

## 粘弾性を考慮した盛土材の異方圧密方程式について

井上 宗 治  
三重大生物資源学部

### An Anisotropic Consolidation Equation on the Embankment Material Considering Visco-elastic Behavior

Sohji INOUE  
Faculty of Bioresources, Mie University

#### Summary

It has been well known that flow of pore fluid in compacted soils will also occur horizontally as well as vertically since the surface of an embankment is a natural drainage boundary. In addition, this flow is ultimately predominant in the horizontal direction in the soil structure because of the layering roller-compacted fill.

On the other hand, in consolidation tests on compacted soils as embankment materials, the curve representing time-dependant settlement relationship has a characteristic shape. This phenomenon is very different from ordinary saturated clays. The present objective is to extend the one-dimensional consolidation theory to take account of the two dimensional anisotropic one.

Considering anisotropy of consolidation behavior and characteristic of compacted soils mentioned above, the author derived an anisotropic consolidation equation and its solution under axi-symmetric cylindrical coordinates. In this treatment, an assumption was made that a stress-strain relation of the soil skeleton was represented by a rheological model comprising a Voigt body. Consequently, a general expression of the strain was proposed for the sum of two parts: the effective stress remaining constant and effective stress varying with time (Eq. (12)). Solutions obtained from the basic equation (Eq. (15) or (16)), that are equations regarding the pore pressure distribution (Eq. (26)), consolidation settlement (Eq. (27)) and average degree of consolidation (Eq. (28)), were found to be similar to solutions of one-dimensional equation in form except for additional terms due to radial directional effects. From this reasoning, the author indicated that parameters concerning two-dimensional anisotropic consolidation could be calculated numerically by utilizing parameters obtained from one-dimensional one.

**Key words:** Anisotropy, Consolidation test, Pore pressure, Settlement, Visco-elasticity

#### 1. ま え が き

圧密問題に対して一般に粘土層は極めて層状的である<sup>1)</sup>。それゆえ水平方向透水係数は鉛直方向のそれより

もかなり大きく、したがって水平方向圧密係数  $c_h$  も鉛直方向圧密係数  $c_v$  より数倍ないし数十倍大きいとされている<sup>2)</sup>。ましてやフィルダムのような盛土構造物は一層ごとに転圧して締固められる関係上、水平方向の流体(水+空気)の流れがより一層顕著になる。このような問題に対して一次元圧密の手法を準用するには当然限界

がある。

異方性を考慮して  $c_h$  と  $c_v$  の両方を得るための試験法とその解析法が必要とされるゆえんである。従来、 $c_h$  と  $c_v$  は各々別個に求められてきた。とくにサンドドレーンの設計に要する  $c_h$  を得るための圧密試験法としては様々の工夫がなされてきたがそのいずれもが力学的条件を十分に満足していない<sup>3)</sup>。それらと若干異なるがここでは盛土構造物の圧密沈下を予測する目的を持っている。盛土はその表面が自然の排水境界となるので圧密に伴う水の動きは鉛直方向と同時に水平方向にも生じる。そのような状況に合致した試験法、解析法から  $c_h$ ,  $c_v$  等が得られなければならない。そのため筆者は水平方向にも排水可能な圧密リング（側方排水型圧密リング）を作成して二次元圧密試験を行った。その時得られる時間～圧密沈下量関係から数値計算によって  $c_h$ ,  $c_v$  を求める方法を示したが<sup>4)</sup>、ここでは盛土材としての締固め土の特性を考慮するに十分でなかった。本論文では締固め土に関する二次元異方圧密方程式を誘導する。

締固め土は複雑な力学性状を有するがとくに圧密問題を取扱う場合、時間～圧密沈下量曲線が特異な形状を呈する。すなわち、土中間隙内に存在する気泡の影響で即時沈下部分が卓越した曲線形状となる。このような特性を処理するために土骨格構造の応力～ひずみ関係に粘弾性フォークトモデルを採用した。したがって、以下に展開される基礎式は粘弾性的性質を有すると仮定した締固め土が上下、水平の両方向に圧密作用を生じる状況を想定したものである。

