

同種・同齡林の成長関係

—自然枯死線—

林 拙 郎

三重大生物資源学部

Growth Relationship of Even-aged Pure Stands

— $v - \rho$ Trajectory Before Reaching to the Full-density Curve—

SETSUO HAYASHI

Fac. of Bioresources, Mie University

Abstract

A discussion on a $v - \rho$ trajectory before reaching a full-density curve is given. This $v - \rho$ trajectory is derived from $v - t$ and $\rho - t$ curves. First, the following equation is assumed for the decreasing process of stand density from the initial condition: $(1/\rho) d\rho/dt = -\lambda_m \rho / \rho_0$, $\lambda_m = m (t^\wedge (m - 1)) / \alpha$. Here, ρ is the stand density, ρ_0 the initial stand density, t the time, and m and α the constants. The solution of this equation is: $\rho_0 / \rho = 1 + (t^\wedge m) / \alpha$. Second, the following equation is assumed for the growth process of the stand from the initial condition; $(1/v_0) dv/dt = \lambda_0 m (t^\wedge (m - 1)) / \alpha$. Here, v is the mean stem-volume and v_0 the initial value of v . The solution of this equation is given as: $v / v_0 = 1 + \lambda_0 (t^\wedge m) / \alpha$. Here, m and α are the same values in formula $\rho(t)$. The results of the fitting above formula for the stand density and time data of SPURR *et al.* yield the each coefficients of formula $\rho(t)$. Thus, m value is given as: $m = 3$. The results of eliminating $(t^\wedge m / \alpha)$ from these $\rho(t)$ and $v(t)$ equations yield the following formula: $1/\rho = Av + B$, $A = 1 / (\lambda_0 \rho_0 v_0)$, $B = (\lambda_0 - 1) / (\lambda_0 \rho_0)$. This equation is simplest in equations of $v - \rho$ trajectory before reaching the full-density curve. and it is a kind of TADAKI type equation. In addition, the $v - t$, $\rho - t$ and $v - \rho$ equations are derived too in case of consideration of goal values (V) and (ρ^*). $\rho(t)$ equation is related to equation $v(t)$ except for the growth coefficient in the following way: $\rho \propto 1/v$ (symbol $z^\wedge x / a$ represents z^x / a in the above formula).

Key words: growth curve, stand density, mortality, stem-volume, full-density curve

I はじめに

成長して森林となる幼齡林分は、植栽直後から時間とともに成長するが、同時に自然枯死が生じ、やがて自然間引が起こるようになる。そしてある成長段階からは、間引強度の強い最多密度曲線^{註1)}上を成長して行くことになる。最多密度曲線に到達する前の $v \sim \rho$ trajectory

を、只木¹⁾は自然枯死線と呼び、次式で示した。

$$1/\rho = Av + B \quad (1)$$

ここに、 ρ ：個体密度、 v ：平均単木幹材積、 A 、 B ：定数である。上の(1)式が trajectory をなすということは、当然ながら、 ρ 、 v が時間 t の関数であることを意味している。

最近まで筆者²⁾は、自然枯死線と最多密度曲線をつなげた $v \sim \rho$ trajectory のモデルを考えていたが、今回は、

一応両者を切り離して考えることにし、主に只木の自然枯死線(1)式について考えてみたい。

個体密度 ρ と平均幹材積 v との関係を表す $v \sim \rho$ trajectory は、適切な $\rho \sim t$ 式と $v \sim t$ 式を組み合わせることによって求められることが、箕輪³⁾⁴⁾や内藤⁵⁾、さらに筆者⁶⁾によって指摘されている。したがって、今回もまず、最多密度曲線に到達する前の $\rho \sim t, v \sim t$ 関係を調べ、同時に両者の関係も考察することにしたい。こうして得られる $\rho(t)$ 式と $v(t)$ 式を用いて、自然枯死線、すなわち只木式の誘導を行い、最多密度曲線との関係も調べてみようと思う。最後に得られたモデルを用いて成長解析を行い、全成長段階に対する枯死率 μ の変化や、RGR の変化の様子を考察することにしたい。

なお、平均単木幹重量 w は、今回は平均幹材積 v で置き代えて用いることにする(上限値 W についても同様に V で置き代える)。

II 自然枯死線上の $\rho \sim t$ 曲線と $v \sim t$ 曲線

1. $\rho \sim t$ 曲線

筆者は、自然枯死線上で個体密度 ρ の減少経過を、かって二つの段階に分けて近似させたことがある²⁾。しかし、そこでも述べたように近似の度合いは不十分であった。一方、既報⁶⁾で行ったように $v(t)$ 式を推定するには、 $\rho \sim t$ 関係を調べるのが重要であった。そこで、ここでは新たに、自然枯死線上での密度 ρ の減少式を調べることにする。

既報⁶⁾で用いた ρ の推定式は、枯死率の形式で書くと、次式ようになる⁶⁾。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{m}{\alpha} t^{m-1} \quad (2)$$

ここに、 t : 時間, m, α : 定数である。上式は、右辺が時間のみ関数であり、森林が最多密度曲線に到達した段階で第一義的に用いることができる²⁾⁶⁾。

しかし、ここで議論したいような植栽後の森林(幼齢林)から最多密度曲線に到達するまでの森林は、只木¹⁾によれば自然枯死が生じており、自然枯死線上では枯死率が(2)式のように時間のみ関数ではなく、そのときの個体密度にも関係すると考えられる。したがって、個体密度の変化に関しては非線型性が強いものになる。

そこで、次の形の式を仮定する。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{m}{\alpha} t^{m-1} \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3)$$

ここに、 ρ_0 は初期個体密度である。上式は、個体密度 ρ に関する二次の非線型微分方程式である。 $t=0, \rho=\rho_0$ としたときの式(3)の解は

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{1}{\alpha} t^m \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0 / \left(1 + \frac{1}{\alpha} t^m\right) \quad (4')$$

で与えられる。上式を変形すると

$$\frac{1}{\alpha} t^m = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \quad (5)$$

となる。

SPURR 等⁷⁾のデータに対して、ある t での ρ を与えて左辺の関係を調べたものが図-1である。この図より、個体密度 ρ の減少に関する(4)、(5)式の関係が、林齢27年頃までわたってよく成立していることがわかる。ここで、 ρ の初期値を ρ_0 とすれば、(5)式で後述の残差の二乗和を最少にする ρ_0 は、次のように与えられる。

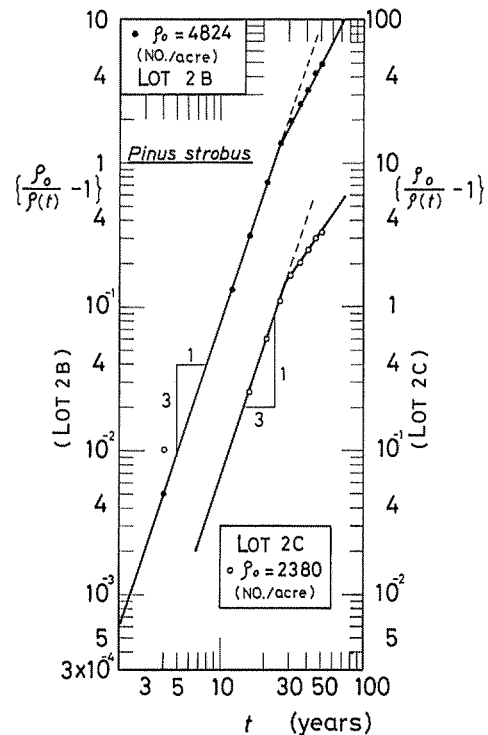


図-1 個体密度 $\rho(t)$ に関する t^m/α の変化
Variation of t^m/α regarding to stand density ($\rho(t)$)

$$\rho_0 = 4824 \text{ (本/acre)} : \text{LOT 2B}$$

$$\rho_0 = 2380 \text{ (本/acre)} : \text{LOT 2C}$$

図-1の点の並びは直線であり、最初の直線 (t が27年頃まで) 傾き m として

$$m = 2.996 : \text{LOT 2B}$$

$$m = 2.997 : \text{LOT 2C}$$

が得られる。上の各定数は、次のようにして求めた。まず、 ρ_0 を仮定することによって(5)式の右辺が計算され、(5)式の左辺の係数 α, m が最小二乗法で求められる。こうして各 ρ_0 に対する(5)式が決定されるので、この式とデータとの残差の二乗和(誤差相当)が求められる。ここでは、求められた残差の二乗和のうちで最小値のそれに対応する ρ_0 の値を初期個体密度 ρ_0 とした。また、係数のあてはめに用いたデータはLOT 2Bの場合

