林況、地況等との関係を、表-24から表-30にまとめた。表-24は、樹高分布の歪度と二次元正規性との関係を示したものである。歪度が負の値を示す場合、すなわちJ型分布の傾向が見られる場合は、上層木正規型と上層木準正規型が圧倒的に多く、歪度がゼロの近傍では正規型と準正規型が大半をしめ、歪度が0.5以上になると非正規型が顕著であった。表-25は間伐の有無と二次元正規性との関係である。無間伐の状態では、上層木正規型と上層木準正規型を合計するとその割合は半数近くに達したが、非正規型も約30%あった。間伐直後の林分には非正規型は少なく、その分、上層木正規型や正規型の割合が増加していた。間伐を受けた林分では、上層木正規型と上層木準正規型が約60%を占めていたのに対して、非正規型は間伐直後は9.2%、間伐後10年未満は10.9%、同10年以上は17.1%と漸増する傾向を持っていた。なお、正規型は、間伐直後を除けば、約5%であった。表-26は地貌との関係である。裾野、中腹とも、各分布型の構成割合はよく似ており、明らかな差や傾向は認められなかった。表-27は傾斜との関係である。傾斜が平、緩の場合は上層木正規型が多く、中、急の場合は非正規型が多くなっていた。表-28は地位との関係である。地位が高いほど上層木正規型、上層木準正規型および正規型が多く、地位が低いほど準正規型や非正規型が多くなる傾向が見られた。表-29は齢級との関係である。II齢級では上層木正規型や上層木準正規型が少なかったが、これは種内競争がまだ激しくなく、上層と下層との分離が明らかでないためと解釈できる。このことは、上層木正規型や上層木準正規型がIV齢級以後では全体の約60%を占めるようになることから推察できる。非正規型は、II齢級やIII齢級では約40%あり、これに準正規型も含めると約60%に達するが、IV齢級以後では急速に減少する傾向を示していた。表-30は立木密度との関係である。立木密度が低いほど上層木正規型が多く、高いほど非正規型が多くなる傾向が見られた。

以上の分析の結果、傾斜が穏やかで地位がよく、しかも立木密度が低い比較的高齢な林分には上層木正規型が多く現れる傾向が認められた。また逆に、傾斜が急で地位が悪く、しかも立木密度が高い比較的低齢な林分には、非正規型が多く現れる傾向が認められた。しかし、数の上から言えば、非正規型は2割弱しか存在せず、大半は、上層木正規型と上層木準正規型であった。

4.3.3 直径・樹高二次元分布の遷移

直径・樹高二次元分布型は、前述のように5通り、すなわち、上層木正規型、上層木準正規型、正規型、準正規型、および非正規型に類別できるが、ここでは、同一の林分が、生長に伴い、これらの分布型をどのように移り変っていくのかを調べた。その結果を表-31に示した。毎木調査が行われたのちつぎの毎木調査が行われるまでの期間は平均6.1年だったので、この表は6.1年間

の遷移を示したものである。なお、この表の作成にあたっては、各分布型への遷移確率は、現在その林分が属している分布型によってのみ決まり、地貌、傾斜、地位、齢級、立木密度およびその林分が間伐後何年経過しているかなどの因子とは無関係であると仮定した。すなわち、分布型のみを状態とする定常マルコフ過程であるとみなして計算した。ただし、間伐による変化は人為によるものなので、これは別に計算し、表-32を得た。

図-17と図-18は、各分布型の相互関係をより明確にするために、遷移確率が10%以上のもののみを抜き出して表わしたものである。図-17を見てみると6.1年後も同じ分布型に属する確率は、上層木正規型が62.2%と最も大きく、ついで、準正規型の58.7%、非正規型の54.5%と続く。正規型と上層木準正規型はそれぞれ36.6%、35.4%と50%を下まわっており、上層木正規型や準正規型、非正規型と比べ、やや安定性にかげ、生長の途中段階で出現する分布型であることを物語っている。非正規型のうち20.5%が準正規型になり、準正規型のうち17.4%が上層木準正規型になり、上層木準正規型のうち47.9%が上層木正規型になるので、上層木正規型は最終的に到達する安定した分布であると考えることができる。上層木正規型のうち29.3%は上層木準正規型になるのであるが、上層木準正規型のうち47.9%が上層木正規型になることを考えれば、これは、まだ上層木正規型に十分成りきらないものが示す現象であると解釈できる。上記の遷移コースを近道する例もあり、非正規型から上層木準正規型へ遷移するものが15.9%、準正規型から上層木正規型へ遷移するものが13.0%であった。一方、正規型の分布は、上層木正規型へ遷移するものが15.8%、準正規型へが15.8%、そして非正規型へが10.5%と、どちらかといえば、他の分布型へ満遍なく遷移している。しかし、他の分布型から正規型への流入は甚だ少なく、特に、非正規型から正規型に遷移するものは皆無であった。正規型には、上層木正規型へ向かうものと、非正規化していくものとの2通りのコースがあるようである。

図-18は、間伐の直前直後の変化を示したものである。同じ分布型に属する確率は、正規型が100%と特徴的であるほかは、図-17の値とよく似ている。非正規型の分布は、間伐によって、30.8%が準正規型になり、準正規型は20.0%が正規型に、16.0%が上層木準正規型になる。上層木準正規型は40.0%が上層木正規型になるが、正規型になるものも11.4%ある。上層木正規型のうち16.3%は正規型になる。上層木正規型や上層木準正規型が正規型になるのは、下層木が間伐された場合であろう。間伐は、図-17で推察した遷移の過程を早める作用と、分布型を正規型にする作用の2種類の機能を持っているようである。

以上の結果と表-29とを合わせて考察すれば、直径・樹高二次元分布型の遷移は、以下のように要約される。II 齢級では、上層木正規型が10.3%、上層木準正規型が6.9%、正規型が17.2%、準正規型が24.1%、非正規型が41.4%であるが、これらの分布型に属する林分のうち約半数のものは、6.1年間に生長や間伐によって、その分布型が変化し、他の分布型へと遷移している。その代表的な遷移は、間伐がない場合は、正規型→上層木準正規型→上層木正規型、または、非正規型→準正規型→上層木準正規型→上層木正規型という過程であり、間伐がある場合は、非正規

表-31. 生長による二次元分布型の遷移 (6.1年間の推移)

遷移前の分布型と林分数	6.1年後の二次元分布型と林分数およびその割合					
	上層木正規	上層木準正規	正 規	準 正 規	非 正 規	
上層木正規	82(100.0%)	51(62.2%)	24(29.3%)	2(2.4%)	2(2.4%)	3(3.7%)
上層木準正規	48(100.0%)	23(47.8%)	17(35.4%)	3(6.3%)	2(4.2%)	3(6.3%)
正 規	19(100.0%)	3(15.8%)	4(21.1%)	7(36.8%)	3(15.8%)	2(10.5%)
準 正 規	46(100.0%)	6(13.0%)	8(17.4%)	1(2.2%)	27(58.7%)	4(8.7%)
非 正 規	45(100.0%)	4(8.9%)	7(15.6%)	-(-%)	9(20.0%)	25(55.5%)

表-32. 間伐による二次元分布型の遷移

間伐前の分布型と林分数	間伐後の二次元分布型と林分数およびその割合					
	上層木正規	上層木準正規	正 規	準 正 規	非 正 規	
上層木正規	49(100.0%)	34(69.4%)	4(8.2%)	8(16.3%)	2(4.1%)	1(2.0%)
上層木準正規	35(100.0%)	14(40.0%)	13(37.1%)	4(11.4%)	3(8.6%)	1(2.9%)
正 規	6(100.0%)	-(-%)	-(-%)	6(100.0%)	-(-%)	-(-%)
準 正 規	25(100.0%)	1(4.0%)	4(16.0%)	5(20.0%)	13(52.0%)	2(8.0%)
非 正 規	12(100.0%)	-(-%)	1(8.3%)	-(-%)	4(33.3%)	7(58.4%)

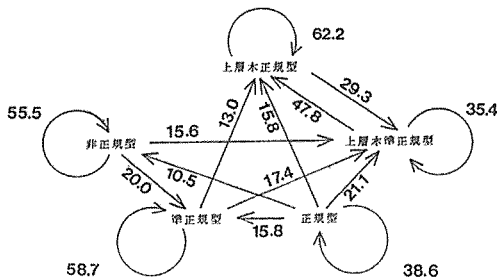


図-17. 生長による二次元分布型の遷移 (6.1年間の推移) の傾向 (秋田営林局管内スギ収穫試験地調査結果より) 数字は、パーセントで表わした遷移確率である。

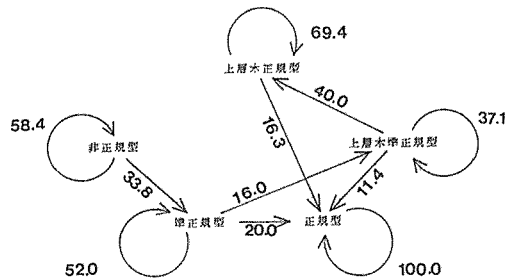


図-18. 間伐による二次元分布型の遷移の傾向 (秋田営林局管内スギ収穫試験地調査結果より) 数字は、パーセントで表わした遷移確率である。

型→準正規型→正規型→上層木準正規型→上層木正規型という過程である。このような遷移の結果、IV齢級以後は、各分布型の割合は比較的安定し、上層木正規型が約40%、上層木準正規型が約20%、正規型が約10%、準正規型が約20%、非正規型が約10%になる。ちなみに、表-31の遷移確率に対する固有ベクトルは0.43833, 0.27555, 0.04850, 0.12607, 0.11155であり、これは、IV齢級以後の分布型の存在割合とよく似ている。若干異なっているのは、間伐、すなわち表-32の遷移確率の影響のためであろう。

当初は、非正規型や準正規型の分布であっても、上層木と下層木とに分離する林分は、上層木準正規型、上層木正規型へと遷移していく傾向があった。このような林分の上層木の生長には、二次元林分遷移の方程式の理論が適用できるものと思われる。しかしながら、いつまでも非正規型であり続ける林分も1割程度存在し、これについては、他の生長モデルが必要であると思われるので、今回は研究の対象にしないことにした。

4.4 平均胸高直径の生長と直径分散の増加

前節での解析の結果、大半の林分は、生長に伴い上層木正規型へと推移していく傾向があった。本研究の目的は、上層木正規型へと推移していく林分の生長を、二次元林分遷移の方程式で予測し、その結果を経営計画に役立てることにある。そのためには、まず、直径と樹高を二因子とする二次元正規分布で表現される林木集団が、生長に伴いどのように推移していくのか、その一般的な傾向をおさえておく必要がある。すなわち、二次元林分遷移の方程式の係数関数を具体的に定め、そのパラメータの一般的な傾向を把握しておかねばならない。より具体的に言えば、二次元林分遷移を特徴付ける諸要素、すなわち、平均直径の生長、直径分散の増加、平均樹高の生長、樹高分散の増加、直径と樹高との相関係数の変化および立木本数の減少についての解析が必要となる。このうち、平均直径の生長、平均樹高の生長および立木本数の減少については、収穫表などからその傾向をつかむことは比較的容易である。しかし、直径分散の増加、樹高分散の増加、直径と樹高との相関係数の変化については、まだ未知の部分が多い。本意では、本節以降、二次元林分遷移の方程式の係数関数を具体的に定め、そのパラメータについて考察する。本節では、まず、平均胸高直径の生長と直径分散の増加について検討する。

4.4.1 解析対象試験地の選定

4.1節で紹介した秋田営林局管内収穫試験地の資料の中から、生長曲線式をあてはめる資料を選定することにした。選定にあたっては、まず第一に、直径・樹高二次元分布パターンが、正規型もしくは上層木正規型を呈している試験地を選ぶことにした。さらに、生長に伴う二次元分布パターンの変化が、4.3節で報告したような推移を示すもの、すなわち、上層木正規型へと向かって推移していく林分を対象とした。第二には、間伐の影響が少ない試験地から選ぶことにした。間伐は、分布の形状に対して直接に影響を与えるので、直径分布や樹高分布の分散および直径と樹高との相関係数の経時的な変化を解析するときには、注意を要する。とくに、若齢時に繰り返し実行される間伐は、分布の形状に大きく影響するものと推察される。よって、林齢40年

近くまで無間伐であった試験地の中から選定することにした。この場合、無間伐な林分と言っても除伐は受けているので、より正確な表現をすれば、除伐後の密度が比較的low、間伐を必要としなかった林分を解析の対象としたことになる。第三には、地位が下であると判定された林分、林地の傾斜が急な林分および尾根筋に位置する林分はさけることにした。これは、本節の目的が、いわゆる正常な生長経過をたどる林分を解析し、その生長関数型とパラメータを考察することにあるからである。そして、一般に、ここで指摘したような林分は各種の外的要因が相互に影響するため、その生長も複雑になる場合が多く、今回の目的には不向きであると判断したためである。

以上の三つの選出基準の下に選定された林分は、小阿仁奥山人工林A種収穫試験地第1分地（試験地番号 71）、上大内沢人工林A種収穫試験地第3分地（試験地番号 83）、長滝人工林A種収穫試験地第1分地（試験地番号 91）、深山人工林A種収穫試験地第1分地（試験地番号 171）および第2分地（試験地番号 172）、そして馬場目沢人工林成績調査地第2分地（試験地番号 242）の6試験地であった。

秋田営林局管内のスギ収穫試験地資料のうち、報告書に公表されているものは1961年（昭和36年）までの調査結果であり、一林分当たりの調査回数も4ないし5回しかない。たとえば、MITSCHERLICH式をあてはめるとすれば、パラメータは M 、 k 、 l の3つなので、これらの資料では、あてはめ時における自由度は1ないし2しかないことになる。このようにデータ数が少ない場合には、もしもデータに異常値が含まれていれば、あてはめた結果は、その異常値によって大きく影響されてしまう。それゆえ、データ数は多い方がよく、また、各林齢にまんべんなくまたがっていることが望ましい。解析対象試験地として選定した上記6試験地について、その後の調査結果の有無を林業試験場東北支場に問い合わせたところ、上大内沢人工林A種収穫試験地第3分地と馬場目沢人工林成績調査地第2分地の2試験地は、その後も調査を継続しているとのことであり、未発表資料を提供して戴けることになった。この未発表資料を見てみるといずれも間伐が実行されていたが、壮齢時における下層間伐であって、上層木集団への影響は少ないと判断できたので、これらの資料もあてはめに使うことにした。つまり、データ数が少ないまま最小2乗法を実行するよりも、たとえ間伐後の資料であっても、より高齢な時点での調査結果が加わりデータ数が増えた方が、より信頼できるあてはめ結果がえられると判断した。事実、これらの資料について、両者の結果を比較したが、後者の方が林学的な見地からより納得できる曲線の形状を示し、また、パラメータも常識的な値であった。ここでは、紙幅の関係上、この解析結果に関する報告は省略する。

表-33に、これら6林分の統計量の経時変化を、全林木について、および上層木について示した。なお、上層木の定義は、4.2節の定義に従った。

4.4.2 平均胸高直径の生長とMITSCHERLICHの生長法則

i) 秋田地方スギ林分収穫表の平均直径の生長

3.3節で提案した確率論的直径生長モデルでは、平均直径の生長はある生長曲線に従うと仮

表一33-1. 秋田営林局管内スギ収穫試験地6試験地の林分統計量の経時変化
小阿仁奥山人工林A種収穫試験地第1分地(試験地番号 71)

面積: 0.1880ha, 傾斜: 中, 地貌: 裾野, 地位: 上

西暦(年)	1936	1942	1947	1956	1956	1961
月(月)	10	9	8	10	10	8
林齢(月)	23	29	34	43	43	48
間伐の有無	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	間伐 直後	間伐後 10年未満
二次元分布型	準正規	上層木 正規	上層木 準正規	上層木 正規	上層木 準正規	上層木 正規
全木						
立木本数(本)	252	242	237	225	151	149
立木密度(本/ha)	1340.4	1287.2	1260.6	1196.8	803.2	792.6
平均(cm)	16.8	20.1	23.4	26.6	30.3	32.3
分散(cm ²)	20.53	32.61	43.44	66.32	41.06	44.87
標準偏差(cm)	4.5	5.7	6.6	8.1	6.4	6.7
変動係数(%)	27.0	28.3	28.2	30.6	21.2	20.7
長歪度	0.481**	0.162	-0.003	-0.025	-0.079	-0.024
尖度	3.376	2.766	2.665	2.413	3.519	3.491
胸高断面積合計(m ²)	5.962	8.336	10.965	13.705	11.359	12.741
断面積密度(m ² /ha)	31.713	44.340	58.324	72.899	60.420	67.771
平均(m)	10.0	13.8	14.4	19.0	21.7	23.7
樹分散(m ²)	5.52	10.88	14.91	27.32	11.21	11.72
高標準偏差(m)	2.3	3.3	3.9	5.2	3.3	3.4
変動係数(%)	23.4	24.0	26.8	27.5	15.4	14.4
長歪度	0.234	-0.480**	-0.403*	-0.570**	-0.853**	-1.209**
尖度	2.640	3.125	2.427	2.413	4.342**	6.214**
直径樹高共分散(cm・m)	8.767	14.532	21.349	36.460	15.903	16.271
直径樹高相関係数	0.824	0.772	0.839	0.856	0.741	0.710
K _{2, 1}	0.234	-0.161	-0.217	-0.251	-0.426*	-0.487**
K _{1, 2}	0.163	-0.335*	-0.321*	-0.411**	-0.640**	-0.850**
二次元分布型	準正規	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規
上層木						
最低樹高階(m)	5	9	11	16	16	17
立木本数(本)	252	223	193	165	144	143
立木密度(本/ha)	1340.4	1186.2	1026.6	877.7	766.0	760.6
平均(cm)	16.8	20.8	25.4	30.2	31.0	32.9
分散(cm ²)	20.53	28.28	28.89	36.04	32.11	37.85
標準偏差(cm)	4.5	5.3	5.4	6.0	5.7	6.2
変動係数(%)	27.0	25.5	21.2	19.9	18.3	18.7
長歪度	0.481**	0.257	0.237	0.243	0.412*	0.334
尖度	3.376	2.918	3.224	3.184	3.186	3.114
胸高断面積合計(m ²)	5.962	8.104	10.193	12.310	11.212	12.547
断面積密度(m ² /ha)	31.713	43.106	54.218	65.479	59.638	66.739
平均(m)	10.0	14.4	15.8	21.7	22.1	24.1
樹分散(m ²)	5.52	7.07	7.27	8.11	7.16	6.95
高標準偏差(m)	2.3	2.7	2.7	2.8	2.7	2.6
変動係数(%)	23.4	18.5	17.1	13.1	12.1	10.9
長歪度	0.234	0.042	0.021	0.015	-0.025	0.003
尖度	2.640	2.711	2.290*	2.436	2.630	2.895
直径樹高共分散(cm・m)	8.767	10.307	10.460	11.766	9.643	10.342
直径樹高相関係数	0.824	0.729	0.722	0.688	0.636	0.638
K _{2, 1}	0.234	-0.025	0.027	0.070	0.161	0.000
K _{1, 2}	0.163	-0.070	0.032	0.059	0.102	-0.115
二次元分布型	準正規	正規	準正規	正規	準正規	正規

*: 5%水準で有意, **1%水準で高度に有意。

表一33-2. 秋田営林局管内スギ収穫試験地6試験地の林分統計量の経時変化
上大内沢人工林A種収穫試験地第3分地(試験地番号 83)

面積: 0.1500ha, 傾斜: 中, 地貌: 山腹, 地位: 中									
西暦(年)	1939	1949	1954	1959	1959	1964	1969	1974	1979
月(月)	10	9	7	6	6	6	8	10	11
林齢(月)	27	37	42	46	46	51	57	62	67
間伐の有無	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	間伐 直後	間伐後 10年未満	間伐後 10年以上	間伐後 10年以上	間伐後 10年以上
二次元分布型	上層木 正規	上層木 正規	上層木 正規	上層木 正規	正規	正規	正規	上層木 正規	上層木 正規
全 木									
立木本数(本)	173	153	154	153	131	127	127	127	127
立木密度(本/ha)	1153.3	1020.0	1026.7	1020.0	873.3	846.7	846.7	846.7	846.7
平均(cm)	14.7	21.8	24.3	26.8	27.8	30.4	32.5	33.9	35.3
直 分散(cm ²)	10.22	19.48	24.20	32.26	24.37	27.68	35.58	40.56	46.62
径 標準偏差(cm)	3.2	4.4	4.9	5.7	4.9	5.3	6.0	6.4	6.8
生 変動係数(%)	21.7	20.2	20.2	21.2	17.7	17.3	18.4	18.8	19.3
長 歪度	-0.078	-0.032	-0.306	-0.306	-0.007	0.072	0.017	-0.026	-0.090
尖度	2.507	2.972	3.024	2.952	2.570	2.492	2.362	2.306	2.377
胸高断面積合計(m ²)	3.082	5.967	7.434	8.992	8.221	9.517	10.870	11.868	12.907
断面積密度(m ² /ha)	20.547	39.780	49.560	59.947	54.807	63.445	72.466	79.120	86.044
平均(m)	11.4	16.1	17.8	20.4	20.9	23.1	24.7	25.8	26.2
樹 分散(m ²)	3.35	6.87	6.33	8.08	4.92	4.57	4.85	4.77	6.11
高 標準偏差(m)	1.8	2.6	2.5	2.8	2.2	2.1	2.2	2.2	2.5
生 変動係数(%)	16.1	16.3	14.2	14.0	10.6	9.3	8.9	8.5	9.4
長 歪度	-0.581**	-0.569**	-0.575**	-1.066**	0.088	-0.187	-0.175	-0.245	-0.583**
尖度	3.806*	4.490**	5.088**	6.152**	3.313	2.963	3.344	4.052**	3.800*
直径樹高共分散(cm·m)	4.566	8.354	9.614	12.703	8.077	8.128	9.404	9.914	11.236
直径樹高相関係数	0.781	0.722	0.777	0.787	0.737	0.729	0.722	0.718	0.671
K _{2, 1}	-0.270	-0.231	-0.383*	-0.499**	-0.058	-0.045	-0.066	-0.097	-0.257
K _{1, 2}	-0.404*	-0.288	-0.418*	-0.720**	-0.041	-0.094	-0.093	-0.126	-0.420*
二次元分布型	非正規	準正規	非正規	非正規	正規	正規	正規	準正規	非正規
上層木									
最低樹高階(m)	8	11	12	14	16	18	19	20	22
立木本数(本)	166	150	151	149	131	126	126	126	121
立木密度(本/ha)	1106.7	1000.0	1006.7	993.3	873.3	840.0	840.0	840.0	806.7
平均(cm)	15.0	22.0	24.5	27.1	27.8	30.5	32.6	34.0	36.0
直 分散(cm ²)	9.10	18.67	21.56	27.83	24.37	27.02	34.62	39.74	40.23
径 標準偏差(cm)	3.0	4.3	4.6	5.3	4.9	5.2	5.9	6.3	6.3
生 変動係数(%)	20.2	19.7	18.9	19.4	17.7	17.0	18.1	18.5	17.6
長 歪度	-0.007	0.029	-0.140	-0.103	-0.007	0.092	0.044	-0.018	0.027
尖度	2.556	2.894	2.816	2.701	2.570	2.498	2.349	2.319	2.305
胸高断面積合計(m ²)	3.038	5.908	7.399	8.938	8.221	9.485	10.838	11.830	12.662
断面積密度(m ² /ha)	20.253	39.387	49.327	59.587	54.807	63.236	72.257	78.866	84.410
平均(m)	11.6	16.2	17.9	20.6	20.9	23.2	24.7	25.8	26.5
樹 分散(m ²)	2.39	5.67	5.06	5.52	4.92	4.31	4.53	4.33	4.37
高 標準偏差(m)	1.5	2.4	2.2	2.4	2.2	2.1	2.1	2.1	2.1
生 変動係数(%)	13.3	14.7	12.5	11.4	10.6	9.0	8.6	8.1	7.9
長 歪度	0.074	-0.072	0.053	-0.092	0.088	-0.073	-0.024	0.041	0.026
尖度	2.550	2.998	3.521	3.456	3.313	2.775	3.082	3.406	2.459
直径樹高共分散(cm·m)	3.485	7.313	7.732	9.236	8.077	7.683	8.814	9.254	7.796
直径樹高相関係数	0.748	0.711	0.741	0.745	0.737	0.718	0.710	0.711	0.593
K _{2, 1}	-0.110	-0.111	-0.102	-0.127	-0.058	0.001	-0.006	-0.049	-0.034
K _{1, 2}	-0.056	-0.012	0.036	-0.079	-0.041	-0.012	0.013	0.012	-0.040
二次元分布型	正規	正規	正規	正規	正規	正規	正規	正規	正規

*: 5%水準で有意, **1%水準で高度に有意。

表一33-3. 秋田営林局管内スギ収穫試験地6試験地の林分統計量の経時変化
長滝人工林A種収穫試験地第1分地(試験地番号 91)

