

# 一面せん断試験における締固め土の構成式について

井上 宗治・桑山 幸久  
三重大生物資源学部農業土木学講座

## Constitutive Equations of Compacted Soils in direct shear tests

Sohji INOUE and Yukihisa KUWAYAMA  
Department of Irrigation, Drainage and reclamation, Faculty of  
Bioresources, Mie University

### Abstract

Constitutive equations of direct shear testing based on the rheological investigation in conjunction with Coulomb's failure criterion are presented for compacted soil. The purpose in establishing such a constitutive equation is to introduce the displacement factor into the slope stability analysis of dams.

In the stress-strain relationships, soil (here qualified as compacted soil) is divided broadly into two categories. The first is the case for no peak strength such as cohesive soil, the second is the case for peak strength such as sandy soil. The former is governed by a well-known Voigt model, and the latter consists of two Voigt models connected in series.

There is no strain measure in the direct shear testing used in this study, alternatively a ratio of shear displacement to shear displacement at failure is defined as the shear displacement ratio. Also, it is assumed that the shear displacement is linearly related to time.

Fitting such derived constitutive relations of compacted soil to data from laboratory experiments, for the case of no peak strength the calculated values from proposed equation are a little less than the experimental data at the point where the curves are rising.

In the case for peak strength, there is little difference between the values from the constitutive equation and the experimental data. It is concluded that the constitutive equations proposed here generally are able to approximate well the relationship between the shear stress and the shear displacement ratio.

**Key words:** Rheology · Constitutive equation · Shear stress · Shear displacement · Fill dam

### I. ま え が き

土構造物が外力を受けて破壊する時、その破壊形式の多くがせん断破壊である。すなわち、構造物の内部のせん断応力が、その土のせん断強度に達するとその点にお

いて破壊が生じてすべり面が現れる。斜面の安定計算に用いられるすべり面解析は、すべり土塊が一つの面に沿ってすべり落ちるとした極限つりあい状態を想定している<sup>1)</sup>。この状態は、室内せん断試験の一つである一面せん断試験における二次元応力状態に比較的近いとされている<sup>2)</sup>。このことから、一面せん断試験によって、土の強度定数を求める方法を採用することにする。

ところで、すべり面解析は一般に破壊時の土の強度関係だけが問題とされている。しかし、土の破壊強度は瞬時に発生するものではなく、セン断応力は、セン断変位とともに漸増していく。このような性状をすべり面解析に取り入れるためには、セン断応力～セン断変位間の定量的関係を把握しておく必要がある。ここでは、レオロジー理論を利用して<sup>3)</sup>、締固め土を対象に一面セン断試験によるセン断応力～セン断変位間の関係式、いわゆる構成式を提示し、それと実験データとの対応性について考察・検討した結果を報告する。

## II. 構成式の誘導

土の応力～ひずみ曲線の形は大別して二つに分けられる。すなわち、比較的小さいひずみにおいて応力の最大値が現れ、その後のひずみの増大とともに明瞭な応力の減少を示すものと、比較的大きいひずみにおいて応力の最大値が現れ、その後のひずみの増大にかかわらず応力の減少がほとんどないものの二つである<sup>4)</sup>。ここでは前者をピークが存在する場合、後者をピークが存在しない場合と名付けることとする。

### 1. ピークが存在しない場合

応力～ひずみ曲線の形状を表すのにレオロジー理論を借用することは前に述べた。まず、スプリングとダッシュポットを並列にしたフォークトモデルについて考える。

フォークトモデルのスプリングが受け持つ応力を  $\sigma_1$ 、ダッシュポットのそれを  $\sigma_2$  とする。モデル全体に作用する一定応力を  $\sigma_f$  で表すと周知の次式が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma_f &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ &= G \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}\end{aligned}\quad (1)$$