林齢4~26年までの5組の個体密度のデータであり、LOT 2Cでは、 $t = 4$ 年のデータを除いた3組の個体密度のデータである^{注2)}。

以上より、ベキ係数 m はストロブマツの場合

$$m = 3.0 \quad (6)$$

と推定することができる。一方、 $1/\alpha$ は

$$1/\alpha = 7.75 \times 10^{-5} : \text{LOT 2B} \quad (7)$$

$$1/\alpha = 6.37 \times 10^{-5} : \text{LOT 2C} \quad (8)$$

となる。図-1を参照すると、LOT 2Bの場合(4)、(5)式は、林齢27年頃まで成立していることがわかる。図-1では、その後も別な勾配で(5)式が成立しているようにみられるが、この領域ではLOT 2BとLOT 2Cとで m の値が異なり、(5)式はあまり意味をもたないように考えられる。後述するように、この後は徐々に最多密

表-1 LOT 2B データの成長解析 (基礎データは SPURR ら⁷⁾による)
Growth analysis of LOT 2B data (Original data is from SPPUR *et al.*⁷⁾)

t (years)	ρ			RMR μ	v			RGR	Stage
	(Ac)	(Ca)	(Dev)		(Ac)	(Ca)	(Dev)		
	(No./acre)		(%)	(%)	(ft ³)	(ft ³)		(%)	
0		4824				3.10E-4			
1		4824		2.32E-2		4.15E-4		75.9	
2		4821		9.29E-2		1.15E-3		110	
3		4814		2.09E-1		3.15E-3		90.2	I
4	4800	4800	0.0	3.70E-1		7.04E-3		71.7	
5		4778		5.76E-1		1.34E-2		58.6	
7		4699		1.11		3.64E-2		42.5	
10		4477		2.16		0.105		29.9	
12	4265	4254	-0.3	2.95	0.1829	0.182	-0.5	23.0	
16	3682	3662	-0.5	4.52	0.4364	0.431	-1.2	18.7	
21	2786	2808	0.8	5.97	0.9835	0.974	-1.0	14.3	
26	2052	2042	0.4	6.65	1.752	1.85	5.6	11.5	
19		3507				0.787			
21	2786	2786	0.0	7.67	0.9835	1.137	15.6	12.3	
26	2052	2063	0.5	5.05	1.752	1.839	5.0	8.09	
31	1630	1640	0.6	4.22	2.695	2.655	-1.5	6.76	II
36	1353	1346	-0.5	3.76	3.571	3.648	2.2	6.02	
41	1144	1123	-1.8	3.45	4.850	4.865	0.3	5.52	
46	925	951	2.8	3.22	6.399	6.350	-0.8	5.16	
51	815	813	-0.2	3.04	8.560	8.157	-4.7	4.87	

Ac; actual, Ca; Calculated, Dev; Deviation (= (Ca-Ac)/Ac) RMR; relative mortality rate, RGR; relative growth rate Stage I; natural thinning curve, Stage II; full-density curve, $3.10E-4 = 3.10 \times 10^{-4}$

度状態に移行し、先の(2)式のような枯死条件⁶⁾が生ずるものと思われる。表-1に、LOT 2B に対する個体密度 ρ の計算結果を示したが、あてはめた結果は良好である。同表中の stage II は、最多密度曲線に対応し、パラメータは既報⁶⁾と同一である。

ところで、(4)式は次式のようにも書ける。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0 \alpha} t^m \quad (9)$$

$$= 1/\rho_0 + \varepsilon(t) \quad (9')$$

ここに

$$\varepsilon(t) = t^m / (\rho_0 \alpha)$$

である。こう書くと明らかなように、上式は次の穂積式⁸⁾に類似していることがわかる。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho^*} (e^{\tau/\lambda_0} - 1) = \frac{1}{\rho_0} + \varepsilon(t) \quad (10)$$

ここに

$$\tau = \int \lambda(t) dt, \quad \varepsilon(t) = (1/\rho^*) (e^{\tau/\lambda_0} - 1)$$

$\lambda(t)$ = 成長係数関数^{注3)}, λ_0 = 成長係数

ρ^* = ρ の限界値で最多密度曲線上での初期値

である。しかし、(9)式と(10)式では $\varepsilon(t)$ の形が異なっている。というのは、穂積式は次のような式

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda(t)}{\lambda_0} e^{\tau/\lambda_0} \frac{\rho}{\rho^*} \quad (11)$$

を用いているからである。

個体密度 ρ の減少式には、上の(10)、(11)式のような穂積式もあるが、今回は式の簡潔性を重視し、より簡単な(9)式を用いて以後の考察を行う。

2. $v \sim t$ 曲線

(1) ρ と v との関係

筆者は、既報⁶⁾で次の ρ -logistic 式を示した。

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda_0}{\rho} \left(1 - \frac{v}{V}\right) \quad (12)$$

ここに、 v : 平均単木幹材積、 ρ : 個体密度、 λ_0 : 成長係数、 V : v の上限値である。そして、既報⁶⁾では V を ρ の関数として一つの解を示した。

続いて筆者²⁾は、その森林が当初から最多密度曲線上にある場合に対して、上限値 V を $V = \text{const.}$ とした ρ -logistic 式の解で $V \rightarrow \infty$ とすることによって次式が得られることを示した。

$$\left(\frac{v}{v_0}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\lambda_0} = 1 \quad (13)$$

ここに、 v_0 : 最多密度曲線上での v の初期値、 ρ_0 : 最多密度曲線上での個体密度の初期値、 v, ρ : 最多密度曲線上での平均単木幹材積と個体密度である。ここで、ベキ係数 β なる従来の最多密度曲線と比較することによって

$$\lambda_0 = \beta$$

を得るので、上式は、次のような最多密度曲線を表しているものと考えることができる。

$$\left(\frac{v}{v_0}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\beta} = 1 \quad (14)$$

したがって、最多密度曲線のベキ係数 β は、この場合には成長係数を意味していると解釈することができる²⁾。

ところで、上式の誘導には、必ずしもこのような上限値 V を含む ρ -logistic 式を使わなくても良かったのではないかと考えられる。というのは以下でも示すように、上の(14)式には上限値の V が入っていないということがまず挙げられるからである。

既報⁶⁾では、 ρ -logistic 式の誘導に当たって次式を用いている。

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \lambda_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \left(1 - \frac{v}{V}\right) \quad (15)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (16)$$

ここに、 t : 時間、 λ_0 : 成長係数、 m, α : (2)式と同一の定数である。ところが、(15)式中の右辺カッコ内の第2項、 v/V で V がかなり大きいとするとこの項は意味を持たないので、無視することになれば

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \lambda_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \quad (17)$$

となる。上式と(2)、(16)式より次式を得る。

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\rho} = -\frac{\lambda_0}{\rho} \quad (18)$$

この(18)式の解で、 $\lambda_0 = \beta$ としたものが、最多密度曲線を表す先の(14)式である。以上より明らかなように ρ -logistic 式中の上限値 V や(15)式中の V の因子は、最多密度曲線そのものを説明する上では必要がないということができる。

