

用水システムの運用操作における流量の応答遅れ

加 治 佐 隆 光

Delay of Discharge Response Operating in a Water Conveyance System

Takamitsu KAJISA

第 I 章 緒 言

カンガイ用水システムは、ダムから圃場までの区間に種々の構造物が複雑に配置されたものである。従って、これらの構造物で構成されたシステムを安全、かつ確実に操作するための手法が必要となる。本研究では、システムの操作によって生ずる流れの水理学的な機構の解明と適切な操作手法の開発を目的とする。

研究対象として、取水工—開水路—受益地からなる幹線送水路システムを選定した。実際のカンガイ用水システムの複雑な構成に比べれば、このシステムはシンプルであるが、基本的な要素としての長大な水路をその中に含んでいる。したがって、このシステムは基礎的、理論的な考察を行うためのモデルとして適切であると判断し、このシステムを用いることとした。

ところで、取水工地点には取水ゲートがあって、送配水施設管理者によるゲート操作すなわち送水量の変更操作が行われている。しかし、開水路内では水位変動にともない用水の貯留量が変化し、しかも幹線の開水路は数 km もの長さを有しているため、取水工地点における送水量の変更操作の効果が、開水路全体に波及するまでにはかなりの時間を要する。このような場合、送配水管理者による送水量の変更操作によって出現する流況の変動状況をあらかじめ推算することが、施設の安全かつ効率的な運営上、必要となる。

このような観点から、本論文では開水路システムにおける送水量の変更操作にともなう流況変動に関する数理モデルの作成と、水理学的な検討と考察を試みた。

水路内流況の変動状況は、波形崩れが考慮されない場合、理想段波として取扱うことができよう。ところが、実際には、水路内における波形は、その波頭位置において徐々に崩れてゆくのが一般的である。そこで、本論では、仮想上の理想段波の波形と比較しつつ、実際に崩れてゆく波形変動過程を考察の対象とした。

従来、このような波形崩れは、洪水流などを例として、その水深変動が目玉され、測定も行われてきた。しかし、本論文では、農業用水路についての実用的な目的から流量変動に注目してこの波形崩れを評価した。そして、この流量に注目した場合にのみ得られるであろう事象の把握が試みられた。

具体的には、上述の目的のために、いくつかの基礎式（たとえば、運動方程式、連続の式など）が必要となる。ただ、それらの基礎式は、そのままでは数値的に取扱うことが可能であっても、解析的に取扱うことが困難である。従って、定性的な議論を行いにくい。そこで、解析的に取扱い易く、式適用の前提条件がある程度現実的と思われる線形拡散型方程式を導入することとした。

線形拡散型方程式としては、水深 h を従属変数とした方程式がある。しかし、理想段波の波頭位置を決定するためには、明らかに、流量 Q についての拡散型方程式が有利であり、以下ではこの方程式を基礎式としている。

さらに、この流量 Q についての拡散方程式の解から得られる幾つかの近似式の提案も行われている。それらの多くは、境界条件を流量で与えて、水路内流量変動に注目したからこそ得られたものである。なお、現地実験、数値実験による検証もあわせて行った。

第II章 開水路における流況操作の応答に関する基礎方程式と関与する波形因子

第1節 はしがき

カンガイ用水システムは一般にその構成要素が多岐にわたり、かつ支配面積も広大な大規模システムであることが多い。本章では、これらのうちとくに取水工—開水路—受益地からなる幹線送水路システムを対象に送水管操作の応答遅れに関する問題を扱うこととする。

受益地点における水需要は刻々変動するものであり、これに対応すべく取水工地点で施設管理者によって送水量の変更操作が行われる。しかし、開水路を主体とする送水路には水位の変動に伴う用水の貯留量の変化が存在するため、取水工地点における送水量の変更操作の効果が受益地点に到達するまでにはかなりの時間の遅れを生ずる。つまり、このような開水路系では操作に対する主力応答の遅れがかなり大きい。

このような場合、送配水管理者による送水量の変更操作によって現れる流況の変動状況をあらかじめ推算することができれば、送水システムの管理ならびに操作をさらに効率的に行うことが可能になる。

このような観点から、本章では開水路システムにおける送水量の変更操作に伴う流況変動に関する数理モデルを作成し、水理学的な検討と考察を行った。

解析の手順として、まず、微小振幅の長波ならびに単斜上昇波の理論を前提に、流況操作に伴う応答遅れを支配している諸種のパラメータを明らかにする。さらに、これらの結果から、流況操作の応答特性（応答波形の特性）の分類とそれを支配するパラメータの特性との関係について検討を試みた。

第2節 流況の応答遅れ解析の前提

1. モデルの構成

本章では、上流端を取水工とし下流端を受益地とする送水路系を対象とし、送水路の形状としては一定の路床勾配 $i = \text{const.} (>0)$ を持つ長さ l の広長方形水路を想定する。また、その送水路における流れは分流、合流がなく、送水路下流端における背水効果は小さい場合を考える。つまり、(1)変更操作を行う前の流れの状態および、(2)変更操作を行った後、十分な時間が経過することによって到達する定常流れの状態はともに等流と仮定できるような流れを取扱う。

なお、カンガイ用水の配分操作にたずさわる送配水管理者の立場からは、システムの上流端である取水工地点 ($x=0$) における送水操作量の大きさと与えるのが一般的であろう。したがって、開水路における流れの初期条件、境界条件は次式で与えられることとする。

初期条件；

$$t \leq 0, \quad Q = Q_0 \quad \dots(2-1)$$

上流端の境界条件；

$$t > 0, \quad x = 0, \quad Q = Q_e \quad \dots(2-2)$$

ここで、 t ：送水変更操作が行われてからの時間 (sec)、

x ：取水工地点から下流方向への距離 (m)、

Q ：流量 (m^3/sec)

添字 b は流況変更操作前の定常流れ、添字 e は流況変更操作後の定常流れを示す。

前述のように送水路下流端における背水効果が小さい場合を想定しているため、送水路下流端における境界条件（ゲートの堰高、および流量係数など）は、用水の到達状況に影響を与えないものとして取扱うことができる。このような条件の送水路システムでは、取水工から距離 l を隔てた送水路下流端における用水の到達状況は、水路長が無限大の開水路の $x=l$ の地点において任意の時間に生ずる流量表示の流況 $Q = Q(l, t)$ とみなすことが可能となる。

2. アプローチ

取水工地点 ($x=0$) において、(2-2)式の境界条件で与えられるような送水操作が行われるのと同時 ($t=0_+$) に、観測者が取水工地点からいわゆる段波速度 (W_0) で下流方向へ移動するものと想定する。このようにすれば、観測地点すなわち $x = w_0 t$ の地点における流量 Q_0 はつぎのように与えられる。

$$Q_0 = Q(x, t) |_{x=w_0 t} \quad \dots(2-3)$$

$$w_0 = (h_e v_e - h_b v_b) / (h_e - h_b) \quad \dots(2-4)$$

ここで、 h ：水深 (m)、 v ：速度 (m/sec) であり、添字 s はその物理量が $x = w_0 t$ の地点で生じている量であることを示す。

なお、岩崎⁴⁾も述べているように、流況の変更操作に伴う用水の到達状況は、Fig. 2-1 に示すように流量 Q_0 の到達状況からのみならず $x = w_0 t$ の地点の前後の水面

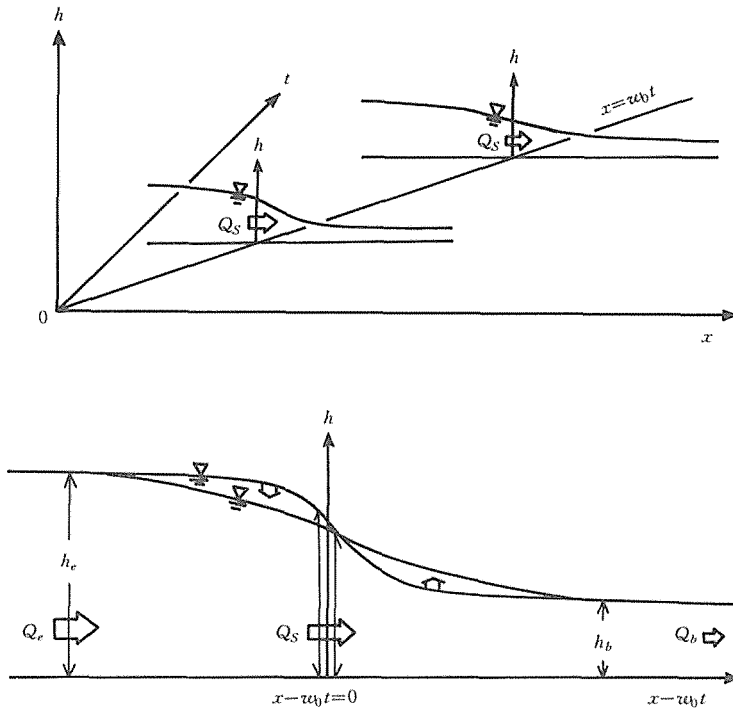


Fig. 2-1 Changing of wave profile in both upstream side and downstream side of $x = w_0 t$.

