

吸水過程の土壤水分拡散係数の算定法について

著者	清沢 秀樹
雑誌名	三重大學農學部學術報告 = The bulletin of the Faculty of Agriculture, Mie University
巻	64
ページ	1-9
発行年	1982-03-01
その他のタイトル	A Method for Estimating Soil Water Diffusivity by Absorption Data
URL	http://hdl.handle.net/10076/3139

吸水過程の土壌水分拡散係数の算定法について

清 沢 秀 樹

A Method for Estimating Soil Water Diffusivity by Absorption Data

Hideki KIYOSAWA

I. ま え が き

如地のような不飽和土壌中の水分移動を取り扱う基礎式として、いわゆる拡散型の方程式がよく用いられる。この場合、水分移動に関与する土壌の性質は、拡散係数の形で集約されているのである。つまり水分拡散係数は、灌漑や排水等の計画策定に必要であるばかりでなく、土壌の物理的性質を示す一指標としても重要である。

水分拡散係数は、土壌水分量や水分フラックスの時間的、空間的変化から求められる。すなわちこれらの実測値を、拡散方程式から導いた何らかの関係式と対比することによって算定するのである。だが、この係数の値は水分量の多寡に大きく依存するため基礎式が非線形となり、係数推定に便利な関係式が容易には得られない点が問題である。さらに、従来より土壌水分量の測定は困難なものの一つとされており、実測値には多分の誤差を含むことを覚悟せねばならない。この誤差が結果に大きな影響を及ぼさないことも必要である。

浸潤現象など吸水過程の拡散係数に関しては、水分分布を利用する Bruce らの方法¹⁾、Sorptivity を用いる Dirksen の方法²⁾ が代表的であるが、測定の容易さや広範囲の水分量についての値を一度に得られる点で、前者がよく用いられている。この Bruce 法は明確な理論に基づいているが、得られた拡散係数を用いて拡散方程式を解くとき、最初の水分曲線と必ずしも一致せず、そのような場合の拡散係数の誤差を補正する手段が用意されていない点で、不十分であるように思われる。

そこで筆者は Bruce 法の基礎式を積分し、得られた積分方程式に基づいて水分拡散係数を求める方法を検討した。その結果、Bruce 法の欠点として指摘した点に

がみても、一応の成果を得たと信ずるのでここに報告する。なお本報告は、昭和56年度文部省科学研究費(奨励A)の補助を得て行なった研究の成果の一部であって、関係各位に深謝の意を表する。

II. 計算式の誘導とその考察

1. 水平浸潤を表す基礎式

重力の影響が無視できるときには、不飽和土壌中の一次元の水分移動は、次の拡散方程式で表される。³⁾

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad \dots (1)$$

ここに、 θ :容積水分率、 t :時間、 x :距離、 D :水分拡散係数。

いま、均一な水分状態にある土壌体の一端を、瞬時に一定の高水分状態におき、水平方向に浸潤を生じさせる場合を考えると、境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} t = 0, \quad x > 0 : \theta = \theta_i \\ x = 0, \quad t > 0 : \theta = \theta_0, \quad \theta_0 > \theta_i \end{array} \right\} \quad \dots (2)$$

ここで、水分量 θ を規格化するため、変数 C を

$$C = (\theta - \theta_i) / (\theta_0 - \theta_i) \quad \dots (3)$$

のように導入する。このとき、(1)式の従属変数 θ は C におき換えられるだけであるが、境界条件は次のように単純化される。

$$\left. \begin{array}{l} t = 0, \quad x > 0 : C = 0 \\ x = 0, \quad t > 0 : C = 1 \end{array} \right\} \quad \dots (2)'$$

これらの境界条件のもとでは、拡散方程式(1)式には相似変換が成り立ち、Boltzmann 変数 $\eta = x/\sqrt{t}$ を導入すると、次の常微分方程式が得られる。

$$-\frac{\eta}{2} \frac{dC}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(D \frac{dC}{d\eta} \right) \quad \dots (4)$$

またこのとき、境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta = 0 : & \quad C = 1 \\ \eta \rightarrow \infty : & \quad C = 0 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

すなわち、以上のような水平浸潤の場合には、(1)式の偏微分方程式のみならず、常微分方程式(4)式を水分移動の基礎式として用いてもよいのである。

ところで水分拡散係数 D は、土壤自体の物理性だけでなく水分量にも依存し、均一土壤では水分量のみの関数 $D(\theta)$ (従って $D(C)$) とおくことができる。Reichardt らの実験⁴⁾によると、一般に $D(\theta)$ は水分量の指数関数で近似でき、さらに飽和土と風乾土の D の比は約3000 (≒ $\exp 8$) であることが示されている。つまり(1)式及び(4)式は共に非線形方程式であり、解析解は特殊な形の $D(\theta)$ ⁵⁾ についてしか求められていないのである。