次に、 ρ と v に関する(2)式と(17)式の間関係を調べてみよう。両式は、 λ_0 を除くと時間因子は同じであるが、 ρ と v が異なっており、それらは方程式上で初期値を含めて

$$\rho \longleftrightarrow 1/v \quad (19)$$

という互いに逆数を代入した関係にある。事実、(2) 式の ρ の代わりに $1/v$ を代入して、 λ_0 を右辺に乗ずると (17) 式を得る。

後述するように、内藤⁵⁾は、只木式中の $\rho(t)$ 成分と $v(t)$ 成分を明確に示した。そこでの ρ 式と v 式との関係は、成長係数を除くと上限値を含めて (19) 式の関係は満足している。

以下では、上の (19) 式の関係を用いて考察するのであるが、それに先立ち (19) 式の関係は、こしばらくは、 $v \sim \rho$ trajectory (必ずしも自然枯死線ではない) 上の一点、つまり固定した時間上の一点で考えることにする。

ところで、(19) 式の関係は ρ と v とが互いに逆比例関係にあることから、次式のようにも書ける。

$$\rho \propto 1/v \quad (20)$$

あるいは

$$\rho v = \text{const.} \quad (21)$$

と書くこともできる。上式は、次節で示すように物質量の保存則を表している。

(2) $\rho \propto 1/v$ 関係

個体密度 ρ および平均幹材積 v に関する方程式上で (20) 式が成立するという事は、時間 t を固定した $v \sim \rho$ trajectory 上の任意の一点で次のように説明される。

今、図-2 のような極めて接近した二つの $v \sim \rho$

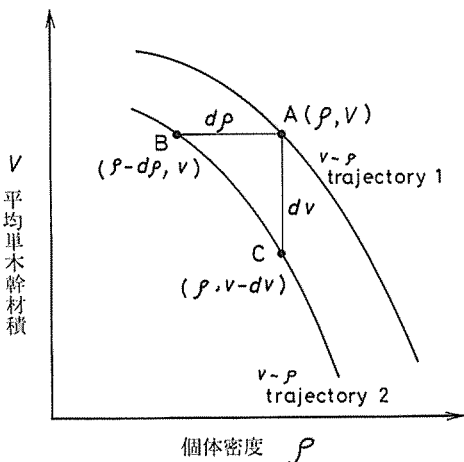


図-2 接近した $v \sim \rho$ trajectory 上の三点の関係
Relationship of three point on two $v \sim \rho$ trajectories with close distance

trajectory を考える。そして、図中の A, B, C のように $d\rho, dv$ だけ離れた三点を取り、三点に対応する取量 $y (= \rho v)$ をそれぞれ y_A, y_B, y_C とする。こうすると、 y_A, y_B, y_C はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} y_A &= \rho v \\ y_B &= (\rho - d\rho) v \\ y_C &= \rho (v - dv) \end{aligned}$$

ここに、各 y の相互の関係は

$$y_A \geq y_B, \quad y_A \geq y_C$$

である。

さて、A, B 間と A, C 間の取量差

$$\begin{aligned} y_A - y_B &= v d\rho \\ y_A - y_C &= \rho dv \end{aligned}$$

を考え、両式の和をとると

$$2y_A - (y_B + y_C) = v d\rho + \rho dv \quad (22)$$

となる。図-2 を参照すれば、極めて接近した三点では、上式左辺は

$$2y_A - (y_B + y_C) \longrightarrow 0$$

となる。したがって

$$\rho dv + v d\rho = 0 \quad (23)$$

となり、次式を得る。

$$d(\rho v) = 0$$

三点を極限まで接近させることによって、 $v \sim \rho$ trajectory 上の任意の一点で

$$\rho v = \text{const.} \quad (21')$$

が成立する。あるいは、上式は先の (20) 式のようにも書ける。

ところで、一般に曲線上の任意の一点で成立する関係は、式で言えば、曲線を表す方程式で成立している関係である。したがって、成長関係を表す式上で (20) 式が成立することになる。上の (21') 式は、時間を固定しているの

$$y = \rho v = c |, \quad (24)$$

と書くと明らかのように、 $v \sim \rho$ trajectory ではなく、時間を固定した曲線上の一点で成立している v と ρ に関

する物質量の保存則を表しているということが出来る。

上の (21) 式および (24) 式は、(1) 式の只木式に似ているようにみえるかもしれないが、只木式 (1) 式では、一般に

$$B \neq 0$$

である。この点が、(21) と只木式との基本的な相違点である。

(3) $v \sim t$ 曲線

先の (19) 式の関係を用いて、成長係数 λ_0 を導入すると

$$v \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \right) = -\lambda_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \left(\frac{1/v}{1/v_0} \right)$$

となり、変形すれば次式を得る。

$$\frac{1}{v_0} \frac{dv}{dt} = \lambda_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \tag{25}$$

ここで、 v の初期値 v_0 については $v_0 \rightarrow 1/\rho_0$ とした。上式の、 $t=0$ で $v=v_0$ という初期条件に対する解は

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \lambda_0 \frac{t^m}{\alpha} \tag{26}$$

となる。また、時間に関する因子は

$$\frac{\lambda_0}{\alpha} t^m = \frac{v}{v_0} - 1 \tag{27}$$

となる。

ところで、(19) 式の関係を用いた上の方法は、もっと細かくいえば以下の方法を簡略化させたものである。以下では、 $v \sim t$ に関する方程式を設定するために、 (ρv) を固定させてから後で変化させるという方法をとって、上の (25) 式が導かれることを示す。

上の (25) 式を導くには、本来は (24) 式を (3) 式に代入して成長係数 λ'_0 を導入すべきであって、そのようにすれば、 $v \sim \rho$ trajectory 上の任意の一点で次式が成立する。

$$\frac{v}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{v} \right) = \lambda'_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \left(\frac{c/v}{c_0/v_0} \right) \tag{28}$$

c は固定されているので

$$v \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \right) = \lambda'_0 \left(\frac{c}{c_0} \right) \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \left(\frac{v_0}{v} \right) \tag{29}$$

とすることができる。ここで、 t をあまり大きくない区間で設定することにし、 v を当初は図-2のように比較的狭い範囲で動かすことにする。もちろん固定していたものを動かすのであるから、得られる $v \sim t$ 関係にはあまり多くのものを望めないが、狭い範囲でも有用な式を

導くことができるのであれば、利用価値はあるものと考えられる。

このように、ある区間で t を考えると上式の添字の t は取ることができ次のように変形することができる。

$$\frac{1}{v_0} \frac{dv}{dt} = \lambda_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \tag{25'}$$

$$\lambda_0 = \lambda'_0 c / c_0$$

ここで、 λ_0 は変数であると考えられるが、ここでは、まず定数として扱ってみることにする。ただし、こうして求められる $v \sim t$ 式には、式の成立する範囲があることを予め考えておかなければならない。以上のようにして得られた (25') 式は、形の上では (25) 式と同一である。したがって、(19) 式の関係を用いて (25) 式を求めた手法は、上の方法を簡略化したものであるということができる。