面積: 0.2200ha, 傾斜: 緩, 地貌: 山腹, 地位: 上						
西暦(年)	1937	1942	1947	1952	1957	1957
月(月)	7	8	9	7	6	6
林齢(年)	25	30	35	40	44	44
間伐の有無	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	間伐直後
二次元分布型	上層木 正規	上層木 正規	上層木 準正規	上層木 準正規	上層木 正規	上層木 正規
全 木						
立木本数(本)	212	210	198	205	194	128
立木密度(本/ha)	963.6	954.5	900.0	931.8	881.8	581.8
平均(cm)	22.2	25.2	27.8	28.8	30.4	34.3
直径分散(cm ²)	30.36	42.79	53.79	67.08	76.61	51.84
標準偏差(cm)	5.5	6.5	7.3	8.2	8.8	7.2
生変動係数(%)	24.8	26.0	26.4	28.4	28.8	21.0
長歪度	0.200	0.040	-0.008	-0.010	0.008	-0.094
尖度	2.789	2.617	2.639	2.427	2.547	3.511
胸高断面積合計(m ²)	8.710	11.180	12.870	14.471	15.222	12.325
断面積密度(m ² /ha)	39.591	50.818	58.500	65.777	69.191	56.023
平均(m)	15.6	17.7	21.0	21.7	24.2	26.6
樹直径分散(m ²)	5.87	9.13	11.92	18.25	27.32	11.90
高標準偏差(m)	2.4	3.0	3.5	4.3	5.2	3.5
生変動係数(%)	15.5	17.1	16.4	19.7	21.6	13.0
長歪度	-0.365*	-0.928**	-1.000**	-1.083**	-0.999**	-1.824**
尖度	2.902	4.374**	4.077**	3.997**	3.727*	11.889**
直径樹高共分散(cm·m)	11.309	16.718	21.689	30.452	39.364	19.817
直径樹高相関係数	0.848	0.846	0.857	0.870	0.860	0.798
K _{2,1}	-0.049	-0.228	-0.320*	-0.290	-0.325*	-0.592**
K _{1,2}	-0.192	-0.497**	-0.620**	-0.619**	-0.635**	-1.079**
二次元分布型	準正規	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規
上層木						
最低樹高階(m)	12	14	19	19	21	20
立木本数(本)	199	193	157	166	149	125
立木密度(本/ha)	904.5	877.3	713.6	754.5	677.3	568.2
平均(cm)	22.7	26.2	30.4	31.5	33.6	34.7
直径分散(cm ²)	27.33	34.63	32.57	43.62	47.38	44.12
標準偏差(cm)	5.2	5.9	5.7	6.6	6.9	6.6
生変動係数(%)	23.0	22.5	18.8	21.0	20.5	19.1
長歪度	0.277	0.196	0.386*	0.174	0.266	0.257
尖度	2.901	2.773	3.082	2.858	3.060	3.110
胸高断面積合計(m ²)	8.483	10.903	11.784	13.481	13.785	12.268
断面積密度(m ² /ha)	38.559	49.559	53.564	61.277	62.659	55.764
平均(m)	16.0	18.3	22.4	23.4	26.6	26.9
樹直径分散(m ²)	4.32	5.02	4.01	5.49	7.30	7.35
高標準偏差(m)	2.1	2.2	2.0	2.3	2.7	2.7
生変動係数(%)	13.0	12.2	8.9	10.0	10.1	10.1
長歪度	0.023	-0.017	-0.011	0.022	0.037	-0.051
尖度	2.337	2.521	2.136*	2.247*	2.856	3.051
直径樹高共分散(cm·m)	9.197	10.873	8.713	12.841	14.463	13.959
直径樹高相関係数	0.846	0.825	0.762	0.829	0.778	0.775
K _{2,1}	0.050	0.036	0.086	0.073	0.011	-0.076
K _{1,2}	-0.011	0.004	-0.037	0.051	-0.044	-0.154
二次元分布型	正規	正規	準正規	準正規	正規	正規

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で高度に有意。

表-33-4. 秋田営林局管内スギ収穫試験地6.試験地の林分統計量の経時変化
深山人工林A種収穫試験地第1分地(試験地番号 171)

面積: 0.1700ha, 傾斜: 緩, 地貌: 裾野, 地位: 中					
西暦(年)	1937	1942	1947	1958	1958
月(月)	8	9	9	9	9
林齢(年)	21	26	31	42	42
間伐の有無	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	間伐 直後
二次元分布型	上層木 正規	上層木 正規	上層木 正規	上層木 準正規	上層木 準正規
全 木					
立木本数(本)	272	269	262	256	194
立木密度(本/ha)	1600.0	1582.4	1541.2	1505.9	1141.2
平均(cm)	14.2	16.2	19.3	22.5	24.6
直 分散(cm ²)	11.67	18.14	24.65	38.12	27.75
径 標準偏差(cm)	3.4	4.3	5.0	6.2	5.3
生 変動係数(%)	24.1	26.2	25.8	27.4	21.4
長 歪度	-0.120	-0.153	-0.223	0.004	-0.072
尖度	3.123	2.959	3.054	2.629	3.412
胸高断面積合計(m ²)	4.529	5.954	8.146	10.974	9.665
断面積密度(m ² /ha)	26.641	35.024	47.918	64.553	56.853
平均(m)	9.2	11.7	13.9	17.0	18.5
樹 分散(m ²)	3.46	6.36	10.20	16.87	9.79
高 標準偏差(m)	1.9	2.5	3.2	4.1	3.1
生 変動係数(%)	20.2	21.6	23.0	24.1	16.9
長 歪度	-0.501**	-0.552**	-0.803**	-1.010**	-1.815**
尖度	3.338	3.555*	3.414	3.494	8.306**
直径樹高共分散(cm·m)	5.357	8.808	13.510	21.788	13.035
直径樹高相関係数	0.844	0.820	0.852	0.859	0.791
K _{2,1}	-0.330*	-0.335*	-0.438**	-0.366**	-0.615**
K _{1,2}	-0.432**	-0.446**	-0.627**	-0.673**	-1.124**
二次元分布型	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規
上層木					
最低樹高階(m)	6	7	11	15	15
立木本数(本)	261	257	226	195	176
立木密度(本/ha)	1535.3	1511.8	1329.4	1147.1	1035.3
平均(cm)	14.5	16.6	20.5	25.0	25.5
直 分散(cm ²)	9.74	15.10	15.84	22.13	20.47
径 標準偏差(cm)	3.1	3.9	4.0	4.7	4.5
生 変動係数(%)	21.6	23.4	19.4	18.9	17.7
長 歪度	0.184	0.110	0.263	0.430*	0.478**
尖度	2.784	2.686	3.056	2.968	2.925
胸高断面積合計(m ²)	4.481	5.892	7.750	9.876	9.279
断面積密度(m ² /ha)	26.359	34.659	45.588	58.094	54.582
平均(m)	9.4	12.0	14.8	19.0	19.2
樹 分散(m ²)	2.63	4.54	4.59	4.15	3.70
高 標準偏差(m)	1.6	2.1	2.1	2.0	1.9
生 変動係数(%)	17.2	17.8	14.5	10.7	10.0
長 歪度	-0.084	0.017	0.020	-0.030	-0.029
尖度	2.689	2.663	2.372	2.526	2.666
直径樹高共分散(cm·m)	4.091	6.426	6.365	7.008	6.157
直径樹高相関係数	0.809	0.776	0.747	0.732	0.708
K _{2,1}	-0.021	-0.013	0.152	0.130	0.138
K _{1,2}	-0.081	-0.019	0.071	0.059	0.070
二次元分布型	正規	正規	正規	準正規	準正規

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で高度に有意。

表-33-5. 秋田営林局管内スギ収穫試験地6試験地の林分統計量の経時変化
 深山人工林A種収穫試験地第2分地(試験地番号 172)

面積: 0.2000ha, 傾斜: 平, 地貌: 裾野, 地位: 中					
西暦(年)	1937	1942	1947	1958	1958
月(月)	8	9	9	9	9
林齢(年)	21	26	31	42	42
間伐の有無	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	間伐 直後
二次元分布型	準正規	上層木 正規	上層木 準正規	上層木 正規	上層木 正規
全木					
立木本数(本)	222	224	207	215	172
立木密度(本/ha)	1110.0	1120.0	1035.0	1075.0	860.0
平均(cm)	12.8	14.7	18.1	21.9	23.3
直径分散(cm ²)	12.67	17.45	20.48	38.45	32.91
標準偏差(cm)	3.6	4.2	4.5	6.2	5.7
生長変動係数(%)	27.8	28.4	24.9	28.3	24.6
長歪度	0.048	0.021	-0.213	-0.319	-0.572**
尖度	2.408	2.634	2.634	2.569	3.291
胸高断面積合計(m ²)	3.074	4.111	5.686	8.746	7.780
断面積密度(m ² /ha)	15.370	20.555	28.430	43.730	38.900
平均(m)	8.1	10.5	12.0	16.1	17.2
樹高分散(m ²)	4.25	6.36	8.23	19.16	14.49
標準偏差(m)	2.1	2.5	2.9	4.4	3.8
生長変動係数(%)	25.4	24.0	23.9	27.2	22.2
長歪度	-0.055	-0.398*	-0.527**	-0.898**	-1.353**
尖度	2.264*	2.982	2.737	3.065	5.049**
直径樹高共分散(cm・m)	6.423	8.879	11.594	23.891	19.281
直径樹高相関係数	0.876	0.843	0.893	0.880	0.883
K _{2,1}	-0.029	-0.120	-0.329*	-0.487**	-0.813**
K _{1,2}	-0.035	-0.240	-0.435**	-0.670**	-1.071**
二次元分布型	準正規	準正規	非正規	非正規	非正規
上層木					
最低樹高階(m)	5	6	9	13	12
立木本数(本)	214	214	177	174	156
立木密度(本/ha)	1070.0	1070.0	885.0	870.0	780.0
平均(cm)	13.0	15.0	19.3	24.0	24.5
直径分散(cm ²)	11.47	15.58	13.18	21.86	19.79
標準偏差(cm)	3.4	3.9	3.6	4.7	4.4
生長変動係数(%)	26.0	26.2	18.8	19.5	18.1
長歪度	0.118	0.089	0.107	-0.014	0.018
尖度	2.436	2.737	2.798	2.846	2.947
胸高断面積合計(m ²)	3.050	4.067	5.385	8.148	7.605
断面積密度(m ² /ha)	15.250	20.335	26.925	40.740	38.025
平均(m)	8.3	10.8	12.9	17.9	18.1
樹高分散(m ²)	3.74	4.99	4.12	5.50	5.50
標準偏差(m)	1.9	2.2	2.0	2.3	2.3
生長変動係数(%)	23.4	20.7	15.8	13.1	12.9
長歪度	0.054	-0.127	0.080	0.088	-0.064
尖度	2.192*	2.813	2.273*	2.736	2.964
直径樹高共分散(cm・m)	5.616	7.216	6.035	8.653	8.226
直径樹高相関係数	0.857	0.818	0.820	0.789	0.788
K _{2,1}	0.061	0.008	0.069	0.037	-0.013
K _{1,2}	0.076	-0.035	0.063	0.091	-0.027
二次元分布型	準正規	正規	準正規	正規	正規

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で高度に有意。

表一33-6. 秋田営林局管内スギ収穫試験地6試験地の林分統計量の経時変化
馬場目沢人工林成績調査地第2分地(試験地番号 242)

面積: 0.2028ha, 傾斜: 中, 地貌: 裾野, 地位: 中									
西暦(年)	1937	1942	1947	1952	1957	1957	1962	1962	1972
月(月)	10	11	11	8	10	10	8	8	11
林齢(年)	15	20	25	30	35	35	40	40	50
間伐の有無	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	無間伐	間伐 直後	間伐後 10年未満	間伐 直後	間伐後 10年以上
二次元分布型	上層木 準正規	上層木 正 規	上層木 準正規	上層木 正 規	上層木 準正規	上層木 正 規	上層木 準正規	上層木 準正規	上層木 準正規
全 木									
立木本数(本)	404	397	369	345	319	233	228	188	175
立木密度(本/ha)	1992.1	1957.6	1819.5	1701.2	1573.0	1148.9	1124.3	927.0	862.9
平均(cm)	10.3	14.0	17.0	19.3	21.8	23.9	25.8	26.7	30.6
分散(cm ²)	18.47	31.76	37.62	44.01	44.93	35.87	44.03	44.53	45.30
標準偏差(cm)	4.3	5.6	6.1	6.6	6.7	6.0	6.6	6.7	6.7
生 変動係数(%)	41.8	40.2	36.0	34.4	30.7	25.1	25.7	25.0	22.0
長 歪度	-0.290*	-0.400**	-0.380**	-0.426**	-0.268*	-0.541**	-0.441**	-0.630**	-0.005
尖度	2.492*	2.360**	2.387*	2.725	2.576	3.415	3.414	3.710	3.190
胸高断面積合計(m ²)	3.944	7.119	9.495	11.254	13.080	11.092	12.703	11.148	13.484
断面積密度(m ² /ha)	19.448	35.104	46.820	55.493	64.497	54.694	62.638	54.972	66.489
平均(m)	6.3	7.5	9.8	15.7	17.3	18.5	20.3	20.7	24.3
樹 分散(m ²)	4.58	4.80	7.86	21.51	22.59	18.25	21.03	20.10	14.84
高 標準偏差(m)	2.1	2.2	2.8	4.6	4.8	4.3	4.6	4.5	3.9
生 変動係数(%)	34.0	29.3	28.5	29.5	27.5	23.1	22.6	21.7	15.9
長 歪度	-0.459**	-0.840**	-0.789**	-1.154**	-0.946**	-1.465**	-1.390**	-1.481**	-0.988**
尖度	2.418*	2.912	3.032	3.592*	3.150	4.993**	5.078**	5.557**	4.314**
直径樹高共分散(cm·m)	8.229	11.053	15.425	27.591	27.616	21.530	25.245	25.416	21.042
直径樹高相関係数	0.894	0.895	0.897	0.897	0.867	0.842	0.833	0.854	0.816
K _{2,1}	-0.378**	-0.591**	-0.578**	-0.697**	-0.511**	-0.860**	-0.825**	-0.991**	-0.424**
K _{1,2}	-0.443**	-0.733**	-0.712**	-0.924**	-0.726**	-1.153**	-1.081**	-1.236**	-0.715**
二次元分布型	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規	非正規
上層木									
最低樹高階(m)	5	7	8	13	16	16	16	16	20
立木本数(本)	314	290	293	281	230	195	199	166	157
立木密度(本/ha)	1548.3	1430.0	1444.8	1385.6	1134.1	961.5	981.3	818.5	774.2
平均(cm)	12.0	16.8	19.4	21.6	24.9	25.7	27.5	28.4	31.9
分散(cm ²)	9.62	12.17	17.99	21.79	21.41	18.96	24.37	22.91	32.20
標準偏差(cm)	3.1	3.5	4.2	4.7	4.6	4.4	4.9	4.8	5.7
生 変動係数(%)	25.9	20.8	21.9	21.6	18.6	17.0	18.0	16.9	17.8
長 歪度	0.057	0.097	0.019	0.130	0.207	0.265	0.480**	0.398*	0.528**
尖度	2.454	2.625	2.516	2.708	2.937	2.917	2.800	2.777	3.087
胸高断面積合計(m ²)	3.770	6.679	9.068	10.779	11.583	10.368	12.179	10.793	12.941
断面積密度(m ² /ha)	18.590	32.934	44.714	53.151	57.115	51.124	60.056	53.220	63.811
平均(m)	7.2	8.6	11.1	17.6	19.8	20.1	21.7	22.0	25.2
樹 分散(m ²)	1.91	1.05	2.32	5.05	4.73	4.57	6.83	6.59	7.20
高 標準偏差(m)	1.4	1.0	1.5	2.2	2.2	2.1	2.6	2.6	2.7
生 変動係数(%)	19.1	11.9	13.8	12.8	11.0	10.6	12.0	11.7	10.6
長 歪度	0.006	0.115	0.152	-0.025	0.055	-0.052	-0.030	-0.014	-0.033
尖度	2.222**	2.483	4.870**	2.598	2.337*	2.414	2.741	2.791	2.538
直径樹高共分散(cm·m)	3.249	2.250	4.768	8.043	6.679	6.054	8.677	8.096	10.749
直径樹高相関係数	0.758	0.629	0.738	0.767	0.664	0.651	0.676	0.663	0.711
K _{2,1}	0.040	0.030	-0.136	-0.062	0.093	0.115	0.107	0.030	0.148
K _{1,2}	-0.011	0.062	-0.124	-0.061	0.110	0.081	0.054	0.036	0.027
二次元分布型	準正規	正 規	準正規	正 規	準正規	正 規	準正規	準正規	準正規

*: 5%水準で有意, **: 1%水準で高度に有意。

定した。しかし、平均直径の生長曲線については言及していない。一般によく用いられる生長曲線としては、MITSCHERLICH式

$$x(\tau) = M(1 - l e^{-k\tau}) \quad (179)$$

GOMPertz式

$$x(\tau) = M e^{-l e^{-k\tau}} \quad (180)$$

Logistic式

$$x(\tau) = \frac{M}{1 + l e^{-k\tau}} \quad (181)$$

があり、また、この3生長式を包括する式としてRICHARDS式

$$x(\tau) = M(1 - l e^{-k\tau})^{\frac{1}{1-m}} \quad (182)$$

がある。本研究では、生長経過をモデルで再現することを目的としているから、MITSCHERLICH式、GOMPertz式、Logistic式の3生長式の中から、最もあてはまりのよい式を選ぶことにした。ただし、全生長期間にわたらない資料に、生長式をあてはめても、一般にはよい結果が得られないので、ここでは、収穫表の値にあてはめて、適合度を比較し、その結果によって、生長曲線式を選定することにした。この研究では、秋田営林局管内のスギの試験地資料を解析しているので、秋田地方スギ林分収穫表(林野庁 1949)を用いた。また、あてはめはDEMINGの最小2乗法によった。図-19はその結果であるが、残差平方和はMITSCHERLICH式が他の2曲線よりも著しく小さかった。よって、本研究では、平均直径の生長にMITSCHERLICH式を用いることにした。同齡単純林の平均直径がMITSCHERLICHの生長法則に従うことを示したのは、鈴木である。よって、次に、鈴木の研究の概略を紹介し、MITSCHERLICH式の林学的な解釈について示しておこう。

ii) 鈴木の研究

鈴木は、220年から370年生の木曾ヒノキ86本の樹幹解析資料を用いて、直径生長を定差図に表わし、これが極めて直線に近く、しかもその直線の勾配が一般に45度より小さくなることを見出した。そしてこの結果から、林木の胸高直径の生長がいわゆるMITSCHERLICHの法則に従うであろうと推測した。さらにこの結果から、一斉同齡林の林木の平均直径の生長曲線がMITSCHERLICHの曲線になり、またこのことから平均直径の生長速度がいわゆる単分子反応の反応速度方程式になることを証明した(1961)。すなわち、一斉同齡林の平均直径 $\mu_x(\tau)$ について、

$$\frac{d\mu_x(\tau)}{d\tau} = k(M - \mu_x(\tau)) \quad (183)$$

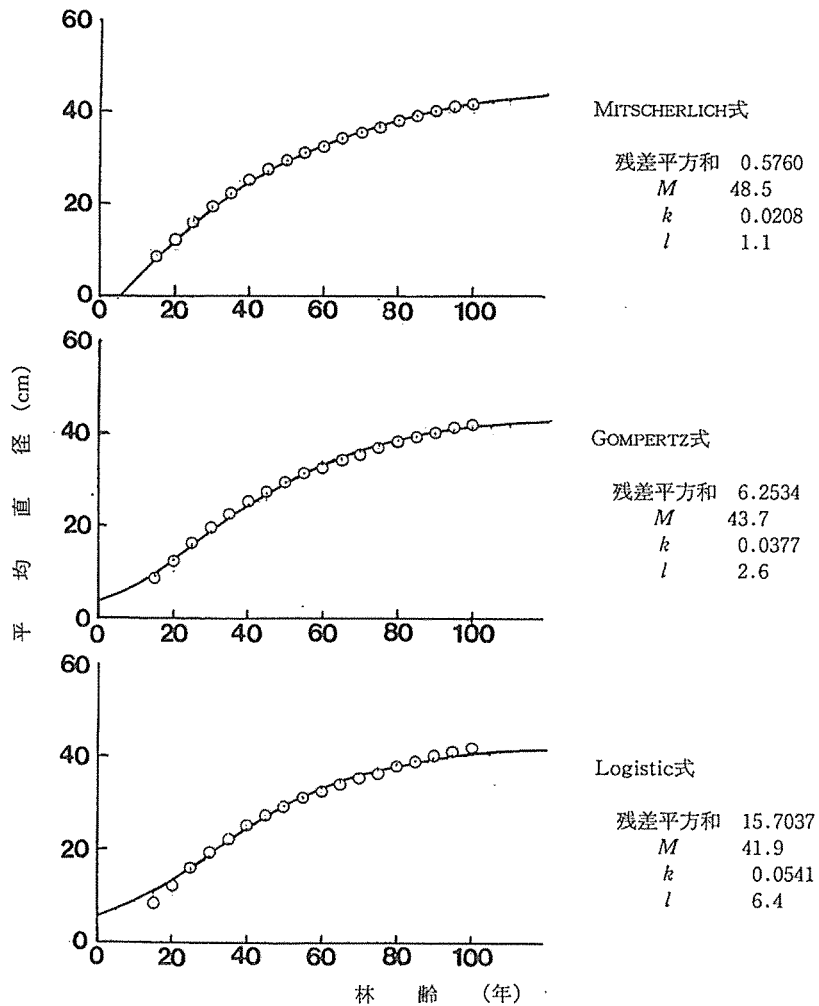


図-19. 秋田地方スギ林分収穫表 (1949) の平均直径の生長に対する 3 生長曲線のあてはめ

が成り立ち、これを積分することによって得られる平均直径の生長曲線は次式のような

$$\mu_x(\tau) = M (1 - l \exp(-k\tau)) \quad (184)$$

MITSCHERLICH曲線となる。

オーストリアの数理生物学者BERTALANFFYは、生物の生長法則として、生物の体の体積の n 乗に比例する合成速度と体積に比例した呼吸量との差を生長速度とするという提案をしているが、鈴木はこれにならって、MITSCHERLICHの生長法則について次のように述べている。『植物体の生長に寄与する光合成が体の表面積に比例するものと仮定すると、体の表面積はまた体積の $2/3$ 乗に比例するはずであるから、植物体の体積を v とするとき

$$\frac{d v}{d \tau} = \alpha v^{2/3} - \beta v \quad (185)$$

が成立すると仮定することができる。ところでさらにその植物のある部位の計測、たとえば胸高直径 x の3乗が体積に比例するという関係が成立すると仮定すれば、

$$v = k x^3 \quad (186)$$

と置くことができ、(186)式を用いて(185)式の変数を v から x に変えてみれば直径 x の生長法則として

$$\begin{aligned} \frac{d x}{d \tau} &= \frac{\beta}{3 k} \left(\frac{\alpha k^{2/3}}{\beta} - k x \right) \\ &= \frac{\beta}{3} \left(\frac{\alpha k^{-1/3}}{\beta} - x \right) \end{aligned} \quad (187)$$

を得る。これは(183)式と比較して明らかなように、MITSCHERLICHの生長法則そのものを表わしているのである。MITSCHERLICHの生長法則は(183)式に見られるように、 $x=0$ のとき最大の生長速度をもっている。この点が生長速度式として最大の難点とされているようであるが、(185)式を微分して

$$\frac{d v}{d \tau} = 3 k x^2 \frac{d x}{d \tau} \quad (188)$$

をとってみれば、 $x=0$ のときには

$$\frac{d v}{d \tau} = 0 \quad (189)$$

となるのであって、直径は最大の速度で大きくなっても体積そのものは直径のように速くは加速せず、ゆっくりした出発をするものであることがわかる。直径が急激なスタートダッシュで生長することについては、事実ほとんどの樹幹断面の年輪生長では中心部の生長間隔が最大なことによって容易に確認できるであろう。』(1979a)。

筆者は、MITSCHERLICHの生長法則に対する鈴木 of 解釈に、基本的には同意する。しかし、単木の直径生長もMITSCHERLICH式に従うという点については、筆者のモデルとは異なっている。すなわち、筆者のモデルでは、個々の林木は必ずしも平均直径の生長曲線に従う訳ではない。これは3.3節で示したように、ある時間断面における定期直径生長量の期首直径に対する回帰直線が、一般に x 切片を持つためである。BERTALANFFY流の解釈の仕方は、単木で考えるのではなく、林分レベルで考えた方がよいと考えている。

iii) MITSCHERLICH式のパラメータ l について

3種の理論的生長曲線、すなわち、MITSCHERLICH式、GOMPERTZ式、Logistic式を、直径生長にあてはめ、各曲線の適合性、妥当性を検討した研究として、末田の研究がある。末田は、代表的な陽樹であるバンクスマツ (*Pinus banksiana* Lamb.) の349個体の胸高半径生長に3種の生

長曲線をあてはめ比較したが、その結果、MITSCHERLICH式が最もよいあてはまりを示したと報告している(1980)。ここで、注意すべきことが2点ある。一つは、この研究も、単木の生長経過を解析したものであるという点である。もう一つは、陽樹を解析したという点である。