形からも把握されるのであるが、本章では、とくに $x = w_0 t$ 軸上における流量 Q_s に着目し流況変更操作に伴う流況の到達状況を表わすこととした。解析に際しては、種々の Q_b , Q_e に対する Q_s を評価できるように (2-5) 式に示すような無次元数 K_{Qs} を導入した。

$$K_{Qs} = \frac{Q_s - Q_b}{Q_e - Q_b} \quad \dots(2-5)$$

したがって、流量の伝播状態は、 K_{Qs} の値によって表わされることになる。そして、流況変更操作によって得られる流量の場所ならびに時間に対する変動が微小振幅の長波あるいは単斜上昇波になるとして、それぞれの、 K_{Qs} の値を算出し、それぞれの値を数値実験（数値解析）の結果と比較することによって、波形の特徴を考察することとする。

なお、流量 Q のみならず、水深 h についても次式を定義できる。

$$h_s = h(x, t)|_{x=w_0 t} \quad \dots(2-6)$$

したがって、

$$K_{hs} = \frac{h_s - h_b}{h_e - h_b} \quad \dots(2-7)$$

第3節 流況変動の伝播状態に関する理解論

一様広長方形水路における不定流の運動方程式、連続方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - i + i_f = 0 \quad \dots(2-8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0 \quad \dots(2-9)$$

ここで、 g ；重力加速度 (9.8 m/s^2),
 i_f ；摩擦損失項

上式を、初期条件 [(2-1)式]、境界条件 [(2-2)式]のもとに解き、得られた解 $Q(x, t)$, $h(x, t)$ から $x = w_0 t$ 地点の Q_s , h_s が得られる。

1. 微小振幅の長波とみなした解析

(2-8), (2-9)式はそのままでは非線形である。したがって、次のような仮定を設けて方程式の線形化を試みる。

フルード数の大きくない非定常性の小さい流れを仮定すれば運動方程式は¹¹⁾,

$$v = Mh' \left(i - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{1/2} \quad \dots(2-10)$$

ここで、 M, γ は定数、なお Manning 公式では $\gamma=2/3$ 、Chézy 公式では $\gamma=1/2$ となる。

(2-10)式の両辺に水深 h を掛け、さらにその両辺を対数にとり、 t で微分し、(2-9)式を用いて $\partial h/\partial t$ を消去すれば次式を得る。

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + (\gamma+1)v \frac{\partial(hv)}{\partial x} = -\frac{hv}{2\left(i - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \dots (2-11)$$

(2-11)式の右辺の微分順序を換え、(2-9)式を適用すれば、

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + (\gamma+1)v \frac{\partial(hv)}{\partial x} = \frac{hv}{2\left(i - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \frac{\partial^2(hv)}{\partial x^2} \dots (2-12)$$

(2-12)式は非線形であり、取扱いが非常に困難である。したがって、解析的な取扱いを可能とするために、(2-12)式の線形化を試みる¹²⁾。まず(2-12)式中の変数 $h, v, (hv)$ を、無次元量 ε のべき級数に展開すれば、

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \dots (2-13)$$

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \dots (2-14)$$

$$(hv) = (hv)_0 + \varepsilon(hv)_1 + \varepsilon^2(hv)_2 + \dots \dots (2-15)$$

ここで、 $h_0, v_0, (hv)_0$ は定常成分。添字の数字は何位の近次解であるかを示す。(2-13)~(2-15)式を(2-12)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} & 2\left(i - \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \dots\right) \cdot \left\{ \varepsilon \frac{\partial(hv)_1}{\partial t} \right. \\ & \left. + \varepsilon^2 \frac{\partial(hv)_2}{\partial t} + \dots\right\} + (\gamma+1)(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots) \cdot \\ & \left\{ \varepsilon \frac{\partial(hv)_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial(hv)_2}{\partial x} + \dots\right\} \\ & = \left\{ (hv)_0 + \varepsilon(hv)_1 + \varepsilon^2(hv)_2 + \dots\right\} \\ & \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2(hv)_1}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2(hv)_2}{\partial x^2} + \dots\right\} \dots (2-16) \end{aligned}$$

さらに、 $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$ の項を省略すれば、第1位の近次解 $(hv)_1$ に関する流れの基礎式は、

$$2i \cdot \left[\frac{\partial(hv)_1}{\partial t} + (\gamma+1)v_0 \frac{\partial(hv)_1}{\partial x} \right] = (hv)_0 \frac{\partial^2(hv)_1}{\partial x^2} \dots (2-17)$$

ここで、(2-15)式の (hv) から2次以上の微小項を省略して、 $(hv) = (hv)_0 + \varepsilon(hv)_1$ とおけば、(2-17)式から、

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + (\gamma+1)v_0 \frac{\partial(hv)}{\partial x} = \frac{(hv)_0}{2i} \frac{\partial^2(hv)}{\partial x^2} \dots (2-18)$$

(2-18)式は、(2-12)式が微小振幅波の理論によって

線形化されたものである。なお、(2-18)式の右辺においては、(2-12)式の右辺の分母中の $\partial h/\partial x$ は省略されている。このことは、(2-12)式の線形化に際して右辺分母に次式を仮定したことによる。

$$i \gg \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| \dots (2-19)$$

さらに、上式が満足されている場合、(2-10)式および Klitz・Seddon の法則から(2-4)式は $h=h_0$ のもとで次のようになる。

$$w_0 \doteq \frac{\partial(hv)}{\partial h} \Big|_{h=h_0} \doteq (\gamma+1)v_0 \dots (2-20)$$

ところで、(2-18)式における左辺第二項（一階微分の項）は流れが一様進行流となる範囲において右辺の二階微分の項に比べてとくに卓越する項である。また、後述の(2-28)、(2-29)式の条件を満足するためには(2-18)式の左辺第二項の定常成分 $(\gamma+1)v_0$ を w_0 と仮定することが妥当であり、また、このような取扱いは(2-20)式からも可能であると思われる。

一方、(2-18)式の右辺（二階微分の項）における定常成分 $(hv)_0$ を $(hv)_0$ あるいは $(hv)_e$ とおくことが可能であると思われるが、ここでは $(hv)_0 \doteq (hv)_e$ として(2-18)式の右辺の係数を、

$$\frac{(hv)_0}{2i} \doteq \frac{(hv)_e}{2i} \doteq \mu_0 \dots (2-21)$$

とおく。このようにすれば、(2-20)式および(2-21)式を(2-18)式に代入して(2-22)式を得る。

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + w_0 \frac{\partial(hv)}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial^2(hv)}{\partial x^2} \dots (2-22)$$

さらに、幅 b なる長方形水路の流量 $Q = b hv$ を導入すれば(2-22)式は、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + w_0 \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \dots (2-23)$$

速水²⁾の導いた解を参考にすれば、初期条件 [(2-1)式]、 $x=0$ における境界条件 [(2-2)式] に新たに(2-24)式に示す $x=\infty$ における境界条件を付加することによって、(2-23)式は解くことが可能になる。

境界条件；

$$x=\infty, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots (2-24)$$

このようにすれば、(2-23)式の解は、

$$Q(x, t) = Q_e - \frac{2}{\sqrt{\pi}} (Q_e - Q_b) \cdot$$

$$\int_0^{x/2\sqrt{g_0 t}} \exp\left[-\left(\xi - \frac{w_0 x}{4\mu_0 \xi}\right)^2\right] d\xi \quad \dots(2-25)$$

となる。この解を(2-3), (2-5)式にしたがって $x = W_0 t$ の条件のもとに無次元化すれば次のようになる。

$$K_{q_0}(\alpha) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \exp\left[-\left(\xi - \frac{\alpha^2}{\xi}\right)^2\right] d\xi \quad \dots(2-26)$$

ここで、 α は次式である。

$$\alpha = \sqrt{\frac{w_0 x}{4\mu_0}} = \sqrt{\frac{w_0^2 t}{4\mu_0}} \quad \dots(2-27)$$