こうして得られる (27) 式を SPURR 等のストローブマ

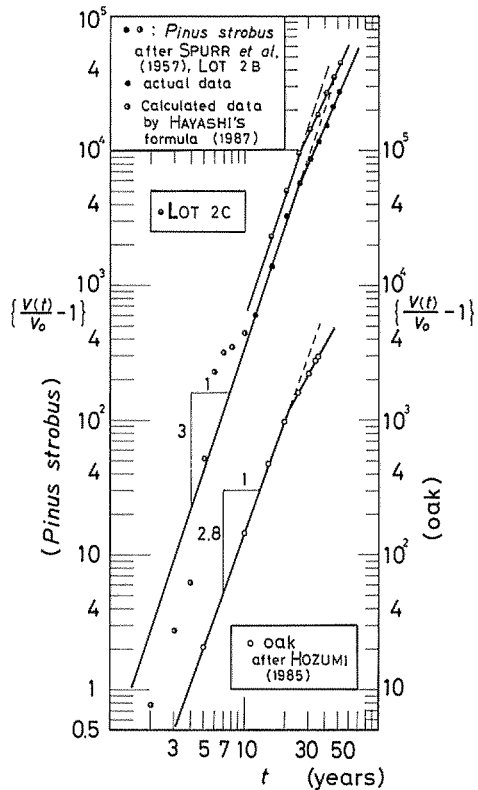


図-3 平均単木幹材積 v に関する $\lambda_0 t^m / \alpha$ の変化
Variation of $\lambda_0 t^m / \alpha$ regarding to mean stem volume ($v(t)$)

ツ (LOT 2B, LOT 2C) のデータにあてはめた結果を図-3に示す。図中の傾き $m = 3$ の直線より (27) 式の関係が成立していることがわかる。なお, LOT 2B のデータで10年以上のものは, 筆者²⁾によって得られた $v(\rho)$ を, $\rho(t)$ 関係式を用いて v と t の関係に換算して求めたものである。少しデータがばらつくが, この場合にもほぼ, (27) 式の関係が成立しているものとみられる。ここで, m の値として既に求められている (6) 式の値, すなわち

$$m = 3.0$$

を用いて, (22) 式の λ_0/α を求めると

$$\lambda_0/\alpha = 0.339 : \text{LOT 2B} \quad (30)$$

$$\lambda_0/\alpha = 0.556 : \text{LOT 2C} \quad (31)$$

を得る^{註4)}。ただし, v_0 は穂積 (1980) の値 ($v_0 = 3.1 \times 10^{-4} \text{ ft}^3$) によった。また, 用いたデータは LOT 2B, LOT 2C ともに実測値のデータである。図-3の林齢27年頃までの直線は, こうして求められた係数による (27) 式を示したものである。図-3では, 27年頃以後も別な直線関係が成立しているようにみられる。しかし, この領域は, 図-1でも述べたように最多密度曲線の領域であり, ここでは別々に考えた方が妥当であると考えられる。

一方, 既出の表-1には, LOT 2B のデータと計算結果が示されているが, $v \sim t$ の計算結果はデータによく合っているものとみられる。また, 表中の stage II の $v \sim t$ の計算には, 最多密度曲線上での次の成長式²⁾と各定数を用いた。

$$\begin{aligned} v &= v_0 \exp(\beta t^m / \alpha) \\ v_0 &= 0.787 (\text{ft}^3), \quad \beta = \lambda_0 = 1.6 \quad (32) \\ m &= 2/3, \quad 1/\alpha = 0.145 \end{aligned}$$

先の図-3には, 穂積⁹⁾が引用している四手井のデータ (Oak, v_0 を含む) をもとに (27) 式の関係調べたものも示した。この場合には $m, \lambda_0/\alpha$ として

$$m = 2.8, \quad \lambda_0/\alpha = 0.227 \quad (33)$$

が得られる。Oak の場合でも (27) 式の関係は十分成立している。SPURR 等のストロブマツについては, 実測値のデータが少し少なかったが, (26), (27) 式の関係は実測値に対して成立しているものとみられる。また,

Oak の場合に対してもこの関係式は成立しているので, (26), (27) 式の関係は, 同種・同齡の他の樹種に対しても成立しているものとみなすことができる。

ところで, $v \sim t$ に関する (25) 式は, もともと $\rho \sim t$ に関する (3) 式から (19) 式の関係を用いて求められたものである。(25) 式の関係は, (24) 式からも求められたが, $v \sim t$ 式の成立領域に制限があることが考えられた。しかしながら, こうして求められた (25) 式および (26) 式における $v \sim t$ 関係の成立範囲は, $\rho \sim t$ 式のそれに比して狭いということもみられなく, ほぼ同じと考えてよいものと思われる。したがって, 初期値, 上限値を含めた先の (19) 式の関係が, 変換後に適当な定数を導入するという前提の下で成立することになる。

III 自然枯死線

1. 只木式 (I)

個体密度 ρ と平均幹材積 v とに関する $v \sim \rho$ 曲線群は, 林分密度管理をする上で重要である¹⁰⁾。ここでは, 最多密度曲線に到達する前の $v \sim \rho$ trajectory, すなわち自然枯死線を, 先に示した $\rho \sim t$ 曲線とこれに対応する $v \sim t$ 曲線より調べる。

先の (3), (25) 式を (16) 式に代入すれば, 次式を得る。

$$\frac{dv}{d\rho} = -\lambda_0 v_0 \frac{\rho_0}{\rho^2} \quad (34)$$

この解は, 初期条件

$$\rho = \rho_0 (t = t_0) \text{ で } v = v_0$$

を考慮して, v について解くと

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \lambda_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \quad (35)$$

となり, $1/\rho$ について解けば, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{\rho_0 \lambda_0} \left\{ \frac{v}{v_0} + (\lambda_0 - 1) \right\} \\ &= Av + B \end{aligned} \quad (36)$$

ここに

$$A = \frac{1}{\lambda_0 \rho_0 v_0}, \quad B = \frac{1}{\rho_0} \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}$$

である。上式は, 只木¹¹⁾の提案した自然枯死線 (1) 式と同形式のものであり, そのうちの最も簡単な解は, この場合 (36) 式のような形となるものと思われる。以上

で只木式を表す一つの解が得られたことになる。もちろん、(35)式は(26)式に(5)式を代入しても得られる。

なお、内藤⁵⁾は RICHARDS 関数を用いて只木式を

$$1/\rho^\theta = a v^\phi + b$$

のような一般型で示した。ここに、 ϕ, θ は定数であり、上式は

$$\phi = \theta = 1$$

とすると只木式そのものに帰着する。内藤は、そうなるためには $\rho(t)$ 式に logistic 式と、 $v(t)$ 式に MITSCHERICH 式とを組み合わせることが必要であると述べていた。これら両式においては、上限値を含めて密度 ρ と幹材積 v との間に $\rho \leftrightarrow 1/v$ という対応関係がある。したがって、 $\phi = \theta = 1$ とした内藤式においても、成長係数を除外すれば当然ながら (19) 式の関係が成立していることになる。このことは、(19) 式を用いた手法がこの場合にも適用できるということを示している。

もっとも、穂積¹²⁾も只木式については言及していたが、これまでのところ只木式そのものの $\rho \sim t, v \sim t$ 関係式は、内藤式⁵⁾を除いて示されておらず、只木式を満足する新しい $\rho(t), v(t)$ 式を示すことが必要であったように思われる。(19) 式の関係を用いれば、 $\rho(t), v(t)$ 式の一方から他方が割合簡単に求められることになり、今後におけるこの方法の利用価値は高いものと思われる。

2. ストローブマツへの適用

前節の (35), (36) 式は自然枯死線を辿って行き、最多密度曲線に徐々に接近する。そのときの β, ρ は只木¹³⁾によれば次のようにして求められる。まず、最多密度曲線の勾配を β とすれば、(36) 式の両対数上での勾配 β は

$$-\beta = \frac{d \log v}{d \log \rho} = \frac{\rho}{v} \frac{dv}{d\rho}$$

となり、右辺に $dv/d\rho, v$ を代入すれば β は

$$\beta = \frac{\lambda_0 \rho_0}{\lambda_0 \rho_0 - \rho (\lambda_0 - 1)} \quad (37)$$

となる。したがって、そのときの ρ は最多密度曲線上での密度であるので ρ_f と書けば、 ρ_f は (37) 式より

$$\rho_f = \frac{\lambda_0 (\beta - 1)}{\beta (\lambda_0 - 1)} \rho_0 \quad (38)$$