個々の林木の直径生長に、あるいは林分の平均直径の生長に、MITSCHERLICH式をあてはめた場合、同曲線が x 切片を持つことはよくあることである。つまり、多くの場合、同式のパラメータ l は1よりおおきな値をもつ。この x 切片は、時には10年前後になることもあり、その場合は林齢10年までは胸高直径が負の値をとることになるので、はなはだ不合理である。これは、植栽後、胸高に達するまでに数年を要するという解釈である程度までは説明できるが、初期生長が遅い場合にもおこりうる。よって、初期に被圧されている場合は、GOMPERTZ式などの方が残差平方和が小さいこともある。また、逆に、陽樹の場合は、初期生長が速いために、末田が報告したようにMITSCHERLICH式のあてはまりがよくなったものと考えられる。このように、どの生長曲線のあてはまりがよいかは、初期の生長のよしあしに左右されることも多い。本研究で解析の対象としているスギ植栽木の場合は、初期生長がさまたげられないように撫育されているので、一般にMITSCHERLICH式がよくあてはまると考えられる。しかし、何らかの理由で初期生長が遅れ、 x 切片の値が大きくなることもありうる。本研究の主目的は生長の予測にあり、それは壮齢期から高齢期の生長経過を表現することであるから、 x 切片の大きさについては、厳密に考えないことにした。むしろ一つの生長曲線式で、統一的に表現することの長所を尊重した。

4.4.3 直径分散の増加とGOMPERTZ式による近似

3.3節での考察によれば、平均直径がMITSCHERLICHの生長法則に従う場合は、直径分散の増加はRICHARDS生長曲線に誤差変動に関連した項を乗じた形の関数で表現することができた。そして、東京大学千葉演習林郷台1号試験地の解析結果より、誤差変動に関連した項の値は、林齢に伴い急速に一定値に近づいていくことが示された。よって、生長の初期を除けば、一般には、直径分散の増加は、RICHARDS式で近似できることになる。

ところで、RICHARDS式は、パラメータを4つ持っており、しかも曲線の変曲点の位置が任意なので、あてはめは相当に難しい。本研究で扱っている秋田営林局管内のスギ試験地の資料は、測定値が4、ないし5回で、あってもせいぜい8回までであるので、RICHARDS式をあてはめるのは無理である。郷台1号試験地の解析結果によれば、仮説5で仮定されている線形関係の傾きを1とみなすことができた。すなわち $a=1$ とみなすことができた。この場合は直径分散の増加をGOMPERTZ式で近似できる。GOMPERTZ式は、パラメータ数が3個であるから、RICHARDS式よりもあてはめが容易である。よって、本節では、直径分散の増加にGOMPERTZ式をあてはめることにした。

3.3節で示したように、直径分散の増加を表わすGOMPERTZ式のパラメータ k は、平均直径の生長を表わすMITSCHERLICH式のパラメータ k と共通であった。よって、パラメータ k に対して、われわれは2つの推定値を得ることができる。すなわち、一つは直径分散の増加にGOMPERTZ式を

あてはめたときに推定される値であり、もう一つは平均直径の生長にMITSCHERLICH式をあてはめたときに推定される値である。両者の推定値が似通っている場合は問題にはならないが、両者の値が大きく異なる場合はどちらを採用するかが問題となる。推定値の採用に際しては、曲線の形状、残差平方和および上限値が判定の基準となるであろう。とくに、上限値に関しては、平均直径の生長の場合は収穫表が参考になり、また、直径分散の増加の場合は、直径分布の変動係数が20数パーセントであるという経験則が判断基準を与える。筆者の経験によれば、GOMPERTZ式をあてはめた場合に得られるパラメータ k は大きめに推定されることが多く、またパラメータ M は小さめに推定されることが多い。よつて、作業手順としては、直径分散の増加を表わすGOMPERTZ式のパラメータ k を、平均直径の生長を表わすMITSCHERLICH式のパラメータ k の推定値に固定してあてはめることにした。つまり、直径分散の増加に対するGOMPERTZ式をあてはめでは、 M と l の2つのパラメータだけを推定することにした。なお、参考値として、パラメータ k を固定しない場合についてもあてはめを行い、その結果を比較検討した。

林齢に伴う直径分散の増加は、仮説5で仮定されている線形関係の傾き a が1のときはGOMPERTZ式で近似できたが、 $a=0$ のときはMITSCHERLICH式の2乗で近似できた。GOMPERTZ式の2乗はまたGOMPERTZ式であるので、結局、つぎのように言い換えることができる。すなわち、林齢に伴う直径分布の標準偏差の増加は、仮説5で仮定されている線形関係の傾き a が1のときはGOMPERTZ式で近似でき、 $a=0$ のときはMITSCHERLICH式で近似できる。よつて、 $0 < a < 1$ の場合は、MITSCHERLICH曲線とGOMPERTZ曲線の中間の形状を呈するRICHARDS式で近似できることになる。秋田営林局管内の資料では、個々の林木の生長経過が公表されていないので、傾き a については解析ができなかったが、林齢に伴う直径分布の標準偏差の増加を検討すれば、傾き a の傾向をある程度まで推測することが可能であろう。本節では、標準偏差の増加に対して、MITSCHERLICH曲線とGOMPERTZ曲線をあてはめ、その結果を分散の増加に対してあてはめた結果と比較検討することにした。

4.4.4 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の平均直径の生長と分散の増加

秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地、すなわち小阿仁奥山人工林A種収穫試験地第1分地(試験地番号71)、上大内沢人工林A種収穫試験地第3分地(試験地番号83)、長滝人工林A種収穫試験地第1分地(試験地番号91)、深山人工林A種収穫試験地第1分地(試験地番号171)および第2分地(試験地番号172)、そして馬場目沢人工林成績調査地第2分地(試験地番号242)の上層木の平均直径の生長と分散の増加を、図-20に示した。図の各点は、各林齢の調査結果を表わし、曲線はあてはめた生長式を表わしている。すなわち、直径生長にはMITSCHERLICH式(179)式をあてはめ、分散の増加にはGOMPERTZ式(180)式をあてはめた。

表-34は、最小2乗法によるあてはめの結果推定されたパラメータをまとめたものである。括弧の中の数値は、あてはめに際して、該当するパラメータがその数値に固定されていたことを示

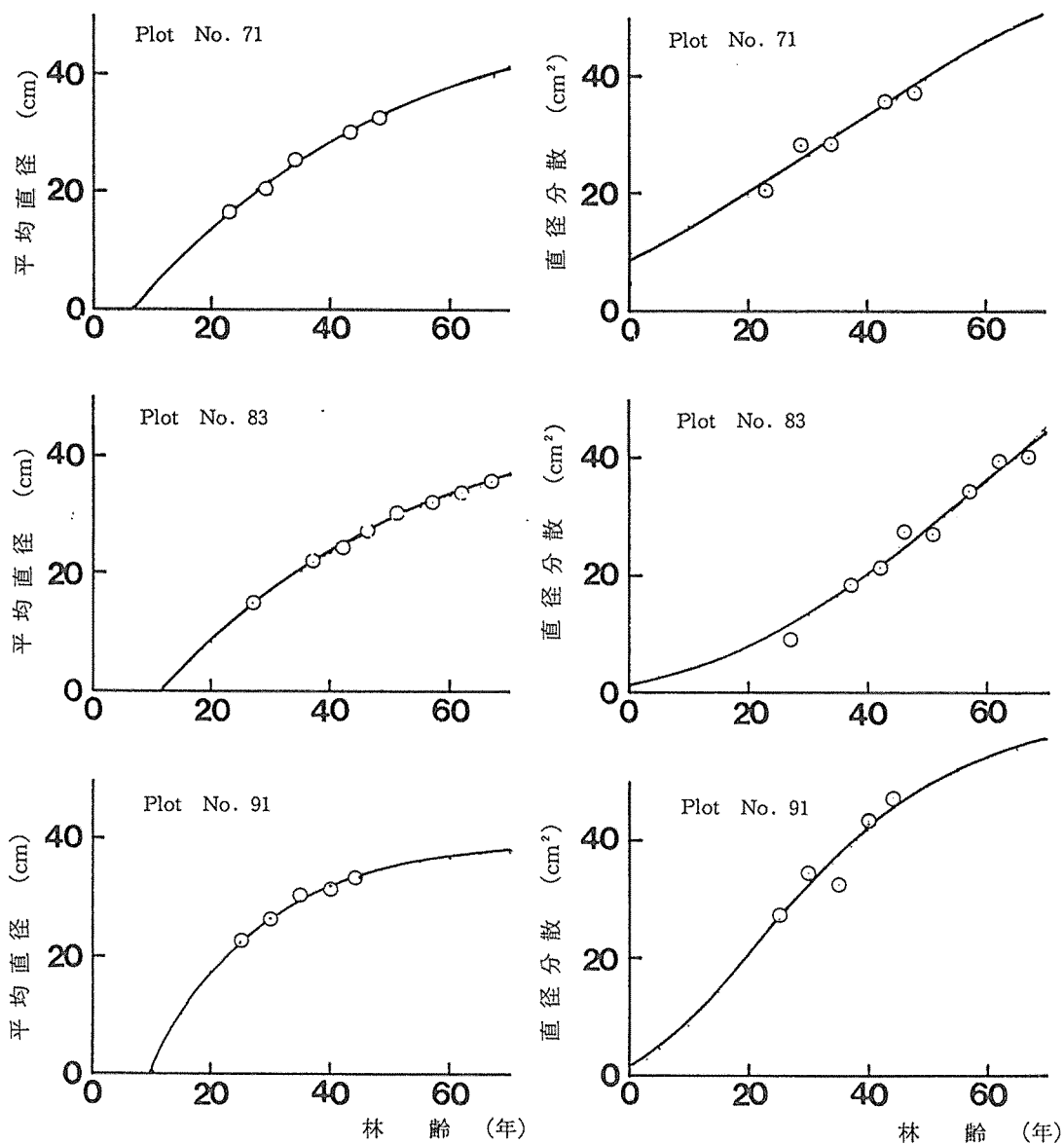


図-20-1. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の平均直径生長と直径分散の増加

曲線はあてはめた生長曲線である。平均直径の生長にはMITSCHERLICH式を、直径分散の増加にはGOMPERTZ式をあてはめた。パラメータについては、表-34を参照のこと。

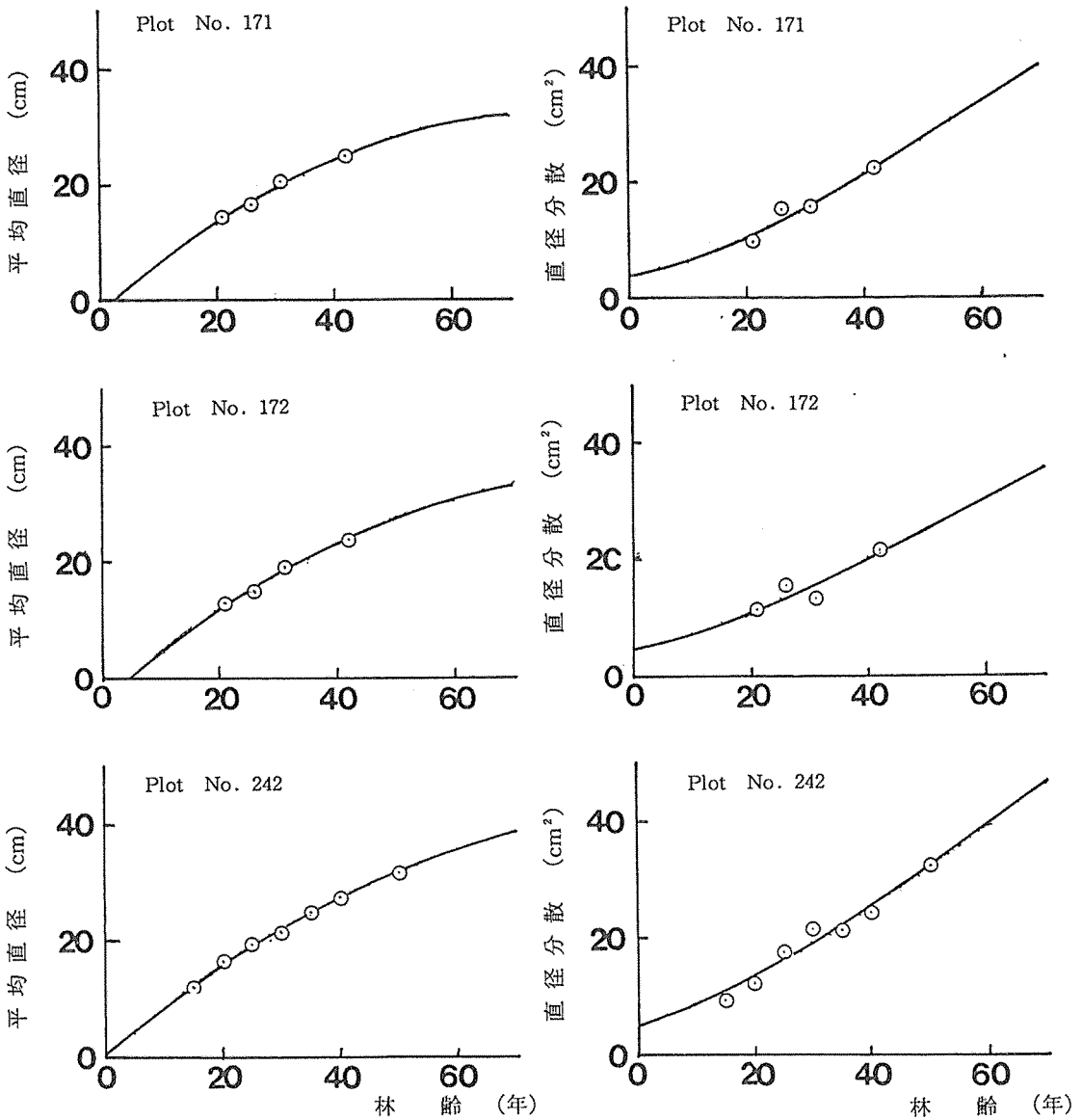


図-20-2. 秋田営林局管内スギ收穫試験6試験地における上層木の平均直径生長と直径分散の増加

曲線はあてはめた生長曲線である。平均直径の生長にはMITSCHERLICH式を、直径分散の増加にはGOMPERTZ式をあてはめた。パラメータについては、表-34を参照のこと。

表一34. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の直径生長に関するパラメータ

試験地名	試験地 番号	調査 回数	林齢 (年)	生長要素	生長曲線	パラメータ		M		残差 平方和	採 否	
						メータ 数	M	s.d.	k			l
小阿仁奥山第1	71	5	23~48	平均直径	MITSCHERLICH	3	55.6		0.0216	1.15	0.64	採
				直径分散	GOMPERTZ	2	83.64	[9.1]	(0.0216)	2.18	8.91	採
					GOMPERTZ	3	44.16	[6.6]	0.0625	3.12	5.77	
				直径標準偏差	MITSCHERLICH	3	[45.44]	6.7	0.0544	1.14	0.04	
					GOMPERTZ	2	[89.41]	9.5	(0.0216)	1.16	0.08	
					GOMPERTZ	3	[43.96]	6.6	0.0667	1.75	0.04	
上大内沢第3	83	8	27~67	平均直径	MITSCHERLICH	3	51.1		0.0220	1.28	1.10	採
				直径分散	GOMPERTZ	2	105.18	[10.3]	(0.0220)	3.97	27.47	採
					GOMPERTZ	3	56.29	[7.5]	0.0430	5.65	18.04	
				直径標準偏差	MITSCHERLICH	3	[64.57]	8.0	0.0279	1.33	0.17	
					GOMPERTZ	2	[113.24]	10.6	(0.0220)	2.11	0.35	
					GOMPERTZ	3	[53.16]	7.3	0.0468	3.11	0.18	
長滝第1	91	5	25~44	平均直径	MITSCHERLICH	3	39.2		0.0560	1.71	0.98	採
				直径分散	GOMPERTZ	2	61.15	[7.8]	(0.0560)	3.39	37.34	採
					GOMPERTZ	3	13.63	[3.7]	-0.0285	-0.36	25.22	
				直径標準偏差	MITSCHERLICH	3	[15.56]	3.9	-0.0414	-0.12	0.20	
					GOMPERTZ	2	[60.64]	7.8	(0.0560)	1.67	0.27	
					GOMPERTZ	3	[12.85]	3.6	-0.0274	-0.20	0.20	
深山第1	171	4	21~42	平均直径	MITSCHERLICH	3	45.9		0.0199	1.05	0.77	採
				直径分散	GOMPERTZ	2	86.50	[9.3]	(0.0199)	3.12	4.58	採
					GOMPERTZ	3	27.59	[5.3]	0.0696	4.25	3.22	
				直径標準偏差	MITSCHERLICH	3	[25.78]	5.1	0.0733	1.77	0.05	
					GOMPERTZ	2	[92.29]	9.6	(0.0199)	1.62	0.10	
					GOMPERTZ	3	[24.88]	5.0	0.0914	3.13	0.06	
深山第2	172	4	21~42	平均直径	MITSCHERLICH	3	49.2		0.0178	1.08	1.17	採
				直径分散	GOMPERTZ	2	81.99	[9.1]	(0.0178)	2.86	11.43	採
					GOMPERTZ	3	---	---	---	---	---	
				直径標準偏差	MITSCHERLICH	3	---	---	---	---	---	
					GOMPERTZ	2	---	---	(0.0199)	---	---	
					GOMPERTZ	3	---	---	---	---	---	
馬場目沢第2	242	7	15~50	平均直径	MITSCHERLICH	3	55.0		0.0174	1.00	1.27	採
				直径分散	GOMPERTZ	2	114.28	[10.7]	(0.0174)	3.02	16.54	採
					GOMPERTZ	3	47.30	[6.9]	0.0378	2.72	13.55	
				直径標準偏差	MITSCHERLICH	3	[52.13]	7.2	0.0263	0.84	0.18	
					GOMPERTZ	2	[123.33]	11.1	(0.0174)	1.58	0.25	
					GOMPERTZ	3	[43.60]	6.6	0.0425	1.41	0.19	

() : あてはめの際にパラメータをこの値に固定したことを示す。

[] : 推定値より計算した値。すなわち, $M s. d.$ は直径標準偏差の上限値を示し, その値は, 分散の上限値の平方根である。

--- : あてはめが困難なため, 推定値が得られなかった。

採: 図-20に表わした曲線。本研究では, 以後, この生長曲線とパラメータを採用する。

している。

あてはめは順調に修了し、長滝第1分地以外は似たような結果が得られたので、残りの5試験地についてその傾向を述べる。

平均直径の生長にMITSCHERLICH式をあてはめた結果、その上限値は、45cmから55cmの範囲にあり、これは常識的にも納得のいく値であった。パラメータ k は、0.0174から0.0220の範囲にあり、その平均は0.0197であった。直径分散の増加に、パラメータ k を固定したGOMPertz式をあてはめた結果、分散の上限値は、82cm²から114cm²の範囲にあった。また、直径生長の上限値と直径分散の上限値とから、究極の変動係数を計算したが、その値は16.4%から20.2%の範囲にあり、経験的に知っている値に近かった。

本節では、まず、平均直径の生長に3つのパラメータとも固定しないMITSCHERLICH式をあてはめ、つぎに、直径分散の増加にパラメータ k を平均直径生長の k の値に固定したGOMPertz式をあてはめるという方法を採用したが、6試験地中5試験地のパラメータを推定することができ、また、各パラメータは、各試験地を通して比較的安定しており、かつ常識的にも納得のいく値であった。

直径分散の増加に3つのパラメータとも固定しないGOMPertz式をあてはめた場合は、パラメータ k は、直径生長の k の値の2倍から3倍の大きさに推定され、それに伴い上限値は、約半分の大きさになった。なお、深山第2分地では、なかなかパラメータの収束値が得られなかったので、あてはめを放棄した。

直径標準偏差の増加へMITSCHERLICH式とGOMPertz式をあてはめた結果を、得られた曲線の形状および残差平方和について比較したが、両生長式の適合度には大差はなかった。よって、仮説5で述べている線形関係の傾き a について検討するには至らなかった。推定されたパラメータ k の値は、いずれも、直径生長の k の値よりもかなり大きかったが、これは、直径標準偏差の増加へのあてはめが、あまり実用的でないことを示していると言える。

4.5 平均樹高の生長と樹高分散の増加

4.5.1 平均樹高の生長とMITSCHERLICH式の生長法則

3.4節で提案した確率論的樹高生長モデルでは、平均樹高の生長はある生長曲線に従うと仮定した。しかし、直径生長モデルの場合でもそうであったように、平均樹高の生長曲線についてまでは言及していない。ここでも、直径生長の場合の解析と同じく、秋田地方スギ林分収獲表(林野庁1949)の主林木の平均樹高の生長に対して、MITSCHERLICH式、GOMPertz式、Logistic式の3生長式を、最小2乗法であてはめ、最もあてはまりのよい生長式を選ぶことにした。図-21に示した通り、残差平方和はMITSCHERLICH式が他の2曲線よりも著しく小さかった。よって、本研究では、平均樹高の生長にMITSCHERLICH式を用いることにした。

樹高も、直径と同様に、一次元の量である。4.4.2項で紹介した鈴木直径生長に関するBERTALANFFY流の解釈は、当然、樹高生長に対しても解釈できるはずである。南雲・佐藤は、

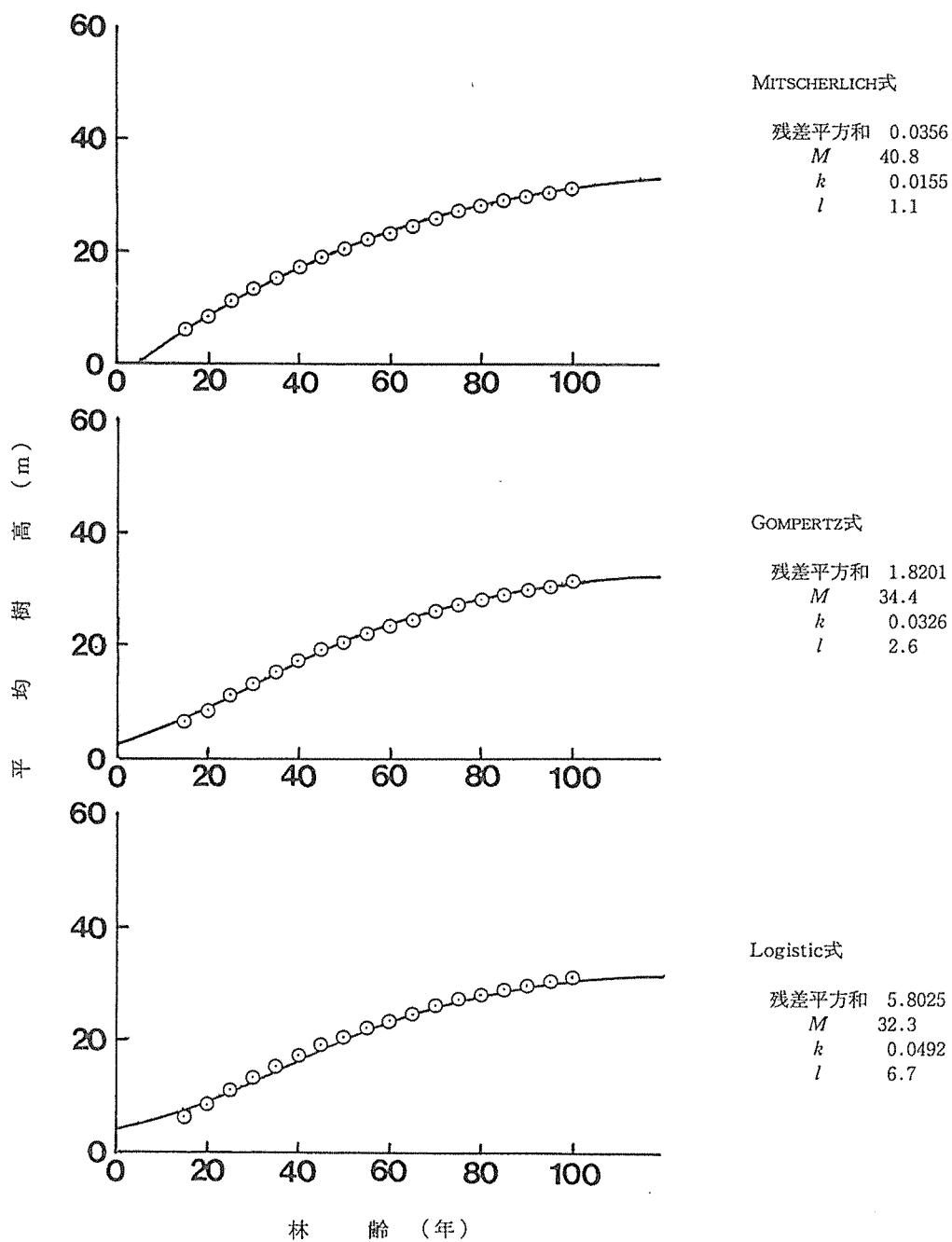


図-21. 秋田地方スギ林分収穫表(1949)の平均樹高の生長に対する3生長曲線のあてはめ

東京大学千葉演習林管内のスギ25本の樹幹解析資料を用いて、胸高直径、樹高、材積およびその立方根の生長を定差図により検討したが、その結果、林分の閉鎖が完了した後では、胸高直径、樹高および材積の立方根の生長に対して、MITSCHERLICH式による近似がきわめてよいことを報告している（1965）。

また、栗屋・神戸は、スギ人工林林分収穫表の地位決定の中心となる上層木樹高生長曲線を求めるため、各種の理論的成長曲線式を検討し、その結果、MITSCHERLICH曲線式が最良の適合を示したことを報告している（1980）。この研究に用いられた資料は、東北・北陸地方の各県ごとに平均的な密度を有する林分を150点以上調査したものである。