## 2. 二次元圧密方程式とその解

Fig.1 に示す軸対称  $r$ ,  $z$  座標について考える。

$r$ ,  $z$  軸方向の間隙流体（水+空気）の見かけの流速をそれぞれ  $v_r$ ,  $v_z$  間隙流体の密度を  $\rho$  で表わすとこの場合の連続の式として

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

が得られる。ここに、 $t$  は時間座標、 $n$  は土の間隙率。間隙流体の圧縮率を  $\beta$  とし、 $\rho$  を間隙圧  $u$  の関数と考えれば

$$\frac{d\rho}{du} = \beta \cdot \rho \quad \text{すなわち、} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \beta \frac{du}{dt} \quad (2)$$

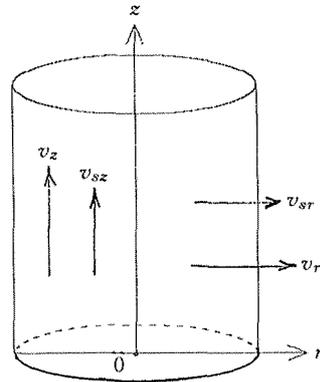


Fig. 1 An axis-symmetric r-z co-ordinates.

が成り立つ<sup>5)</sup>。

(1)式において2次の微小項を無視し、(2)式を用いると

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial t} + n\beta \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

となる。

一方、土粒子骨格構造の変位速度をそれぞれ  $v_{sr}$ ,  $v_{sz}$  で表わすとこの場合の連続の式として

$$\frac{\partial v_{sr}}{\partial r} + \frac{v_{sr}}{r} + \frac{\partial v_{sz}}{\partial z} + \frac{\partial(1-n)}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

が得られる。

間隙流体の運動に対しても Darcy の法則が成り立つとする。ただし、飽和土では間隙水の移動は土粒子の骨格構造の変位に等しいとして取扱えるが気泡を含む間隙流体に対してはこの考え方は通用しない。そこで土粒子骨格構造に対する相対的な間隙流体の流速が間隙水の動水勾配に比例するとして Darcy 則を適用する<sup>6),7)</sup>。すなわち

$$r \text{ 軸方向: } v_r - e \cdot v_{sr} = -\frac{k_r}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \quad (5)$$

$$z \text{ 軸方向: } v_z - e \cdot v_{sz} = -\frac{k_z}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6)$$

ここに

$e$  : 土の間隙比 (=  $n/(1-n)$ )

$k_r, k_z$  : それぞれ  $r$  軸,  $z$  軸方向透水係数

$\gamma_w$  : 水の単位体積重量。

(5)式× $\partial/\partial r$ , (5)式× $1/r$ , (6)式× $\partial/\partial z$ の各式を辺々相加えて微小項を無視すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - e \left( \frac{\partial v_{sr}}{\partial r} + \frac{v_{sr}}{r} + \frac{\partial v_{sz}}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{k_z}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

の関係が得られる。

(7)式に(3), (4)式を代入し, 整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+e} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{e}{1+e} \cdot \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ & \frac{k_z}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

次に土粒子骨格構造の応力～ひずみ関係を規定する。締固め土に限らず一般に土の応力～ひずみ関係は強い非線形性を示す。圧密問題に粘弾性的性質を取り入れる場合はその粘性要素に種々の非線形モデルがあてはめられる<sup>8)</sup>。しかし, そうすると圧密方程式の解析解を得ることは不可能となり問題の取扱いは一層複雑となる。ここでは時間～圧密沈下量の実測値から各圧密パラメータを数値計算によって求めることができるように, 粘弾性モデルとしてはバネ要素と粘性要素とを並列につないだVoigtモデルを採用する。