2. Bruce らの方法

(4)式を積分し、 $\eta \rightarrow \infty$ で $DdC/d\eta = 0$ となることを考慮すると、次式が得られる。

$$D(C) = -\frac{1}{2} \frac{d\eta}{dC} \int_0^C \eta dC \quad \dots (6)$$

Bruce と Klute¹⁾ は、(6)式に基づく Matano の方法⁶⁾ を初めて土壤に適用した。すなわち、浸潤開始後の時間 t における水分量分布を測定し、 $\eta \sim C$ の関係を求め、 $d\eta/dC$ 及び $\int_0^C \eta dC$ の値を数値的に求めて、 $D(C)$ を算定するのである。

ところで、現在の土壤水分の測定技術を考えて、実験で得られる水分分布には、ある程度の誤差が含まれるのは当然であろう。これらの実測値を平滑化した曲線に基づいて、 $D(C)$ を求めるのはやむを得ないとしても、求めた $D(C)$ を用いて水分分布を逆算すると、元の曲線に一致するような値であることが望ましい。

以上の観点から(6)式を検討するに、問題となるのは、 $\eta \sim C$ 曲線の数値微分と積分である。これらは、内挿法による近似曲線に基づいて行うのが普通である。この曲線は、データとして離散的に与えられた点で元の曲線と重なる。けれどもその中間では、一致するとは限らない。数値積分では、双方の曲線が一致しなくても面積はほぼ同一となり、かなり正確な値が得られる。一方、数値微分の場合には、近似値がわずかに異なっても曲線の勾配は著しく変わる場合があるので、精度はあまり期待できないであろう。

特に、 $C = 1$ の近傍 ($x = 0$ 付近) は領域の端であり、後述の適用例でも示すように、数値微分によって $d\eta/dC$ の正確な値を求めるのは難しい。だがこのような高水分

量の水分拡散係数が、浸潤現象の主な特徴 (例えば Sorptivity³⁾) を支配することを考えると、Bruce 法には何らかの修正が必要である。

3. 筆者の方法

Bruce 法の基礎式である(6)式を積分すると、次式が得られる。

$$\eta = 2 \int_C^1 \frac{D(\alpha)}{I(\alpha)} d\alpha \quad \dots (7)$$

ここに、 $I(C) = \int_0^C \eta dC$ 。

この関係を用いて Parlange⁷⁾ は、反復法により水分分布 $\eta \sim C$ を求めようとしたが、上式は逆に水分分布から $D(C)$ を求めるのに利用することができる。つまり、 $\eta \sim C$ 及びその積分 $I(C)$ が既知であるとき、(7)式を $D(C)$ を求めるための積分方程式とみなすのである。この場合の数値解法を考えよう。

(i) 数値積分公式による定式化

0 から 1 の C の範囲を n 等分し、その分割点間のキザミを $h (= 1/n)$ とおく。また、

$$C_r = 1 - rh, \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n) \quad \dots (8)$$

のように各分割点に番号をつけ、さらにこの添字 r によって $C = C_r$ における種々の量を表すものとする。

(7)式で $g(C) = D(C)/I(C)$ とおき、積分を Simpson 第一公式でおき換えると、次のような諸式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 &= 2 \int_{1-2h}^1 g(C) dC = \frac{2h}{3} (g_0 + 4g_1 + g_2) \\ \eta_3 - \eta_1 &= 2 \int_{1-3h}^{1-h} g(C) dC = \frac{2h}{3} (g_1 + 4g_2 + g_3) \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_{r+1} - \eta_{r-1} &= 2 \int_{1-(r+1)h}^{1-(r-1)h} g(C) dC \\ &= \frac{2h}{3} (g_{r-1} + 4g_r + g_{r+1}) \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_{n-1} - \eta_{n-3} &= 2 \int_{1-(n-1)h}^{1-(n-3)h} g(C) dC \\ &= \frac{2h}{3} (g_{n-3} + 4g_{n-2} + g_{n-1}) \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

また、Simpson 第一と第二公式を組み合わせると、1 キザミについて次式を得る。

$$\begin{aligned} \eta_r - \eta_{r-1} &= 2 \int_{1-rh}^{1-(r-1)h} g(C) dC \\ &= 2 \left(\int_{1-rh}^{1-(r-3)h} g(C) dC - \int_{1-(r-1)h}^{1-(r-3)h} g(C) dC \right) \\ &= \frac{h}{12} (9g_r + 19g_{r-1} - 5g_{r-2} + g_{r-3}) \quad \dots (10) \end{aligned}$$

上式は、Newton内挿式⁸⁾で第4階差を0とおいて積分しても得られ、近似度はSimpson公式と同様に3である。

以上の諸式中の未知数は、 g_0 から g_{n-1} までの n 個であり、それらを求めれば既知である $I(C)$ をかけて、各分割点の D が求まるのである。しかし、(9)及び(10)式で独立な方程式は $n-1$ 個にすぎない。すなわち、これらの連立方程式は不定であって、通常はさらに1個、未知数についての関係式が必要である。