ここに、

$G$ : 弾性率,  $\eta$ : 粘性率,  $\varepsilon$ : ひずみ,  $t$ : 時間

$t=0$  のとき  $\varepsilon=0$  として(1)式を積分すると、

$$\varepsilon = \frac{\sigma_f}{G} \{1 - \exp(-\beta \cdot t)\}. \quad \text{ただし, } \beta = \frac{G}{\eta} \quad (2)$$

となる。

この関係を一面セン断試験結果に適用する。その際、時間項については次のように取扱う。セン断応力を  $\tau$ 、

セン断変位曲線におけるセン断変位を  $X$ 、セン断経過時間を  $t$  とすると、変位制御試験では  $X = a \cdot t$  ( $a$ : 定数) となり、破壊時のセン断変位、セン断経過時間をそれぞれ  $X_f$ 、 $t_f$  で表すと、 $X_f = a \cdot t_f$  となる。

いま、 $\beta$  に注目してみるとそのディメンションは  $[1/T]$  であるから  $\beta = b/t_f$  ( $b$ : 定数) とおくことができる。これらを(2)式へ代入すると、

$$\varepsilon = \frac{\sigma_f}{G} \left\{1 - \exp\left(-b \cdot \frac{t}{t_f}\right)\right\} \quad (3)$$

となる。さらに、 $\gamma = \frac{X}{X_f}$  とおき、 $\gamma$  をセン断変位率と定義して次式を誘導する。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma_f}{G} \left\{1 - \exp\left(-b \cdot \frac{X}{X_f}\right)\right\} \\ &= \frac{\sigma_f}{G} (1 - \exp(-b \cdot \gamma))\end{aligned}\quad (4)$$

ここで、(2)式の  $\varepsilon \sim t$  関係は  $\varepsilon = \sigma_f/G$  (一定) に漸近する曲線形状である。一方、土のセン断応力～セン断ひずみ関係も破壊時のセン断応力に漸近する曲線とみなすことができる<sup>5)</sup>。両者の類似性を考慮して、一面セン断試験における  $\tau \sim \gamma$  関係も(2)式ひいては(4)式と相似な曲線形状であると仮定する。このとき、(4)式の  $\varepsilon$  を  $\tau$  に、 $\sigma_f/G$  を破壊時のセン断応力  $\tau_f$  に置き換えてやると、

$$\tau = \tau_f (1 - \exp(-b \cdot \gamma)) \quad (5)$$

となる。上式はピークが存在しない場合のセン断応力～セン断変位率関係を表す。

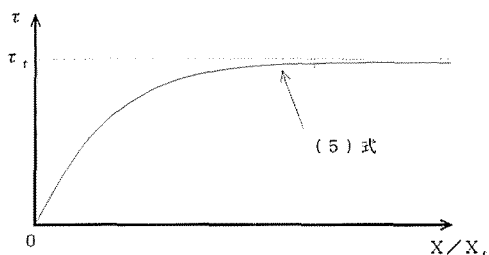


Fig. 1. Shear stress versus  $X/X_f$  relation in eq. (5).

### 2. ピークが存在する場合

ピークが存在する場合は、Fig. 2 のようなフォークトモデルを直列につないだモデルを考える。このときのひずみと応力との間には、次式が成り立つ。

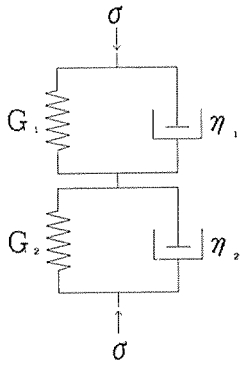


Fig. 2. Model due to the Voigt's models connected in series.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma_1 = \sigma &= G_1 \cdot \varepsilon_1 + \eta_1 \cdot \dot{\varepsilon}_1 \\ \sigma_2 = \sigma &= G_2 \cdot \varepsilon_2 + \eta_2 \cdot \dot{\varepsilon}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