円筒形(側方排水型)圧密リング内の土が上下方向の載荷を受ける時排水は上下方向および水平方向に同時に生じるが土粒子骨格構造の変形は一次的のみに起ると考える。このことは $k$ 状態(静止土圧状態)にある実地盤中の応力状態にもあてはまるものと思われる。したがって, 即時沈下をも考慮した場合の応力～ひずみ関係は一次元と同様な取扱いとなる<sup>9)</sup>。

土粒子間に作用する有効応力 $\sigma'$ とひずみ $\varepsilon$ との間には周知の次式が成り立つとする。

$$\sigma' = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (9)$$

ここに,  $E, \eta$ :それぞれ土のヤング係数, 粘性係数  
 $\sigma' = \text{const.}$  ( $=p, p$ :圧密荷重)の下では上式は

$$\varepsilon = \frac{p}{E} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right\} \quad (10)$$

となるが $\sigma'$ が一定でなく時間と共に変化(増加)するならば $\sigma' = \sigma'(t)$ として(10)式は次式のようになる<sup>10)</sup>。

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma'(\tau) \exp\left\{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)\right\} d\tau \quad (11)$$

ここに,  $\tau$ は $0 \leq \tau \leq t$ なる時間変数。

したがって, 即時沈下を含む締固め土の応力～ひずみ関係式は(10)式と(11)式を重ね合わせたものとする。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{p}{E} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right\} \\ &+ \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma'(\tau) \exp\left\{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)\right\} d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式を(8)式に代入する。ただし,  $\sigma'(t) = \sigma'(t, r, z) = \sigma'$ とおく。

$$\begin{aligned} & -\frac{p}{\eta} \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) + \frac{E}{\eta^2} \int_0^t \sigma' \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)\right\} d\tau - \frac{\sigma'}{\eta} + \frac{\beta \cdot e}{1+e} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{k_z}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

微分公式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \sigma' \cdot \exp\left\{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)\right\} d\tau \\ &= -\frac{E}{\eta} \int_0^t \sigma' \cdot \exp\left\{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)\right\} d\tau + \sigma' \end{aligned}$$

および

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

を用いる。また, (13)式を線形化するため式中の $e$ を圧密過程におけるその平均値 $\bar{e}$ に置き換える。若干の計算の後(13)式は次のように整理される。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{E}{\eta} \cdot \frac{\beta \cdot \bar{e}}{1+\bar{e}} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta \cdot \bar{e}}{1+\bar{e}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{k_z}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} \\ &+ \frac{E}{\eta} \left\{ \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

上式で

$$\frac{1}{\eta} = b_1, \frac{E}{\eta} = b_2, \frac{\beta \cdot \bar{v}}{1 + \bar{v}} = b_3, \frac{k_z}{\gamma_w} = c_2, \frac{k_r}{\gamma_w} = c_r$$

とおくと

$$b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (b_1 + b_2 b_3) \frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \right) \left\{ c_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} \quad (15)$$

となる。上式が粘弾性を考慮した盛土材の異方圧密方程式である。\$c\_r \neq c\_z\$ でお非線形なので

$$\xi = \sqrt{\frac{c_r}{c_z}} \cdot z = \sqrt{\frac{k_r}{k_z}} \cdot z$$

なる変数変換を施す<sup>11)</sup>。そうすると

$$b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (b_1 + b_2 \cdot b_3) \frac{\partial u}{\partial t} = c_r \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u) + b_2 \cdot \nabla u \right\} \quad (16)$$

ただし、

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

となる。

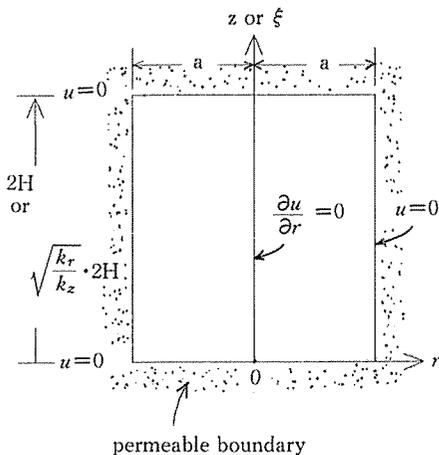


Fig. 2 Boundary conditions of a consolidation specimen.