(2-26)式に示す線形解が独立変数 α のみの関数であることは、変数 α が用水到達状況を表わす重要因子であることを示唆していることになる。

2. 単斜上昇波¹⁾とみなした解析

十分な時間の経過後、波が平衡に達し、安定するはずの波形として単斜上昇波を仮定する。これは取水工を操作した後、十分に時間 t が経過し、かつ取水工からの距離 x が十分に大きいところで現れる波形である。

したがって、単斜上昇波の条件が満足されている場合には $x = w_0 t$ の地点で観測される流れの光景は時間的に変化しないこととなる。それゆえ、水深 h と流速 v に関して、それぞれ次式が成立つ。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -w_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots(2-28)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -w_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots(2-28)$$

さて、

$$q_0 = h \cdot (w_0 - v) \quad \dots(2-30)$$

として定義される単位幅当りの過流 (overrun) q_0 ¹⁾ は、単斜上昇波では定数として取扱うことができる。したがって、(2-30)式の両辺を x で微分して(2-31)式が得られる。

$$h \frac{\partial v}{\partial x} = (w_0 - v) \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots(2-31)$$

なお、等流の場合を仮定すれば、(2-8)式から $i_f - i = 0$ であり、(2-10)式から $v^2 / (M^2 h^{2\gamma}) - i = 0$ であるので、摩擦得失項 i_f は次式で示されることとなる。

$$i_f = \frac{v^2}{M^2 h^{2\gamma}} \quad \dots(2-32)$$

上式で示されている i_f が非定常の流れにおいても適用されることとすれば、結局、(2-29)~(2-32)式を運動

方程式に代入して、次式(2-33)が得られる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - (w_0 h - q_0)^2 M^{-2} h^{-2(\gamma+1)}}{1 - q_0^2 / (g h^3)} \quad \dots(2-33)$$

一方、前述のように単斜上昇波の場合、(2-30)式中の過流 q_0 は定数として取扱えるので、この場合の q_0 を初期条件における $q_0 = h_b(w_0 - v_b)$ で表わすこととする。 w_0 は(2-4)式で与えられているので、これを代入して、

$$q_0 = \frac{v_e - v_b}{h_e - h_b} h_b h_e \quad (\text{ただし、単斜上昇波を仮定}) \dots(2-34)$$

となる。

(2-34)式に含まれる v_b, v_e は初期および終期の等流の流速であるので、運動方程式(2-8)式および(2-32)式から等流の条件を用いて、それぞれ、

$$v_b = M h_b \sqrt{i} \quad \dots(2-35)$$

$$v_e = M h_e \sqrt{i} \quad \dots(2-36)$$

と表わすことができる。

したがって、 q_0 は(2-34)式に(2-35), (2-36)式を代入することによって、次のようになる。

$$q_0 = \frac{h_e^\gamma - h_b^\gamma}{h_e - h_b} h_b h_e M \sqrt{i} \quad \dots(2-37)$$

(2-4)式の段波速度 w_0 も同様、

$$w_0 = \frac{h_e^{\gamma+1} - h_b^{\gamma+1}}{h_e - h_b} h_b h_e M \sqrt{i} \quad \dots(2-38)$$

(2-37)式による q_0 および(2-38)式による w_0 を(2-33)式に代入すれば、(2-33)式は(2-39)式のように水深のみをパラメータとして表わすことができる。

$$\frac{dh}{dx} = i \cdot \frac{1 - \left[\frac{h_e^{\gamma+1} - h_b^{\gamma+1}}{h_e - h_b} h - \frac{h_e^\gamma - h_b^\gamma}{h_e - h_b} h_b h_e \right]^2 h^{-2(\gamma+1)}}{1 - \frac{M^2 i h_b^{2\gamma-1}}{g} h_b^{3-2\gamma} h_e^\gamma \left[\frac{h_e^\gamma - h_b^\gamma}{h_e - h_b} \right]^2 h^{-3}} \quad \dots(2-39)$$

一方、初期フルード数 $Fr_b = v_b / \sqrt{g h_b}$ に(2-35)式を代入して、

$$Fr_b = M \sqrt{\frac{i}{g}} h_b^{\gamma-0.5} \quad \dots(2-40)$$

(2-40)式を(2-39)式の分母に適用し、さらに $h(x, t), h_e$ をそれぞれ、

$$h(x, t) = h_b + (h_e - h_b) \cdot K_\lambda(x, t) \quad \dots(2-41)$$

$$h_e = h_b \cdot \beta \quad \dots(2-42)$$

として、(2-39)式に代入すれば(2-39)式は無次元化されて次のようになる。

$$\frac{h_e - h_b}{i} \cdot \frac{dK_h}{dx} = \frac{1 - [(\beta^{\gamma+1} - 1) \cdot K_h + 1]^2 [1 + (\beta - 1) \cdot K_h]^{-2\gamma-2}}{1 - Fr_b^2 \left[\frac{\beta^{\gamma+1} - \beta}{\beta - 1} \right]^2 [1 + (\beta - 1) \cdot K_h]^{-3}} \quad \dots(2-43)$$

(2-43)式の両辺を x で積分すれば、

$$\frac{ix}{h_e - h_b} = \int^{K_h} F(K_h, \beta, \gamma, Fr_b) dK_h + c_1(t) \quad \dots(2-44)$$

ただし、

$$F(K_h, \beta, \gamma, Fr_b) = \frac{1 - Fr_b^2 \left[\frac{\beta^{\gamma+1} - \beta}{\beta - 1} \right]^2 [1 + (\beta - 1) \cdot K_h]^{-3}}{1 - [(\beta^{\gamma+1} - 1) \cdot K_h + 1]^2 [1 + (\beta - 1) \cdot K_h]^{-2\gamma-2}} \quad \dots(2-45)$$

ここで、(2-44)式の右辺における任意の関数 $c_1(t)$ は次のようにして決定される。

まず、(2-44)式の両辺を x で微分して w_0 を掛ければ、

$$\frac{iw_0}{q_e - q_b} = F(K_h, \beta, \gamma, Fr_b) w_0 \frac{\partial K_h}{\partial x} \quad \dots(2-46)$$

また、(2-44)式の左辺は x のみの関数であるので、この(2-44)式の両辺を t で微分すれば次式が得られる。

$$0 = F(K_h, \beta, \gamma, Fr_b) \frac{\partial K_h}{\partial t} + \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} \quad \dots(2-47)$$

(2-46)、(2-47)式の辺々を加え、(2-28)、(2-41)式を適用すれば、

$$\frac{iw_0}{h_e - h_b} = \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} \quad \dots(2-48)$$

上式の両辺を t で積分することによって $c_1(t)$ は、

$$c_1(t) = \frac{iw_0 t}{h_e - h_b} + c_2 \quad \dots(2-49)$$

で与えられる。ここで、 c_2 は任意の定数である。

したがって、(2-44)式は(2-49)式を用いて、

$$\frac{i(x - w_0 t)}{h_e - h_b} \int^{K_h} F(K_h, \beta, \gamma, Fr_b) dK_h + c_2 \quad \dots(2-50)$$

と表わすことができる。(2-50)式は水深 h に関する単斜上昇波の解である。

一方、(2-30)、(2-34)式から q_0 を消去し、(2-4)式に示されている w_0 を代入すれば次式を得る。

$$\frac{h - h_b}{h_e - h_b} = \frac{h v - h_b v_b}{h_e v_e - h_b v_b} \quad \dots(2-51)$$

この(2-51)式は、幅 b なる長方形水路の流量 $Q(x, t)$ を無次元化した次式

$$K_q(x, t) = \frac{Q(x, t) - Q_b}{Q_e - Q_b} \quad \dots(2-52)$$

および、(2-41)式の $K_h(x, t)$ を導入することによって、

$$K_h(x, t) = K_q(x, t) \quad \dots(2-53)$$

となる。したがって、(2-53)式の K_h を(2-50)式に代入して次式が得られる。

$$\frac{i(x - w_0 t)}{h_e - h_b} \int^{K_q} F(K_q, \beta, \gamma, Fr_b) dK_q + c_2 \quad \dots(2-54)$$

(2-54)式の両辺を $i(x - w_0 t)/(h_e - h_b)$ で微分して次式が得られる。

$$\frac{dK_q}{d\left[\frac{i(x - w_0 t)}{h_e - h_b}\right]} = \frac{1}{F(K_q, \beta, \gamma, Fr_b)} \quad \dots(2-55)$$