なお(9)式には、 C_n すなわち $C=0$ での関係式を含めていない。それは、浸潤前線先端部の水分分布の測定が困難であり、 η_n が正確に得られないことに加え、 $I(0)=0$ より、 $D(0)\neq 0$ ならば $g(0)\rightarrow\infty$ となって、数値積分にそぐわないからである。このように、 $C=0$ における D の値が求め難いのはBruce法でも同様であり、 $D(0)$ は(6)式や(7)式とは別の関係式で決定せねばならないであろう。

(ii) 解法

上述のように(9)、(10)式は不定の方程式であるが、 g_r のうち1個が既知ならば当然解けるのである。いま仮に g_0 がわかっているものと考えよう。そのとき、問題は次のような三重対角行列を係数行列とする方程式を解くことに帰する。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 4 & & & & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & 1 & 4 & & \\ & & & \dots & \dots & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad \dots(11)$$

ここに、 $f_1=3\eta_2/(2h)-g_0$ 、 $f_r=3(\eta_{r+1}-\eta_{r-1})/(2h)$ ($r=2,\dots,n-2$)、 $f_{n-1}=(17\eta_{n-1}-9\eta_{n-2}-9\eta_{n-3}+\eta_{n-4})/(12h)$ 。なお、(11)式の最終行は、(10)式で $r=n-1$ とおき(9)式の $(\eta_{n-2}-\eta_{n-4})$ 及び $(\eta_{n-1}-\eta_{n-3})$ についての式を用いて、 g_{n-4} 、 g_{n-3} を消去して得られる。このような三重対角行列の連立方程式は、係数行列の特性を活かした消去法⁹⁾によって、簡単に解くことができる。

ところで、通常は g_0 は未知であり、何らかの推定値を用いねばならない。すなわち、最初は f_1 には誤差が含まれている。この誤差が、各 g_r に伝わる様子が問題

である。一般に、 f_r に含まれる誤差の伝播は、(11)式の係数行列の逆行列によって明らかになるが、 f_1 ではその第1列を求めればよい。そのためには、(11)式の定数項ベクトル $[f_1, f_2, \dots, f_{n-1}]$ を $[1, 0, \dots, 0]$ なる単位ベクトルにおきかえて、方程式を解けばよいのである。

Table 1. g_0 の誤差が g_r へ伝わる様子 ($n=10, 20$ の場合)

r	$n=10$	$n=20$
0	1	1
1	-2.6795×10^{-1}	-2.6795×10^{-1}
2	7.1797×10^{-2}	7.1797×10^{-2}
3	-1.9238×10^{-2}	-1.9238×10^{-2}
4	5.1548×10^{-3}	5.1548×10^{-3}
5	-1.3831×10^{-3}	-1.3812×10^{-3}
6	3.7722×10^{-4}	3.7010×10^{-4}
7	-1.2574×10^{-4}	-9.9167×10^{-5}
8	1.2574×10^{-4}	2.6572×10^{-5}
9	-3.7722×10^{-4}	-7.1199×10^{-6}
10		1.9078×10^{-6}
11		-5.1118×10^{-7}
12		1.3697×10^{-7}
13		-3.6702×10^{-8}
14		9.8351×10^{-9}
15		-2.6387×10^{-9}
16		7.1964×10^{-10}
17		-2.3988×10^{-10}
18		2.3988×10^{-10}
19		-7.1964×10^{-10}

Table 1は、以上のようにして求めた誤差伝播の様子である。これによれば $n=20$ の場合、 g_0 に含まれる誤差を1とすると、 g_{19} には 10^{-9} 程度の誤差しか含まれないことになる。前述のように、普通の土壌では $D(1)/D(0)\approx 3000$ 程度であるから、 g_{19}/g_0 の比もおおよそ 10^{-3} 程度と考えられる。従って、たとえ g_0 の値を2倍に推定しても(相対誤差100%)、 g_{19} の相対誤差は 10^{-4} %程度となり、正確な値とみなせるのである。だが同様に考えれば $n=10$ の場合 g_0 における100%の誤差に対して、 g_9 には10%程度の相対誤差を含むことになる。 n はある程度以上、大きくなければならない。

けれども、以上のことを逆に言えば $n=20$ の場合、 g_{19} に 10^{-9} 程度の誤差しか含まないときでも、消去法の逆進段階を経れば、 g_0 では1の大きさの誤差となる。つまり、このような連立方程式によって求めた g_0 付近

の値には、 g_{n-1} の小さな誤差から派生した大きな誤差が含まれているのである。このための補正が必要である。

ところで、これまで初めに g_0 を仮定する場合を論じてきたが、同様なことは g_{n-1} を仮定するときにも言える。その場合、(11)式の係数行列は変わらないが、解ベクトルを $[g_{n-2}, g_{n-3}, \dots, g_0]$ とおきかえ、また定数項ベクトルを $[f_{n-2}, f_{n-3}, \dots, f_0]$ としなければならない。ここに、 f_r は次式のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} f_{n-2} &= 3(\eta_{n-1} - \eta_{n-3}) / (2h) - g_{n-1} \\ f_r &= 3(\eta_{r+1} - \eta_{r-1}) / (2h), (r = n-3, \dots, 1) \\ f_0 &= (9\eta_1 + 9\eta_2 - \eta_3) / (12h) \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