圧密リング中の供試体を想定した境界条件、

$$\left. \begin{aligned} z=0 (\xi=0) \text{ で } u(t,r,0) &= 0 \\ z=2H \left( \xi=2\sqrt{\frac{k_r}{k_z}} \cdot H \right) \text{ で } u(t,r,2\sqrt{\frac{k_r}{k_z}} H) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} r=0 \text{ で } \frac{\partial u(t,0,\xi)}{\partial r} &= 0 \\ r=a \text{ で } u(t,a,\xi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ならびに、初期条件

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ で } u(0,r,\xi) &= p \\ t=0 \text{ で } -b_1 \cdot \sigma'(0,r,\xi) + b_3 \frac{\partial u}{\partial t} &= c_r \cdot \nabla u \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

の下で(16)式の解を求める (\$2H\$ : 供試体高さ, \$a\$ : 供試体半径)。

変数分離法により(16)式の一般解として次式が得られる<sup>12)</sup>。

$$\begin{aligned} u(t,r,\xi) &= (C+D) \{ \exp(-\mu t) + \exp(-\nu t) \} \\ &\times \{ A_1 \sin(\phi \xi) + A_2 \cos(\phi \xi) \} \{ B_1 J_0(\lambda r) \\ &+ B_2 Y_0(\lambda r) \} \end{aligned} \quad (20)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mu &= Q - \sqrt{Q^2 - R}, \nu = Q + \sqrt{Q^2 - R} \\ Q &= \frac{1}{2} \left( \frac{b_1}{b_3} + b_2 + \lambda^2 \frac{c_r}{b_3} \right), R = \lambda^2 \cdot b_2 \cdot \frac{c_r}{b_3} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

\$C, D, A\_1, A\_2, B\_1, B\_2, \mu, \nu, \phi, \lambda, \lambda\$ は積分定数で

$$\lambda^2 = \phi^2 + \chi^2 \quad (22)$$

の関係がある。また、\$J\_0, Y\_0\$ はそれぞれ第1種、第2種の0次 Bessel 関数記号を表す。

境界条件(17)より \$A\_2=0\$

$$\therefore \sin(\phi \cdot 2H \sqrt{k_r/k_z}) = 0$$

$$\therefore \phi = \frac{m\pi}{2H} \cdot \sqrt{\frac{k_z}{k_r}} (= \phi_m \text{ とおく}) (m=1,2,3,\dots)$$

境界条件(18)より  $B_2=0$

$$\therefore J_0(\chi a)=0$$

上式を満たす正の0点を  $\{\chi_{n(n-1)}\}$  と表す。

$A_1 \cdot B_1 \cdot C = C_{mn}$ ,  $A_1 \cdot B_1 \cdot D = D_{mn}$ ,  $\mu = \mu_{mn}$ ,  $\nu = \nu_{mn}$  とおくと(20)式は

$$u(t, r, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |C_{mn} \cdot \exp(-\mu_{mn} \cdot t) + D_{mn} \cdot \exp(-\nu_{mn} \cdot t)| \cdot J_0(\chi_n r) \cdot \sin(\phi_m \cdot \xi)$$

となる。

さらに初期条件(19)の第1式より

$$C_{mn} + D_{mn} = \frac{2p}{M \cdot \chi_n} \cdot \frac{2}{a J_1(\chi_n a)} \quad (23)$$

(18)の第2式より

$$b_3(\mu_{mn} \cdot C_{mn} + \nu_{mn} \cdot D_{mn}) = \frac{4p}{M \cdot \chi_n \cdot a J_1(\chi_n a)} \cdot c_r \lambda_{mn}^2 \quad (24)$$