で求められる。

さてここで、最多密度曲線の定数 β, k (後出 (40) 式)

と植栽本数 ρ_0 のみが与えられていて λ_0 が知られていない場合を考える。この場合には、(38) 式で λ_0 が未知であるので ρ_f は求められない。一方、(35) 式で v を計算するにしても λ_0 が必要である。そこで試算法を用いて λ_0, ρ_f を決めることにする。まず (38) 式で λ_0 が

$$\lambda_0 \gg 1$$

であるとすると (38) 式は次のように簡単になる。

$$\rho_f = \frac{\beta - 1}{\beta} \rho_0 \quad (39)$$

上式は只木¹³⁾によって初めて求められた式である。

ここで、最多密度曲線 (14) 式の v を v_f と書くと、 v_f は

$$v_f = v_{0f} (\rho_{0f} / \rho_f)^\beta = k \rho_f^{-\beta} \quad (40)$$

$$k = v_{0f} \rho_{0f}^\beta$$

で求められる。また、(35) 式が最多密度曲線に接する点では、 ρ, v も ρ_f, v_f と書けるので (35) 式より λ_0 は次式のようになる。

$$\lambda_0 = \frac{(v_f / v_0) - 1}{(\rho_0 / \rho_f) - 1} \quad (41)$$

こうして得られる λ_0 を用いると、(38) 式より ρ_f が求められるので、以下繰り返し計算して、 λ_0, ρ_f が一致するのを確かめればよい。

実際 SPURR 等 (1957) のデータ (LOT 2B) の場合

$$v_{0f} = 3.1 \times 10^4 (\text{ft}^3), \quad \rho_{0f} = 4.696 \times 10^5 (\text{本/acre})$$

$$\rho_0 = 4824 (\text{本/acre}), \quad \beta = 1.6 \quad (42)$$

とすれば、 ρ_f, v_f, λ_0 はそれぞれ

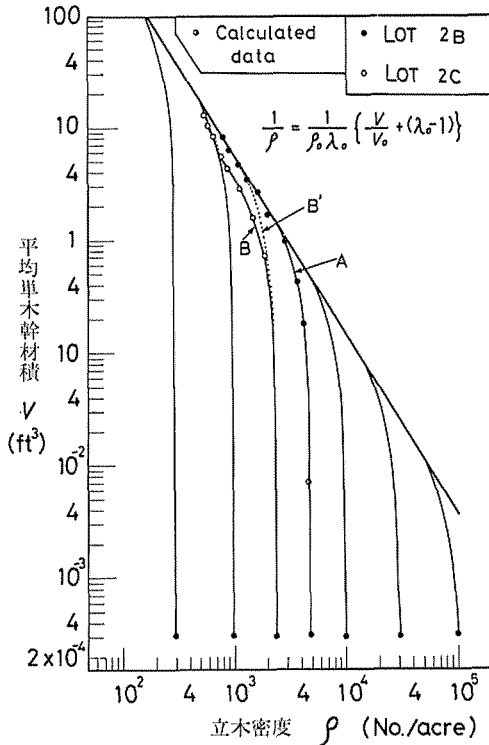
$$\rho_f = 1809 (\text{本/acre}), \quad v_f = 2.260 (\text{ft}^3), \quad \lambda_0 = 4374 \quad (43)$$

となる。こうして $\rho_0 = 4824$ に対する λ_0 が決定される。ここで上の λ_0 を (30) 式に代入すれば、

$$1/\alpha = 7.75 \times 10^{-5} \quad (44)$$

となり、先に求めた (7) 式に一致する。このようにして決定した λ_0 をもとに、(35) 式より v を計算した自然枯死線が図-4の曲線 A である。同図より、自然枯死線が最多密度線にきれいに一致していく様子がわかる (表-1 参照)。

同図の曲線 B は、SPURR 等の LOT 2C のデータである。この LOT 2C のストローブマツは、成長するにつれて最初、LOT 2B より低い最多密度曲線に接近していくよう



図一 平均単木幹材積 v と立木密度 ρ の関係
 $v - \rho$ trajectory (Original data in Fig. 3-5 is from SPURR *et al.*⁷⁾)

に見えるが、後になるにつれて LOT 2B の最多密度曲線に接近していく。その理由は、はっきりとはわからない。しかし、LOT 2C では当初の立地条件が悪く、後になって LOT 2B と同じ条件となったと考えることもできる。この原因としては、林地での下層への根の発達のことが考えられる。もし、LOT 2B と同じ立地条件が初めから実現していれば、 $v - \rho$ 曲線は、図中の B' の曲線のようにして最多密度曲線に接近していくものと考えられる。B' の曲線に対する定数は

$$k = 2.384 \times 10^5, \lambda_0 = 8770, \beta = 1.6 \quad (45)$$

となり、B' の曲線 (点線) に対しては

$$\lambda_0 = 1.355 \times 10^4 \quad (46)$$

が得られる。

図中の他の曲線は LOT 2B の最多密度曲線に接するよう描いたものである。 λ_0 は前節の方法によって求められるが、(4)、(26)、(38)、(40) 式より次式によ

ても直接求めることができる。ただし、 ρ, v は ρ_f, v_f と表す。

$$\lambda_0 = \left(\frac{k}{v_0} \right)^{1/\beta} \frac{\beta}{\rho_0} \left(\frac{\lambda_0 - 1}{\beta - 1} \right)^{(\beta-1)/\beta} \quad (47)$$

もし、 $\lambda_0 \gg 1$ とすれば次式を得る。

$$\lambda_0 = \frac{k \beta^\beta}{v_0 (\beta - 1)^{\beta-1} \rho_0^\beta} = \lambda_{00} \rho_0^\beta \quad (48)$$

ここに

$$\lambda_{00} = \frac{k \beta^\beta}{v_0 (\beta - 1)^{\beta-1}}$$

である。ここで、 v_0, k, β に先の値を代入すれば、LOT 2B の場合、 λ_{00}, λ_0 は

$$\lambda_{00} = 3.422 \times 10^9, \lambda_0 = 4373 \quad (49)$$

となり、 λ_0 は先の値とほぼ一致する。

同図 A, B 曲線他にみられるように、 $v - \rho$ 曲線の形は、筆者既報の²⁾ $v - \rho$ 曲線の曲線形とほとんど変わらない。また、上で λ_0 の計算をしたことから明らかなように、(35) 式の自然枯死線は、 ρ_0, v_0 が与えられると、 λ_0 が決まり、同時に $v - \rho$ 曲線の形が決定されることになる。これが (35) 式の特徴であり、苗木の平均幹材積 v_0 が既知であれば (35) 式は、最終的に最多密度曲線と ρ_0 さえ与えられると自然枯死線の曲線が決まることになる。

3. 只木式 (II)

(1) 誘導

以上の $v(t)$ 式の与え方では、成長係数 λ_0 が初期密度 ρ_0 を変えると変化することになり、ある植物固有の係数として成長係数を考えるには不向きである。そこで λ_0 を ρ_0 によって変化しないようにするために、前節までの $\rho(t), v(t)$ の式に、新たに以下のような上限値に関する定数を導入して検討することにする。

さて、(3) 式右辺の ρ_0 は、 ρ の次元を無くして時間 [T] のみの次元にするために導入されたものである。したがって、個体密度の初期値 (ρ_0) の代わりに意味のある定数を持込むことが可能である。以下では、 ρ_0 の代わりに最多密度曲線上である定数 ρ^* を用いることにする。ここでさらに、定数 α を α_* とすれば (3) 式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = - \frac{m}{\alpha_*} t^{m-1} \frac{\rho}{\rho^*} \quad (50)$$

と表され、解は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho^*} \frac{1}{\alpha_*} t^m \quad (51)$$