上式は、 β, γ, Fr_b の値を条件とし、 K_q を従属変数 $i \cdot (x - w_0 t)/(h_e - h_b)$ を独立変数とする常微分方程式の初期値問題として、ルンゲ・クッタ法などの手法によって数値的に解くことが可能である。その場合、一般的には一つの $i \cdot (x - w_0 t)/(h_e - h_b)$ の値に対する K_q の値が条件として与えられるのであるが、本章においては、前述のように単斜上昇波の条件を満足している限り $x = w_0 t$ 地点では流れの光景が時間的に変化しないことに着目し、次式で与えられる、 S_1, S_2 の値が流れの連続条件によって等しくなることを条件とした (Fig. 2-2 参照)。

$$S_1 = \int_0^\infty K_q d\left[\frac{i(x - w_0 t)}{h_e - h_b}\right] \quad \dots(2-56)$$

$$S_2 = \int_{-\infty}^0 (1 - K_q) d\left[\frac{i(x - w_0 t)}{h_e - h_b}\right] \quad \dots(2-57)$$

このようにして K_q が求まれば、 $x = w_0 t$ なる条件のもとに K_{qs} の値も得られる。

この場合、 K_{qs} の値を決定するパラメータは、前述のように β, γ, Fr_b の三つとなり、(2-26)式に示されている拡散型方程式による $K_{qs}(\alpha)$ に比べて多くのパラメータを含むことになる。

ところで、ここで取扱う β, γ, Fr_b の範囲を以下の(2-59)、(2-62)、(2-63)、(2-64)、(2-65)式に示す。

まず、単斜上昇波の wave front の波形が初期水深 h_b

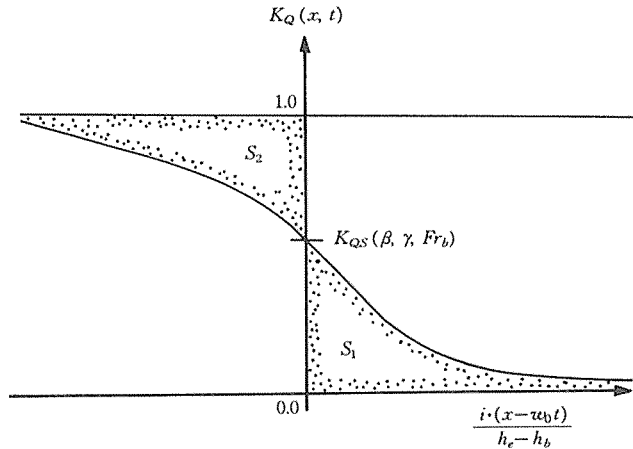


Fig. 2-2 Determination of parameter K_{Qs} with condition $S_1=S_2$, for solving uniformly progressive flow (particularly for monoclinal rising wave).

に漸近することを想定し、

$$w_b < v_b + \sqrt{gh_b} \quad \dots(2-58)$$

の条件を満足する範囲を取扱うこととする¹⁾。上式は(2-35)式の v_b および(2-38)式の w_b を代入することによって水深のみの式であらわされる。さらに、その式の両辺を $\sqrt{gh_b}$ で割って(2-40)式の Fr_b を適用し、(2-42)式の h_e を代入すれば、(2-58)式は無次元化されて次のようになる。

$$\frac{\beta^{\gamma+1}-1}{\beta-1} \cdot Fr_b < Fr_b + 1 \quad \dots(2-59)$$

なお、一般的な場合として、水路における用水変更操作を行う前後の定常流れにおける流況が常流である場合を想定し、

$$\frac{v_b}{\sqrt{gh_b}} < 1 \quad \dots(2-60)$$

$$\frac{v_e}{\sqrt{gh_e}} < 1 \quad \dots(2-61)$$

(2-60)、(2-61)式は、(2-35)式の v_b (2-36)式の v_e を代入することによって水深のみの式で表わされる。さらに、(2-40)式の Fr_b を適用し、(2-42)式の h_e を代入すれば、(2-60)、(2-61)式はそれぞれ無次元化されて次のようになる。

$$Fr_b < 1 \quad \dots(2-62)$$

$$Fr_b \cdot \beta^{\gamma-0.5} < 1 \quad \dots(2-63)$$

また、 β の値は増量操作の場合を想定し、(2-42)式を

考慮することによって、

$$\beta > 1 \quad \dots(2-62)$$

となる。

γ の値は実用的な見知から Manning 式を適用し、

$$\gamma = 2/3 \quad \dots(2-65)$$

を用いることとする。

第4節 理論解の評価のための数値実験と考察

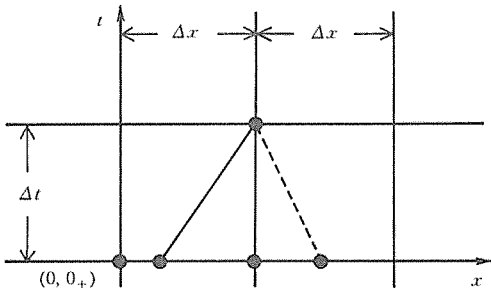
(2-26)式で与えられる線形拡散型方程式の解、および(2-55)式で与えられる単斜上昇波としての解をそれぞれ検証するために、基礎式である運動方程式(2-8)式と連続方程式(2-9)式とを連立して解くことによって得られた数値解と比較検討を試みた。

数値解を得る方法としては特性曲線（とくに規定時間間隔による解法⁷⁾）を用いた。その際、時間 t に関しては、取水工地点において、最初に流量 Q が Q_e になる時間を $t=0$ 、とした (Fig. 2-3 参照)。

Fig. 2-3 における増分 Δx 、 Δt は解の安定性もしくは取束性を保証するために、次式を満足するように決定した。

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (v + \sqrt{gh}) \leq 1 \quad \dots(2-66)$$

なお、ここで、前述の解析解と比較するための数値解を得るために用いた流れの特性は Table 2-1 に示す四例である。case A は $\beta = h_e/h_b$ の値が 1 に近い場合、すな



— : Characteristic curve on condition that $\frac{dx}{dt} = v + \sqrt{gh}$
 - - - : Characteristic curve on condition that $\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{gh}$

Fig. 2-3 Grids and characteristic curves on $x-t$ plane to apply specified time intervals method for numerical analysis.

わち微小振幅である場合を示す。そして微小振幅の条件から有限振幅条件へと、順次、流れの特性値を変えて種々のケース (case A~case D) について数値解を得てみた。

①拡散型方程式の解(2-26)式, ②単斜上昇波の解(2-55)式, および, ③これらの解の信ぴょう性を検討するための数値実験の結果を Fig. 2-4 に示す。

Fig. 2-4 によれば, K_{qs} の値は, $\alpha \ll 1, \alpha \sim 1, \alpha \gg 1$ の範囲で特徴的に変化することが示されている。

その α の二乗の大きさを, (2-20) 式における $w_0 \doteq (\gamma+1) \cdot v_0$ によって次式で表現する。

$$\alpha^2 = \frac{w_0 x}{4\mu_0} \doteq \frac{(\gamma+1)v_0 x}{4 \cdot \frac{(hv)_0}{2i}} \quad \dots(2-67)$$

ここで, $|v_0/(hv)_0| \sim (1/h_0)$ とみなし, さらに流速公式

として, Chézy 式あるいは Manning 式を用いて γ をオーダー的に $\gamma \sim 1$ となるようにすれば,

$$\alpha^2 \sim \frac{ix}{h_0} \quad \dots(2-68)$$

を得る。

さらに, 距離 x の大きさが, 等流の流れに乗った微小振幅の長波の半波長 L と同程度である場合を仮定することによって, (2-68)式から次式が得られる。

$$\alpha^2 \sim \frac{iL}{h_0} \quad \dots(2-69)$$

さて, 林³⁾は水深に関する微小振幅の長波の基礎式を作成した。そして, (2-69)式の右辺における iL と h_0 の値の大きさを比較することによって, 微小振幅の長波の分類を行っている。

一方, 流況を流量 Q で表現した場合には, Fig. 2-4 に示すように, (2-26)式中のパラメータ α が用水到達状況を表わす重要な因子であることが明らかとなった。

したがって, (2-69)式が成立する場合, 林の行った iL, h_0 の値の大きさの比較による微小振幅の長波の分類と, 流況を流量 Q で表現した場合の流れの状況を表わすパラメータ α の値による流況操作の応答状況の分類とを対応させることが可能となる。そして, このようにして行った流れの分類を Table 2-2 に示す。

以下に, Table 2-2 による分類を前提にして, Fig. 2-4 の $\alpha \ll 1, \alpha \sim 1, \alpha \gg 1$ のそれぞれの領域における流れの考察を試みる。

(1) $\alpha \ll 1$ の範囲 この範囲における流況は水路の上流端に近い地点で発生するものであり, Table 2-2 に示す長波の分類では, Dynamic wave として取扱うことが可能である。