これらの報告例から判断しても、平均樹高の生長にMITSCHERLICH式をあてはめるのは妥当であると考えられる。

4.5.2 樹高分散の増加とMITSCHERLICH式

3.4節での考察によれば、平均樹高がMITSCHERLICHの生長法則に従う場合は、樹高分散の増加もまたMITSCHERLICHの生長法則に従うことが示された。ただし、樹高分散の増加を表わすMITSCHERLICH式のパラメータ l は1であった。すなわち、原点を通るMITSCHERLICH式であった。さらに、樹高分散の増加を表わすMITSCHERLICH式のパラメータ k は、平均樹高の生長を表わすMITSCHERLICH式のパラメータ k の2倍の大きさであった。よって、この場合も、パラメータ k に対して、われわれは2つの推定値を得ることができる。樹高生長に関しては、直径生長の場合とは異なり、平均も分散もMITSCHERLICH式で表現されるので、最小2乗法を実行する際の自由度が高い方の結果を重視することにした。すなわち、樹高分散の増加にあてはめた結果得られるパラメータを優先することにした。そして、平均樹高の生長にMITSCHERLICH式をあてはめる際には、パラメータ k を固定することにし、その値は、樹高分散の増加を表わすMITSCHERLICH式のパラメータ k の値の半分の大きさにした。なお、参考値として、パラメータ k を固定しない場合についてもあてはめを行い、その結果を比較検討した。

4.5.3 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の平均樹高の生長と分散の増加

前節での直径生長の解析と同じく、秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地について、上層木の平均樹高の生長と分散の増加を解析した。図一22において、各点は各林齢の調査結果を表わし、曲線はあてはめたMITSCHERLICH式を表わしている。

表一35は、最小2乗法によるあてはめの結果推定されたパラメータをまとめたものである。括弧の中の数値は、あてはめに際して、該当するパラメータが、その数値に固定されていたことを示している。

あてはめは、ほぼ順調に修了し、ここでも長滝第1分地以外は似たような結果が得られたので、残りの5試験地についてその傾向を述べる。

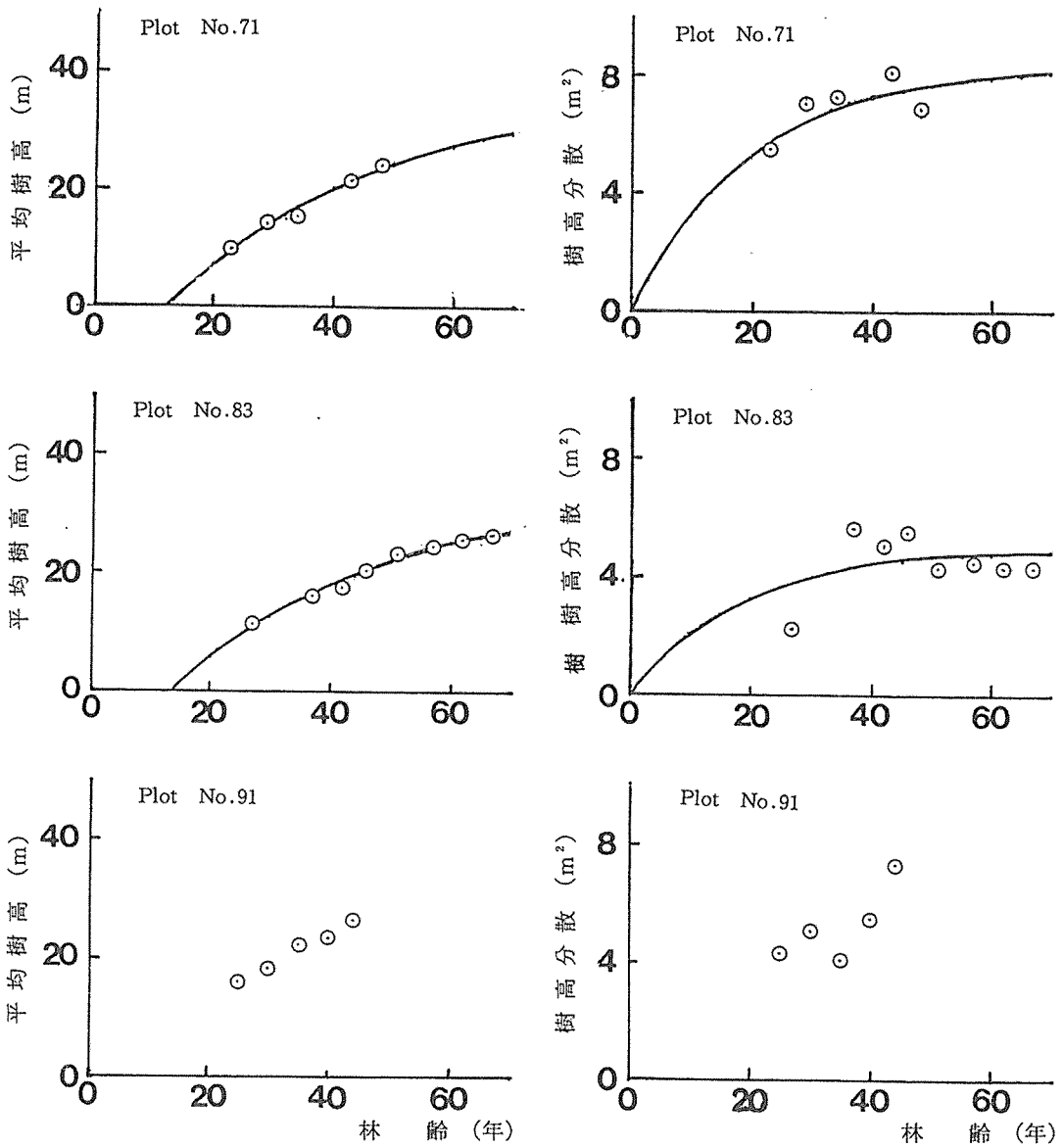


図-22-1. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の平均樹高生長と樹高分散の増加

曲線はあてはめたMITSCHERLICH曲線である。
 パラメータについては、表-35を参照のこと。

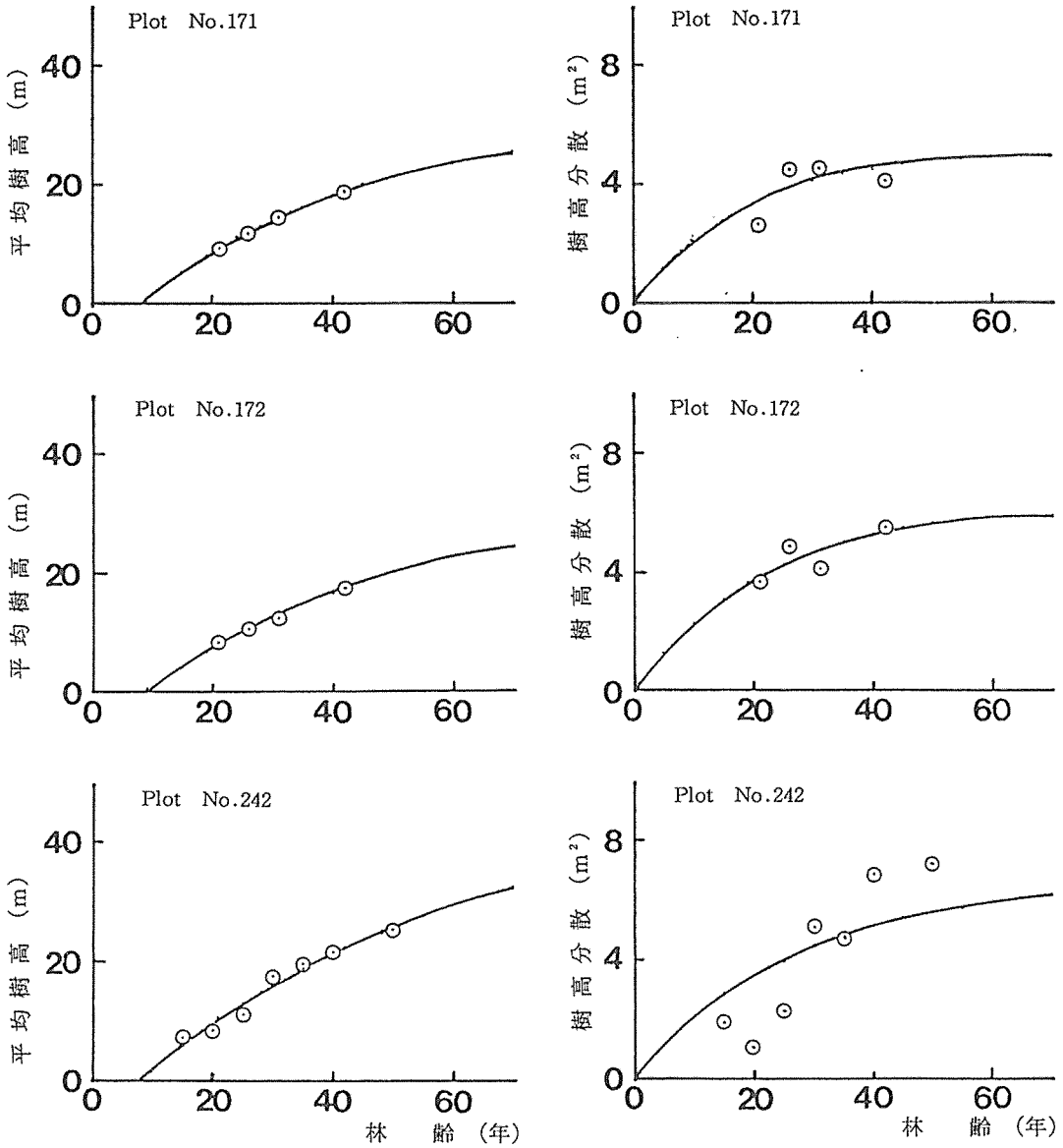


図-22-2. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の平均樹高生長と樹高分散の増加

曲線はあてはめたMITSCHERLICH曲線である。
 パラメータについては、表-35を参照のこと。

表-35. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の樹高生長に関するパラメータ

試験地名	試験地調査番号	回数	林齢(年)	生長要素	生長曲線	パラメータ数	M	k	2k	l	残差平方和	採否	直径生長のkに対する樹高生長のkの比		
小阿仁奥山第1	71	5	23~48	平均樹高	MITSCHERLICH	2	36.5	(0.0293)		1.44	2.13	採	1.36		
					MITSCHERLICH	3	178.3	0.0035		10.2	1.12				
				樹高分散	MITSCHERLICH	1	31.04	(0.0035)	(0.0070)	(1.00)	6.81				
上大内沢第3	83	8	27~67	平均樹高	MITSCHERLICH	2	34.4	(0.0281)		1.45	2.73	採	1.28		
					MITSCHERLICH	3	38.5	0.0216		1.27	2.40				
				樹高分散	MITSCHERLICH	1	5.27	(0.0216)	(0.0432)	(1.00)	5.98				
長滝第1	91	5	25~44	平均樹高	MITSCHERLICH	2	4.94	0.0281	0.0562	(1.00)	5.80	採			
					MITSCHERLICH	2	477.0	(0.0012)		1.00	1.74				
					MITSCHERLICH	3	127.3	0.0052		1.00	1.73				0.09
深山第1	171	4	21~42	樹高分散	MITSCHERLICH	1	17.32	(0.0052)	(0.0104)	(1.00)	2.94				
					MITSCHERLICH	2	64.47	0.0012	0.0024	(1.00)	2.87				
				平均樹高	MITSCHERLICH	2	31.8	(0.0269)		1.24	0.06	採			1.35
深山第2	172	4	21~42		MITSCHERLICH	3	31.2	0.0278		1.26	0.06				
				樹高分散	MITSCHERLICH	1	5.02	(0.0278)	(0.0556)	(1.00)	1.54				
					MITSCHERLICH	2	5.09	0.0269	0.0537	(1.00)	1.54	採			
馬場目沢第2	242	7	15~50	平均樹高	MITSCHERLICH	2	32.9	(0.0233)		1.23	0.21	採	1.31		
					MITSCHERLICH	3	131.2	0.0039		1.02	0.02				
				樹高分散	MITSCHERLICH	1	21.60	(0.0039)	(0.0078)	(1.00)	1.83				
馬場目沢第2	242	7	15~50		MITSCHERLICH	2	6.22	0.0233	0.0466	(1.00)	0.83	採			
					MITSCHERLICH	2	--	(---)		--	--				
				平均樹高	MITSCHERLICH	3	45.8	0.0196		1.16	9.94	採			1.13
馬場目沢第2	242	7	15~50	樹高分散	MITSCHERLICH	1	6.54	(0.0196)	(0.0392)	(1.00)	15.92	採			
					MITSCHERLICH	2	-6.31	-0.0081	-0.0161	(1.00)	5.41				

() : あてはめの際にパラメータをこの値に固定したことを示す。

--- : あてはめを行わなかった。

採 : 図-22に表わした曲線。本研究では、以後、この生長曲線とパラメータを採用する。

樹高分散の増加に、原点を通るMITSCHERLICH式をあてはめた結果、その上限値は、 4.9m^2 から 8.2m^2 の範囲にあった。ただし、馬場目沢第2分地では、あてはまった曲線が下に凸な形状を示し、その結果、上限値のかわりに下限値が推定された。パラメータ k は、 0.0233 から 0.0296 の範囲にあり、いずれの試験地においても、直径生長の値より若干大きかった。

平均樹高の生長に、パラメータ k を樹高分散の k の値に固定したMITSCHERLICH式をあてはめた結果、上限値は 31.8m から 36.5m となり、常識的にも納得のいく数値であった。また、3つのパラメータを固定しないMITSCHERLICH式をあてはめたところ、上大内沢第3分地と深山第1分地とでは、パラメータ k を固定した場合の数値とよく似た推定値を得た。また、馬場目沢第2分地でも、常識的に理解できる推定値を得た。しかし、小阿仁奥山第1分地、長滝第1分地および深山第2分地では、上限値は、 100m 以上にもなるという極端に大きな値に推定された。この3林分は、いずれも調査回数は4ないし5回しかなかった。今回のようにデータ数が少ない場合には、平均樹高の生長に対して、3つのパラメータを固定しないMITSCHERLICH式をあてはめるのは、直径生長へのあてはめの場合よりも難しいようである。

5試験地のパラメータ k の平均は、 0.0254 であった。直径生長の k の値に対する樹高生長の k の値の比は、 1.13 から 1.36 の範囲にあり、その相乗平均は 1.28 であった。樹高生長の k の値が直径生長の k の値よりも若干大きいという事実は、一般によく認められる傾向である。

また、樹高生長の上限値と樹高分散の上限値とから、究極の変動係数を計算したが、 5.6% から 7.8% の範囲にあった。樹高分布の変動係数は、林齢に伴い単調減少する傾向にあるようだが、これらの数値は、究極の値として妥当であると考えられる。

本節では、まず、樹高分散の増加に原点を通るMITSCHERLICH式をあてはめ、つぎに、平均樹高の生長に、パラメータ k を樹高分散増加の k の値の半分の大きさに固定したMITSCHERLICH式をあてはめた。この方法により、6試験地中、4試験地のパラメータを推定することができた。各パラメータは、各試験地を通して比較的安定しており、かつ常識的にも理解できる値であった。

4.6 林齢に伴う直径と樹高との相関係数の変化

3.5節では、直径生長の誤差変動量と樹高生長の誤差変動量との相関係数を解析し、その結果に基づいて、直径生長量と樹高生長量に関するモデルを構築した。このモデルによれば、直径と樹高の相関係数は、林齢に伴い減少していくことが示された。しかし、相関係数の減少を具体的に記述する関数を誘導するにはいたっていない。また、現実の林分の直径と樹高の相関係数の経時変化については、ほとんど報告されていないようである。本節では、秋田営林局管内のスギ収穫試験地6林分について、直径と樹高との相関係数の経時変化を解析する。

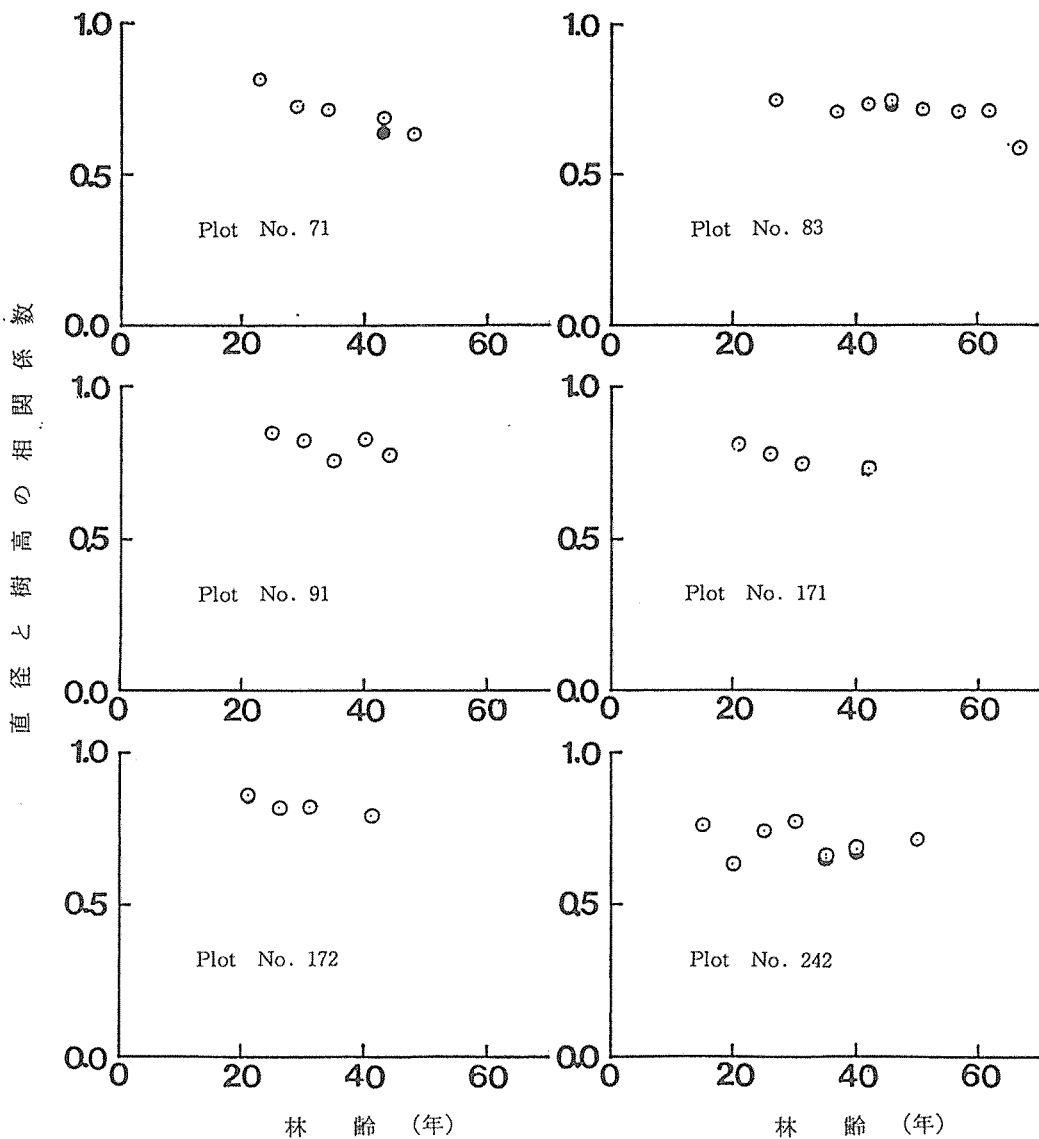


図-23. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の直径と樹高の相関係数の経時変化
 黒丸は間伐直後の値を示す。

4.6.1 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の直径と樹高の相関係数の経時変化

図-23に、6試験地における上層木の直径と樹高の相関係数の林齢に伴う変化を示した。ここで上層木は4.2節以降で用いている定義と同じである。白丸は各林齢の値を示し、黒丸は間伐直後の値を示している。小阿仁奥山第1分地(試験地番号71)では、相関係数は、間伐の影響を相当敏感に受けている。相関係数が直径分布および樹高分布と密接な関係があることを考えれば、これは当然のことである。間伐がない場合は、相関係数はやや減少傾向にあるものの、比較的よく安定している。表-36は、各林齢における直径と樹高の相関係数が、同一林分内では一定であるという帰無仮説を χ^2 検定をした結果である。検定方法は、3.5節で用いた方法と同じである。すなわち、 z 変換をしてから χ^2 検定をした。小阿仁奥山第1分地(試験地番号71)と馬場目沢第2分地(試験地番号242)とでは、仮説は有意水準1%で棄却されたが、他の試験地では、有意水準5%で各林齢の相関係数は共通であるとみなせた。共通とみなされる相関係数の推定値は、試験地により若干異なったが、0.715から0.824の範囲にあった。

4.6.2 直径と樹高の相関係数の経時変化に関する考察

直径と樹高の相関係数は、直径分布および樹高分布の形状に大きく左右される。とくに、間伐によって、その前後で著しく変化する場合がある。したがって、材木の生長そのものに基づく直径と樹高の相関係数やその経時変化を推定するのは相当困難である。本研究では、上層木について解析したが、ここで用いている上層木の定義が、樹高分布の情報のみに基づくものであることを考えれば、ここで言う上層木の相関係数が、本来の上層木の相関係数よりも小さくなる傾向があることは容易に察せられる。たとえば、上大内沢試験地の林齢37年、67年の値、長滝試験地の林齢35年の値、馬場目沢試験地の林齢20年の値がそうであろう。ちなみに、馬場目沢試験地の林齢20年の値を用いずに検定したところ、仮説は棄却されなかった。だからといって、全立木について直径と樹高の相関係数を求めれば、今度は、劣勢木が含まれるため、相関係数は過大に評価されるであろう。

相関係数を推定する上での、こうした困難さを考慮に入れれば、今回の結果を以下のようにまとめることができる。すなわち、同一林分において、直径と樹高の相関係数は、林齢に伴い減少する傾向にあるが、その変化量はごくわずかであり、一般には、相当に安定したものである。よって、実用上は、これを一定として取り扱っても差し支えない。秋田営林局管内のスギ収穫試験地の場合、その値は、試験地によって異なったが、0.8前後であった。

なお、筆者は、既に、林齢に伴う全立木の直径と樹高の相関係数の変化について報告している(1981)。これは、本研究と同じ秋田営林局管内のスギ収穫試験地の資料から、3回以上にわたって継続的に測定されている無間伐な林分38林分を、本研究と同じ手法で解析したものである。その当時は、まだ、上層木概念を導入していなかったため、全林木を対象に考察したのであるが、その結果、以下のような結論を得た。『無間伐林分の胸高直径と樹高の相関係数は、秋田スギの

表一36. 上層木の直径と樹高の相関係数が同一林分内で共通であるという仮説の検定と、共通の相関係数の推定

試 験 地 名	小阿仁奥山第1		上六内沢第3		長滝第1		深山第1		深山第2		馬場目沢第2														
	林齢 (年)	材木 数	林齢 (年)	材木 数	林齢 (年)	材木 数	林齢 (年)	材木 数	林齢 (年)	材木 数	林齢 (年)	材木 数													
調査項目	相関 係数	z	相関 係数	z	相関 係数	z	相関 係数	z	相関 係数	z	相関 係数	z													
調査結果	23	252	0.824	1.169	27	166	0.748	0.968	25	199	0.846	1.242	21	261	0.809	1.124	21	214	0.857	1.282	15	314	0.758	0.992	
	29	223	0.729	0.927	37	150	0.711	0.889	30	193	0.825	1.172	26	257	0.776	-1.035	26	214	0.818	1.151	20	290	0.629	0.740	
	34	193	0.722	0.912	42	151	0.741	0.953	35	157	0.762	1.001	31	226	0.747	0.956	31	177	0.820	1.157	25	293	0.738	0.946	
	43	165	0.688	0.844	46	149	0.745	0.962	40	166	0.829	1.185	42	195	0.732	0.933	42	174	0.789	1.069	30	281	0.767	1.013	
	48	143	0.638	0.755	51	126	0.718	0.904	44	149	0.778	1.040									35	230	0.664	0.800	
					57	126	0.710	0.887														40	199	0.676	0.822
					62	126	0.711	0.889														50	157	0.711	0.889
					67	121	0.593	0.682																	
材木数の総和		976				1115				864				939					779				1764		
重みの総和		961				1091				849				927					767				1743		
加重した z の総和		910.636				990.093				965.321				947.563					897.342				1556.220		
加重した z^2 の総和		882.412				887.833				1104.563				973.534					1054.339				1406.996		
加重した z の平均値		0.948				0.898				1.137				1.022					1.170				0.893		
χ^2 の値		19.501**				7.372				6.994				4.952					4.504				17.541**		
自由度		4				7				4				3					3				6		
共通の相関係数		(0.739)				0.715				0.813				0.771					0.824				(0.713)		

* 5%水準で有意, 1%水準で高度に有意。

() 内の数値は, 単に計算したものである。 χ^2 検定の結果によれば, 共通の相関係数を持つているとは言いきらなかった。

場合、同一林分内では林齢に関係なくほぼ一定で、その値も、林分ごとに若干の差があるものの、大体0.8から0.9の範囲内であって、地位による違いはとくに認められないことがわかった。そして、間伐後10年以上たった林分についてもほぼ同じ傾向にあるといえる。このことは、二次元林分遷移の方程式を解く場合、少なくとも秋田スギに関しては、直径と樹高の相関係数を林齢に関係なく一定であるとして取り扱えることを示している。しかも、その値は0.8から0.9の狭い範囲に集中しており、事実上は0.85として計算してもさしつかえないものと思われる。』全林木についての解析結果であるので、劣勢木を含む場合もあり、相関係数は過大に推定されていると考えられるが、本節の研究結果と同様、直径と樹高の相関係数が林齢にかかわらず比較的安定していることが示されている。