これらの式を変形し整理すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} + \left( \frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_2}{\eta_2} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{G_1}{\eta_1} \cdot \frac{G_2}{\eta_2} \cdot \varepsilon &= \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dot{\sigma} \\ + \left( \frac{1}{\eta_2} \cdot \frac{G_1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_1} \cdot \frac{G_2}{\eta_2} \right) \sigma \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 $\dot{\quad}$ ,  $\ddot{\quad}$  はそれぞれ一階、二階の時間微分を表す。

(7)式の二階微分方程式を II. 1 の応力一定  $\sigma = \sigma_f$  ( $\dot{\sigma} = 0$ ) の場合と同様に解く。ただし、一面せん断試験試験結果との対応を念頭において  $t$  に関する指数関数と一次関数の積となるような解を導く。すなわち、(7)式の二階微分方程式の補助方程式が重根を有する解を求めればよいことになる。そのために、

$$\frac{G_1}{\eta_1} = \frac{G_2}{\eta_2} = \beta, \quad \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} = \frac{1}{G}$$

と置くと、次の一般解が求まる。

$$\varepsilon = (C_1 \cdot t + C_2) \exp(-\beta \cdot t) + \frac{\sigma_f}{G} \quad (8)$$

ここで、 $C_1, C_2$ : 積分定数  
 $X = a \cdot t, X_f = a \cdot t_f$  および  $\beta = \frac{b_1}{t_f} = \frac{b_2}{t_f}$  の関係を用いると上式は

$$\varepsilon = (C_1 \cdot X + C_2) \exp\left(-b_1 \cdot \frac{X}{X_f}\right) + \frac{\sigma_f}{G} \quad (9)$$

ただし、 $b_1$  は定数となる。

ここで、 $X = 0$  で  $\varepsilon = 0$ ,

$$X = X_f \text{ で } \varepsilon = \varepsilon_f, \sigma_f = G \cdot \varepsilon_f \text{ より}$$

$$C_1 = \frac{1}{X_f} \cdot \frac{\sigma_f}{G}, \quad C_2 = -\frac{\sigma_f}{G}$$

となる。「ピークが存在しない場合」の(5)式と同様の取扱いにより(9)式は

$$\tau = \tau_f (1 + (\gamma - 1) \exp(-b_1 \cdot \gamma)) \quad (10)$$

と書ける。ただし、 $\gamma \leq 1$  である。

$\gamma \geq 1$  では(7)式において  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$  として、

$$\varepsilon = C_3 \cdot X \cdot \exp\left(-b_2 \cdot \frac{X}{X_f}\right) \quad (11)$$

ここで、 $b_2$ : 定数、 $C_3$ : 積分定数が導かれる。 $X = X_f$  で  $\varepsilon = \varepsilon_f$  より

$$\varepsilon = \varepsilon_f \cdot \gamma \cdot \exp(-b_2 \cdot (1 - \gamma)) \quad (12)$$

となる。したがって、(10)式と同様の理由より次式が与えられる。

$$\tau = \tau_f \cdot \gamma \cdot \exp(-b_2 \cdot (1 - \gamma)) \quad (13)$$

(10), (13)の関係は Fig. 3 に示すようになる。

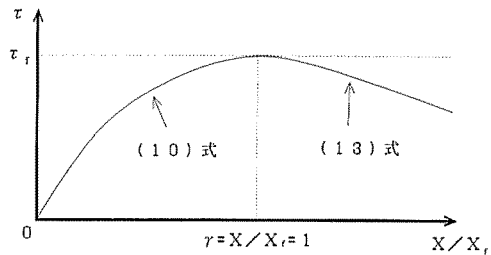


Fig. 3. Shear stress versus  $X/X_f$  relations in eq. (10) and eq. (13).