Fig. 2-4 に実線で示されている数値実験の結果から, $\alpha \ll 1$ の範囲では,

$$K_{qs} = 1.0 - \Delta^2 \quad (\text{ただし, } \Delta \text{ は微小な値}) \quad \dots(2-70)$$

Table 2-1 Examples of characteristics of flow in numerical analysis

Case	Wave pattern	$(hv)_b$ ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$)	$(hv)_e$ ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$)	β	Fr_b	$v_b + \sqrt{gh_b}$ (m/s)	w_0 (m/s)
A	infini-tesimal	1.00	1.10	1.059	0.625	4.067	2.658
B	↓	1.00	2.00	1.516	0.625	4.067	3.033
C	fini-tesimal	1.30	1.30	2.410	0.554	2.711	2.284
D	↓	0.97	0.10	3.909	0.496	1.878	1.863

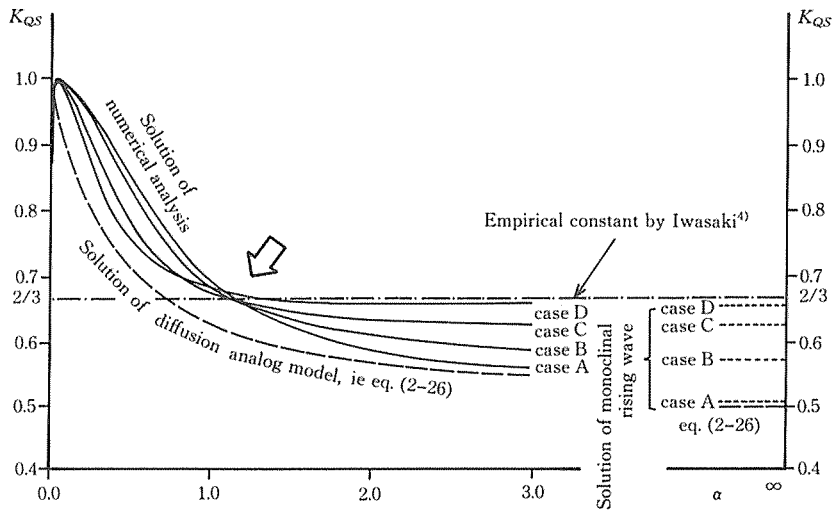


Fig. 2-4 Changing of dimensionless variable K_{QS} (used as an index of changing states of operated flow) induced with parameter α .

Table 2-2 Correspondence of classification of infinitesimal long waves made by Hayashi³⁾ and classification of responses due to flow operation

Classification of infinitesimal long waves	Dynamic wave	Dinamic~ Kinematic wave	Kinematic wave
	$iL \ll h_0$	$iL \sim h_0$	$iL \gg h_0$
$\frac{\partial h}{\partial x} \ll h_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$	$\frac{\partial h}{\partial x} \sim h_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$	$\frac{\partial h}{\partial x} \gg h_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$	
Classification of responses due to flow operation	$\alpha \ll 1$	$\alpha \sim 1$	$\alpha \gg 1$
		 (Diffusion analog model)*	 (Monoclinal rising wave)

* Condisions ; infinitesimal wave of which Froude number is small.

が言える。

上式は、数値実験によって表現されている流況の波形のかずれが非常に小さく、流況の伝播速度が w_0 よりも大きいことを前提として成り立つのである。このことは、 $\alpha \ll 1$ を満足する地点においては、流況は初期条件

$K_Q=0$ から変更操作後の $K_Q=1$ へと急激な変動を示すことを意味している。

ところで、Fig. 2-4 の $0 < \alpha < 1$ の領域では、破線で示されている拡散型方程式(2-23)式の解すなわち(2-26)式による計算結果は、case A の数値実験の結果から離

れている。林³⁾の行った各項のオーダーの比較によれば、 $\alpha \ll 1$ の範囲における微小振幅の長波は二階の波動方程式で表現されるような現象を示すはずである。このことが、拡散型方程式の解と数値実験との矛盾をもたらしているものと推論される。

(2) $\alpha \sim 1$ の範囲 この範囲における流況は、Table 2-2 の分類では Dynamic wave から Kinematic wave へ移る過渡的な状況を示しており、現象そのものを拡散型方程式で十分に表現できる流れの状態である。

また、数値実験による K_{qs} の値は $\alpha \sim 1$ の条件のもとで $K_{qs} \approx 2/3$ の位置を通過する (Fig. 2-4 の矢印の位置)。このことは、この範囲における K_{qs} の値が case A ~ case D のいかなる操作方法によっても安定していることを示している。なお、この $K_{qs} \approx 2/3$ という値は岩崎⁴⁾によって得られた実験定数 $2/3$ に近似的に合致している。

数値実験によるこれらの考察、および Fig. 2-4 における拡散型方程式の解から、 $\alpha \sim 1$ の条件のもとでは、

$$K_{qs} \approx 2/3 \quad \dots(2-71)$$

とおくことができる。

上式が満足されている場合の微小振幅の長波は、Table 2-2 によれば徐々にその波形を崩しつつあるものである。従って、 $\alpha \sim 1$ を満足する地点における流況は、初期条件 $K_q=0$ から $K_q=1$ まで連続的な変動を示すものと思われる。

通常の農業用水路は、水深が 1 m 内外で、路床勾配が数千分の 1、長さが数千 m 程度のもので、 $\alpha \sim 1$ の範囲にあることが多い (Table 2-3 参照)。(2-71)式は、このような条件の農業用水路における流況を説明する際のパラメータ K_{qs} の値を $2/3$ とすることの妥当性を示唆している。

(3) $\alpha \gg 1$ の範囲 この範囲における流況は Table 2-2 に示す Kinematic wave、あるいは単斜上昇波として取扱われることが可能であり、定常的な状況を示している。

Fig. 2-4 において、実線で示されている case A ~ case D のいずれの数値実験の値も α の値の増加に伴い点線

Table 2-3 Several examples of open-channel for satisfying condition $\alpha \sim 1$

Condition ; $\frac{ix}{h} = 1.0$

Water depth h (m)	Bed slope i	Distance x (m)
1.0	1/1000	1000
	1/3000	3000

Condition ; $\frac{ix}{h} = 2.0$

Water depth h (m)	Bed slope i	Distance x (m)
1.0	1/1000	2000
	1/3000	6000

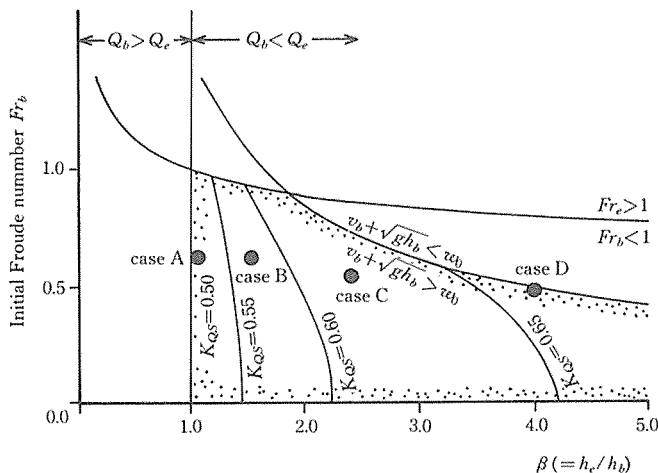


Fig. 2-5 Mutual relations among variables K_{qs} , Fr_b and β in monoclinal rising wave, where $\alpha \gg 1$.