4.7 立木本数減少

上層木の本数は、林齢とともに減少していく。図-24に、秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地の例を示した。図の白丸は、各林齢における上層木のヘクタール当たりの本数密度を表わしており、黒丸は、間伐直後の密度を表わしている。生長の途中で本数密度が増加するという不自然な現象が生じているが、これは、上層木が各林齢ごとに機械的に定義されたためである。ここでも、前節と同様、上層木を定義することの難しさが表われている。

本数減少の機構が、まだ明らかでないので、本節では、単位時間内に林木が上層木集団から脱落する事象がランダムに生起すると考え、その確率を一定と置くことにした。すなわち、上層木集団から脱落する確率を、時間間隔に比例し、また、対象となる林木の本数に比例すると仮定した。この場合、本数減少は指数減少曲線

$$N(\tau) = N_0 \exp(-k_n \tau) \quad (190)$$

で表わされることになる。ここで、 N_0 、 k_n はパラメータである。

図の曲線は、間伐（除伐も含む）実行後つぎの間伐が実施されるまでの期間の本数減少に指数減少曲線をあてはめたものである。各試験地とも、指数減少曲線は比較的よい適合を示しており、この結果から、事実上は、上層木の本数減少を指数減少曲線で近似して差支えないと判断した。指数減少曲線の係数 k_n は、0.0030から0.0218の範囲にあり、0.013前後の値が多かった。すなわち、年減少率は約1.3%であった。

3.3節で述べたように、今回のモデルは、自己間引きをしている林分を対象としていない。自己間引き現象が生じている林分では、種内競争が絶えず存在し、その結果引き起こされる本数減少は、他の生長因子と密接な関係を持っていると推察される。このような林分では、本数減少を表わすモデルは、他の生長モデルとともに、一つのシステムとなっていないと見なされる。

ところで、今回想定しているモデルが対象とするのは、各上層木が十分な生育空間を持ち、お互いに被圧されることもない林分である。よって、種内競争の影響は、無視できるほどに小さい。このような林分は、一般に、十分によく撫育されている林分に見ることができる。そこでは、除・間伐が計画的に実施され、各林木はその持てる生長力を十分に発揮できるように管理されている。

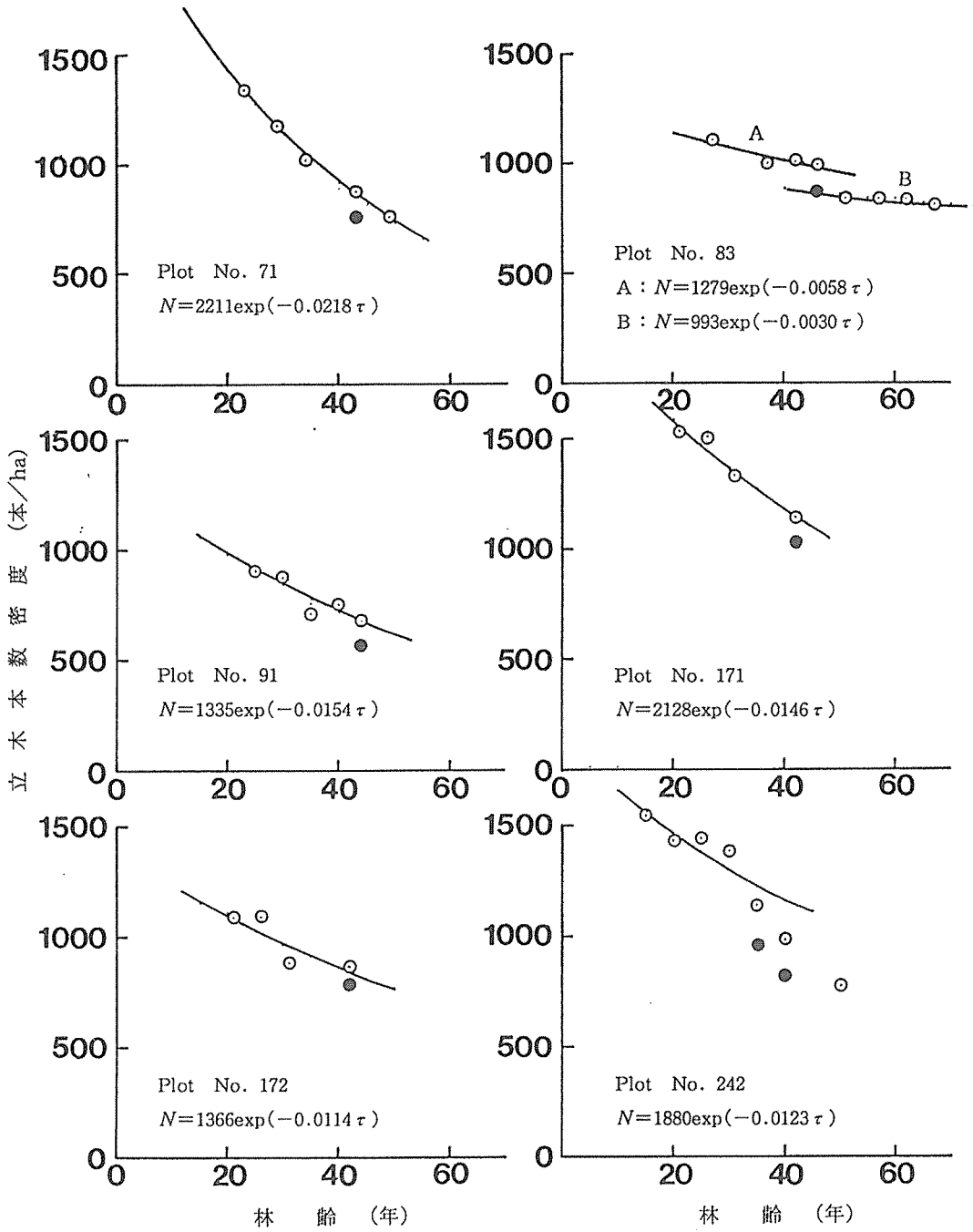


図-24. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における上層木の立木本数密度の減少
黒丸は間伐直後の値を示す。

森林経営における収穫予測では、むしろ、このような林分を対象とするモデルが必要である。こうした林分では、本数減少に最大の影響を及ぼすのは、除・間伐であり、その時期と率は、あらかじめ計画により定まっている。よって、本数減少と他の生長モデルとの関係は、自己間引き林分のときよりも緩やかである。本論文では、こうした考えにより、本数減少は、基本的には、除・間伐により人為的に行われるとし、間伐と間伐との間の本数減少は、偶然事象によって引き起こされるものとした。

4.8 平均直径生長と平均樹高生長の関係

二次元分布の中心の軌跡

4.8.1 二次元分布の基底平面に平行な切断面

2章で述べたように、BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の基本解は、次式のような二次元正規分布になる。

$$\phi_0(\tau; x, y) = \frac{e^{-\int \gamma(\tau) d\tau}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}Q(x, y)}$$

ただし、

$$Q(x, y) = \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}$$

である。ここでは x, y はそれぞれ直径、樹高を表わし、 $\mu_x, \sigma_x^2, \mu_y, \sigma_y^2, \rho$ および γ は、林齢 τ のみの関数で、それぞれ、平均直径、直径分散、平均樹高、樹高分散、直径と樹高の相関係数および枯死の確率を示している。

この二次元正規分布は、ある林齢 τ に、直径 x 、樹高が y である林木の本数を表わすものである。これを、基底平面に平行に切断すれば、その切断面は、 $\rho \neq \pm 1$ のときは、(191) 式で表わされるような楕円となる。

$$\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} = \text{const} \quad (191)$$

この楕円は、林齢に伴い、拡大または縮小しながら、回転を伴って、移動していく。この遷移の様子は、楕円の中心の軌跡および楕円の主軸の回転によって特徴づけられる。ここで、楕円の中心とは、二次元正規分布の中心であり、その座標は (μ_x, μ_y) である。この節では、まず、中心の軌跡、すなわち、平均胸高直径生長と平均樹高生長の関係について考察する。

4.8.2 中心の軌跡を表わす理論式

いま、平均胸高直径の生長が (192) 式、平均樹高の生長が (193) 式で表わされるような

MITSCHERLICH曲線式

$$\mu_x(\tau) = M_x (1 - l_x \exp(-k_x \tau)) \quad (192)$$

$$\mu_y(\tau) = M_y (1 - l_y \exp(-k_y \tau)) \quad (193)$$

に従うと仮定すれば、中心の軌跡は

$$\mu_y = M_y \left[1 - l_y \left\{ \frac{1}{l_x} \left(1 - \frac{\mu_x}{M_x} \right) \right\}^{\frac{k_y}{k_x}} \right] \quad (194)$$

となる。ここで、 $k_y > k_x$ のときは上に凸な単調増加曲線となり、 $k_y = k_x$ のときは直線、 $k_y < k_x$ のときは下に凸な単調増加曲線となる。なお、この曲線は、末田らが誘導した理論的樹高曲線(1974)と、数字的な表現において同じものである。

4.8.3 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における中心の軌跡

4.5節で説明したように、秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地の場合、長滝第1試験地(試験地番号91)を除くと、いずれも樹高生長のパラメータ k_y は直径生長のパラメータ k_x よりも若干大きく、約1.3倍の大きさであった(表-35)。よって、中心の軌跡は、上の凸な単調増加曲線となるはずである。図-25に、6試験地の中心の軌跡と理論曲線(194)式を示した。図を眺めた印象では、6試験地とも、中心の軌跡を直線で近似できそうである。そこで、中心の軌跡に二次曲線式を回帰し、その直線性を検定した。すなわち、二次曲線式のゼロ次、一次、二次の各成分について不偏分散を求め、分散分析表を作成し、二次成分について有意性を検定した(森口1957)。もし仮りに、二次成分が有意でなかったら、一次式ですませてよいことになる。なお、有意水準として5%を用いた。その結果を表-37にまとめた。長滝第1試験地は二次成分が有意となり、下に凸な二次曲線と判定されたが、他の5試験地は、いずれも直線式ですませてよいと判定された。このように、中心の軌跡は理論的には上に凸な単調増加曲線になるが、現実的にはほとんど直線であるとみなすことができた。

また、中心の軌跡が、直径・樹高平面内の極めて限られた場所に集中していることが観察された。図-26は、6試験地の中心の軌跡を一枚の図に表わしたものである。各試験地の軌跡は、形状比(樹高÷直径)60の近傍で互いに重なり合っており、これを一つの直線式で表わすことも可能くらいである。この結果から、同一地域に存在する同一樹種が同じような施業を受けている場合は、中心の軌跡が共通であることが推察される。もし、そうであるならば、二次元林分遷移の方程式を用いて生長予測を行う場合、中心の軌跡の予測に際して、既存の資料を有効に活用することができる。すなわち、同一地域に存在する同一樹種について、あらかじめ中心の軌跡を表わす曲線を作成しておけばよい。その場合、曲線は、実用的には直線式で十分であろう。なぜならば、たとえ理論的には上に凸な単調増加曲線になるとしても、現実には、それはかなり直線的であり、また、直線の軌跡は、平均直径と平均樹高との関係であって、両者とも上限値を持つから、中心の軌跡は、常識的には、点(50, 40)の近傍の点に収束してしまい、将来、中心の軌跡

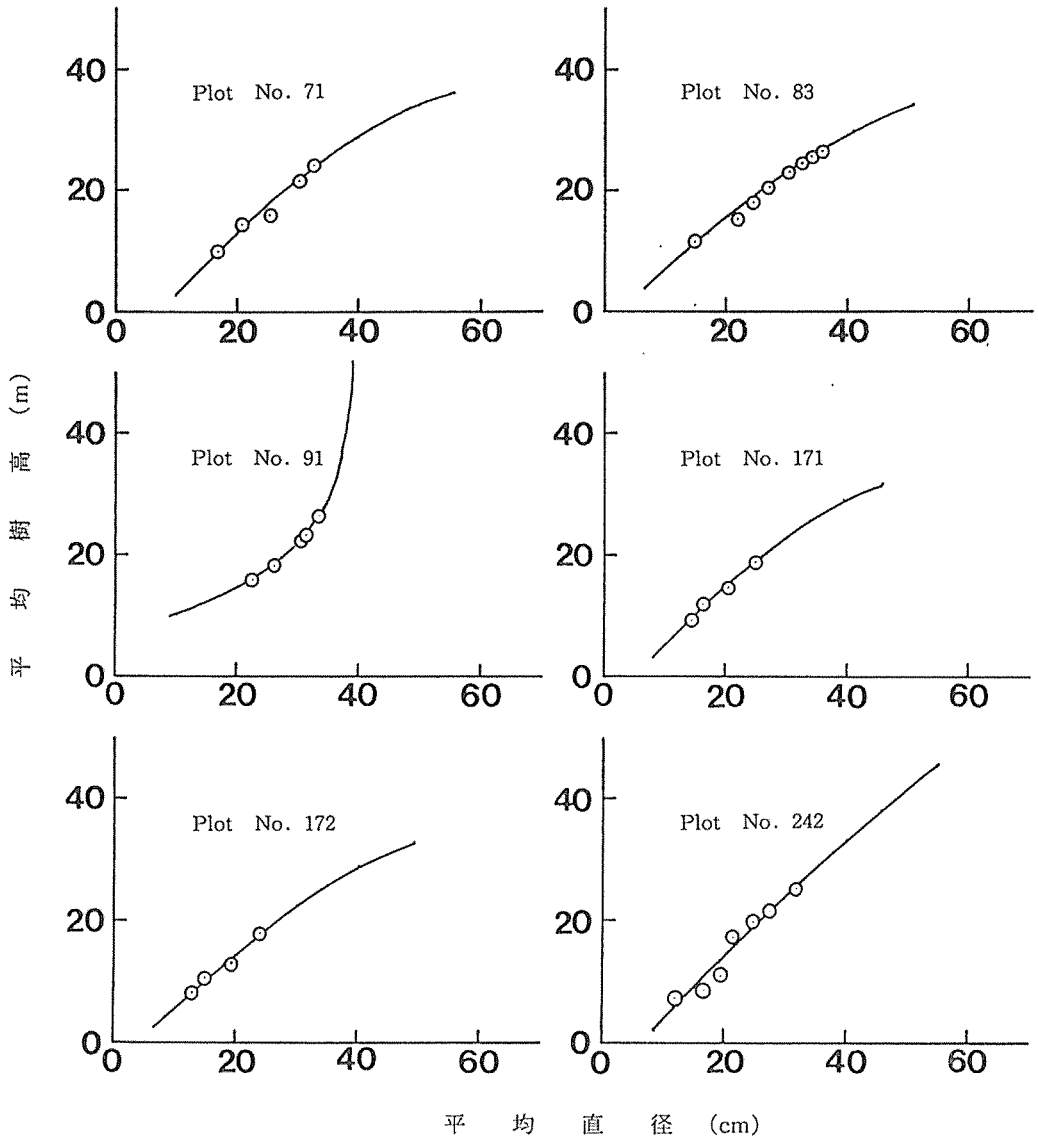


図-25. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地の中心の軌跡 (各試験地別)

曲線は理論式 (194) 式である。

表-37-1. 中心の軌跡の直線性の検定

試験地：小阿仁奥山第1		回帰曲線： $Y=4.235+0.127X+0.015X^2$		
分散分析表				
要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
回帰0次	1480.267	1	1480.267	
回帰1次	126.428	1	126.428	94.702*
回帰2次	0.716	1	0.716	0.536
残 差	2.670	2	1.335	
計	1610.081	5		

試験地：上大内沢第3		回帰曲線： $Y=0.972+0.678X+0.001X^2$		
分散分析表				
要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
回帰0次	3470.903	1	3470.903	
回帰1次	191.805	1	191.805	1100.298**
回帰2次	0.025	1	0.025	0.141
残 差	0.872	5	0.174	
計	3663.604	8		

試験地：長滝第1		回帰曲線： $Y=27.463-1.496X+0.044X^2$		
分散分析表				
要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
回帰0次	2276.978	1	2276.978	
回帰1次	70.026	1	70.026	1862.337**
回帰2次	1.278	1	1.278	33.982*
残 差	0.075	2	0.038	
計	2348.357			

二次曲線式の回帰と、分散分析による二次成分の検定。

Yは平均樹高，Xは平均直径を表わしている。

*：5%水準で有意，**：1%水準で高度に有意。

表-37-2. 中心の軌跡の直線性の検定

試験地：深山第1		回帰曲線： $Y = -4.809 + 1.063X - 0.005X^2$		
分散分析表				
要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
回帰0次	761.512	1	761.512	
回帰1次	49.838	1	49.838	192.832**
回帰2次	0.011	1	0.011	0.044
残差	0.258	1	0.258	
計	811.620	4		

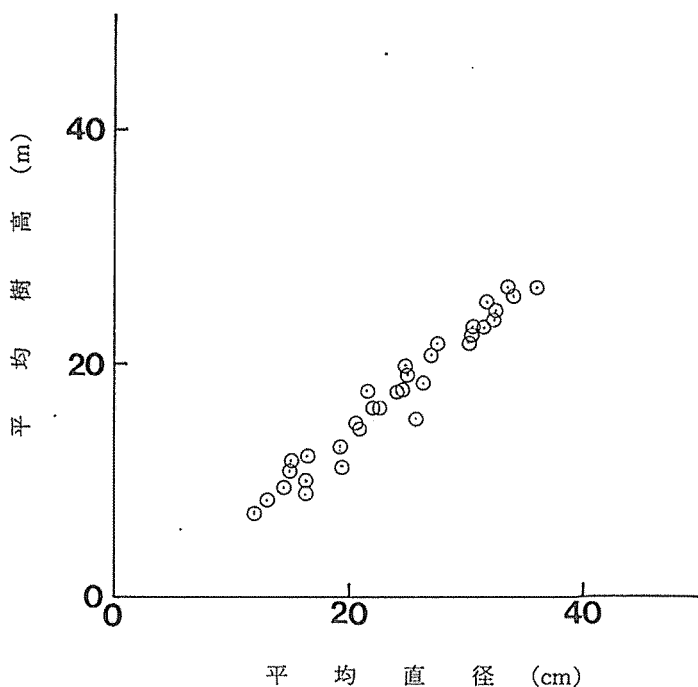
試験地：深山第2		回帰曲線： $Y = 4.243 + 0.077X + 0.020X^2$		
分散分析表				
要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
回帰0次	621.654	1	621.654	
回帰1次	48.989	1	48.989	47.951*
回帰2次	0.256	1	0.256	0.250
残差	1.022	1	1.022	
計	671.921	4		

試験地：馬場目沢第2		回帰曲線： $Y = -4.997 + 0.885X + 0.003X^2$		
分散分析表				
要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
回帰0次	1767.508	1	1767.508	
回帰1次	273.451	1	273.451	65.311*
回帰2次	0.080	1	0.080	0.019
残差	16.748	4	4.187	
計	2057.786	7		

二次曲線式の回帰と、分散分析による二次成分の検定。

Yは平均樹高、Xは平均直径を表わしている。

*：5%水準で有意，**：1%水準で高度に有意。



図一26. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地の中心の軌跡（全体）

が大きくカーブを描くということは、ありえないからである。たとえば、長滝第1試験地（試験地番号91）では、理論曲線が不自然な形をしているが、このような場合は、むしろ共通の中心の軌跡を用いて生長を予測した方が、より適切であろう。

4.8.4 東京大学千葉演習林固定標準地における中心の軌跡

東京大学農学部附属千葉演習林管内の固定標準値のうち、竹内らによって整理された8箇所の試験地の生長記録（1975）を用いた。すなわち、郷台1号、同2号、大平1号、同2号、安野1号、同2号、南沢3号及び牛ぼう沢の8試験地である。このうち、大平1号、同2号はヒノキ林で、他はスギ林である。これらの試験地は、必ずしも平坦地に位置している訳でもなく、また、直径は毎木測定してあるものの、樹高は標準木についてしか測定されていないので上層木の中心の軌跡を解析するには不十分であるが、測定期間も約60年と長く、また測定回数も10回前後と多いので、参考にした。

これらの8試験地における中心の軌跡は、いずれの場合にも、直線であると判定された。試験地の地位が上または中であつたので、地位が比較的よいために、結果が直線的になったものと考えられる。なお、中心の軌跡は、この場合も、形状比50から90の範囲にあつた。

4.8.5 全国の主要収穫表における中心の軌跡

収穫表の値を用いて、中心の軌跡の傾向を推察してみよう。収穫表の数値は主林木に関するもので、ここでいう上層木とは若干異なるが、参考にはなる。

用いた収穫表は、『森林家必携』(本多 1975)に記載してある全国の主要な収穫表であり、その内訳は、スギが11地方、ヒノキが10地方、アカマツが7地方、カラマツが2地方、トドマツ、エゾマツが各1地方である。

グラフの横軸に主林木平均胸高直径を、縦軸に主林木平均樹高をとり、この直径・樹高平面に、各林齢の値を各収穫表の各地位ごとに記し、それらの点に、二次曲線式を回帰し、分散分析表を作成して、二次成分の有意性を検定した(森口 1957)。有意水準として5%を用いた。この判定基準によって、中心の軌跡を上凸二次曲線、直線、下凸二次曲線の3種類に分類した。

表-38は、その結果をまとめたものである。中心の軌跡が、上に凸な単調増加曲線を示すものは全体の約70%と多く、下に凸なものは約15%、直線とみなされるものは約15%であった。よって、この結果をMITSCHERLICH式のパラメータ k を用いて表現すれば、収穫表のうち約70%のものは、樹高の k_y が直径の k_x よりも大きいということになる。地位の上、中、下いずれの場合でも下に凸な軌跡を描く収穫表は、秋田スギ、山形スギ、富士箱根ヒノキしかなかった。地位が悪くなるにつれて、下に凸な曲線から上に凸な曲線へと変化していく傾向が、愛知・岐阜スギ、中国ヒノキ、紀州ヒノキ、木曾ヒノキ、関東ヒノキ、中国内海アカマツの収穫表に認められた。これは、地位が悪いくところほど、樹高生長の頭打ちが直径生長のそれよりも早く表われる結果であると解釈できる。しかし、逆に、地位が悪くなるにつれて、上に凸な曲線から下に凸な曲線もしくは直線に変化するものもあり、それは、熊本スギ、紀州スギ、信州カラマツの収穫表であった。

また、収穫表における中心の軌跡が、ある限られた範囲内をたどることも観察された。すなわち、中心の軌跡は、概して、形状比が50から100の範囲にあった。そして、地位が悪いくところほど、形状比が若干低くなる傾向も見られた。

収穫表の数値は、既に何らかの関数関係によって表現されているものであるが、その数値そのものは、その地方の特色を十分示しているものと考えられる。多数の収穫表について検討した今回の結果は、収穫表調製法の違いをこえて、同齢単純林の生長傾向を表わしているとみなすことができよう。

4.8.6 中心の軌跡に関する研究報告例

柿原らは、九州大学農学部附属粕屋演習林および宮崎演習林におけるスギ林分の調査プロット91個を、相対幹距の大きさによって3群に区分し、それぞれから10プロットずつ機械的に抽出して、平均直径と平均樹高の関係を検討した結果、両者の間に一次の回帰式が成立すると報告している(1976)。柿原らによれば、『相対幹距の大きいものは地位下のプロット、小さいものは地位上のプロットが多い』(1976)とのことであり、報告されている一次回帰式では、相対幹距が小さい所のものほど形状比が大きくなっていった。これらの回帰式は、全体としてみれば、形状比50から100の範囲内であった。

白石は、林野庁収穫表標準地(林野庁1952~1964)のうち、スギ約1,000林分の資料を利用して、平均胸高直径、平均樹高、ha当たり立木本数および平均幹材積の相互関係を検討したが、

表一38. 収穫量における主林木平均直径生長と主林木平均樹高生長の関係

	スギ	ヒノキ	アカマツ	カラマツ	その他
上に凸な 単調増加 曲線	紀 州(上)	土 佐(上)	中国内海(下)	信 州(特I)	トドマツ
	" (中)	" (中)	広島県中南部(上)	" (I)	小樽内川(上)
	土 佐(上)	" (下)	" (中)	北 海 道 (I)	" (中)
	" (中)	中 国(下)	" (下)	" (II)	" (下)
	" (下)	紀 州(中)	四国内海(上)	" (III)	
	愛知岐阜(中)	" (下)	" (中)	" (IV)	エゾマツ
	" (下)	木 曾(下)	" (下)	" (V)	北見国野上(上)
	天 城(上)	関 東(中)	長野新潟(上)	" (VI)	" (中)
	" (中)	" (下)	" (中)	" (VII)	" (下)
	" (下)	大井天竜(上)	" (下)		
	北関東阿武隈(上)	" (中)	磐 城(上)		
	" (中)	" (下)	" (中)		
	" (下)	尾 鷲(上)	" (下)		
	茨 城(上)	" (中)	近 畿(上)		
	" (中)	" (下)	" (中)		
	" (下)	四国内海(上)	" (下)		
	宮 城(上)	" (中)	岩 手(上)		
" (中)	" (下)	" (中)			
" (下)	" (下)	" (下)			
直線	熊 本(上)	中 国(中)	四国内海(上)	信 州 (II)	
	越後会津(上)	紀 州(上)	" (中)	" (III)	
	" (中)	天 城(上)		" (IV)	
	" (下)	" (中)			
		" (下)			
		関 東(上)			
下に凸な 単調増加 曲線	熊 本(中)	中 国(上)			
	" (下)	富士箱根(上)			
	紀 州(下)	" (中)			
	愛知岐阜(上)	" (下)			
	秋 田(上)	木 曾(上)			
	" (中)	" (中)			
	" (下)				
山 形(上)					
" (中)					
" (下)					