が得られる。ただし、 $J_1$  は第1種1次のBessel関数記号。また、 $M = (2m-1)\pi/2$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ),

$$\phi_m^2 + (\chi_n/a)^2 = \lambda_{mn}^2 \quad (25)$$

とおいた。

結局、条件(17)~(19)の下での(16)式の特解は次式となる。

$$u(t, r, \xi) = 4p \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M \cdot \chi_n \cdot a J_1(\chi_n a)} \times \left\{ W_{mn} \cdot \exp(-\nu_{mn} \cdot t) - V_{mn} \cdot \exp(-\mu_{mn} \cdot t) \right\} \times \sin(\phi_m \cdot \xi) \cdot J_0(\chi_n r) \quad (26)$$

ここに

$$V_{mn} = \frac{1}{\nu_{mn} - \mu_{mn}} \left( \frac{c_r}{b_3} \cdot \lambda_{mn}^2 - \nu_{mn} \right)$$

$$W_{mn} = \frac{1}{\nu_{mn} - \mu_{mn}} \left( \frac{c_r}{b_3} \cdot \lambda_{mn}^2 - \mu_{mn} \right)$$

とおいた。

側方排水型圧密リングから得られる時間~沈下量データに上式をフィットさせて式中の圧密パラメータを決定し、実地盤の沈下性状を予測することになる。そのためには上式をなお時間だけの関数、すなわち平均圧密度に関する式に変形する必要がある。

土の変形は  $z$  軸(鉛直)方向だけに生じると仮定しているから(26)式で表わされる間隙圧の  $r$  軸(水平)方向分布についてまずその平均値をとる。

$$u(t, \xi) = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} u(t, r, \xi) \cdot r dr d\theta}{\int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\theta} = 8p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M \cdot (\chi_n a)^2} \left\{ W_{mn} \cdot \exp(-\nu_{mn} \cdot t) - V_{mn} \cdot \exp(-\mu_{mn} \cdot t) \right\} \sin(\phi_m \cdot \xi)$$

ただし、 $\theta$ : 中心角

上式および応力~ひずみ関係の(12)式を用いて沈下量  $S(t)$  を求める。ただし、変数  $\xi$  を  $z$  に戻して計算する。

$$S(t) = \int_0^{2H} \varepsilon(t) dz = \int_0^{2H} \left\{ \frac{p}{E} (1 - \exp(-b_2 t)) + b_1 \int_0^t \left[ p - u(\tau, z) \right] e^{-b_2(t-\tau)} d\tau \right\} dz = 2b_1 \cdot H \cdot p \left\{ \frac{1}{b_2} \left[ 1 - \exp(b_2 t) \right] + \frac{1}{b_2} - 8 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^2 \cdot (\chi_n a)^2} \left[ \frac{V_{mn}}{\mu_{mn} - b_2} \times \exp(-\mu_{mn} \cdot t) - \frac{W_{mn}}{\nu_{mn} - b_2} \exp(-\nu_{mn} \cdot t) \right] - \exp(-b_2 \cdot t) \left[ \frac{1}{b_2} - 8 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^2 \cdot (\chi_n a)^2} \times \left( \frac{V_{mn}}{\mu_{mn} - b_2} - \frac{W_{mn}}{\nu_{mn} - b_2} \right) \right] \right\} \quad (27)$$

上式で  $t \rightarrow \infty$  とすると  $S(\infty) = 4b_1 H p / b_2$  となるから、結局、平均圧密度  $U(t)$  は次式のように得られる。

$$U(t) = \frac{S(t)}{S(\infty)} = 1 - \frac{1}{2} \exp(-b_2 \cdot t) - 4b_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^2 (\chi_n a)^2}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{V_{mn}}{\mu_{mn} - b_2} \exp(-\mu_{mn} \cdot t) - \frac{W_{mn}}{\nu_{mn} - b_2} \exp(-\nu_{mn} \cdot t) \right\} \\ & - \exp(-b_2 t) \left\{ \frac{1}{2} - 4b_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^2(\chi_n \alpha)^2} \right. \\ & \left. \times \left( \frac{V_{mn}}{\mu_{mn} - b_2} - \frac{W_{mn}}{\nu_{mn} - b_2} \right) \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