係数行列は先と同一なので、 g_{n-1} の誤差の伝播は Table 1 と同様であり、ただ r の番号を $(n-1, n-2, \dots, 0)$ と変えればよい。 $n=20$ の場合では、 g_{19} に 1 の誤差が含まれるとき、 g_0 の誤差はほぼ 10^{-9} となり、逆進段階で g_{19} に近づくと誤差が大きくなる。

いま、先の g_0 を仮定して得た g_{n-1} を、ここでの初期推定値として用いるならば、結果として得られる g_0 も非常に精度の高いものと推測される。従って、この g_0 に基づけば、先の過程で得られた g_0 (g_1, g_2 より(9)式で算定するもので、一般には途中の丸め誤差のため初期値と異なる) の誤差が推定できる。この値をもとに Table 1 の誤差伝播の割合に従って、各 g_r の修正値を求めることができる。

以上の計算で、キザミ h を小さくすれば数値積分の精度を上げられるのは勿論であるが、分割点数 n が大きくなり演算量が増大する。連立方程式の誤差伝播の観点だけで言えば、丸め誤差のために n をある程度以上大きくとっても効果はあがらない。 n が大きくなる場合は、水分領域をいくつかに分け、それぞれについて $n=20$ 程度の分割点で g_r を求めればよいであろう。

III. 実測値への適用とその考察

1. 実験の概要

(i) 供試土壌

実験には、0.5 mm フリイを通過させた三重大学農場砂土を用いた。Table 2 に、その土性を示す。また Fig. 1 は、この土壌の pF-含水比曲線である。

(ii) 実験

深さ 1.0 cm、巾 6.6 cm の矩形断面をもち、長さ 33.3 cm のアクリル製容器に風乾土壌をつめた。そのときの含水比は 2.1%，乾燥密度は 1.40 g/cm^3 であった。

Table 2 供試土壌

真 比 重		2.67
土	~0.01 mm	6%
	0.01~0.05	3
	0.05~0.25	31
性	0.25~0.5	46
	0.5 ~2.0	14

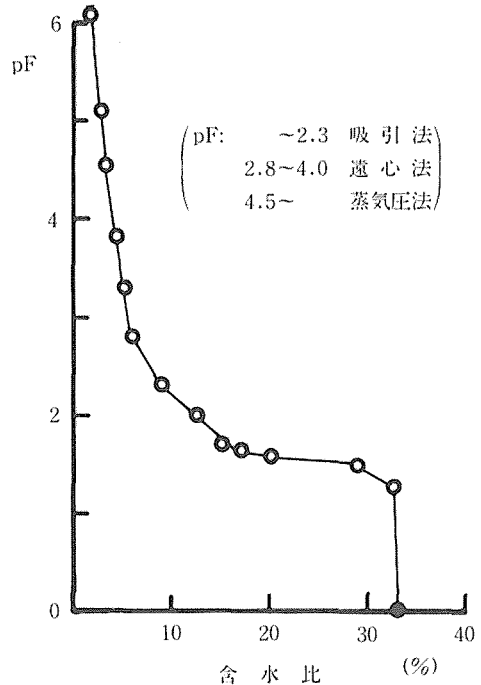


Fig. 1 pF-含水比曲線

一方の断面からマリOTT装置によって給水し、水平浸潤を生じさせた。マリOTTの水位は、容器底より0.5 cmになるよう設定した。水温は 22.5°C であった。

浸潤開始後 34 分 (2040 秒) して給水を停止し、直ちに 1 cm 間隔で土壌を切り、炉乾法によって水分分布を求めた。結果を Fig. 2 に示す。この実測値のバラツキを平滑化した曲線にもとづいて、拡散係数を求めた。

2. 水分拡散係数の算定

(i) Bruce 法

水分範囲を 20 等分し、(6)式により拡散係数を算定した結果を Table 3 に与えた。表中の $\int_0^C \eta dC$ は Simpson 公式によったが、 $\int_0^{0.05} \eta dC$ の値は(10)式を用いた。また、 η の第三階差までをとり、Stirling 式⁸⁾で $d\eta/dC$ を求めたが、 $C=0$ 及び $C=1$ の付近の値は、Newton 内挿式