### III. 実験定数 $b, b_1, b_2$ の求め方

(5)式, (10)式, (13)式の実験定数  $b, b_1, b_2$  の求め方を Table 1, 2 のデータ例を用いて説明する。

まず、 $b$  については(5)式を変形し、その両辺の対数をとると、

$$\ln\left(1 - \frac{\tau}{\tau_f}\right) = -b \cdot \gamma \quad (14)$$

となる。これは、実験定数  $b$  を傾きとした比例式であ

**Table 1** Data example in the case of no peak strength

セン断変位 X (mm)	セン断変位率 X / X <sub>f</sub>	セン断応力 τ (kgf/cm <sup>2</sup> )	セン断応力比 τ / τ <sub>f</sub>
0.00	0.00	0.000	0.000
0.05	0.02	0.385	0.332
0.10	0.03	0.506	0.437
0.20	0.07	0.586	0.506
0.40	0.13	0.707	0.611
0.50	0.17	0.746	0.645
0.60	0.20	0.793	0.685
0.70	0.23	0.826	0.714
0.80	0.27	0.864	0.747
0.90	0.30	0.905	0.783
1.00	0.33	0.908	0.785
1.20	0.40	0.947	0.818
1.40	0.47	1.030	0.890
1.60	0.53	1.030	0.890
1.80	0.60	1.071	0.926
2.00	0.67	1.113	0.962
2.20	0.73	1.116	0.964
2.40	0.80	1.130	0.977
2.60	0.87	1.133	0.980
2.80	0.93	1.148	0.992
3.00	1.00	1.157	1.000

**Table 2** Data example in the case of peak strength

セン断変位 X (mm)	セン断変位率 X / X <sub>f</sub>	セン断応力 τ (kgf/cm <sup>2</sup> )	セン断応力比 τ / τ <sub>f</sub>
0.00	0.00	0.000	0.000
0.05	0.03	0.195	0.158
0.10	0.06	0.296	0.239
0.20	0.13	0.450	0.364
0.30	0.19	0.539	0.435
0.40	0.25	0.586	0.474
0.50	0.31	0.784	0.634
0.70	0.44	0.932	0.754
0.80	0.50	1.012	0.818
0.90	0.56	1.056	0.854
1.00	0.63	1.068	0.864
1.20	0.75	1.219	0.986
1.40	0.88	1.222	0.988
1.60※	1.00	1.237	1.000
1.80	1.13	1.234	0.998
2.00	1.25	1.234	0.998
2.20	1.38	1.210	0.978
2.40	1.50	1.151	0.931
2.60	1.63	1.101	0.890
2.80	1.75	1.056	0.854
3.00	1.88	1.024	0.282

※ : at the peak strength

る。そこで、Fig. 4 に示すように  $\ln\left(1 - \frac{\tau}{\tau_f}\right)$  と  $\gamma$  とをそれぞれ縦座標と横座標にとり両者の値をプロットし最小自乗法により近似直線を求めるとき、その直線の勾配が  $b$  となる。

実験定数  $b_1$ ,  $b_2$  についても同様で、(10)式、(13)式において指数関数の項とそれ以外の項を両辺に分け、その対数をとると次式のようになり、

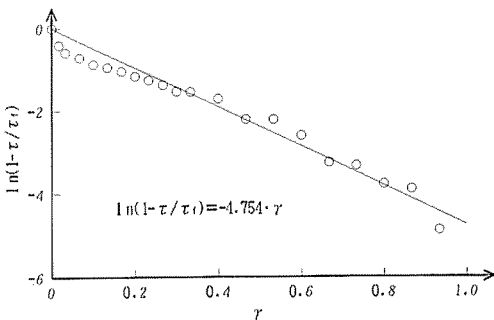


Fig. 4. Determination of parameter  $b$ .

$$\ln\left(\frac{\tau/\tau_f - 1}{\gamma - 1}\right) = -b_1 \cdot \gamma \tag{15}$$

$$\ln\left(\frac{\tau/\tau_f}{\gamma}\right) = -b_2 \cdot (1 - \gamma) \tag{16}$$