平均胸高直径 (μ_x) の平均樹高 (μ_y) に対する回帰曲線として,

$$\log \mu_x = 1.10 \log \mu_y + \log 1.172$$

を報告している (1982)。この回帰曲線式を図示してみると、やや上に凸な曲線を描くものの、かなり直線的であることが認められた。また、形状比は約59であった。

これらの報告は固定試験地や収穫表を解析した結果と矛盾しない。

4.8.7 中心の軌跡の一般的な傾向

以上の結果をまとめると、一般に、同齢単純林の直径・樹高別二次元本数分布の中心の軌跡は、直径・樹高平面において、直線的であるかもしくはやや上に凸な曲線であり、形状比50から100

の範囲を、単調に右上方へと推移していく傾向を持つと推察された。

また、この傾向は、MITSCHERLICH曲線式のパラメータ k を用いて、次のように表現することもできる。平均胸高直径の生長および平均樹高の生長にMITSCHERLICH式をあてはめた場合、得られたパラメータ k に関して、一般に、直径の k_x は樹高の k_y に等しいかそれよりも小さいかである。前者の場合、中心の軌跡は直線となり、後者の場合のそれは上に凸な単調増加曲線となる。

4.9 林齢に伴う樹高曲線の傾きの変化

二次元林分遷移を特徴づけるものとして、前節では、分布の中心の軌跡について考察した。本節では、林齢に伴う楕円の主軸の回転および直径に対する樹高の回帰直線の傾きについて考察する。

4.9.1 林齢に伴う楕円の主軸の回転

楕円の主軸と直径軸とのなす角度 θ は、

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \rho \sigma_x \sigma_y}{|\sigma_x^2 - \sigma_y^2|} \right) \quad (195)$$

与えられ、直径分散 σ_x^2 、樹高分散 σ_y^2 および直径と樹高の相関係数 ρ の関数となっている。

ところで、樹高 y の直径 x への回帰式は、

$$y = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x) \quad (196)$$

となり、分布の中心点 (μ_x, μ_y) を通る傾き $\rho \sigma_y / \sigma_x$ の直線である。この回帰直線が直径軸となす角度 θ' は

$$\theta' = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \rho \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 - \rho^2 \sigma_y^2} \right) \quad (197)$$

となる。4.6節で報告したように、秋田営林局管内スギ収穫試験地調査結果に関する筆者の研究では、直径と樹高の相関係数は林齢に対して比較的安定していたので、(195) 式の θ の傾向は、(197) 式の θ' の傾向を解析することで推察できるものと考えられる。よって、本研究では、林齢に伴う楕円の主軸の回転を考察する代わりに、直径に対する樹高の回帰直線の傾きの林齢に伴う変化を考察することにする。というのも、この回帰直線は実は樹高曲線（二次元正規分布であるため、樹高直線であるが）であって、林齢に伴う樹高曲線の傾きの変化を検討の方が、林学としてより実用的であると考えられるためである。

4.9.2 樹高曲線の傾きに関する理論的考察

樹高曲線を表わす回帰直線の傾きを林齢 τ で微分すれば、

$$\left(\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)' = \rho' \frac{\sigma_y}{\sigma_x} + \rho \frac{\sigma_y' \sigma_x - \sigma_y \sigma_x'}{\sigma_x^2} \quad (198)$$

となる。ただし、' は林齢 τ に関する微分を示す。前述したように、秋田営林局管内スギ収穫試験地調査結果では、直径と樹高の相関係数 ρ は林齢に対して比較的安定していたので、本節では、

これを一定と仮定した。すると、(198)式の右辺は第2項のみとなる。ここで、 σ_x 、 σ_y は正であるから、 ρ が一定の場合、回帰直線の傾きは、

$$\frac{\sigma_y'}{\sigma_y} > \frac{\sigma_x'}{\sigma_x} \quad \text{のときは増加} \quad (198)$$

$$\frac{\sigma_y'}{\sigma_y} = \frac{\sigma_x'}{\sigma_x} \quad \text{のときは一定} \quad (200)$$

$$\frac{\sigma_y'}{\sigma_y} < \frac{\sigma_x'}{\sigma_x} \quad \text{のときは減少} \quad (201)$$

することがわかる。すなわち、直径分布の標準偏差の増加率と樹高分布の標準偏差の増加率との大小関係だけで、回帰直線の傾きの変化が決まる。

分散の相対変化率と、標準偏差の相対変化率との間には次の関係が存在する。

$$\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} = \frac{2\sigma\sigma'}{\sigma^2} = 2 \frac{\sigma'}{\sigma} \quad (202)$$

以下、直径分散の増加式および樹高分散の増加式に特定の生長曲線を想定し、樹高曲線の傾きについて考察する。ただし、直径と樹高の相関係数は林齢に対し一定と仮定する。

i) 直径分散の増加および樹高分散の増加がMITSCHERLICH式で表わされる場合の樹高曲線の傾き

これは、ある林齢における直径生長量が直径の大きさに依存せず、また、樹高生長量も樹高の大きさに依存しない場合である。この場合は、3.5節での考察により、直径と樹高の相関係数は林齢に対し一定となる。

いま、分散の増加が(203)式のようなMITSCHERLICH曲線に従うと仮定すれば、

$$\sigma^2(\tau) = M(1 - e^{-2k\tau}) \quad (203)$$

標準偏差の増加率は

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{k \exp(-2k\tau)}{1 - \exp(-2k\tau)} \quad (204)$$

となつて、 M に関係なく k と τ だけで決定される。ここで(204)式を k で微分すれば、 $k > 0$ 、 $\tau > 0$ の場合は、

$$\frac{d(\sigma'/\sigma)}{dk} = \frac{(1 - 2k\tau - \exp(-2k\tau)) \exp(-2k\tau)}{(1 - \exp(-2k\tau))^2} < 0 \quad (205)$$

となるから、(204)式は、同じ林齢 τ のもとでは、 k の値が増加するに従い単調に減少する。一般に、樹高生長の k_y は直径生長の k_x よりも大きかったから、回帰直線の傾きは、林齢に伴い単調に減少することになる。

ii) 直径分散の増加および樹高分散の増加がGOMPERTZ式で表わされる場合の樹高曲線の傾き

これは、ある林齢における直径生長量と直径の大きさとの間に直線関係が存在し、また、樹高生長量と樹高の大きさとの間にも直線関係が存在する場合の近似式である。この場合、直線の傾きが、直径生長と樹高生長とで同じであるならば、3.5節での考察により、直径と樹高の相関係数は林齢に対し一定となる。

いま、分散の増加が(206)式のようなGOMPERTZ曲線に従うと仮定すれば、

$$\sigma^2(\tau) = M e^{-l e^{-k \tau}} \quad (206)$$

標準偏差の増加率は

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{k l \exp(-k \tau)}{2} \quad (207)$$

となり、この場合も M に関係なく k 、 l および τ によって決定される。ここで(207)式を k で微分すれば、

$$\frac{d(\sigma'/\sigma)}{d k} = \frac{(1 - k \tau) l \exp(-k \tau)}{2} \quad (208)$$

となる。一般に、 $0 < k < 1$ 、 $l > 0$ 、 $\tau > 0$ であるから、(208)式は、 1 と $k \tau$ との大小関係で正負が決まる。つまり、 $1 - k \tau > 0$ となるような林齢、すなわち、生長の初期においては、 k が大きいほど標準偏差の増加率を表わす(207)式は大きくなり、回帰直線の傾きは増加する。しかし、 $1 - k \tau < 0$ となるような林齢に達した後は、 k が大きいほど(207)式は小さくなり、回帰直線の傾きは減少する。4.4節、4.5節の解析により、一般に、樹高生長の k は直径生長の k_x よりも大きく、また k_x は0.02から0.03であったので、回帰直線の傾きは、林齢30年から50年にかけて、単調増加から単調減少に転ずるものと思われる。

iii) 直径分散の増加がGOMPERTZ式、樹高分散の増加がMITSCHERLICH式で表わされる場合の樹高曲線の傾き

これは、ある林齢における直径生長量と直径の大きさとの間に直線関係が存在し、樹高生長量と樹高の大きさとの間には相関関係が存在しない場合である。ii)と同じく直径分散に関しては近似式である。これは、本章で考察しているモデルである。

いま、直径分散の増加が(206)式のようなGOMPERTZ曲線に従うと仮定し、樹高分散の増加が(203)式のようなMITSCHERLICH曲線に従うと仮定する。この場合は、樹高曲線の傾きは、GOMPERTZ曲線の増加率とMITSCHERLICH曲線の増加率との大小関係で決まる。一般的な場合についての考察は難しいので、ここでは、直径生長の k_x と樹高生長の k_y が共通値 k であると仮定し、かつ、直径生長の l_x と樹高生長の l_y が一定でその値が1であると仮定して考察しよう。GOMPERTZ曲線とMITSCHERLICH曲線との比較であるから、最初は単調増加をし、のちに単調減

少に転ずることは容易に察しのつくところである。

いま、樹高標準偏差の増加率から直径標準偏差の増加率を差し引いた量を考えることにする。

これは、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y'}{\sigma_y} - \frac{\sigma_x'}{\sigma_x} &= \frac{k \exp(-2k\tau)}{1 - \exp(-2k\tau)} - \frac{k \exp(-k\tau)}{2} \\ &= \frac{k \{-\exp(-k\tau) + 2\exp(-2k\tau) + \exp(-3k\tau)\}}{2 \{1 - \exp(-2k\tau)\}} \end{aligned} \quad (209)$$

となる。ここで、 $k > 0$ だから分母は常に正となり、結局 (209) 式の正負は、分子の正負で決まる。 $\exp(-k\tau) = X$ とおけば、分子は、

$$(209) \text{ 式の分子} = k(-X + 2X^2 + X^3) \quad (210)$$

と表わすことができる。 $\tau = 0$ のとき $X = 1$ 、 $\tau = \infty$ のとき $X = 0$ だから、(210) 式は、生長の初期は正で、 $\tau = -\ln(2-1) / k$ のときゼロとなり、その後は負となる。よって、樹高曲線の傾きは、最初は単調増加をし、のちに単調減少に転ずる。

4.9.3 郷台1号試験地の解析結果から推定した樹高曲線の傾き

4.9.2の考察では、直径分散の増加をGOMPERTZ曲線で近似した。しかし、3.3節で述べたように、本モデルでは、直径分散の増加はGOMPERTZ曲線と直径生長量の誤差変動に関連する項との積で表わされている。直径生長量の誤差変動に関連する項の大きさは、 $\tau = 0$ のときゼロで、林齢に伴い急速に増大し、生長の中期以後はほぼ一定となる性質を持っていた。よって、生長初期における樹高曲線の傾きはGOMPERTZ曲線で近似した場合とは異なることが予想される。ここでは、郷台1号試験地の生長解析の結果を参考にして、林齢に伴う樹高曲線の傾きの変化を推察してみよう。3.4節で、直径分布の変動係数と樹高分布の変動係数の関係を考察した時と同じように、直径分散の増加が(138)式に従い、樹高分散の増加が(151)式に従うとし、パラメータの値は、 $M_x=40$ 、 $k_x=0.027$ 、 $l_x=0.95$ 、 $D_x=1.0$ 、 $r_x=0.3$ 、 $M_y=30$ 、 $k_y=0.03$ 、 $l_y=1.0$ 、 $D_y=1.0$ 、 $r_y=0.6$ 、 $a=1.0$ 、 $b=-15$ とした。林齢に伴う相関係数の変化については、まだ関数型が確定していないので、ここでは考えないことにし、樹高分布の標準偏差の直径分布の標準偏差に対する比を計算することにした。表-39がその結果であるが、この比は単調に減少していた。よって、樹高曲線の傾きは林齢に伴い単調に減少するものと思われる。直径分散の増加をGOMPERTZ式で近似した場合は、樹高曲線の傾きは、生長の初期に単調増加しやがて単調減少に転じていたが、これはGOMPERTZ式で近似したことによってもたらされた性質であると考えられる。

4.9.4 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地の例

図-27は、秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地の樹高曲線の傾きの林齢に伴う変化を示したものである。ここでいう樹高曲線とは(196)式で定義される回帰直線のことである。樹高曲線の傾きは、馬場目沢試験地第2分地(試験地番号242)のように変動が大きく傾向がつか

表-39-1. 郷台1号試験地の解析結果から推定した樹高曲線の傾き

林齢 (年)	直 径 生 長			樹 高 生 長			樹高曲線の傾き (m/cm)
	平均 (cm)	標準偏差 (cm)	標準偏差 増加率 (%)	平均 (m)	標準偏差 (m)	標準偏差 増加率 (%)	
1	3.0	0.44	44.4	0.9	0.75	39.3	1.69
2	4.0	0.64	25.1	1.7	1.05	20.7	1.63
3	5.0	0.80	18.0	2.6	1.27	13.8	1.58
4	5.9	0.95	14.2	3.4	1.44	10.2	1.52
5	6.8	1.08	11.9	4.2	1.59	8.0	1.47
6	7.7	1.21	10.4	4.9	1.71	6.5	1.42
7	8.5	1.34	9.2	5.7	1.83	5.4	1.37
8	9.4	1.46	8.4	6.4	1.92	4.6	1.32
9	10.2	1.58	7.7	7.1	2.01	4.0	1.27
10	11.0	1.70	7.1	7.8	2.09	3.5	1.23
11	11.8	1.83	6.7	8.4	2.17	3.1	1.19
12	12.5	1.95	6.3	9.1	2.23	2.7	1.15
13	13.2	2.07	5.9	9.7	2.29	2.4	1.11
14	14.0	2.19	5.6	10.3	2.35	2.2	1.07
15	14.7	2.31	5.4	10.9	2.40	2.0	1.04
16	15.3	2.44	5.1	11.4	2.45	1.8	1.00
17	16.0	2.56	4.9	12.0	2.49	1.6	0.97
18	16.6	2.69	4.7	12.5	2.53	1.5	0.94
19	17.2	2.82	4.5	13.0	2.57	1.4	0.91
20	17.9	2.95	4.4	13.5	2.61	1.2	0.88
21	18.4	3.07	4.2	14.0	2.64	1.1	0.86
22	19.0	3.20	4.1	14.5	2.67	1.1	0.83
23	19.6	3.33	3.9	15.0	2.70	1.0	0.81
24	20.1	3.46	3.8	15.4	2.72	0.9	0.79
25	20.7	3.60	3.7	15.8	2.75	0.8	0.76
26	21.2	3.73	3.6	16.2	2.77	0.8	0.74
27	21.7	3.86	3.5	16.7	2.79	0.7	0.72
28	22.2	4.00	3.4	17.0	2.81	0.7	0.70
29	22.6	4.13	3.3	17.4	2.83	0.6	0.69
30	23.1	4.26	3.2	17.8	2.85	0.6	0.67
31	23.5	4.40	3.1	18.2	2.86	0.5	0.65
32	24.0	4.53	3.0	18.5	2.88	0.5	0.64
33	24.4	4.67	2.9	18.9	2.89	0.5	0.62
34	24.8	4.80	2.8	19.2	2.91	0.4	0.61
35	25.2	4.93	2.7	19.5	2.92	0.4	0.60
36	25.6	5.07	2.6	19.8	2.93	0.4	0.58
37	26.0	5.20	2.6	20.1	2.94	0.4	0.57
38	26.4	5.34	2.5	20.4	2.95	0.3	0.55
39	26.7	5.47	2.4	20.7	2.96	0.3	0.54
40	27.1	5.60	2.4	21.0	2.97	0.3	0.53

直径生長には (131) 式, 直径分散には (138) 式を用い, そのパラメータは $M_x=40$, $k_x=0.027$, $l_x=0.95$, $a=1.0$, $b=-15$, $r_x=0.3$, $D_x=1.0$ である。

樹高生長には (150) 式, 樹高分散には (151) 式を用い, そのパラメータは $M_y=30$, $k_y=0.030$, $l_y=1.0$, $r_y=0.6$, $D_y=1.0$, である。

表-39-2. 郷台1号試験地の解析結果から推定した樹高曲線の傾き

林齢 (年)	直径生長			樹高生長			樹高曲線の傾き (m/cm)
	平均 (cm)	標準偏差 (cm)	標準偏差 増加率 (%)	平均 (m)	標準偏差 (m)	標準偏差 増加率 (%)	
41	27.4	5.73	2.3	21.2	2.98	0.3	0.52
42	27.8	5.86	2.2	21.5	2.99	0.3	0.51
43	28.1	5.99	2.2	21.7	3.00	0.2	0.50
44	28.4	6.12	2.1	22.0	3.00	0.2	0.49
45	28.7	6.25	2.0	22.2	3.01	0.2	0.48
46	29.0	6.38	2.0	22.5	3.02	0.2	0.47
47	29.3	6.51	1.9	22.7	3.02	0.2	0.46
48	29.6	6.63	1.9	22.9	3.03	0.2	0.46
49	29.9	6.76	1.8	23.1	3.03	0.2	0.45
50	30.1	6.88	1.8	23.3	3.04	0.2	0.44
51	30.4	7.00	1.7	23.5	3.04	0.1	0.43
52	30.7	7.12	1.7	23.7	3.05	0.1	0.43
53	30.9	7.24	1.6	23.9	3.05	0.1	0.42
54	31.2	7.36	1.6	24.1	3.06	0.1	0.42
55	31.4	7.48	1.5	24.2	3.06	0.1	0.41
56	31.6	7.60	1.5	24.4	3.06	0.1	0.40
57	31.8	7.71	1.5	24.6	3.07	0.1	0.40
58	32.1	7.82	1.4	24.7	3.07	0.1	0.39
59	32.3	7.93	1.4	24.9	3.07	0.1	0.39
60	32.5	8.04	1.4	25.0	3.07	0.1	0.38
61	32.7	8.15	1.3	25.2	3.08	0.1	0.38
62	32.9	8.26	1.3	25.3	3.08	0.1	0.37
63	33.1	8.37	1.2	25.5	3.08	0.1	0.37
64	33.2	8.47	1.2	25.6	3.08	0.1	0.36
65	33.4	8.57	1.2	25.7	3.09	0.1	0.36
66	33.6	8.67	1.1	25.9	3.09	0.1	0.36
67	33.8	8.77	1.1	26.0	3.09	0.1	0.35
68	33.9	8.87	1.1	26.1	3.09	0.1	0.35
69	34.1	8.97	1.1	26.2	3.09	0.0	0.34
70	34.3	9.06	1.0	26.3	3.09	0.0	0.34
71	34.4	9.15	1.0	26.4	3.10	0.0	0.34
72	34.6	9.25	1.0	26.5	3.10	0.0	0.34
73	34.7	9.34	0.9	26.6	3.10	0.0	0.33
74	34.8	9.42	0.9	26.7	3.10	0.0	0.33
75	35.0	9.51	0.9	26.8	3.10	0.0	0.33
76	35.1	9.60	0.9	26.9	3.10	0.0	0.32
77	35.2	9.68	0.8	27.0	3.10	0.0	0.32
78	35.4	9.76	0.8	27.1	3.10	0.0	0.32
79	35.5	9.84	0.8	27.2	3.10	0.0	0.32
80	35.6	9.92	0.8	27.3	3.10	0.0	0.31

直径生長には(131)式, 直径分散には(138)式を用い, そのパラメータは $M_x=40$, $h_x=0.027$, $l_x=0.95$, $a=1.0$, $b=-15$, $r_x=0.3$, $D_x=1.0$ である。

樹高生長には(150)式, 樹高分散には(151)式を用い, そのパラメータは $M_y=30$, $h_y=0.030$, $l_y=1.0$, $r_y=0.6$, $D_y=1.0$ である。

かみにくい例もあったが、多くの場合、林齢に伴い減少していた。曲線は直径分散の増加をGOMPertz式(206)式で近似し、樹高分散の増加をMITSCHERLICH式(203)式で表わし、直径と樹高の相関係数を一定とした場合を示している。すなわち、4.9.2のiii)で考察した曲線である。各パラメータには、表-34、表-35で採用した値を用い、相関係数には表-36で示した共通の値を用いた。

同図の曲線からは、樹高曲線の傾きが、生長の初期に単調増加し、林齢10年から20年の間にピークを迎え、その後は単調減少している様子が読み取れる。ただし、長滝試験地第1分地(試験地番号91)は、樹高生長のパラメータ k_y が直径生長の k_x よりも極端に小さかったので、他の試験地と異なる傾向を示し、林齢に伴い単調減少していない。4.9.3項で述べたように、生長の初期に単調増加する傾向は、直径分散の増加をGOMPertz式で近似したためにもたらされた性質であると考えられる。しかし、この点に関しては、生長初期のデータが無いため、ここでは、これ以上考察できない。生長の中期以降は、4.9.2項のiii)で考察した曲線は、比較的よい適合を示していた。現実の樹高曲線の傾きが傾向曲線からはずれる原因としては、誤差変動そのものの他に、相関係数を一定と仮定したこと、また、上層木の相関係数が推定しにくいことがあげられよう。このような解析上の不完全さが残るものの、図-27は、生長の中期以降の樹高曲線の傾きが林齢に伴い減少することを明らかに示している。

4.9.5 樹高曲線の傾きに関する研究報告書例

樹高曲線の傾きの林齢に伴う変化に関しては報告が少ない。林業百科事典は『一斉林の(樹高)曲線は林木の生長とともに移動することが認められている。』(日本林業技術協会1971)と述べ、それを示す概念図を載せている。この図では、やや上に凸な曲線が、生長とともに、直径・樹高平面上を右上方へ移動していく様子が描かれているが、その傾きの変化については、図から判断することは困難である。

大隅らの『森林計測学』の中で梶原は『同齢林型の林分では、年齢がすすむにつれて同一林分の樹高曲線は上の方にほぼ平行してずれていくことが認められている。』(1971)と述べているが、同書の別の箇所、菅原は『一般に同齢一斉林においては、(略)、樹高曲線は時間の経過とともに右上方へと転位する性質をもっている。』、『林分樹高曲線の特性として、良好な地位や幼齢時では急勾配を、劣悪な地位や老齢時では緩勾配を示すので、時が経つにつれて勾配が減少するように林分樹高曲線を調製すべきである。』(1971)と述べている。

また、麻生は『一斉同齢林の樹高曲線は樹種及地位に依って異なるものなりと思料し得べきが如きもヒノキ林に於ける実験の結果に依れば樹高曲線の関係式は樹種に依り或いは放物線或いは指数曲線或いは双曲線を以って示さるるものの如く終始一貫単一曲線を以って示し得るものにあらずして同一樹種の林分に在りても幼齢林にして樹高の生長直径の生長と共に旺盛なる時代のものと壯齢老齢となり樹高の生長直径の生長に伴わざるに至りし時代のものとは自ずから其の曲線の性質を異にすべきものならんかと思考せり。』(1925)と述べている。