で示されている単斜上昇波の解に漸近的に接近してゆく。ここで単斜上昇波の解は(2-55)式によって与えられたものであり、 α の値が増大して $+\infty$ となった場合に達するであろう K_{qs} の値を示している。

Fig. 2-4の $\alpha=+\infty$ の範囲において、case Aのような微小振幅の条件を満足するような波($\beta=h_e/h_b=1$)の解は拡散型方程式の解($K_{qs}=0.5$)に近い。すなわち、case Aのように微小振幅の条件が満足される場合には、流況の変更操作に伴う用水到達状況の変化を拡散型方程式によって取扱うことが可能であると思われる。

ところで、単斜上昇波を仮定した場合の K_{qs} の値は、 F_{r0} 、 β をパラメータとして示せばFig. 2-5のように等高線表示される。Fig. 2-5に示されているように、 $1<\beta<5$ の範囲内で、

$$K_{qs}=0.5\sim 0.7 \quad \dots(2-72)$$

となる。

フルード数の大きくない微小振幅の長波において、 K_{qs} の値が0.5にごく近い場合には、流況の変動は非常に緩慢な波形になる。

第5節 あとがき

以上、主として解析度による取扱いおよび数値実験によって、一様広長方形水路における流況操作に伴う用水到達状況の特徴的な三つの状況に分類することができた。ここで、このような分類のパラメータとしては、 $\alpha=\sqrt{w_0x/4\mu_0}=\sqrt{w_0^2t/4\mu_0}$ が有効な役割を果たすことが明らかになった。

第III章 開水路流量の操作と応答に関する解析と実験

第1節 はしがき

前章⁵⁾においては、一様広長方形水路における流量 Q (m^3/sec)の伝播状態を $x=w_0t$ なる仮想上の理想段波の波頭の位置における流量 Q_s (m^3/sec)によって評価した。ここで、 x : 上流端から下流方向への距離(m)、 t : 送水変更操作が行われてからの時間(sec)、そして、 w_0 : 理想段波速度(m/sec)である。

その結果、流量 Q_s を無次元化した量 K_{qs} は送水量の変更がさほど大きくない場合、段波の波速 w_0 と単位幅断面の流量 h_v ($m^3/sec/m$)で構成されるパラメータによって、支配されることとなった。また、この K_{qs} とパラメータとの関係は林³⁾が行った微小振幅の長波の分

類と対応して分類されることが明らかとなった。

なお、通常の農業用水路は水深 h (m)が1m内外で、路床勾配 i が数千分の1、長さが数千m程度のものが多くということから、用水の到達状況を Dynamic wave, Dynamic~Kinematic wave, Kinematic wave の3つの分類のうち特に Dynamic~Kinematic waveに限って検討をすることの実用的な意義を明確にできた。

本章においては、観測地点を $x=w_0t$ なる地点から上下流方向へ広く拡張することによって、用水到達状況をその始りから終わりまでの一連の過程として取扱った。そして、距離 x と時間 t を無次元化して流量 Q に対する2個の独立変数 X 、 T として取扱い、前章と同様に微小振幅の長波の分類と対応してみたところ、実用的と思われる距離と時間の範囲内において、流量 Q を推定することのできる簡潔な式を得ることができた。

第2節 解析の手順

開水路システムにおける用水量の変更操作に際して現れる応答遅れの一例として、単一水路の上流端にあるゲートが時間 $t=0$ において増量操作される場合を取扱った。その場合、伝播する流路がかなり長いので開水路内における波はその形を崩しつつ下流端に伝わってゆく。

そこで、岩崎⁴⁾は、開水路内を伝播する波をカンガイ工学の立場から流量 Q で評価することとして、この流量 Q を無次元化したパラメータ K_q を(3-1)式のように定義している。

$$K_q(x, t) = \frac{Q(x, t) - Q_b}{Q_e - Q_b} \quad \dots(3-1)$$

ここで、岩崎は操作の初期および終期の流況を不等流として取扱い、それぞれ添え字 b 、 e の定義を行っている。本章では、緩勾配の一様広長方形水路を対象にしているため、初期および終期の流況として等流を想定する。従って、以下においては、添え字 b : 応答の初期段階における等流の状態を示し、添え字 e : 応答の終期段階における到達する等流の流況を意味することとする。

さて、Fig. 3-1にも示されているように任意の地点における流量の増加状況は、まず wave front の到達に始まり、流量 Q が Q_e に等しくなって、流量すなわち用水の到達が完了する。

本章においては、 $K_q=0.1$ となった時期を wave front の到達時期とみなし、 $K_q=0.9$ をもって用水到達の完了

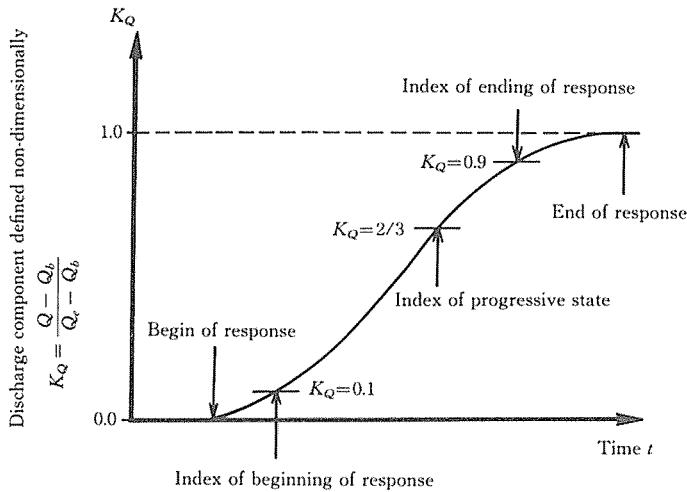


Fig. 3-1 Response of channel discharge due to operation at arbitrarily fixed points.

とみなすこととした。さらに、それらの中間的な値を $K_Q=2/3$ として、以下に示されている(3-2)、(3-3)、(3-4)式を定義した。

$$K_Q(x, t) = \begin{cases} 0.1 & \text{用水到達の始り,} \\ & \text{wave front の到達} \quad \dots(3-2) \\ \text{中間的な流量} & \dots(3-3) \\ \text{用水到達の終り} & \dots(3-4) \end{cases}$$

任意の距離 x の地点において、これら(3-2)~(3-4)の各式で与えられる条件を満足する時間 t を推測することは開水路システムの管理上必要不可欠なことである。

そこで、本章ではまず第3節において、いくつかの前提条件のもとに解析解を得て、次に、第4節においてはその簡略式による解を示し、さらに第5節においてはそれらの解を検証するための現地実験について実験結果と得られた結果を示すこととする。そして第6節においては第3~5節におけるそれぞれの結果を比較・検討することによって考察を試みる。

第3節 微小振幅波の理論による解析解

一様広長方形水路における不定流の運動方程式、連続方程式としてそれぞれ(3-5)、(3-6)式を用いることとした。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - i + \frac{n^2 v^2}{h^{4/3}} = 0 \quad \dots(3-5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0 \quad \dots(3-6)$$

ここで、 h : 水深 (m)、 v : 流速 (m/sec)、 g : 重力加速度で 9.8 m/sec^2 、 i : 路床勾配、 n : Manning の粗度係数 ($\text{m}^{-1/3} \cdot \text{sec}$) である。

(3-5)、(3-6)式を解析的に取扱うために、非定常性が小さくフルード数の大きくない流れを仮定すれば、微小振幅波の理論によって以下の線形拡散型方程式を得る。

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + w_0 \frac{\partial(hv)}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial^2(hv)}{\partial x^2} \quad \dots(3-7)$$

さらに、幅 b なる水路の流量 $Q = bhv$ を導入して、(3-1)式を適用すれば(3-7)式から次式を得る。

$$\frac{\partial K_Q}{\partial t} + w_0 \frac{\partial K_Q}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial^2 K_Q}{\partial x^2} \quad \dots(3-8)$$

ただし、

$$w_0 = \frac{Q_e - Q_0}{A(h_e) - A(h_0)} \quad \dots(3-9)$$

$A(h)$: 水深 h における通水断面積 (m^2) である。

μ_0 (m^2/sec) は、 $K_Q=0.1$ の条件における(3-1)式中の x と t の関係を得る場合、

$$\mu_0 = \frac{h_0 v_0}{2i} \quad (\text{ただし、} K_Q=0.1 \text{ の場合}) \quad \dots(3-10)$$

とすることとした。そして、 $K_Q=2/3, 0.9$ の条件における(3-1)式中の x と t の関係を得る場合、

$$\mu_0 = \frac{h_e v_e}{2i} \quad (\text{ただし、} K_Q=2/3, 0.9 \text{ の場合}) \quad \dots(3-11)$$

とした。

初期条件、境界条件を流量 Q で与えれば(3-1)式から

それぞれ次式が得られる。

$$\text{初期条件: } t \leq 0, Q = Q_0 \text{ すなわち } K_0 = 0 \quad \dots(3-12)$$

$$\text{境界条件: } t > 0, x = 0, Q = Q_0 \text{ すなわち } K_0 = 1 \quad \dots(3-13)$$

(3-12)および(3-13)式の条件で(3-8)式を解けば $K_0(x, t)$ が求まるが、このような形式の移流をとまなう一次元拡散方程式の解析解はすでに得られており、例えば、L. Lapidus and N. R. Amundson⁷⁾によれば、つぎのようになる。

$$K_0(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x - w_0 t}{\sqrt{4\mu_0 t}} \right) + \exp \left(\frac{w_0 x}{\mu_0} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x + w_0 t}{\sqrt{4\mu_0 t}} \right) \right\} \quad \dots(3-14)$$

上式の右辺において、無次元表示の変数を用いることとすれば、

$$K_0(X, T) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{X - T}{\sqrt{T}} \right) + \exp(4X) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{X + T}{\sqrt{T}} \right) \right\} \quad \dots(3-15)$$