となる。一方、平均幹材積 v についても最多密度曲線上での定数 V を用いて表わすことができる。その場合には、成長係数 λ_0 を λ_* として (17) 式は

$$\frac{1}{V} \frac{dv}{dt} = \lambda_* \frac{m}{\alpha_*} t^{m-1} \quad (52)$$

と表され、解は

$$\frac{v}{V} = \lambda_* \frac{t^m}{\alpha_*} + \frac{v_0}{V} \quad (53)$$

となる。上の (51) 式と (53) 式より t を消去すれば、つぎの只木式を得る。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda_* \rho^*} \frac{v - v_0}{V} + \frac{1}{\rho_0} \quad (54)$$

$$= Av + B \quad (54')$$

ここに

$$A = \frac{1}{\lambda_* \rho^* V}, \quad B = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0 v_0}{\lambda_* \rho^* V} \right)$$

である。上式は、 $\rho^* \rightarrow \rho_0$ 、 $V \rightarrow v_0$ とすれば前節の (36) 式と同じものになる。

上の (54) 式は、密度 ρ がある値まで減少すると最多密度曲線に接する。そのときの ρ 、 v を ρ_f 、 v_f で表せば、この場合の成長係数 λ_* は

$$\lambda_* = \frac{\rho_0 \rho_f (v_f - v_0)}{\rho^* V (\rho_0 - \rho_f)} \quad (55)$$

となる。上式を、前節の λ_0 と等置するために次のように変形する。

$$\lambda_* \frac{\rho^* V}{\rho_0 v_0} = \frac{v_f / v_0 - 1}{\rho_0 / \rho_f - 1} = \lambda_0$$

ここで、上限値 ρ^* 、 V に、最多密度曲線と自然枯死線とが接する点の値を与えることにし、

$$V \rho^{*\beta} = v_f \rho_f^\beta = k \quad (56)$$

とする。すなわち

$$\rho^* \longrightarrow \rho_f, \quad V \longrightarrow v_f$$

とすれば、 λ_0 と λ_* との関係は次式のようになる。

$$\lambda_0 = \lambda_* \frac{\rho_f v_f}{\rho_0 v_0} \quad (57)$$

ところで、前節では λ_0 に対して

$$\lambda_0 \gg 1 \text{ つまり、} v_f \gg v_0$$

とすると、(48) 式が得られたので、ここでもそうすることにして (57) 式と (48) 式を等置すれば、 λ_* は λ_{00} を用いて

$$\lambda_* = \lambda_{00} \left(\frac{\rho_0 v_0}{\rho_f v_f} \right) \rho_0^{-\beta} \quad (58)$$

と表すことができる。一方、 ρ_f 、 v_f は最多密度曲線上にあるので、上の (40) 式が成立し

$$\lambda_* = \lambda_{00} \frac{v_0 \rho_0^{1-\beta}}{k \rho_f^{1-\beta}} \quad (59)$$

と書ける。さらに、上式の ρ_f にも (56) 式の関係と (39) 式を用いれば、

$$\lambda_* = \frac{1}{k} \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\beta-1} v_0 \lambda_{00} \quad (60)$$

となる。したがって、右辺の λ_{00} に (48) 式の λ_{00} を代入すれば、この場合の成長係数 λ_* として

$$\lambda_* = \beta^\beta \beta^{1-\beta} = \beta \quad (61)$$

を得る。上式は、上述のような上限値を用いると自然枯死線の成長係数が最多密度曲線上での成長係数 β (これは最多密度曲線のベキ係数に等しい) を用いて表せることを示している。

なお、 α_* は (9) 式と (51) 式より

$$\alpha_* = \alpha \rho_0 / \rho_f \quad (62)$$

となり、 α_* と λ_* との比は (57) 式に代入すると次式のようになる。

$$\frac{\lambda_*}{\alpha_*} = \frac{\lambda_0 v_0}{\alpha v_f} \left(= \frac{\beta}{\alpha_*} \right) \quad (63)$$

(2) ρ^* 、 V 導入の意義

かつて筆者は、最多密度曲線上での成長式について、成長係数 λ_0 が $3/2$ 乗則の β に一致していることに着目し、そこでの成長係数が最多密度状態における成長関係を反映しているものと考えた²⁾。つまり、成長係数は、各成長段階を通じて一定ではなく、各段階において、例えば、最多密度曲線や自然枯死線上では異なる値をもつと考えていた。ところが上で得られた結論は、上限値となる定数を最多密度曲線と自然枯死線の接点に設定する限り、森林内樹木の成長係数が各成長段階を通じて同一であるということであり、変化するのは成長のメカニズムであろうということになる。

ところで、成長係数 λ_* に関する以上のような関係式を導くにあたって、各自然枯死線に対して $v_f \gg v_0$ を仮定してきた。したがって、初期密度 ρ_0 が大きい場合には、 v_f が小さくなり、その仮定は成立しなくなる。この場合 λ_* はどのようになるであろうか。これは次のように

考えることができる。もし、 ρ_0 が大きくなれば、 ρ_0 は最多密度曲線に近づくのであるが、その曲線上の成長係数は、筆者²⁾が既に指摘したように β である。したがって、 ρ_0 が ρ_{0f} に接近すれば、当然 $\lambda_* \rightarrow \beta$ となるはずである。ということから、この範囲の ρ_0 においても λ_* は ρ_0 と無関係に β とするのが最も適当であると考えることができる。

さて、以上のようなことから、 λ_* が β に等しいとすれば、先の (54') 式の A, B は次式のように表される。

$$A = \frac{1}{\beta \rho_f v_f}, \quad B = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0 v_0}{\beta \rho_f v_f} \right) \quad (64)$$

ここに、 ρ_f, v_f は最多密度曲線に自然枯死線が接する点での値であり、正確に決めようとするれば、前節で行ったような (39) 式を用いたり繰り返し計算が必要になる。ただ単に、自然枯死線の計算をするだけであれば、 ρ^*, V を用いた今節の方法より、前節で用いた λ_0 を用いる方法の方が簡潔で便利である。

以上のように成長係数について $\lambda_* = \beta$ という興味ある結果が得られたので、この節の最初の式 (50), (52) 式にもう一度立ち返り、構成式の成り立ちについて考えてみよう。(50), (52) 式の ρ^*, V は、ここでは

$$\rho^* = \rho_f, \quad V = v_f$$

としたので、自然枯死線上で密度 ρ が

$$\rho \longrightarrow \rho_f$$

となった段階では、密度 ρ の (50) 式は、形式的に既報⁶⁾の ρ に関する式 (この報告での (2) 式)、つまり最多密度曲線の $\rho(t)$ 式^{2) 6)}を表すことになる。一方、平均幹材積 v に関する (52) 式は $\lambda_* = \beta$ として

$$\frac{1}{v_f} \frac{dv}{dt} = \beta \frac{m}{\alpha_*} t^{m-1}$$

となる。この式が最多密度曲線上の関係を表すものとするれば、その時点で上式は形式的に

$$\frac{1}{v_f} \frac{dv_f}{dt} = \beta \frac{m}{\alpha_*} t^{m-1}$$

となり、上式の解は、筆者²⁾の最多密度曲線での $v(t)$ 式 (ただし、上式の v_f, α_* を $v_f \rightarrow w, \alpha_* \rightarrow \alpha$ と読み替える)、に一致し、あるいは、この報告での (17) 式と同様、最多密度曲線上での $v(t)$ 式を表すことになる。

つまり、最初の (50), (52) 式で任意の定数 ρ^*, V を ρ_f, v_f に設定したということは、方程式 (50), (52) 式が $\rho \rightarrow \rho_f, v \rightarrow v_f$ となった時点で、最多密度曲線そのもの