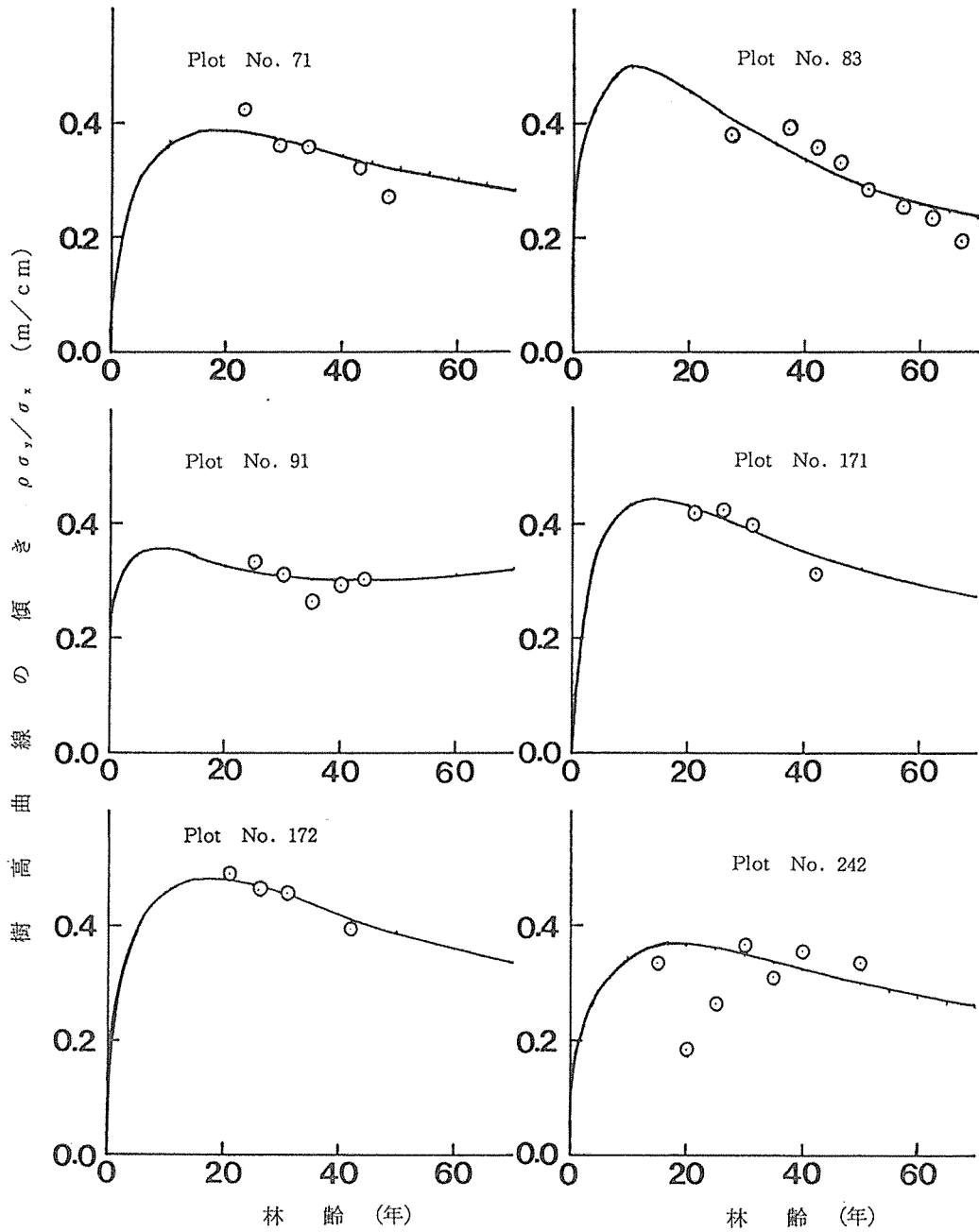


図-27. 秋田営林局管内スギ収穫試験6試験地における樹高曲線の傾きの経時変化

曲線は、4.9.2項 iii) で考察した式である。

柿原らは、前述した九州大学粕屋演習林内のスギ林の固定標準地3プロットの資料に、林齢(τ)を加えた樹高曲線式をあてはめ、

$$h = -10.26 + 5.78 \log(\tau) + 7.39 \log(d) + 4.60 \log(\tau) \cdot \log(d)$$

ただし、 h は樹高、 d は直径である。

を得ている(1976)が、この場合、樹高曲線の傾きは、林齢とともに減少していた。

これらの報告は、本節で解析した結果と矛盾しない。

4.9.6 林齢に伴う樹高曲線の傾きの変化の一般的傾向

以上の結果をまとめれば、一般に、同齢単純林の樹高曲線は、林齢に伴い、その傾きを減少させながら、直径・樹高平面上を右上方へと移動していく傾向を持つと推察された。

前節と本節の考察より、二次元林分遷移について、大方の傾向を把握することができた。また、その結果は、常識的にも理解しやすいものであった。今回得られた傾向は、将来、林分の生長を予測する場合に、一つの指針となるであろう。

4.10 BACHELIER型二次元林分遷移の例

前節までの考察により、二次元林分遷移の方程式の係数関数型を具体的に定めることができ、また、そのパラメータについても一般的な傾向を得ることができた。その結果、直径・樹高別本数密度を表わす二次元正規分布の中心の動きおよび分布の直径軸に対する傾きについて、その傾向を知ることができた。この節では、本章の締め括りとして、典型的なBACHELIER型二次元林分遷移の例を示し、その具体的なイメージを表わしてみよう。

秋田営林局管内スギ収穫試験地6試験地について、前節までは、各生長因子ごとに、経時変化を解析してきた。各林齢の値がなめらかな傾向を示す試験地もあれば、異常と思われる値を含む試験地もあった。表-40は、6試験地について、各生長因子の経時変化のなめらかさを、取りまとめたものである。図-20、図-22、図-23、表-36、図-24、図-25、表-37、図-27から判断して、明らかになめらかでないものに×印を、そうでないものに○印を付けた。すべての生長因子とも○印が付いたのは、深山第1分地(試験地番号171)と深山第2分地(試験地番号172)であった。4.2節では、深山第2分地(試験地番号172)の資料を用いて直径・樹高二次元分布の変化を解析したので、本節でも、この試験地の上層木の資料を用いて、BACHELIER型二次元林分遷移のイメージを表わすことにする。

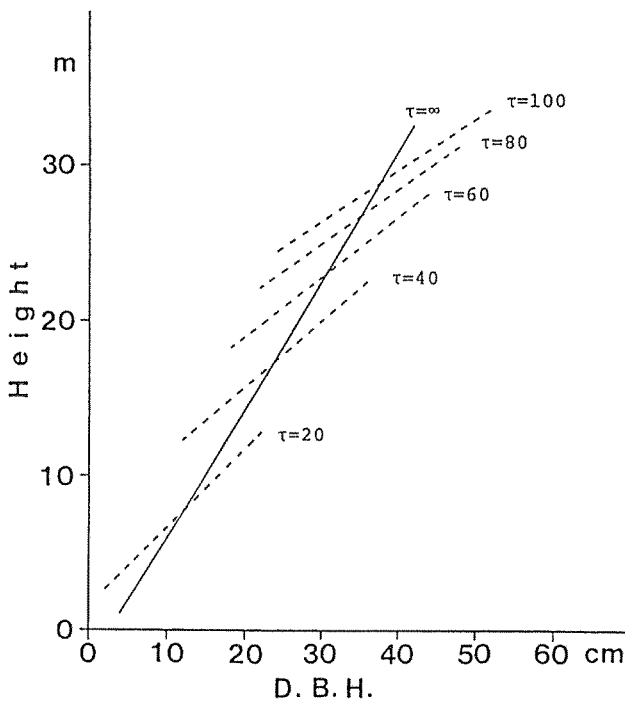
図-28と図-29は、深山第2分地(試験地番号172)について得られたパラメータをもとに描いたBACHELIER型二次元林分遷移の概念図である。図-28は、直径樹高平面における中心の軌跡と樹高曲線の関係を示している。実線は中心の軌跡を表わしており、これは理論的には上に凸な曲線であるが、実際にはほとんど直線である。点線は各林齢における樹高曲線を表わしており、林齢に伴いその傾きが減少しなからずれていく様子を示している。ここでは、上層木の集団の直径・樹高分布が二次元正規分布を呈していると仮定しているから、樹高曲線は直線となっている。

図-29は、直径階別樹高階別の立木本数密度分布が、直径、樹高、本数密度からなる三次元空

表一40. 秋田営林局管内スギ収穫試験地6試験地における各生長因子の経時変化のなめらかさ

生長因子	対応する図表	試験地名と試験地番号					
		小阿仁 奥山 第1	上大 内沢 第3	長滝 第1	深山 第1	深山 第2	馬場 目沢 第2
		71	83	91	171	172	242
平均直径の生長	図-20	○	○	○	○	○	○
直径分散の増加	図-20	○	○	○	○	○	○
平均樹高の生長	図-22	○	○	×	○	○	○
樹高分散の増加	図-22	○	×	×	○	○	○
直径と樹高の相関係数	図-23, 表-36	×	○	○	○	○	×
本数減少	図-24	○	○	○	○	○	○
中心の軌跡	図-25, 表-37	○	○	×	○	○	○
樹高曲線の傾き	図-27	○	○	×	○	○	×

○：生長因子の経時変化がなめらかであると思われるもの
 ×：生長因子の経時変化が明らかになめらかでないもの



図一28. BACHELIER型二次元林分遷移における二次元本数分布の中心の軌跡と樹高曲線

実線は、中心の軌跡を示す。
 中心は直線的に移動し、上限値に限りなく近づいていく。
 点線は、各林齢における樹高曲線を示す。
 樹高曲線の傾きは、林齢に伴い減少する。

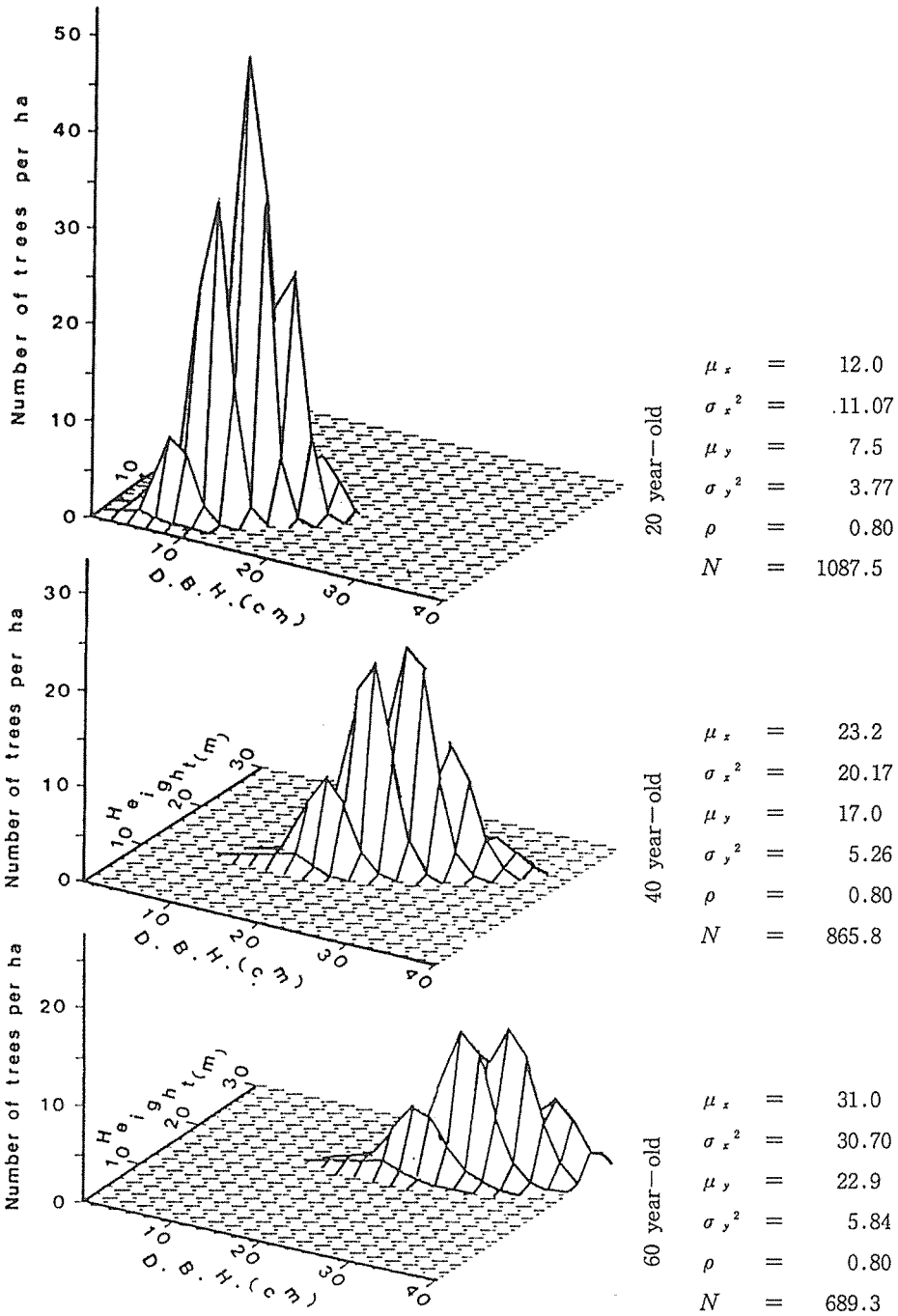


図-29. 三次元空間の中のBACHELIER型二次元林分遷移

間の中を遷移していく様子を描いたものである。生長の初期は、原点付近の特定の直径・樹高階に林木が集中しているが、林齢が経つにつれてそれが右上方へ向かって時計回りの回転を伴いながら移動しかつ拡散していく様子を見ることができる。この場合の中心の軌跡および樹高曲線の傾きは図-28に示した通りである。

これら2枚の図より、BACHELIER型二次元林分遷移のイメージを具体的に描くことができ、それによって、同齢単純林の生長経過を見通しのよいものにすることができた。

第5章 二次元林分遷移の方程式の応用

5.1 林齢に伴う材積分布の変化

林業経営において、最も関心が示される生長は、直径、樹高、さらに材積である。材積は、これを直接に測定することはほとんど不可能であるから、直径や樹高から間接に推定しなければならない。

材積の分布についても、その形状について多くの研究がなされており、一般に、材積の分布は左偏するといわれている。これは、衆目の認める傾向である。ところで、材木の材積は、その直径や樹高の関数であるから、材積分布の形状は直径分布や樹高分布と密接な関係があるはずである。前章では、二次元林分遷移の具体的な例が示され、各林齢における直径階別樹高階別の本数が求められたが、本節では、この二次元林分遷移に伴う材積分布の変化についてみてみよう。

5.1.1 材積計算の方法

各林齢における直径階別樹高階別の本数は、4.10節で二次元林分遷移の概念図(図-29)を描く時に用いた数値である。すなわち、深山試験地第2分地の資料に各係数関数をあてはめ、その結果得られたパラメータを基に推察した数値である。

材積と直径および樹高との関係を示す式はいわゆる材積式であって、山本-SCHUMACHER式

$$v = \alpha x^{\beta} y^{\gamma}$$

が有名であるが、ここでは、材積分布の形状と直径分布および樹高分布との関係を考察しようとしているので、なるべく単純な材積式として、

$$v = 0.5 x^2 y \quad (211)$$

を用いることにした。これは胸高形数を0.5に一定としたものである。

5.1.2 材積分布の変化

図-30に、林齢20年、40年、60年の材積分布を示す。材積分布はいつも左偏しており、その歪度や尖度が林齢に伴い和らいでいく様子がうかがえる。このように、直径分布や樹高分布が正規分布している場合、材積分布はその当然の結果として左偏するのである。

材積分布そのものについて分布型を定めようとする研究もあるが、その場合は、材積分布と、直径分布および樹高分布との間に、材積式を通じての一貫性が保たれていることが求められるであろう。前述したように、材積の直接測定は非常に困難であり、現実には、直径と樹高から推定

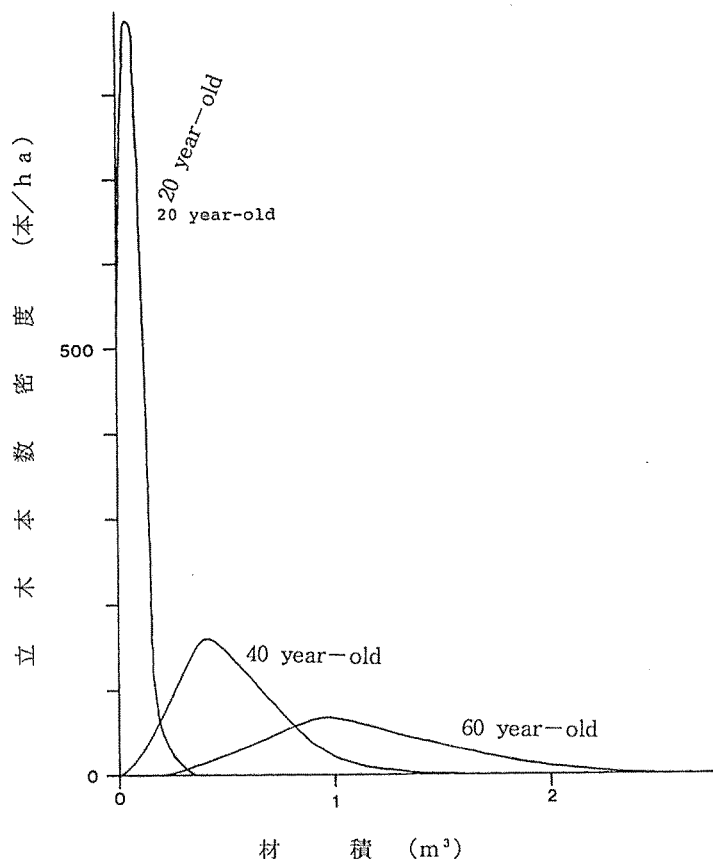


図-30. 二次元林分遷移に伴う材積分布の変化

図-29で示した二次元本数密度分布に対応している。
材積は、胸高形数を0.5として求めた。

しているにすぎない。この現状を考えた場合、林業経営の立場から言えば、やはり測定可能な直径と樹高の分布を、確実に把握しておくことが重要であると考えられる。

5.2 径級別丸太材積の収穫予測

収穫予測では、単に材積だけでなく、径級別の丸太本数やその材積に関する情報が必要とされる場合が多い。この節では、これらの収穫予測に対して、二次元林分遷移の方程式がどのように応用できるかを示そう。

二次元林分遷移の方程式を用いることによって、直径階別樹高階別本数の予測が可能であるから、これに、直径階別樹高階別の幹形を組み合わせれば、径級別の丸太本数とその材積の予測は可能となる。ここでは、直径階別樹高階別の幹形を表わすものとして、相対幹曲線を用いた例を示す。

5.2.1 用いた相対幹曲線式と計算方法

各林齢における直径階別樹高階別の本数は、前節と同じく、二次元林分遷移の概念図(図-29)を描く時に使用した数値である。

また、計算に用いる相対幹曲線は、梶原(1973)が求めたスギの式

$$Y = 1.1129X - 1.0839X^2 + 0.5163X^3 \quad (212)$$

とした。

採材は、採伐高を20cmとし、末口直径が14cm以上のところでは4m材をとり、4m材がとれなくなったら、3m材を末口6cmまでとることとした。のべ寸は10cmとした。丸太の材積計算は、日本農林規格(昭和42年)に従い、一番玉とそれ以外とを区別した。

5.2.2 予測結果と考察

林齢20年、40年、60年における径級別丸太本数とその材積の予測結果を表-41に示した。林齢20年では、3m小丸太が本数の93%、材積の84%を占めていたが、林齢40年では、4m中丸太が本数の50%、材積の80%を占めるようになり、林齢60年では、4m中丸太が本数の62%、材積の78%を、4m大丸太が本数の5%、材積の15%を占めていた。

この結果を、秋田地方スギ林分収穫表(1949)と比較してみよう。この予測の基礎資料となった深山試験地第2分地の地位は中であつたので、地位中の収穫表と比較した。今回の予測は、平均直径と平均樹高はともに収穫表の値と似通っていた。立木本数は林齢20年で約半分であり、林齢40年と60年ではやや多かったが、これは深山試験地の若齢時の密度が低かつたことと、今回のモデルが間伐による本数減少を考慮していないことによる。材積については、予測値が利用材積であることを考えれば、林齢40年、60年では収穫表の値に近い値を示していると言える。

深山試験地第2分地は、立木本数が林齢20年では著しく少なかつたが、林齢40年頃までには通常の密度となり、そのため種内競争が始まって上層木と下層木の分離が生じ、以後、上層木は収穫表の値に近い生長経路をたどっていると解釈できる。

5.2.3 樹高分布を用いることの重要性

本数分布の予測と相対幹曲線とを組み合わせた収穫予測については、既にいくつかの報告例がある(田中1978, 田中1982, 日本立地センター1982)。しかし、それらはいずれも樹高曲線を用いたものであつたという点で不備があつた。つまり、採材を考えた場合、平均樹高の林木からの丸太材積が、必ずしも、その直径階の平均丸太材積を表わしているとは限らないからである。この点から、樹高分布を考察することの重要性が強調され、直径と樹高を2因子とする二次元林分遷移の生長モデルが必要となるのである。

5.2.4 収穫予測への応用に対する筆者の立場

以上、二次元林分遷移の方程式を径級別丸太材積の収穫予測に適用した例を示したが、これに径級別の丸太価格などを考慮すれば、経済的な分析にも応用できよう。

収穫を予測するには、厳密には、直径の偏り率、根曲がり、腐れなども考慮しなければならな

表-41. 径級別丸太本数とその材積の予測例

		丸太本数 (本/ha)			丸太材積 (m ³ /ha)		
		20年	40年	60年	20年	40年	60年
元 玉	4 m大丸太	—	4.9	132.5	—	1.83	54.56
	4 m中丸太	37.1	790.4	526.9	3.07	122.51	123.89
	3 m中丸太	46.0	1.2	1.8	2.70	0.07	0.11
	3 m小丸太	833.6	64.0	1.4	23.11	2.83	0.06
	小 計	916.7	860.5	662.6	28.88	127.24	178.62
そ の 他	4 m大丸太	—	0.2	40.8	—	0.07	15.90
	4 m中丸太	0.3	775.8	1539.8	0.02	87.94	242.50
	3 m中丸太	1.1	178.4	144.2	0.07	10.49	8.48
	3 m小丸太	373.8	1302.4	929.2	8.04	38.65	27.10
	小 計	375.2	2256.8	2654.0	8.13	137.15	293.98
合 計		1291.9	3117.3	3316.6	37.01	264.39	472.60

いが、それらは、個々の林分に適用する際に、現状に応じて取り扱えばよいであろう。

ここで問題にしているのは、生長に伴う林木集団の変化であって、しかも、その集団の大勢に関する一般的な傾向である。この傾向さえ確実に把握しておけば、収穫予測が大きくはずれる心配も少ないであろう。本節では、このような立場から、上層木の収穫予測のみを扱った。

第6章 結 語

現実の林分は、それが同齢単純林であっても、大小様々な林木から構成され、直径分布や樹高分布の形状は、実に多様である。その多様性の原因としては、地形条件や土壌条件などによる制約、過去の気象条件などの環境要因の影響、病虫害や災害による破壊、そして、除間伐などのように施業により人為的に加えられた変化などの外的要因が考えられるが、その他に、生長固有の特質に起因するものがあると考えられる。筆者は、外的要因による影響が無視できるくらい小さい場合の、生長固有の特質によって引き起こされる林木の大きさのちらばり具合に興味を持った。それは言わば巨大な実験室の中で林分を育成した場合に、その生長経過がどうなるかという興味である。このような実験は、林木の生長の超長期性およびそれに必要な広大なスペースを考えると、まず無理な話である。しかし、生長固有の特質に起因する林分構造の変化を把握しておくことは、生長を予測するうえでの基本であると考えられる。このような林分は現実には存在しないが、理想的な外的条件の下に生育した林分と考えられるので、ここでは、これを『理想状態のもとに生長した林分』と呼ぶことにしよう。

現実の林分の生長経過から『理想状態のもとに生長した林分』の林分構造とその変化を類推するには、生長現象の抽象化と、それを説明するモデルが必要となる。筆者は、名古屋大学農学部 鈴木太七教授の講義を聞き、林木の大きさのちらばり具合を拡散現象として説明しようとする鈴木の研究、すなわち、林分遷移の方程式の理論とそれに基づく林分生長モデルに興味をもった。その後、直径階別・樹高階別の立木本数分布の等本数線図を描いてみたところ、いくつかの林分がきれいな楕円の軸として表わされることを知り、これが二次元正規分布として抽象化できるのではないかと考えた。これが、本研究の動機である。

二次元林分遷移の方程式は、既に、鈴木によって導かれていた(1966)が、筆者は、鈴木 の指導のもと、その基本解が二次元正規分布になることを示した。その理論的な展開は、第2章に述べた通りである。

二次元林分遷移の方程式を具体的なモデルとして表わすためには、各係数関数の関数型を定め、そのパラメータがとる範囲を知っておかねばならない。第3章では、直径生長モデル、樹高生長モデル、および直径と樹高の相関係数に関するモデルを構築した。確率論的モデルの作成にあたっては、全生長期間を表現する微分方程式と、各時間断面を表現する微分方程式との違いを考慮する必要がある。確率論的直径生長モデルに、時間断面の概念を導入したのは、西ドイツのSLOBODAであった(1976)。筆者は、最初は、SLOBODAのモデルは、数学的展開における単なる巧みなテクニックにすぎないと独り合点していた。一方では、従来のモデルが、現実の直径分散の増加を十分に表現できないことに気がつき、その原因を探っていた。拡散過程を考える場合は、時間断面を表わす微分方程式が重要な役割を果たすが、このことを理解するに至って、いくつかの問題が解決した。たとえば、直径生長と樹高生長を例にとると、誤差変動を考慮に入れなければ、全生長期間は、直径、樹高の両生長ともMITSCHERLICHの生長法則を表わす微分方程式で記述されるが、各時間断面においては、非常に短い時間の直径生長量が直径の一次関数として表わされるのに対して、非常に短い時間の樹高生長量は樹高の大きさに関係なく一定と表わされる。こうした相違が、分散の増加に決定的な影響を及ぼすことが分かった。これについては、3.2節で詳しく説明した。

3.3節で構築した直径生長モデルは、SLOBODAのモデル(1976)を拡張したものである。SLOBODAは、各時間断面において、誤差変動を考慮に入れなければ、直径生長量が直径の一次関数として表わされるとしたが、具体的には、原点を通る直線式のモデルを採用した。筆者は、東京大学千葉演習林のスギ固定試験地資料を解析した結果に基づき、これが必ずしも原点を通らず、一般に x 切片を持ち、さらに、この x 切片の位置が平均直径の一次関数で表わされることを見出した。この場合、林齢に伴う直径分散の増加は、RICHARDS生長関数と誤差変動に関連した頃との積として表わされることが証明できた。しかし、生長の中期以降は、RICHARDSの生長関数で十分近似できた。

3.4節で構築した樹高生長モデルは、前述したように、時間断面の表現において、直径生長

モデルとはまったく異なるものである。そして、この相違が、分散の増加傾向に違いをもたらし、その結果、樹高分布の変動係数が直径分布のその約半分の大きさであるという通説を説明することができた。また、分散の増加傾向のこうした相違は、林齢に伴う樹高曲線の傾きの変化にも深く関与していた。