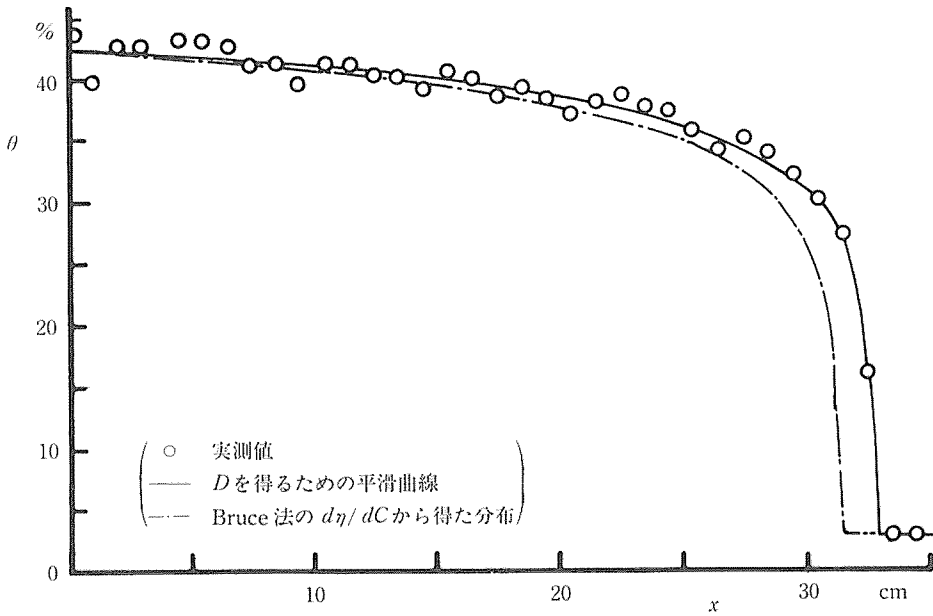


Fig. 2 水分分布 (浸潤開始34分後)

Table 3 Bruce 法による水分拡散係数 (t = 2040 sec.)

C	θ	x	η	$\int_0^c \eta dc$	$d\eta/dC$	D (h=0.05)	η (16)式	D (h=0.1)
	%	cm	cm/s ^{1/2}			cm ² /s		cm ² /s
0	2.94	33.0	0.7306	0	-0.06500*		0.6962	
	4.94	32.9	0.7284	0.03647	-0.01733*	3.160×10^{-4}	0.6945	
0.1	6.94	32.85	0.7273	0.07286	-0.02367	8.623×10^{-4}	0.6936	1.154×10^{-3}
	8.94	32.8	0.7258	0.1092	-0.03300	1.802×10^{-3}	0.6921	
0.2	10.9	32.7	0.7240	0.1454	-0.04233	3.078×10^{-3}	0.6903	2.425×10^{-3}
	12.9	32.6	0.7218	0.1816	-0.03367	3.057×10^{-3}	0.6881	
0.3	14.9	32.55	0.7207	0.2176	-0.01900	2.067×10^{-3}	0.6870	3.094×10^{-3}
	16.9	32.5	0.7196	0.2537	-0.02750	3.488×10^{-3}	0.6858	
0.4	19.0	32.4	0.7178	0.2896	-0.04517	6.540×10^{-3}	0.6841	5.249×10^{-3}
	21.0	32.3	0.7151	0.3254	-0.05633	9.165×10^{-3}	0.6814	
0.5	23.0	32.15	0.7118	0.3611	-0.09350	1.688×10^{-2}	0.6780	1.738×10^{-3}
	25.0	31.9	0.7054	0.3966	-0.1532	3.038×10^{-2}	0.6717	
0.6	27.0	31.45	0.6963	0.4316	-0.2193	4.732×10^{-2}	0.6626	4.412×10^{-2}
	29.0	30.85	0.6830	0.4661	-0.3040	7.085×10^{-2}	0.6495	
0.7	31.0	30.0	0.6642	0.4998	-0.5033	1.258×10^{-1}	0.6303	1.257×10^{-1}
	33.0	28.5	0.6310	0.5322	-0.8042	2.140×10^{-1}	0.6076	
0.8	35.0	26.3	0.5823	0.5627	-1.174	3.303×10^{-1}	0.5487	3.264×10^{-1}
	37.0	23.05	0.5103	0.5901	-1.768	5.217×10^{-1}	0.4792	
0.9	39.0	18.2	0.4032	0.6131	-2.380	7.295×10^{-1}	0.3716	7.465×10^{-1}
	41.0	11.7	0.2590	0.6298	-3.268*	1.029	0.2366	
1.0	43.0	0	0	0.6371	-6.846*	2.181	0	1.773

(注) $d\eta/dC$ 欄の*印は Newton 内挿式, 他は Stirling 式による。いずれも第三階差までとったもの。

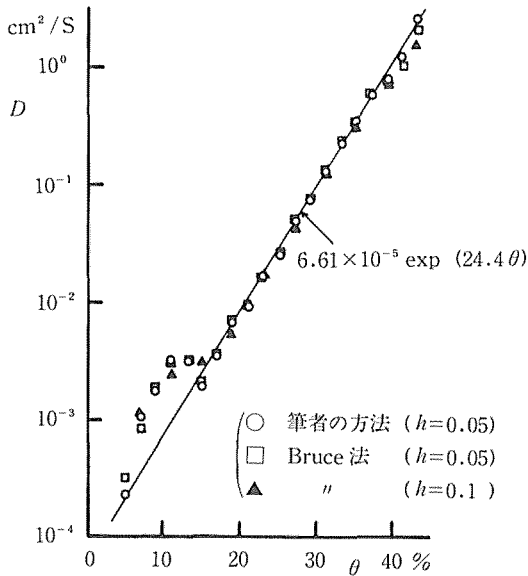


Fig. 3 Dと容積水分率θの関係

によらざるを得なかった。特に $C=1$ 付近では高階階差が0に近づかず、Newton式の収束性の悪さも相まって、かなり誤差を含むと考えられる。同様な計算は、 $h=0.1$ についても行なった。