に一致するように設定したということになる。このことは、逆に言えば、自然枯死線と最多密度曲線とを結ぶような二つのパラメータ ($\rho^* = \rho_f, V = v_f$) を設定することによって、成長係数を成長段階によって変えないような、あるいはより普遍的定数と結び付いた成長モデルを組み立てることができるということを意味している。

この節では、新しく上限値に関する定数 ρ^*, V を導入して成長式の改良を行って来た。ところが、林木においても最終的に満足すべき関係、つまり C-D 効果の逆数式¹⁰⁾に関連する内容には言及しなかった。この関係を今回の只木式が満たしているかどうかは、例えば (26) 式を調べると明らかになる^{注5)}が、係数 α を一定とする限り、結論を言えば満たしていないのであり、理論構成の上で見直すべき点が残されている。しかし、 ρ_f, v_f の設定によって成長係数が少なくとも ρ_0 の大半において変化せず、各成長段階において同一の値を用いることが可能になり、しかもその値が、最多密度曲線のべき係数 β というより普遍的な定数に一致するということが示されたことは、今後の研究に一つの方向性を与えるものと思われる。

4. 成長解析

ここでは枯死率 μ (RMR) と相対成長率 RGR について考察する。

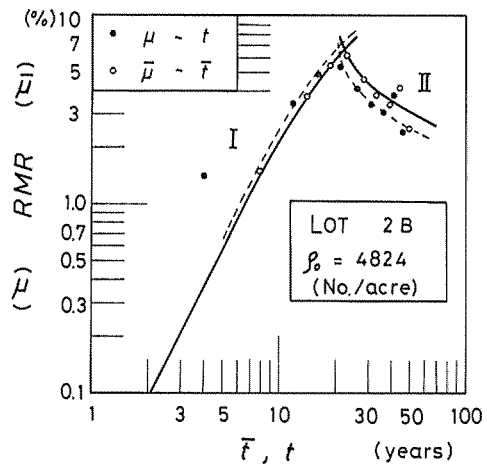


図-5 枯死率 μ (RMR) の計算結果
Calculated results to variation of relative mortality rate (μ , RMR)

(1) 枯死率 μ (RMR)

枯死率 μ は既報⁶⁾では重要な役割を果たしていた。今回の考察によって枯死率の増加期 (閉鎖前) の解析が可能になった。第1章で述べた密度 ρ の減少式 (3) 式を枯死率 μ の形で書けば、

$$\mu = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \frac{\rho}{\rho_0} \quad (65)$$

であり、上式右辺に ρ/ρ_0 の (4) 式を代入すれば次式を得る。

$$\mu = \frac{m t^{m-1} / \alpha}{1 + t^m / \alpha} \left(= -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (66)$$

もちろん上式の解は (4) 式を満たす。この (66) 式に $m = 3$ と LOT 2B に対する α とを与えて、 $\mu \sim t$ 関係を調べたものが図-5 の増加曲線である。なお、図中の実線が (66) 式で計算されるものであり、破線はそれを定数倍したものである (以下同様)。この他、黒マルのデータは既報⁶⁾の $\mu \sim t$ 関係によるものであり、 $\bar{\mu} \sim \bar{t}$ 関係を表す白マルのデータの計算には次式を用いた。

$$\bar{\mu}(\bar{t}) = \frac{\{\rho(t) - \rho(t + \Delta t)\} / \Delta t}{\bar{\rho}(\bar{t})}$$

ここに

$$\bar{\rho}(\bar{t}) = \{\rho(t) + \rho(t + \Delta t)\} / 2, \bar{t} = t + \Delta t / 2$$

である。増加期に対する μ が (66) 式で与えられるのに対して、減少期の μ の式は、既報⁶⁾で示したように次式で与えられる。

$$\mu = \frac{m}{\alpha} (t - t_0)^{m-1} \quad (67)$$

上式の次の値

$$m = 2/3, \alpha = 0.145, t_0 = 19 \quad (68)$$

を代入したものが、図-5 中の減少期の曲線である。枯死率 μ の全体的な傾向は、ほぼ既報⁶⁾の通りである。これらの (66), (67) 式と同図より、自然枯死に伴う林木の枯死率の推移がより明確になったものと思われる。

(2) 相対成長率 RGR

相対成長率すなわち RGR は穂積⁸⁾によれば次式で定義される。

$$RGR = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \quad (69)$$

したがって、(25) 式より

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \lambda_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1} \frac{v_0}{v}$$

となり、(26) 式を用いると自然枯死線上での RGR は次式のようになる。

$$RGR = \frac{\lambda_0 m t^{m-1}}{\alpha + \lambda_0 t^m} \quad (70)$$

枯死率 μ の場合と同様に、上式の解は (26) 式を満たす。

この (70) 式に LOT 2B に対して得られた λ_0, m, α を代入すると図-6 の I の曲線 (実線) が得られる。これが自然枯死線上で RGR 曲線である。破線は先と同様に実線を定数倍したものである。図中の黒マルのデータは次式で算出したものであり、

$$RGR(t) = \frac{\{v(t + \Delta t) - v(t)\} / \Delta t}{v(t)} \quad (71)$$

白マルのデータは次式で求めたものである。

$$\overline{RGR}(\bar{t}) = \frac{\{v(t + \Delta t) - v(t)\} / \Delta t}{\bar{v}(\bar{t})} \quad (72)$$

ただし

$$\bar{v}(\bar{t}) = \{v(t) + v(t + \Delta t)\} / 2, \bar{t} = t + \Delta t / 2$$

一方、最多密度曲線上での RGR は (17) 式より次式で与えられる。

$$RGR = \lambda_0 \frac{m}{\alpha} (t - t_0)^{m-1} \quad (73)$$

上式の m, α に先の値を用い、 λ_0 としては $\lambda_0 = \beta = 1.6$ を用いる。こうすると図-6 中の曲線 II が求められる。

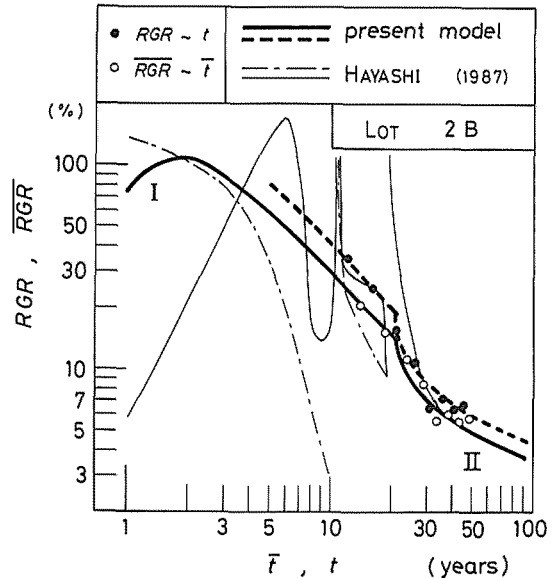


図-6 相対成長率 RGR の計算結果
Calculated results to variation of relative growth rate (RGR)

これが最多密度曲線上での RGR である (破線は枯死率の場合と同様)。結局, 上の (70) 式と (17) 式より, RGR は $t=2$ で約 100% まで到達した後は, 徐々に下がっていく曲線形であることが明らかになる。

図-6 には, 1987年の筆者のモデルも示されている。図中1987年の一点鎖線が $m=2/3$ とした筆者²⁾の $\rho(t)$, $\lambda(t)$ 関係式を用いたものであり, 他の実線が, $t=10$ 年で m を変えて

$$t \leq 10, \quad m = 3, \quad 1/\alpha = 8.12 \times 10^{-5}$$

$$10 < t \leq 19, \quad m = 1.4, \quad 1/\alpha = 0.0163$$

とした場合のものである。ただし, 19年より後では, $m=2/3$ とした (68) 式の値を用いた。1987年の筆者の場合のように, $t \leq 19$ に対して m を

$$m = 2/3 < 1$$

の値で固定した計算方法よりは, このように $m > 1$ とした方が RGR の局所的な変動は小さくなるが, (50) 式のようなスムーズさは得られない。既報²⁾の方法は, 全成長過程を割合簡単な式で表現できるところが長所であるけれども, RGR が滑らかとならないところが短所である。