これから、 $b_1$ ,  $b_2$  が求められる。

Table 1 のデータと近似直線との関係を Fig. 4 に、Table 2 のそれを Fig. 5, 6 に示す。

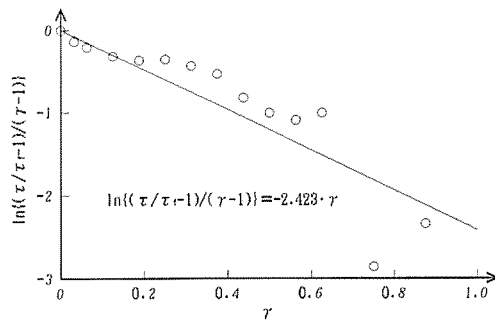


Fig. 5. Determination of parameter  $b_1$ .

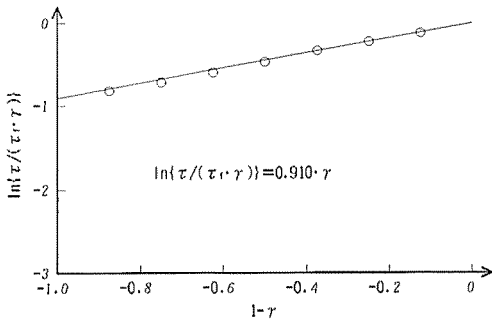


Fig. 6. Determination of parameter  $b_2$ .

IV. 結果と考察

フィルダムの築堤材料を想定して、遮水ゾーンを構成する粘性土とそれ以外のランダムゾーンを構成する砂質土の二種類を実験材料とした。それらの基本的性質は Table 3 に示す通りである。

Table 3 Identification properties of the soil tested

		砂質土	粘性土
土粒子の比重	$G_s$	2.673	2.654
液性限界	$W_L$	32.88%	42.40%
塑性限界	$W_P$	—	22.26%
塑性指数	$I_P$	—	20.14
最適含水比	$W_{opt}$	16.28%	17.99%
最大乾燥密度	$\rho_{dmax}$	1.730	1.699
日本統一分類法による分類		SM	CH

Fig. 7 は、ピークが存在しない場合の実測データと(5)式との関係を表しており、どちらかという粘性土に相当する  $X/X_f \sim \tau$  性状であるといえる。一面せん断試験における垂直荷重  $\sigma_h$  をパラメータにした四本の曲線は全体的に実験値をよく近似していることが認められる。ただ、両者の差異をもう少し詳細に観察してみると、 $X/X_f$  の値が小さい曲線の立ち上がり付近では(5)式による値が実験値を若干下回る傾向がみられる。曲線の fitting 方法にも関連するが、根本的には(5)式による線形関係では粘性土の非線形性を十分に表現できないことが原因となっているものと判断される。構造粘性を導入した厳密なアプローチも考えられるが<sup>5)</sup>、本研究はせん断応力～変位関係のフィルダム斜面安定解析への適用を念頭に置いているので関係式は簡明なることを第一とする。

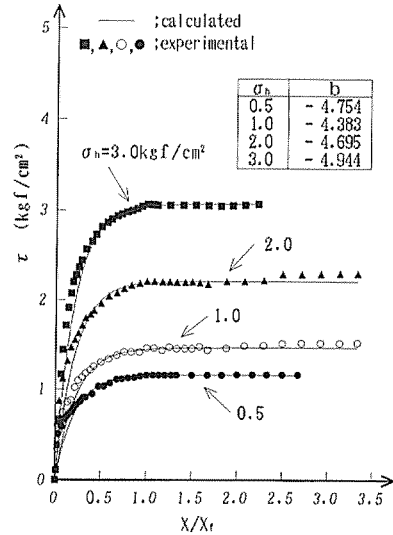


Fig. 7. Experimental and calculated relationships of shear stress and shear displacement ratio in the case of no peak strength ( $\sigma_h$  vertical stress).