### 3. 考 察

締固め土に対する2次元異方圧密方程式とその解の誘導にあたって検討、考察した結果を列記すると以下のようである。

(1) 方程式の解である間隙圧分布式(28式)、沈下量の式(27式)および圧密度の式(29)式はいずれも一次元の場合のものと同じ形をしている。若干の相違は $r$ 軸方向に関する演算に伴うものである。したがって、両者の間には本質的な違いはないことがこれらの式よりわかるであろう。

(2) 一次元の場合に較べて2次元の圧密度の式(27)では $\sum \sum$ 記号の中の $\{ \}$ の第2項は消えずに残っている。消去できるためには

$$4b_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^2(\chi_n \alpha)^2} \left( \frac{V_{mn}}{\mu_{mn} - b_2} - \frac{W_{mn}}{\nu_{mn} - b_2} \right) = \frac{1}{2}$$

が数学的に証明されなければならないが筆者にはできなかった。そのためやや複雑な式形となってしまった。数値計算によってでも消去し得る項であるか否か今後検証するつもりである。

(3) 応力~ひずみ関係としてバネ要素と粘性要素を並列に結んだ Voigt モデルを仮定した。一方、土中の間隙流体に対する圧力変化と密度変化とを圧縮率 $\beta$ で関係付けたがこれも一種の応力~ひずみ関係である。このことは Voigt モデルと $\beta$ なるバネ要素とを直列につないだ3要素レオロジーモデル (Fig. 3) を適用することと圧密方程式を誘導する上では全く同じことになる。つまり、間隙流体の圧縮性を考慮せず直接応力~ひずみ関係を3要素レオロジーモデルで近似しても同様の結果が得られるということである。しかし、2要素 Voigt モデルと間隙流体の圧縮率としたことによって各要素の力学的役割が明確になる。例えば、間隙流体の圧縮性を $\beta$ なるバネ要素が受け持ち、その後土粒子骨格構造の弾

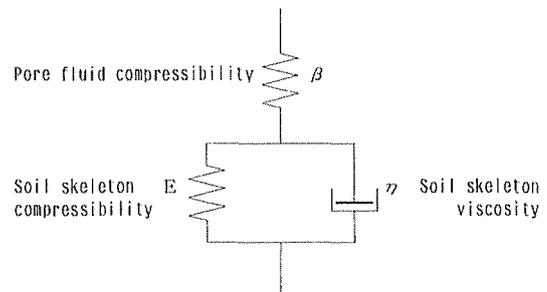


Fig. 3 The three-parameter rheological model with one viscous and two elastic elements.

性変形が $E$ により、粘性変形が $\eta$ により負担されるというように考えることができる。

(4) 応力~ひずみ関係(2)式の導入は全応力、有効応力、間隙圧の間の以下のような考え方による。

載荷瞬間の圧密荷重 $p$ は先ず有効応力として作用し、その微小時間後に間隙圧 $u$ が発生した結果 $p$ は全応力となり $p = \sigma' + u$ に変化すると考える。つまり、前段階で即時沈下の影響を考慮したことになる。したがって、圧密方程式を解く際の初期条件(9)は厳密に言えば載荷微小時間後の状態を与えており、実質的な有効応力の変化あるいは間隙圧の変化はその時点から始まると仮定している。