Fig. 3は、 D と θ の関係である。水分領域の端で $h=0.05$ と $h=0.1$ で違いが見られるが、これは上述のようにNewton内挿式にもとづく微分の精度の悪さによるものであろう。

(ii) 筆者の方法

計算の手順をTable 4に示した。すなわち、まずBruce法と同様 C を20等分し、(8)式に従って各分割点に番号をつける。第一段階では、 $g_0 (= D(1)/I(1) = -(1/2)dn/dC|_{C=1})$ の初期推定値を、数値微分によって求めた。以下(11)式の連立方程式を解く。さらに第二段階では先に求めた g_{19} を既知の量とし、(12)式で f_r を設定しなおして、再び連立方程式を解くのである。次に第一段の $g_0(3.4000)$

Table 4 筆者の方法

C	η	$I(C)$	r	f_r	g_r (第一段)	g_r (第二段) (修正値)	$D(h=0.05)$	$D(h=0.1)$	$D(h=0.025)$
0	$\frac{cm}{s^{\frac{1}{2}}}$ 0.7306	0	20	—			cm^2/s	cm^2/s	cm^2/s
	0.7284	0.03647	19	(0.048167)	6.0593×10^{-3}	6.0593×10^{-3}	2.210×10^{-4}		5.216×10^{-4}
0.1	0.7273	0.07286	18	(0.0780 0.07194)	1.4036×10^{-2}	1.4036×10^{-2}	1.023×10^{-3}	8.325×10^{-4}	8.433×10^{-4}
	0.7258	0.1092	17	0.099	1.5798×10^{-2}	1.5798×10^{-2}	1.725×10^{-3}		1.719×10^{-3}
0.2	0.7240	0.1454	16	0.120	2.1774×10^{-2}	2.1774×10^{-2}	3.166×10^{-3}	2.659×10^{-3}	3.317×10^{-3}
	0.7218	0.1816	15	0.099	1.7106×10^{-2}	1.7106×10^{-2}	3.106×10^{-3}		2.836×10^{-3}
0.3	0.7207	0.2176	14	0.066	8.8027×10^{-3}	8.8027×10^{-3}	1.915×10^{-3}	3.136×10^{-3}	2.138×10^{-3}
	0.7196	0.2537	13	0.087	1.3683×10^{-2}	1.3683×10^{-2}	3.471×10^{-3}		3.532×10^{-3}
0.4	0.7178	0.2896	12	0.135	2.3464×10^{-2}	2.3464×10^{-2}	6.795×10^{-3}	4.940×10^{-3}	6.690×10^{-3}
	0.7151	0.3254	11	0.180	2.7461×10^{-2}	2.7461×10^{-2}	8.936×10^{-3}		8.947×10^{-3}
0.5	0.7118	0.3611	10	0.291	4.6693×10^{-2}	4.6694×10^{-2}	1.686×10^{-2}	1.836×10^{-2}	1.799×10^{-2}
	0.7054	0.3966	9	0.465	7.6768×10^{-2}	7.6765×10^{-2}	3.044×10^{-2}		2.984×10^{-2}
0.6	0.6963	0.4316	8	0.672	1.1124×10^{-1}	1.1125×10^{-1}	4.802×10^{-2}	4.403×10^{-2}	4.764×10^{-2}
	0.6830	0.4661	7	0.963	1.5027×10^{-1}	1.5024×10^{-1}	7.003×10^{-2}		7.000×10^{-2}
0.7	0.6642	0.4998	6	1.560	2.5068×10^{-1}	2.5078×10^{-1}	1.253×10^{-1}	1.275×10^{-1}	1.230×10^{-1}
	0.6310	0.5322	5	2.457	4.0703×10^{-1}	4.0665×10^{-1}	2.164×10^{-1}		2.085×10^{-1}
0.8	0.5823	0.5627	4	3.621	5.7822×10^{-1}	5.7962×10^{-1}	3.262×10^{-1}	3.307×10^{-1}	3.385×10^{-1}
	0.5103	0.5901	3	5.373	9.0110×10^{-1}	8.9588×10^{-1}	5.287×10^{-1}		5.424×10^{-1}
0.9	0.4032	0.6131	2	7.539	1.1904	1.2099	7.418×10^{-1}	8.026×10^{-1}	7.479×10^{-1}
	0.2590	0.6298	1	(8.696 12.096)	1.8764	1.8036	1.136		1.097
1.0	0	0.6371	0	(9.0825)	3.4000	3.6716	2.339	1.855	2.420

(注) f_r が2個の場合、上が第一段、下が第二段。第一段では $g_0=3.400$ を仮定。

の誤差を推定するため、第二段の g_0 (3.6716) を正確値とみなして差 (-0.2716) をとる。その値に Table 1 の $n=20$ の場合の誤差伝播の割合をかけて、第一段の g_r を補正したが、第二段の g_r と同一となった (例えば $r=1$ では、 g_1 の修正値 = $1.8764 - (-0.2716) \times (-0.26795)$)。なお以上の計算は、浮動小数点法により演算桁数 10 桁で行なった。