ここで、

$$X = \frac{w_0 x}{4\mu_0} \quad \dots(3-16)$$

$$T = \frac{w_0^2 t}{4\mu_0} \quad \dots(3-17)$$

である。あるいは、(3-15)式は、

$$K_0(X, T) = K_1(X, T) + K_2(X, T) \quad \dots(3-18)$$

となる。ただし、

$$K_1(X, T) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{X - T}{\sqrt{T}} \right) \quad \dots(3-19)$$

$$K_2(X, T) = \frac{1}{2} \cdot \exp(4X) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{X + T}{\sqrt{T}} \right) \quad \dots(3-20)$$

なお、与式中の erfc は余誤差関数である。(3-16)、(3-17)式において、 X, T はそれぞれ無次元表示の距離および時間である。

ここで、(3-14)式、(3-15)式および(3-18)式は前章の方法と異なり波形の観測地点を $x = w_0 t$ なる仮想上の理想段波の波頭の位置に限定せず、任意の時間 t において任意の上下流方向 x に拡張することによって、用水到達状況を始点から終点まで一連の過程として表現した式である。

第4節 解の性質の検討および簡略式の誘導

林³⁾は運動方程式[(3-5)式]、連続方程式[(3-6)式]によって微小振幅波の基礎式を作成して微小振幅の長波の分類を行っている。その基礎式を以下に示して同様の分類を試みる。

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial x} - (gh_0 - v_0^2) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + 2 \frac{gi}{v_0} \left(\frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{5}{3} v_0 \frac{\partial h'}{\partial x} \right) = 0 \quad \dots(3-21)$$

ここで、 v_0 : 流速の定常成分 (m/sec), h_0 : 水深の定常成分 (m), h' : 水深の変動量 (m) である。

さて、距離 x の無次元量 X の大きさは、(3-16)式および Kleitz-Seddon の法則によって次式で表現される。

$$X = \frac{w_0 x}{4\mu_0} \sim \frac{5}{4} \frac{v_0 x}{h_0} \sim \frac{ix}{h_0} \sim \frac{i}{h_0} \frac{h_e - h_b}{x^2}$$

さらに、距離 x の大きさを波の半波長と同程度の大きさであると仮定すれば、林³⁾の行った微小振幅の長波の分類によって次式を得る。

$$X \sim \frac{i \frac{h_e - h_b}{(\text{半波長})}}{h_0 \frac{h_e - h_b}{(\text{半波長})^2}} \sim \frac{gi \frac{\partial h'}{\partial x}}{gh_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}} \sim \frac{(3-21) \text{式における一階微分の項}}{(3-21) \text{式における二階微分の項}} \quad \dots(3-22)$$

したがって、 X の大きさによって用水到達状況を以下の3通りに分類することが可能となる。

$$X \begin{cases} \ll 1 : \text{Dynamic wave} \\ \sim 1 : \text{Dynamic} \sim \text{Kinematic wave} \\ \gg 1 : \text{Kinematic wave} \end{cases} \quad \dots(3-23)$$

同様に、時間 t の無次元量 T の大きさは、

$$T = \frac{w_0^2 t}{4\mu_0} \sim \frac{\left(\frac{5}{3} v_0\right)^2 t}{4 h_0} \sim \frac{v_0 i t}{h_0} \sim \frac{v_0^2 \frac{gi}{v_0} \frac{h_e - h_b}{t}}{gh_0 \frac{t}{h_e - h_b}} \sim \frac{t^2}{t^2}$$

さらに、時間 t の大きさを波の半周期と同程度の大きさであると仮定することによって、

$$T \sim \frac{v_0^2 \frac{gi}{gh_0} \frac{h_e - h_b}{(\text{半周期})}}{h_0 \frac{h_e - h_b}{(\text{半周期})^2}} \sim \frac{v_0^2 \frac{gi}{gh_0} \frac{\partial h'}{\partial t}}{\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}}$$

$$\sim (\text{フルード数})^2 \frac{(3-21)\text{式における一階微分の項}}{(3-21)\text{式における二階微分の項}} \dots(3-24)$$

したがって、

$$T \begin{cases} \ll (\text{フルード数})^2 : \text{Dynamic wave} \\ \sim (\text{フルード数})^2 : \text{Dynamic-Kinematic wave} \\ \gg (\text{フルード数})^2 : \text{Kinematic wave} \end{cases} \dots(3-25)$$

となる。

ところで、(3-19)式に示されている $K_1(X, T)$ は $(X-T)$ を余誤差関数の中に入れてある。従って、Fig. 3-2 に示されているように任意の変数 α に関する余誤差関数 $\text{erfc}(\alpha)$ の変動が $\alpha=0$ の近くで大きいことを考慮すれば、 $K_1(X, T)$ の変動は $X-T=0$ の近くで大きいものと思われる。つまり、 $K_1(X, T)$ は、前章⁵⁾でのべた $T=0$ 、で不連続な段波の形状の流量変化であったものが $X-T=0$ の近傍つまり $x=w_0t$ なる線上の近くで T の増加にともなって次第に波形を崩して単斜上昇波に変化していく過程を表していると解することができる。

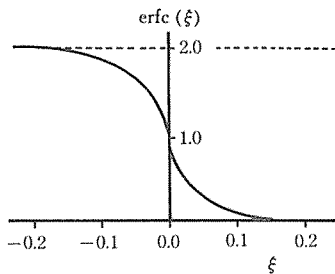


Fig. 3-2 Co-error function $\text{erfc}(\xi)$.

同様に、(3-20)式に示されている $K_2(X, T)$ は $(X+T)$ を余誤差関数の中に入れてある。従って、 $K_2(X, T)$ の変動は、 $X+T=0$ の近くで大きくなるものと思われる。今、 $X \geq 0, T \geq 0$ の範囲を取扱っているので、 $X+T=0$ の近くということとは、 X, T それぞれが0の近くということ、つまり、流況変更操作地点付近でかつ、変更操作直後に出現する波形の成分を意味し、そして(3-23)、(3-25)式によれば Dynamic wave の範囲に属することになる。

以上、(3-23)、(3-25)式に示されている変数 X, T による分類、および $K_1(X, T), K_2(X, T)$ の変動の大きさによる分類とを併せて Fig. 3-3 に図示する。

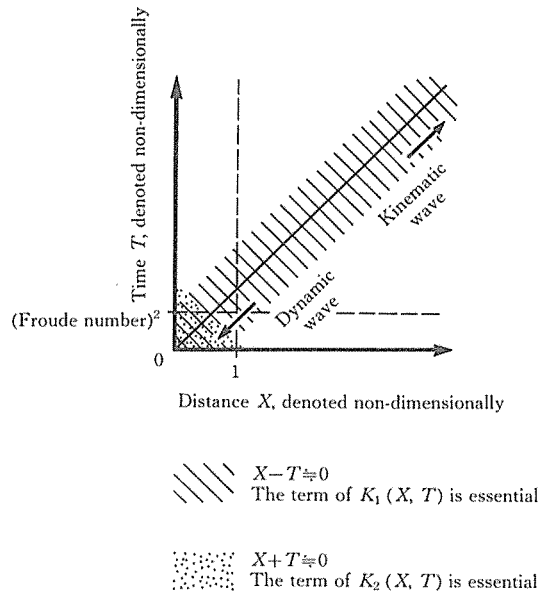


Fig. 3-3 Classification of infinitesimal long waves on $X \sim T$ plane (see eq. (3-23) and (3-25)). Hence, X : distance and T : time denoted non-dimensionally.

(3-15)式に示されている厳密解 $K_Q(X, T)$ が、Fig. 3-3 に示されている Dynamic wave および Kinematic wave のそれぞれの範囲において、如何なる特徴を示すものであるかということを確認するために、各々の範囲に関連があると思われる $K_1(X, T), K_2(X, T)$ の値を $K_Q(X, T)$ の値とともに Fig. 3-4 に等高線表示した。な

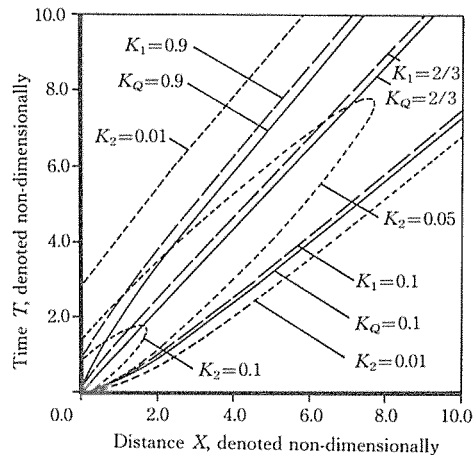


Fig. 3-4 Distribution of the numerical order of $K_Q(X, T), K_1(X, T), K_2(X, T)$ on $X \sim T$ plane.