(5) 一般に多次元圧密方程式は基礎式(10) (あるいは(15)式の右辺に応力の第1不変量の時間微分項が付加されるとされている<sup>13),14)</sup>。しかし、ここに展開した圧密方程式は2次元異方排水状態にある圧密供試体を対象にしている。剛性板を介して載荷される圧密荷重は試験中一定であるからこの時間微分項は消滅する<sup>15)</sup>。その意味では(10)式は近似式ではなく厳密式である。もちろん、実盛土の解析にあたってはこの時間微分項は無視し得ない。この項を無視した Terzaghi and Rendlic の多次元圧密方程式は近似式とみなされているが解析上の簡便さを考慮すればこの近似式も使い方によっては有効であると思われる。いずれにしても異方圧密状態での圧密パラメータに関する情報が不可欠であることは明らかである。

(6) 本研究の最終目標である式(1)中の圧密パラメータの算定法の概要を記しておく。

水平方向透水係数 $k_r$ と鉛直方向透水係数 $k_z$ あるいは水平方向圧密係数 $C_h$ と鉛直方向圧密係数 $C_v$  (式(1)中の $C_r/b_3$ と $C_z/b_3$ に相当)の二つのパラメータを得る

ために同じ圧密供試体を一次元と二次元の2回実施する必要がある。得られるパラメータの精度は専ら二つの供試体の同一性に依存する。

まず、一次元の実験から各パラメータ  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $C_z$  を定める。次いで、側方排水型圧密リングを用いて2次元異方圧密試験を行う。その時間～圧密沈下量データから数値計算法<sup>16)</sup>によって  $\mu_{mn}$  ( $\nu_{mn} > \mu_{mn}$  であるから  $\nu_{mn}$  に関する項は比較的速く消散する) の第1近似値  $\mu_1$  を求める。

21)式の関係より

$$\mu_1 \left( \frac{b_1}{b_3} + b_2 + \lambda^2_{mn} \frac{c_r}{b_3} \right) - \mu_1^2 = \lambda^2_{mn} \cdot b_2 \cdot \frac{c_r}{b_3}$$

25)式より

$$\begin{aligned} \lambda^2_{mn} &= \phi_m^2 + \left( \frac{\chi_n}{a} \right)^2 = \left( \frac{M}{H} \right)^2 \frac{k_z}{k_r} + \left( \frac{\chi_n}{a} \right)^2 \\ &= \left( \frac{M}{H} \right)^2 \frac{c_z}{b_3} \cdot \frac{b_3}{c_r} + \left( \frac{\chi_n}{a} \right)^2 \\ \therefore \frac{c_r}{b_3} \lambda^2_{mn} &= \left( \frac{M}{H} \right)^2 \frac{c_z}{b_3} + \left( \frac{\chi_n}{a} \right)^2 \frac{c_r}{b_3} \end{aligned}$$

が得られるからこれら2式より  $\lambda^2_{mn}$  の項を消去して、 $c_r/b_3$  を求めると

$$\begin{aligned} \frac{c_r}{b_3} &= \frac{1}{\left( \frac{\chi_n}{a} \right)^2 (b_2 - \mu_1)} \left\{ \mu_1 \left( \frac{b_1}{b_3} + b_2 \right) - (b_2 - \mu_1) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{M}{H} \right)^2 \frac{c_z}{b_3} - \mu_1^2 \right\} \end{aligned}$$

が得られる。

上式の右辺は  $M$ ,  $\chi_n$  にそれぞれ  $m=n=1$  の値を用いるとすべて既知となる。 $\mu_1$  をその第1近似値の前後で変化させ、それによって得られた  $c_r/b_3$  の値を用いて計算された圧密度の式28が実測時間～圧密沈下量関係に最適に fitting すると判断される  $c_r/b_3$  値を繰り返し計算によって求める。

#### 4. ま と め

盛土はその表面が自然の排水境界であるので圧密に伴う土中の間隙流体の流れは上下方向はもちろんのこと水

平方向にも生じる。また、層状に転圧盛土される関係上、構造的にも水平方向の流れが極めて顕著となる。一方、盛土材料としての締固め土の時間～圧密沈下量関係は即時沈下部分が卓越した曲線形状をなし、一般の飽和粘土のそれとは大いに事情を異にする。