そのような観点からすれば Fig. 7 に得られた結果は十分なものとみなされる。なお、この場合の係数  $b$  の値の垂直荷重  $\sigma_h$  に対する変化は  $\sigma_h = 1.0$  でピークとなる二次曲線の形状を呈する。

一方、Fig. 8 はピークが存在する場合、すなわち主として砂質土に相当する  $X/X_f \sim \tau$  性状である。  $b_1, b_2$  なる二係数のうち前者はピーク以前の、後者はピーク以後の曲線形状を表す。Fig. 7 の場合と同様に立ち上がり付近で実験値と近似曲線の間に若干の差異は見られるものの総じてこの場合の方がより良好に近似されていることが図より明らかであろう。ただし、(13)式はその性質上、残留強度を含めた全データを追随することは不可能なので Fig. 8 の計算曲線は比較的实验値を良く近似する範囲だけを示している。「ピークが存在しない場合」との大きな違いは  $X/X_f$  が 0～0.4 位の間での曲線の傾きが緩やかなことであり、結果的にはそのために(10)式が適度な近似式となっていることになる。また、係数  $b_1$  の値は  $\sigma_h$  の増加と共に大きくなっていく傾向がみられる。

いずれにしても、本研究で提案した構成式(5)式及び(10)、(13)式は一面せん断試験における締固め土の応力・ひずみ関係を比較的良好に表現することができるという結論に到達した。

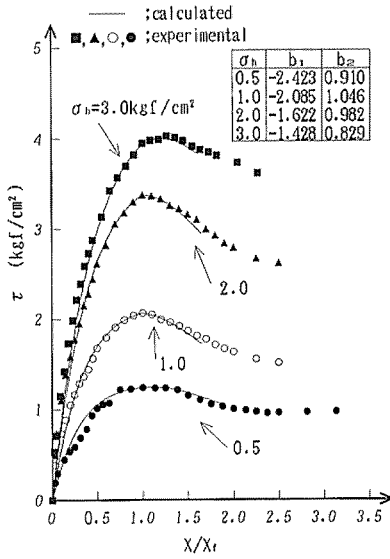


Fig. 8. Experimental and calculated relationships of shear stress and shear displacement ratio in the case of peak strength ( $\sigma_n$  vertical stress).

V. ま と め

フィルダム斜面安定解析に変形要素を取入れる試みとして、土に関するクーロンの破壊規準にレオロジーの考察を加えた構成式を提案した。土（ここでは締固め土に限定する）の応力～ひずみ関係は粘性土のような「ピークが存在しない場合」と砂質土のような「ピークが存在する場合」に大別することができる。前者には周知のフォークトモデルを、後者には二つのフォークトモデル

を直列につないだ四要素モデルを当てはめた。

もっとも、今回使用した一面せん断試験ではひずみ量は得られないのでそれに変わるものとしてせん断変位率を定義している。そして、せん断変位は時間と直線関係をなすという仮定を行っている。そのようにして導いた締固め土の構成式を実験データにあてはめた結果、「ピークが存在しない場合」は曲線の立ち上がり付近で提案式による値が実験値を若干下回る傾向がみられた。「ピークが存在する場合」も同様な傾向となったが、この場合の方が構成式と実験データとの差異はより小さなものとなった。全体的にここで提案した構成式は、締固め土のせん断応力～せん断変位率関係を良好に近似し得るという結論に至った。

土の厳密な力学的機構解明には踏み込まず、実務上の観点からその性状を現象論的に捉えたことに留意して、本手法が盛土構造物の安定解析に適用することができれば幸いとする次第である。

引用文献

- 1) 例えば、山口柏樹：土質力学，技報堂出版，1984.
- 2) 土質工学会編：土質試験法（第2回改訂版），1981.
- 3) S. S. Vyalov: Rheological Fundamental of Soil Mechanics, ELSEVIER, p. 111-112, 1986.
- 4) 最上武雄編：土質力学，第5章土のせん断，技報堂出版，1969.
- 5) 村山朔郎・柴田 徹：粘土のレオロジー特性について，土木学会論文集，第40号，pp. 1-31, 1956.