直径生長が3.3節のモデルに従い、樹高生長が3.4節にモデルに従う場合の、直径と樹高の相関係数の林齢に伴う変化を3.5節で検討した。直径生長量と樹高生長量の相関係数は、直径や樹高の大きさに関わらず一定とみなすことができた。ここで、林齢に対しても一定であると仮定すると、直径の樹高の相関係数は、林齢に伴い単調に減少することが理論的に示された。しかし、4.6節で述べたように、現実林の直径と樹高の相関係数は、林齢に伴い若干減少する傾向があるものの比較的安定しており、実用上はこれを一定とみなすことができた。

第4章では、秋田営林局管内のスギ収穫試験地の資料を実証的に解析した結果に基づいて、二次元林分遷移の方程式の基本解の生長に伴う傾向を推察した。ここでは、解析の対象を上層木集団の林木に限定した。これは、いくつかの現実林の上層木集団の直径・樹高別本数分布が二次元正規分布に近い形状を呈していたためである。

現実の林分は、直径分布は左偏し、樹高分布は右偏する傾向にある。また、樹高曲線は一般に上に凸な曲線を描く。しかし、これらはいずれも下層木集団の存在によってもたらされる傾向であると解釈できた。下層木集団は、何らかの原因によって生長に遅れをとった林木と考えられるので、当然、その生長傾向は上層木とは異なると考えられる。上層木と下層木という二つの異なる生長集団を同時に説明するモデルを最初から構築するのは無理である。拡散モデルの特徴を考えた場合、上層木集団のみを対象とするのが適当であると考えた。しかも、上層木集団は、立木本数で全体の約80%、材積で約95%を占めるので、上層木だけを解析の対象としたとしても、林分の生長の動向を見失う恐れはないと判断した。

現実林の直径・樹高二次元本数分布を、二次元正規性の検定結果に基づいて分類した結果、上層木正規型、上層木準正規型、正規型、準正規型、非正規型の5つの分布パターンに類別できた。このうち非正規型に属する林分は約2割しか存在せず、大部分の林分では、全木あるいは上層木の集団が二次元正規分布で近似できた。また、生長に伴い、一般に、上層木正規型に移行していくことが認められた。

上層木集団の平均直径の生長には、MITSCHERLICH式がよい適合を示し、そのパラメータは、上限値が約50cm、 k は約0.02であった。直径分散の増加にはGOMPERTZ式をあてはめたが、よい適合を示した。この場合、 k は平均直径生長の k と共通にした。上限値は約100cm²であった。上層木集団の平均樹高の生長にもMITSCHERLICH式がよい適合を示した。上限値は約35mであった。 k は約0.025であり、直径の k の約1.3倍であった。樹高分散の増加には、原点を通るMITSCHERLICH式がよくあてはまった。この場合、パラメータ k は平均樹高生長の k の2倍の大きさとした。上限値は6m²前後であった。上層木の直径と樹高の相関係数は、やや減少の傾向

にあるものの同一林分内では比較的安定しており、実用上は一定とみなせた。その値は林分ごとに若干異なるが0.7から0.85の値であった。間伐が実施されてから次の間伐が実行されるまでの上層木の本数密度の減少に対しては、指数減少式がよい適合を示した。この場合、年減少率は約1.3%であった。

こうした各生長因子の傾向を総合的にとらえることによって、二次元林分遷移の方程式の基本解の性質を推察することができた。すなわち、直径・樹高別本数密度分布を表わす二次元正規分布が、林齢とともに推移していく様子を思いうかべることができた。この二次元正規分布は、直径を横軸、樹高を縦軸とする基底平面上を原点付近から出発し、右上方に向かって時計回りの回転を伴いながら移動しかつ拡散していく。その場合、分布の中心の軌跡は、理論上は上に凸な曲線を描くことになるが、現実ではほとんど直線的に移動しているとみなせた。分布の時計回りの回転は、実は、樹高曲線の傾きが林齢とともに減少することを示している。ここでは、二次元正規分布を考えているから、樹高曲線が直線として表わされているのが特徴である。

二次元林分遷移の理論の応用例として、生長に伴う材積分布の変化と、丸太別収穫量の予測例を、第5章に示した。ここでは、二次元林分遷移の方程式の基本解についてのみ応用例が示してある。これは、材積分布が一般に左偏する傾向が、直径分布と樹高分布の正規性からもたらされるものであることを示したかったからである。また、丸太別収穫量の予測手法は、初期値解の場合に対しても容易に応用が可能であるから、基本解の場合について、その基本的な考え方を示した。

本論文では、いわゆる『理想状態のもとに生長した林分』の生長傾向について推察してきたが、これは二次元林分遷移の方程式の基本解の性質を明らかにしたかったためである。実際に、二次元林分遷移の方程式の理論を応用する場合には、初期値解に基づくのがよい。初期値解は、初期分布に基本解を『たたみ込む』ことによって、得られるものである。その解を具体的に表現することは困難であるが、コンピュータが身近な存在になった現在では、シミュレーションによって生長を予測することが可能である。筆者の構想では、『たたみ込む』という概念にあまりとらわれず、定期生長量と期首の大きさとの関係を中心に据えたシミュレーションプログラムを開発するのがよいと考えている。本論文ではこの関係についていろいろと細かな仮説を設けているが、現実に応用する場合には、個々の林分の実情に応じて、適切に対処するのがよい。とくに、間伐の効果がこの関係にどのように影響を及ぼすかは、興味のあるところである。

定期測定が実施されていない林分（現実にはこういう林分が圧倒的に多い）に対しては、樹幹解析資料の利用を考えている。一林分当たり数本の供試木を採れば、定期生長量と期首の大きさとの関係は容易に求められるからである。この場合、供試木は、従来のように標準木についてのみ採るのではなく、各直径階にまたがって上層木から採るのがよい。

以上述べたように、本論文では、二次元林分遷移の方程式を誘導し、その基本解が二次元正規分布となることを示した。また、各係数関数を表わすモデルを構築し、方程式の基本解である直

径・樹高二次元本数密度分布の生長に伴う変化について推察した。得られた結果は、常識的にも理解しやすいものであった。これにより、二次元林分遷移のイメージを具体的に描くという当初の目的を達成することができた。

本研究で考察した二次元の林分遷移はあくまでも基本解に関するものであり、しかも、各林木が十分な生育空間を持つような低密度の林分を対象とするものである。基本解そのままのような生長をする林分は、現実にはほとんど存在しないであろう。自然界においては、多少の変形や変更を受けているのが普通である。基本解は、いわゆる『理想状態のもとに生長した林分』であって、抽象の世界に属するものである。しかし、現実の林分を『理想状態のもとに生長した林分』に外的条件が作用したものとして認識することによって、その生長動向を見通しよくすることができるのである。

謝 辞

終始ご懇篤なるご指導を賜わり論文校閲の労もおとり下さいました名古屋大学農学部鈴木太七名誉教授に心からお礼申し上げます。また、適切な助言ならびに本研究遂行上の便宜を与えて下さいました東京大学農学部南雲秀次郎教授、三重大学生物資源学部笠原六郎教授に深く感謝いたします。

本論文作成にあたり、農林水産省森林総合研究所および同東北支所からは秋田営林局管内スギ収穫試験地の貴重な資料を提供していただきました。東京大学千葉演習林からは固定試験地の貴重な資料を提供していただいたほか、1982年から1986年の調査にご協力を賜りました。東京大学農学部平田種男名誉教授、名古屋大学農学部梅村武夫教授、東京大学農学部箕輪光博助教授、新潟大学農学部竹内公男助教授、名古屋大学農学部末田達彦助教授、同長嶋郁教官、東京大学千葉演習林鈴木誠教官、島根大学農学部稲田充男教官、森林総合研究所白石則彦博士、森林総合研究所四国支所松村直人博士からは有益な助言を賜りました。名古屋大学農学部卒業生大谷文昭氏、同若松正弘氏、東京農工大学農学部石橋整司教官、東京大学農学部露木聡教官、東京大学農学部卒業生沢山秀尚氏、同岡田利水氏には関連する研究で共同研究者としてご協力いただきました。日本林学会のD.J HAIBACH氏とCity of London PolytechnicのPeter BLANDON博士には英文校閲の労をお願いしました。ここに記して、厚くお礼申し上げます。

Summary

An actual forest stand, even in the case of an even-aged pure stand, consists of trees of different sizes, and each stand has its own pattern of distribution of diameters and heights. For reasons of diversity of the distribution, we can give the following external factors: restrictions of topography and site conditions, influences of environmental factors such as weather, diseases, insects, and disasters, and changes made artificially such as by thinnings. In addition, that there is an internal factor which originates in the characteristics of growth. This paper considers the distribution of tree sizes caused by the latter factor when the effects of external factors are very small and need not be considered. It is fundamentally important for growth prospects, to understand the changes of stand structure originating in the characteristics of growth. A forest stand whose changes of structure with age are subject only to the characteristics of growth does not exist in reality. It seems to be growing under ideal external conditions, so we call it "a stand growing under ideal conditions".

To infer the stand structure and the changes with age of "a stand growing under ideal conditions" from the growth progression of actual forest stands, there is a need of abstract ideas on the growth phenomena and a model explaining them. SUZUKI explains the changes of diameter distribution with forest age as a diffusion phenomena and presents the forest transition equation and a growth model based on this theory (1966, 1967, 1971, 1974, 1983). In this study, following SUZUKI's guidance, the height of trees is added to the transition equation as a new factor and the two-dimensional forest transition, whose factors are diameter and height, is discussed.

Although the two-dimensional forest transition equation, Equation (8), was derived by SUZUKI (1966), this paper shows that its fundamental solution is a two-dimensional normal distribution, Equation (14), when all of the coefficients of the equation are functions of forest age only. The development of the theory is shown in Chapter 2.

To show the two-dimensional forest transition equation as a concrete model, we need to determine the function of each coefficient of the equation and to know the range of the parameters of each function. In Chapter 3, a diameter growth model, a height growth model, and a model concerning the coefficient of correlation between diameter and height are presented. When we construct a stochastic growth model, we must know the difference between the differential equation which expresses the phenomena in the entire growth period and one which express the growth phenomenon at each forest age. For example, we can show the diameter growth and the height growth in an even-aged pure stand. When we do not consider the random fluctuations, the phenomena in the entire growth period of both diameter and height can be described by the differential equation of MITSCHERLICH's growth law. However, at each forest age, although diameter growth in a very short time interval is expressed as a linear function of diameter, Equation (110), height growth in a very short time interval is constant regardless of the amount of height, Equation (146). As explained in Paragraph 3.2, this difference has a decisive influence on the increase of the variance of distribution.

The diameter growth model whose construction is described in Paragraph 3.3 is an expansion of that of SLOBODA(1976, 1977, 1984). He proposed that diameter growth in a very short time period is a linear function of the diameter at each forest age in an even-aged pure stand when random fluctuations are not considered, but he adopted a line through the origin in his concrete model. However, the results of a permanent plot of *Cryptomeria japonica* D. Don in the Tokyo University Forest in Chiba Prefecture showed that the line does not always pass through the origin and generally has a intersection with the diameter axis. It also was found that there is a linear

relationship between the location of an intersection on the diameter axis and the mean diameter. In this case, the increase of variance of the diameter distribution can be expressed as the product of the RICHARDS growth function and a term related to the random fluctuations, Equations (136, 137, and 138). However, after the middle stage of the growth period, it can be expressed approximately by the RICHARDS growth function.

As mentioned before, a height growth model, whose construction is described in Paragraph 3.4, is quite different from a diameter growth model in expression at each forest age. This difference causes different trends in the increase of variance and explains the commonly accepted view that the coefficient of variation of height distribution is about half of that of diameter distribution. This difference in the increase of variance is related closely with the changes of inclination of the diameter-height curve with forest age.

Changes of the coefficient of correlation between diameter and height with forest age is discussed in Paragraph 3.5 where diameter growth follows the model proposed in Paragraph 3.3, and height growth follows the model proposed in Paragraph 3.4. The coefficient of correlation between the diameter increment and the height increment can be considered to be constant regardless of the sizes of diameters and heights. If we suppose that this coefficient is constant regardless of forest age, the coefficient of correlation between diameter and height decreases monotonically as forest age increases.

In Chapter 4, the trend of the fundamental solution of the two-dimensional forest transition equation with forest age is inferred from the results of permanent plots of *C. japonica* in the Akita Region. In that analysis, only trees in the upper story were the object of study because, in some actual forest stands, the distribution of the number of trees in the upper story by diameter and height classes was similar to the two-dimensional normal distribution.

In actual forest stands, generally it is observed that the diameter distribution is skewed positively, whereas height distribution is skewed negatively, and the diameter-height curve is convex along the diameter axis. However, these characteristics can be considered to originate from the existence of trees in the lower story which usually are behind the others in growth, and therefore the trend of growth is quite different from trees in the upper story. Consequently, this paper analyzes the growth of trees in the upper story, and because they compose about eighty percent of the number of trees and about ninety-five percent of the volume of a stand, it is thought that an analysis of the trees in the upper story is sufficient for determining the growth trend of a forest stand.

Distributions of the number of trees in actual forest stands by diameter and height classes were classified into the following five patterns: normal in the upper story, quasi-normal in the upper story, normal, quasi-normal and non-normal, according to test results of the two-dimension normality. About twenty percent of the stands followed the non-normal pattern. Therefore, in most of the actual forest stands, the distribution of the number of trees by diameter and height classes was expressed adequately by the two-dimensional normal distribution. It also was observed that all of the distribution patterns generally change to the normal in the upper story as forest age increases.

For the increase of the mean diameter of trees in the upper story, the MITSCHERLICH growth curve, Equation (179), fitted well. The parameter of its upper limit was about 50 cm, and parameter k was about 0.02. Fitting the GOMPERTZ growth curve, Equation (180), to the increase of variance of the diameter distribution in the upper story resulted in a good fit with an upper limit of about 100 cm². Here, parameter k was fixed to the value of parameter k of the mean diameter increase. The MITSCHERLICH growth curve also fitted well to the increase of the mean height of trees in the upper story. The parameter of its upper limit was about 35 m, and parameter k was about

0.025, which is about 1.3 times the parameter k of the increase in mean diameter. For the increase of the variance of the height distribution in the upper story, the MITSCHERLICH growth curve which passes through the origin, that is, parameter l is unity, fitted well. Here, parameter k was fixed to a value of two times that of the parameter k of the increase of mean height. The upper limit was about 6 m². The coefficient of correlation between diameter and height in the trees in the upper story decreased slightly as forest age increased, but it was very stable in stands, and it seemed to be constant in practical use. Its value varied with stands from 0.7 to 0.85. For the decrease in the number of trees in the upper story between thinnings, the exponentially decreasing curve, Equation (190), fitted well with the rate of 1.3 percent per year.

The characteristics of the fundamental solution of the two-dimensional forest transition equation can be inferred from synthetic considerations of the above-mentioned trends of each growth factor. In other words, the state of transition of a two-dimensional normal distribution which shows the density distribution by diameter and height classes was expressed concretely. This two-dimensional normal distribution starts near the origin of the basic plane where the horizontal axis is diameter and the vertical axis is height. It moves to the upper right-hand corner on the basic plane accompanying the clockwise rotation and diffusion (Figure 29). The trajectory of the center of the distribution was proven theoretically to be a convex curve along the diameter axis, Equation (194), but actually it moved on a straight line (Figures 25, 26, and 28). The clockwise rotation of the distribution indicates that the inclination of the diameter-height curve decreases as the forest age increases (Figures 27 and 28). Because we are considering the two-dimensional normal distribution, note that the diameter-height curve is expressed as a straight line, Equation (196).

In application of the two-dimensional forest transition theory, the development of volume distribution with forest age (Figure 30) and yield prospects by logs (Table 41) are given in Chapter 5. These examples are applications of the fundamental solution. Therefore, we can confirm that the generally known characteristics of volume distribution having a positive skewness originates from the normality of both diameter distribution and height distribution. Because the method used for the yield prospects by logs is available for a case of having initial conditions, this paper presents the basic idea of the application of this theory using the fundamental solution.

This paper discusses a two-dimensional forest transition in the case of a fundamental solution, and the object of this model is a low-density stand where all of the trees have enough growing space. In the natural world, forest stands are usually subjected to various modifications or alterations. Therefore no stand may grow as the fundamental solution does, but by understanding an actual forest stand as such a stand in which the external factors are operating in the stand growing under ideal conditions, we can obtain a good view of growth prospects.

As previously stated, this paper develops the two-dimensional forest transition equation and proves that the fundamental solution of this equation is a two-dimensional normal distribution. The growth models which express the coefficient functions of this equation also were constructed, and the changes with forest age of a two-dimensional density distribution were discussed. The results were expressed easily as a matter of common knowledge. Through this study, the characteristics of the fundamental solution of the two-dimensional forest transition equation were clarified and its image was presented.

引用文献

- 1) 麻生 誠：一斉同齡林ノ樹高曲線及材積曲線ノ研究並常數法ニヨル材積表調製. 林試集報 18: 15~103, 1925
- 2) 粟屋仁志・神戸喜久：収獲予想表の作成 (9) 林分材積表の作成. 32回日林関東支論: 79~80, 1980
- 3) CZARNOWSKI, M. S.: Dynamics of even-aged forest stands. 132pp, Louisiana State University Press, U.S.A., 1961
- 4) 掘 淳一：ランジュバン方程式. 193pp, 岩波, 東京, 1977
- 5) 本多静六：増補改訂森林家必携1974年版. 373~394, 林野弘済会, 東京, 1975
- 6) 梶原幹弘：スギの相対幹曲線について. 日本誌55: 63~70, 1973
- 7) 柿原道喜・木梨謙吉・西沢正久・長正道：林分シミュレーションに対する生長モデルの研究 (IV) 平均直径の推定法, 樹高曲線式の決定について. 87回日林論: 89~90, 1976
- 8) KOLMOGOROV, A.: Über die analytische Methodën in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. 104: 415~458, 1931
- 9) 箕輪光博：生長モデルとしてのワイブル分布について. 林統研誌 7: 44~53, 1982
- 10) 森口繁一：初等数理統計学・184pp, 培風館, 東京, 1957
- 11) 南雲秀次郎・佐藤健：MITSCHERLICH式による森林の生長法則. 東大演報 61: 37~102, 1965
- 12) 中山伊知郎：現代統計学大辞典. 542pp, 東洋経済新報社, 東京, 1962
- 13) 日本立地センター：県産材流通加工団地整備開発調査. 116pp, 日本立地センター, 東京, 1982
- 14) 日本林業技術協会：新版林業百科事典. 375pp, 丸善, 1971
- 15) 沼田 真：植物生態学 (I). 生態学大系第1巻, 546~548, 古今書院, 東京, 1970
- 16) 大隈真一：北村昌美・菅原聡・大内幸雄・梶原幹弘・今永正明：森林計測学. 415pp, 養賢堂, 東京, 1971
- 17) PRODAN, M.: Messung der Waldbestände. 260pp, J.D.Sauerländer's Verlag, Frankfurt/M., 1951
- 18) RAO, C. R. (奥野忠一ほか訳)：統計的推測とその応用. 394~395, 東京図書, 東京, 1977
- 19) 林業試験場：収獲試験地調査報告第2号 秋田営林局管内収獲試験地調査中間報告書. 386pp, 林業試験場, 筑波, 1958
- 20) —————：同第10号 同収獲試験第2次中間報告書. 381pp, 林業試験場, 筑波, 1963
- 21) 林野庁：秋田地方すき林分収獲表. 9pp, 林野庁, 1949
- 22) —————：収獲表調製業務研究資料 1~32. 林野庁, 東京, 1952~1964
- 23) 林野庁計画課：立木幹材積表東日本偏. 137~142, 日本林業調査会, 東京, 1970
- 24) 柴田義貞：正規分布 特性と応用. UP応用数学選書3, 307pp, 東京大学出版会, 東京, 1981
- 25) 四手井綱英：林分密度の問題. 38pp, 日本林業技術協会, 東京, 1956
- 26) 白石則彦：スギ人工林の直径, 樹高, 密度の関係について. 34回日林関東支論: 23~24, 1982
- 27) —————：同齡単純林における直径分布の解析とその生長予測への応用 (II) 直径分散の変化について. 日林誌67: 305~310, 1985
- 28) SLOBODA, B.: Mathematische und stochastische Modelle zur Beschreibung der Dynamik von Bäumen und Beständen, insbesondere das bestandesspezifische Wachstum als stochastischer Prozess, Freiburg i. Br. eingereicht als Habilitation an der Forstl. Fakultät. 1976
- 29) —————：KOLMOGOROV - SUZUKI und stochastische Differentialgleichung als Beschreibungsmittel der Bestandesevolution. Mitt. der For. Bundesversuchsanstalt Wien 120: 71~82, 1977
- 30) —————：Possibilities of mathematically predicting timber production in commercial forests. Bull. Nagoya Univ. For. 7: 261~279, 1984
- 31) ————— and SABOROWSKI, J.: Stand taper form as a stochastic process with an example of application. Proc. X VII IUFRO World Congress Kyoto, Interdivisional: 137~150, 1981
- 32) スネデカー, G. W. ・コクラン, W. G. (畑村又好・奥野忠一・津村善郎 共訳)：統計的方法 原書第6版. 546pp, 岩波, 東京, 1972

- 33) 鈴木太七：林地肥培効果の評価に関する報告書. 86~109, 林野庁, 東京, 1961
- 34) ————：確率過程としての林分の遷移 (I). 日林誌48：463~439, 1966
- 35) ————：同 (II). 日林誌49：17~19, 1967a
- 36) ————：同 (III). 日林誌49：208~210, 1967b
- 37) ————：同 (IV). 日林誌49：402~404, 1967c
- 38) SUZUKI, T.: Forest transition as a stochastic process. Mitt. der For. Bundesversuchsanstalt Wien 91：69~86, 1971
- 39) 鈴木太七：森林経理学. 197pp, 朝倉書店, 東京, 1979a
- 40) ————：林分遷移方程式の新しい誘導について. 90回日林論：127~128, 1979b
- 41) SUZUKI, T.: Beiträge zur biometrischen Modellbildung in der Forstwirtschaft. Schrift. Forst. Fak. Univ. Göttingen. Band 76. 105pp, J.D.Sauerländer's Verlag Frankfurt am Main. 1983
- 42) 鈴木太七・村松直人：木曾ヒノキ年輪解析の一例. 33回日林中支論：37~40, 1985
- 43) SUZUKI, T. and UMEMURA, T. : Forest transition as a stochastic process (II). Proc. IUFRO Meeting Nancy. 1974
- 44) SWEDA, T: Theoretical growth equations and their applications in forestry. 165pp, Doctoral thesis of Nagoya Univ., 1980
- 45) SWEDA, T and UMEMURA, T. : A theoretical height-diameter curve (I) Derivation and characteristics. J. Jpn. For Soc. 62：459~464, 1980
- 46) 竹内 啓：確率分布と統計解析. 314pp, 日本規格協会, 東京, 1975
- 47) 竹内公男・長谷川茂：千葉演習林における林分生長資料. 演習林 (東大農) 19：69~175, 1975
- 48) 寺崎康正・小坂淳一・金豊太郎：林分の構造と成長, 収穫に関する研究 (I) 秋田地方スギ人工林の成長と収穫. 林試研報168：1~306, 1964
- 49) 田辺広城：発展方程式. 109~120, 岩波書店, 東京, 1975
- 50) 田中和博：林分遷移の方程式による理論的収穫表の作成. 157pp, 名大修論, 1978
- 51) ————：林齢に伴う直径分布型および樹高分布の変化に関する一考察. 日林誌65：473~476, 1983
- 52) 田中万里子：輪伐期の研究. 467pp, 東大博論, 1982
- 53) 梅村武夫・鈴木太七：確率過程としての林分の遷移 (VII) 日林誌56：195~204, 1974
- 54) 吉田正男・平田種男：植栽林の林木構成状態に関する統計的研究 (VI). 東大演報48：43~64, 1955
- 55) ————・—————：同 (VII). 東大演報52：1~14, 1956

報 文 目 録

- 1) 鈴木太七・田中和博：確率過程としての林分の遷移 (VI) 二次元林分遷移の方程式. 日林誌63：273~277, 1981
- 2) 田中和博：林齢に伴う直径と樹高の相関係数の変化. 日林誌63：331~334, 1981
- 3) 田中和博・鈴木太七：確率過程としての林分の遷移 (VII) BACHELIER型二次元林分遷移の方程式の解法. 日林誌65：104~106, 1983
- 4) SUZUKI, T. and TANAKA, K. : Forstliche Bestandesübergänge als stochastische Prozesse (III) Gleichung für zweidimensionale Bestandesübergänge. Mitt. der For. Bundesversuchsanstalt Wien 147：53~61, 1983
- 5) 田中和博：林齢に伴う直径分布型および樹高分布型の変化に関する一考察. 日林誌65：473~476, 1983
- 6) ————：収穫表に見られる平均胸高直径生長と平均樹高生長の関係について. 35回日林関東支論：61~62, 1983
- 7) ————・石橋整司：直径階別樹高階別本数分布が二次元正規分布する林分の例. 35回日林関東支論：63~64, 1983
- 8) 白石則彦・田中和博：単純同齢林における直径階・樹高階別生長量について. 96回日林論：139~140, 1985
- 9) 田中和博：直径分散の増加と拡散モデル 基本となる4モデルについて. 林統研誌11：9~21, 1986

- 10) TANAKA, K. : A stochastic model of diameter growth in an even-aged pure forest stand. J. Jpn. For. Soc. 68 : 226~236, 1986
- 11) ————— : A stochastic model of height growth in an even-aged pure forest stand. Why is the coefficient of variation of the height distribution smaller than that of the diameter distribution? J. Jpn. For. Soc. 70 : 20~29, 1988