この g_r の修正値に $I(C)$ をかけて、 $D(C)$ を求めた。その結果も Fig. 3 に示してある。また、同様に $h=0.1$ 及び $h=0.025$ として得た D も、Table 4 に示した。

以上の例では、第二段の g_r と修正値が表に示した桁数では完全に一致した。このことは、演算桁数が十分であり丸めの影響が現われなかったことに加え、誤差伝播が先の推定のとおりであることを示すものである。消去法の際に丸め誤差の影響が現れてくる場合は、修正値を求める過程を省けないのは言うまでもない。

3. 考 察

(i) 数値積分の精度とキザミ

これまで $I(C) = \int_0^C \eta dC$ や $\eta(C) = 2 \int_C^1 g(C) dC$ を数値的に求めるのに、主として Simpson 公式を用いた。けれども、その際の誤差には論及しなかった。この点はキザミ h の決定の問題とも関連し、検討を要するであろう。

周知のごとく、 $2h$ 間の積分 $\int_{a-h}^{a+h} \eta dC$ を Simpson 則でおきかえたときの誤差 E は、

$$E = \frac{h^5}{90} \left. \frac{d^4 \eta}{dC^4} \right|_{c=a} \quad \dots(13)$$

で近似できる。 η の高階微分は、(6)式の両辺を逐次に微分することによって推定できる。特に D が指数関数で近似できるような場合、 $C=0$ に極めて近い点を除外すると、 $d^4 \eta/dC^4$ は $C=1$ で絶対値が最大となる。

$$\left. \frac{d^4 \eta}{dC^4} \right|_{c=1} = -\frac{2}{I(1)} \left(\frac{d^3 D}{dC^3} + \frac{8D}{I(1)^2} \frac{dD}{dC} \right) \Big|_{c=1} \quad \dots(14)$$

Fig. 3 に示した D を指数関数で近似すれば、

$$D = 1.35 \times 10^{-4} \exp(9.76C) \quad \dots(15)$$

が得られる。この D を用いると、 $d^4 \eta/dC^4|_{c=1} \approx -1.0 \times 10^4$ を得る。先の例で $h=0.05$ の場合は、 $2h$ 間の $\int \eta dC$ の誤差は(13)式より 3.5×10^{-5} 以下であり、相対誤差 ($E/\int \eta dC$) はおよそ 0.15% 以下であることがわかる。また $g(C) = -(1/2) d\eta/dC$ であることから、 $2 \int_C^1 g(C) dC$ の

誤差も $d^5 \eta/dC^5$ を求めることにより推定したが、 $\int \eta dC$ の相対誤差とはほぼ同程度 (0.14% 以下) であった。

(13)式のように、 $2h$ 間の誤差は h^5 に比例するが、積分公式の適用回数と h とが反比例するため、ある一定区間についての誤差は h^4 に比例する。従って、 $h=0.1$ のときの誤差は 2.4% 以下、 $h=0.025$ では 0.01% 以下である。

しかし、Table 4 の $h=0.1, 0.05, 0.025$ の D の差は、このような積分誤差よりもはるかに大きく、しかも一様でない。一般に、積分方程式の数値解法の誤差を理論的に扱うのは、難しい問題とされている。実用的には、キザミ h での誤差は、 $h/2$ のキザミで得た値との比較で推定してよいであろう。今の例では、 $h=0.05$ の D の誤差は、3% 以下とみなせるのである。

(ii) 水分拡散係数

Table 3 と 4 の結果を比較すると、Bruce 法及び筆者の方法により求めた拡散係数は、水分量の中間領域ではほとんど一致するが、端の領域では違いがみられる。このあたりは Bruce 法において、水分勾配の推定に Newton 内挿式を用いたところである。

ところで、(i) で述べた程度の積分段階での誤差を無視すれば、 $d\eta/dC$ の誤差は次式で求めた η によって明らかになる。

$$\eta = - \int_c^1 \frac{d\eta}{dC} dC \quad \dots(16)$$

Table 3 及び Fig. 2 には、Bruce 法で使った $d\eta/dC$ を用いて、上式で η を算定した結果を示した。Fig. 2 によれば $1 \sim 0.85$ の C の領域で生じた η の差は、ほとんど大きさを変えず低水分領域まで伝わっていく。すなわち、中間領域の $d\eta/dC$ は Bruce 法の場合もほぼ正確なのであるが、 $C=1$ 付近ではかなりの誤差を含むのである。

次に筆者の方法では、 $g(C) = -(1/2) d\eta/dC$ ((6)式) の関係を考えて、(16)式は(7)式と同一となる。Table 4 の g_r の修正値を(16)式に代入すれば、元の η が得られるのは勿論である。つまり、本方法は各点の水分勾配が(16)式の関係を満たすよう、 $g(C)$ を決定することに重点を置いているのである。このようにして得た $g(C)$ に基づく $D(C)$ は、当然(7)式の関係も満たす。すなわち、この $D(C)$ を用いて η を計算すれば、与えられた元の η に一致することになる。