IV 結 語

以上の結果を整理すれば, 最多密度状態に到達する前, または最多密度曲線上において成立する, 最も簡単であると考えられる $\rho(t)$, $v(t)$ 式は, それぞれ次のように書くことができる。つまり, $\rho(t)$ 式および $v(t)$ 式は自然枯死線上で

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{1}{\alpha} t^m \quad (4'')$$

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{\lambda_0}{\alpha} t^m \quad (26')$$

であり, 最多密度曲線上で

$$\rho = \rho_0 \exp(-t^m / \alpha) \quad (74)$$

$$v = v_0 \exp(\beta t^m / \alpha) \quad (75)$$

となる。ここに, β は最多密度曲線上の成長係数 (この値は最多密度曲線のべき数と同一²⁾) である。(4'') と (26') 式の関係は SPURR 等⁷⁾のストロブマツのデータと四手井の Oak のデータ⁹⁾によって確かめることができた。また, 個体密度 ρ と平均幹材積 v との間には成長式上で

$$\rho \longleftrightarrow 1/v \quad (19)$$

という互いに逆数を代入した関係が成立している。

一方, 各成長段階で t を消去すれば, $v \sim \rho$ trajectory が得られる。それらが, 自然枯死線上では最も簡単な只木式 (36) 式であり, 最多密度曲線上では $3/2$ 乗則を表す (14) 式である。この只木式, すなわち自然枯死線は, 最多密度曲線にきれいに接して行くが, 成長のメカニズムは両曲線上では大分異なることになる。只木式を表す (26') 式の λ_0 は, 最多密度定数 $k (= v_0 \rho_0^2)$ と単位面積当たりの植栽本数 ρ_0 さえ与えられれば決まる定数であり, 簡略値としては (47) 式または (48) 式で与えられる。

以上の只木式および, $\rho(t)$, $v(t)$ 曲線は, 上限値 ρ^* , V を用いない場合のものであったが, これらを用いた場合には興味ある結果が得られた。すなわち, ρ^* , V の値として最多密度曲線に接する点 (ρ_i, v_i) での値を用いることにすれば, その場合の成長係数が $v_i \gg v_0$ を満たす ρ_0 の範囲で, 最多密度曲線上での成長係数 β に一致することが明らかになった。また, $v_i \gg v_0$ を満たさない ρ_0 の範囲についても成長係数はやはり β になることが予想された。

これらの結論はこれまでのものと大分異なっており, 単純明解なモデルであると思われる。もっとも他の $v \sim t$ 式は, 穂積⁸⁾が用いた (11) 式より出発しても得られる。また, (9) 式タイプの $\rho(t)$ 式は他にもあり, 上の (19') 式, あるいは先の (20) 式の関係を用いれば, いずれも $v \sim t$ 関係が求められる。ただし, 成立する範囲と係数については検討が必要であろう。今回の考察では, 篠崎・吉良¹⁴⁾が重要視していた密度効果については採り上げていない。というより, 今回用いた式の構成では, 逆数式に相当する内容¹⁰⁾を満たしていないのである。しかし, 最終的にはこの関係を満たさなければならぬとしても, ここでは, 密度効果を考察する前提となる最多密度曲線および自然枯死線 (只木式) の理論構成に関する基礎的知見を得ることができた。

最後に成長解析を行った。枯死率 μ の曲線形は, 既報⁹⁾のものと同様なものを得られた。RGR は, 自然枯死線上においては2年目にピークをもち, それ以後, 徐々に低下してゆく曲線形を示すが, 最多密度曲線に到達後は約10年間急激に低下し, その後は緩く下がる曲線形となっている。

本研究を行うにあたり, 三重大学生物資源学部の武田

明正助教授には、暖かい励ましを頂いた。また、当時同農学部在職の箕輪光博助教授（現東京大学）のお話には大変啓発された。ここに記して心からお礼を申し上げる次第である。

引用文献

- 1) 只木良也. 林分密度管理の基礎と応用. 日本林業技術協会, p 1-125 (1969)
- 2) 林 拙郎. 同種同齡林の全生長過程に関する一考察. 三重大学農学報, 75: 39-52 (1987)
- 3) 箕輪光博. 林木の生長に関する理論的考察 (I) log-MITSCHERLICH 式の理論. 日林誌, 64: 461-467 (1982)
- 4) 箕輪光博. 同上 (II) 自己間引モデルの検討. 日林誌, 65: 135-142 (1983)
- 5) 内藤健司. RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (I) W-N trajectory. 日林誌, 64: 399-407 (1983)
- 6) 林 拙郎. 同種・同齡の植物個体の生長則 (I) ロジスチック理論の拡張. 日林誌, 67: 348-357 (1985)
- 7) S. H. SPURR., L. J. YOUNG, B. V. BARNES and E. L. HUGHES. Nine successive thinnings in a Michigan white pine plantation. J. For., 55: 7-13 (1957)
- 8) K. HOZUMI, Ecological and mathematical considerations on self-thinning in evenaged pure stands (II) Growth analysis of self-thinning. Bot. Mag. Tokyo, 93: 149-166 (1980)
- 9) K. HOZUMI, Phase diagrammatic approach to the analysis of growth curve using to $u - w$ diagram—Basic aspects—. Bot. Mag. Tokyo, 98: 239-250 (1985)
- 10) 安藤 貴. 林分の密度管理. 農林出版, p 1-126 (1982)
- 11) 只木良也. 競争密度効果式を基にした幹材積収穫予測. 林試研報, 154: 1-19 (1963)
- 12) 穂積和夫. 植物の相互作用. 共立出版, p 1-124 (1973)
- 13) 只木良也. 競争密度効果式を用いて検討した間伐と幹材積収穫との関係—アカマツ材の場合—. 林試研報, 166: 1-123 (1964)
- 14) K. SHINOZAKI, and T. KIRA. Intraspecific competition among higher plants (VII) Logistic theory of the C-D effect. J. Inst. Polytech., Osaka City Univ. Ser. D7: 35-72 (1956)

注

- 1) 最多密度曲線は、安藤¹⁰⁾、只木¹¹⁾に従って、 $3/2$ 乗則線と同義語に用いる。
- 2) LOT 2C の場合に最初のデータを係数のあてはめ計算に用いなかった理由は、図-1に見られるように他のデータの傾向と明らかに離れていることと、比較的初期のデータであり、植栽直後の枯損率が大きかったために $t = 4$ 年頃までの個体密度が低下していたのではないかと考えられるからである。また、この場合に対する m の値は、後出の v に関する m の値 (注4) に近いので4年目の個体密度 ρ の値は用いる必要がないものと考えられる (4年目の ρ の値を加えると、 m の値は3.0よりかなりはずれる)。
- 3) 既報⁶⁾で述べたような理由で、筆者は λ_0 成長係数と呼んでいるので、 $\lambda(t)$ をここでは成長係数関数と呼んだ。
- 4) LOT 2B で実測値のみの v のデータを用いて m の値を逆算すると $m = 2.94$ を得る。また、LOT 2C に対しては $m = 2.90$ を得る。この値は ρ のときに決定した m の値に近い。 m の値としては、 ρ に対して決定した値の方がより信頼できるのでここでは $m = 3.0$ を用いた。
- 5) 第2節の(20)式において α, t を固定して考えると明らかのように、 v は λ_0 の関数になり、この場合の λ_0 は、(48)式より ρ_0^{β} に比例するから、C-D 曲線上では、 v は ρ_0^{β} の影響を強く受けることになる。