このような圧密の異方性と締固め土の特性を考慮して、軸対称円筒座標の下での異方圧密方程式とその解を示した。その際用意した土粒子骨格構造の応力～ひずみ関係は Voigt 型レオロジーモデルであるが、ひずみは有効応力一定状態と時間的に変化する有効応力状態との線形和として表わした。

圧密方程式の解である間隙圧分布、沈下量、圧密度に関する式は一次元の場合と較べて半径方向軸の影響が付加している以外はほとんど同様の式形を呈している。したがって、一次元解析から得られるパラメータを用いて二次元(異方)圧密パラメータを数値計算できることを示した。

ここに展開した理論は側方排水型圧密リングを用いた異方圧密試験結果の解析を対象としている。実盛土の沈下解析にあたっては基本圧密方程式を若干修正する必要があるかもしれないが、その時、本方法から得られる圧密パラメータが有効となるであろう。

なお、実験値による圧密パラメータの具体的な算定結果に関しては改めて稿を起こしたいと考えている次第である。

#### 引用文献

- 1) Rowe, P. W., The calculation of the consolidation rates of laminated, varved or layered clays, with particular reference to sand drains, *Géotechnique*, Vol. 14, No. 4, p. 321-340 (1964).
- 2) Wu, T. H., N. Y. Chang and E. M. Ali, Consolidation and strength properties of a clay, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 104, No. GT7, p. 889-905 (1978).
- 3) Shields, D. H. and P. W. Rowe, Radial drainage oedometer for laminated clays, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 91, No. SM1, p. 15-23 (1965).
- 4) 井上宗治, 前田文平, 二次元圧密による圧密係数の算定方法について, 第23回土質工学研究発表会講演集, p. 327-330 (1988).

- 5) Chang, C. M. and Mostafa, A. F., Boundary layer theory of waves in a poro-elastic sea bed, International Symposium on Solis and Transient Loading, p. 609-618 (1980).
- 6) 赤井浩一監修, 大草重康訳編. フローリンの土質力学第Ⅱ巻, 森北出版, p. 86-91 (1971).
- 7) 山上拓男. 変形し得る多孔体中の流れの支配方程式に関する考察, 土木学会論文報告集, 第304号, p. 95-104 (1980).
- 8) Berry, P. L. and W. B. Wilkinson, The radial consolidation of clay soils, *Géotechnique*, Vol. 19 No. 2, p. 253-284 (1969).
- 9) 井上宗治. 盛土材料としての土の一次元圧密方程式について, 三重大学生物資源学部紀要第1号, p. 63-71 (1988).
- 10) 赤井浩一監修, 大草重康訳編. フローリンの土質力学第Ⅲ巻, 森北出版, p. 273-280 (1971).
- 11) W. B. Wilkinson, Constant head in situ permeability tests in clay strata, *Géotechnique*, Vol. 18, No. 2, p. 172-194 (1968).
- 12) 山口柏樹. 土質解析法, 技報堂出版, p. 72-73 (1987).
- 13) Biot, M. A., General theory of three-dimensional consolidation, *journal of applied physics*, Vol. 12, p. 155-164 (1941).
- 14) Davis, E. H. and H. G. Poulos, Rate of settlement under two- and three-dimensional consolidations, *Géotechnique*, Vol. 22, No. 1, p. 95-114 (1972).
- 15) Sills, G. C., Some conditions under which Biot's equations of consolidation reduce to Terzaghi's equation, *Géotechnique*, Vol. 25, No. 1, p. 130- 132 (1975).
- 16) 井上宗治. 数値計算法による圧密量-時間関係の整理法, *土と基礎*, Vol. 34, No. 12, p. 57- 61 (1986).