ところで、このような $D(C)$ と Sorptivity $S(\equiv (\theta_1 - \theta_0) \int_0^1 \eta dC)$ とは、次式のような $D(C)$ の重み付き平均

値で関連づけられる。

$$S^2 = A(1 + \gamma)(\theta_1 - \theta_0)^2 \int_0^1 C^\gamma D(C) dC \dots (17)$$

Dirksen²⁾は $\gamma=0.67$, $A=4/\pi$ を用い, Parlange¹⁰⁾は $\gamma=0.5$, $A=4/3$ を推している。 D が $C=1$ に近づくにつれ急激に増大する場合は, 後者がより正確と考えられる。Parlangeの値を用いて, $h=0.05$ の場合の D から S を求めると, Bruce法では $S/(\theta_1 - \theta_0) = 0.6135$, 筆者の方法では 0.6300 となる。実際の値は 0.6371 であることを考えると, 筆者の方が正確である。(17)式では $C=1$ の D に最大の重みがかかるゆえ, $C=1$ 付近の D がわずかに異っても Sorptivityの値は変わってくる。すなわち, 筆者の方法では $C=1$ 付近の D もかなり正確に得られていると言えよう。

以上のようにして求めた D は, (15)式のように水分量の指数関数で近似できるが, Reichardt⁴⁾らの結果と異なり, 指数の係数が 9.76 にも達している。このような D そのものの性質については, 実験精度をさらに上げたいので検討せねばならない。

IV. まとめ

水分拡散係数 D の計算法として一般に用いられているBruce法には, 水分勾配の値を必要とするが, それを正確に得るのは難しい。

本報告では, Bruce法の基礎式を積分した(7)式に基づき, D を求めることを試みた。すなわち, 積分を数値積分公式におきかえることによって, 水分勾配の逆数を未知数とする連立方程式(9)式を得た。それは未知数より方程式が一つ少ない形であるが, 係数行列の誤差伝播の特性を活かすことにより, 精度の高い解法を得ることができた。

この筆者の方法にも, 最適なキサミのとり方や求めた拡散係数の誤差の推定方法など, いくつかの残された問題点がある。だが本方法は, 水分勾配の値を必要としない点, さらに得られた拡散係数を用いて水分分布を逆算すれば実測値に一致する点で, Bruce法より優れていると確信するものである。

引 用 文 献

- 1) Bruce, R. R. and A. Klute: The Measurement of Soil Moisture Diffusivity, Soil Sci. Soc. Am. Proc. 20, 458-462 (1956).
- 2) Dirksen, C.: Determination of Soil Water Diffusivity by Sorptivity Measurements, Soil Sci. Soc. Am. Proc. 39, 22-27 (1975).
- 3) 例えば, Philip, J. R.: Theory of Infiltration, Adv. in Hydrosol. 5, 215-305 (1969).
- 4) Reichardt, K., D. R. Nielsen and J. W. Biggar: Scaling of Horizontal Infiltration into Homogeneous Soils, Soil Sci. Soc. Am. Proc. 36, 241-245 (1972).
- 5) Philip, J. R.: General Method of Exact Solution of the Concentration-Dependent Diffusion Equation, Aust. J. Phys. 13, 1-12 (1960).
- 6) Matano, C.: The Relation between the Diffusion Coefficients and Concentrations of Solid Metals (the Nickel-Copper System), Jap. J. Phys. 8, 109-113 (1933).
- 7) Parlange, J.-Y.: Theory of Water Movement in Soils: 1, Soil Sci. 111, 134-137 (1971).
- 8) 谷本勉之助: 実用数値計算法, 東京, 森北出版, 9-53 (1958).
- 9) 戸川隼人: 詳解数値計算演習, 東京, 共立出版, 97-98 (1980).
- 10) Parlange, J.-Y.: Comment on 'Determination of Soil Water Diffusivity by Sorptivity Measurements', Soil Sci. Soc. Am. Proc. 39, 1011-1012 (1975).

Summary

A novel method for estimating soil water diffusivity D of absorption process has been derived, based on the equation: $\eta = 2 \int_c^1 \frac{D(\alpha)}{I(\alpha)} d\alpha$, where $\eta = x/\sqrt{t}$ (Boltzmann variable), $I(C) = \int_0^C \eta dC$ and C is a normalized water content. By the use of the numerical integral formulas, the above equation is transformed into the simultaneous equations which contain $g_r (\equiv D(C_r)/I(C_r))$ as unknowns. $D(C)$ values are obtained from the solutions g_r multiplied by $I(C)$.

The method was examined practically by the distribution of soil water content in the horizontal column. It was found that numerical differentiation of soil water content was not necessary for estimating $D(C)$, while in 'Bruce method' it was indispensable, and that the water content distribution almost equal to original data was obtained when inverse calculation was made using $D(C)$ secured by the author's method.