お、すでに知られているように、 X が 10° のオーダーである場合に、厳密解 $K_q(X, T)$ は流況をよく表現する⁵⁾。したがって、Fig. 3-4における X, T の範囲はそれぞれ $0 \leq X \leq 10, 0 \leq T \leq 10$ とした。

解析の結果、Fig. 3-4に示すように以下の①～④のことが明らかとなった。

① $K_1(X, T), K_q(X, T)$ の変動は形が類似しており、いずれも $X=T$ なる直線の近くにある。

② X, T それぞれが0の近くで、かつ $K_q(X, T)$ の値が $2/3$ あるいは 0.9 のように大きい場合、 $K_2(X, T)$ の値はある程度 K_q の波の形に関与している。

③ 一方、 X, T それぞれが0の近くでも、 $K_q(X, T)$ の値が 0.1 のように小さい場合、 $K_2(X, T)$ の値は小さい。

④ X, T が十分に大きい場合、すなわち、Kinematic waveの特徴が卓越する範囲において、 $K_2(X, T)$ の値は小さい。

上述の①～④に述べたように、Fig. 3-4に示されている X, T の範囲内における $K_q(X, T)$ の値に関しては、 $K_1(X, T)$ の関与が $K_2(X, T)$ の関与より卓越している。なお、この $K_1(X, T)$ は(3-19)式からも明らかのように $(X-T)/\sqrt{T}$ の関数である。従って、 $K_q(X, T)$ を主として支配しているのは $(X-T)/\sqrt{T}$ をパラメータとして含む $K_1(X, T)$ である。

さて、 $K_q(X, T)$ は用水到達状況を表わす重要な指標であるので、ここで $K_q(X, T)$ と $(X-T)/\sqrt{T}$ との数値的な関係を把握しておくことは $K_q(X, T)$ を予測する上で重要となる。このような観点から、次の手順で $K_q(X, T)$ と $(X-T)/\sqrt{T}$ との関係を検討した。

① まず、無次元表示の距離 X のオーダーに注目して、 $X=0.1, X=1.0, X=10.0$ の3地点において、Fig. 3-1に示されているような用水到達状況を検討すること

とした。

② 次に、用水到達の始点としての $K_q=0.1$ [(3-2)式]を満足する無次元表示の時間 T の値を、各地点について厳密解(3-15)式によって求めた。

③ さらに、前述の3地点における X の値と、②の手順で求められた T の値とから、 $(X-T)/\sqrt{T}$ の値を算定した。

④ なお、中間的な流量の到達を表わす $K_q=2/3$ [(3-3)式]、用水到達の終期を表わす $K_q=0.9$ [(3-4)式]についても(3-2)、(3-3)と同様の計算を行った。

これらの①～④に示されている手順で得られた $(X-T)/\sqrt{T}$ 値をTable 3-1に示す。

Table 3-1において、 $(X-T)/\sqrt{T}$ の各値は K_q の値に大きく左右される。また、1つの K_q の値に対して $(X-T)/\sqrt{T}$ の値はほぼ定数として取扱って差支えないように思われる。従って、 K_q と $(X-T)/\sqrt{T}$ に関して次のような簡潔な関係が得られる。

$$\frac{X-T}{\sqrt{T}} \cong \begin{cases} 1.0 (K_q=0.1, 0.1 \leq X \leq 10.0) & \dots(3-26) \\ 0.0 (K_q=2/3, 0.1 \leq X \leq 10.0) & \dots(3-27) \\ -0.6 (K_q=0.9, X \cong 1.0) & \dots(3-28) \end{cases}$$

第5節 現地実験

厳密である(3-15)式および簡略解である(3-26)～(3-28)式の検証を目的として現地実験を試みた。

ここで、(3-15)式および(3-26)～(3-28)式は、①水路形状が広長方形断面の一樣水路であることおよび②流況変更操作の前後の定常流れがそれぞれ等流であることの2つの条件のもとで導かれたものである。したがって、現地実験に用いる水路においてもこのような条件が充足されていることが前提となる。

現地実験に用いた水路に関して、Fig. 3-5(a)に水路の

Table 3-1 Values of the variable $(X-T)/\sqrt{T}$ given in the solution of eq. (3-35) in cases of the combination of $K_q=0.1, 2/3, 0.9$ and $X=0.1, 1.0, 10.0$

Discharge component defined non-dimensionally	Distance denoted non-dimensionally		
	$X=0.1$	$X=1.0$	$X=10.0$
Index of beginning of response, $K_q=0.1$	1.147	1.076	0.978
Index of progressive state, $K_q=2/3$	0.174	-0.074	-0.225
Index of ending of response, $K_q=0.9$	-0.285	-0.645	-0.823

縦断勾配を、Fig. 3-5(b)に代表的な横断面の形状をそれぞれ示す。これらの図からも明らかなように、この水路は厳密な意味での広長方形断面の一樣水路とはなっていない。しかしながら、Fig. 3-5(a)に示すようにいずれの各区間もゆるやかな路床勾配であるので、全区間を平均的な一定の路床勾配として取扱うこととした。

また、Fig. 3-5(b)、Fig. 3-7によれば、水面幅はおおよそ3~5mと大きな変動はなく、測点5を除けば、水深はおおよそ0.3~0.6mであって水面幅よりも充分小さい。

したがって、この水路を一樣広長方形水路とみなして取扱うこととした。

次に、2番目の条件である流況操作の前後の定常流れが等流であるか否かについても検討しておかねばならな

い。この条件も、Fig. 3-5(a)、(b)、Fig. 3-7からも明らかなように厳密な意味で満足されていない。

しかし、上述のように水路形状は縦断面方向にさほど変動していない。しかも、測点1から5までの区間の平均的な水面勾配を以下の(3-29)式によって推定すれば、初期の流れでおおよそ $1/20,000$ 、終期の流れでおおよそ $1/16,000$ となる。これらの数値は後述の平均的な路床勾配 $1/4,000$ よりも小さい。従って、このような定常流れの場合、運動方程式である(3-5)式において左辺第3項よりも第4項の路床勾配の方が支配的となっていると見なせる。

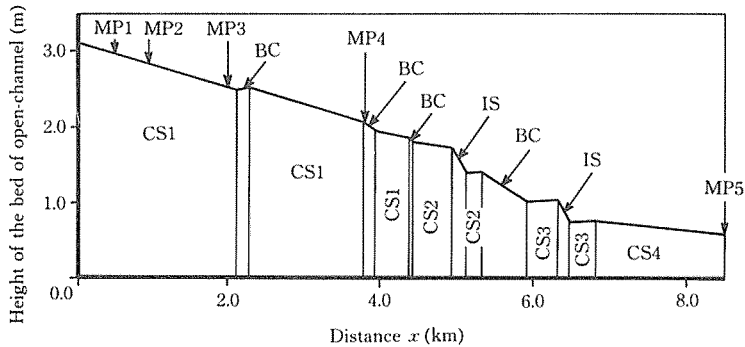


Fig. 3-5(a) The vertical profile of the open-channel for the experiment and investigation, in which,
 MP 1, 2, ... : Measuring point 1, 2, ...
 CS 1, 2, ... : Cross-section 1, 2, ...
 IS : Inverted syphon
 BC : Box culvert.

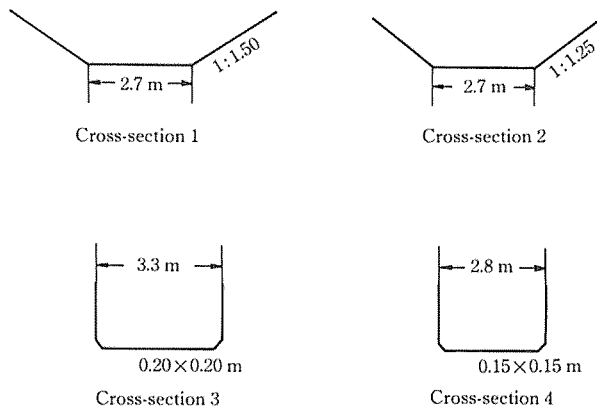


Fig. 3-5(b) Profiles of cross-section in the open-channel.

(測点1～5区間の平均的な水面勾配)

$$= \frac{(\text{測点5における水深 } h) - (\text{測点1における水深 } h)}{(\text{測点5における距離 } x) - (\text{測点1における距離 } x)} \quad \dots(3-29)$$

しかも、後述の初期水深 h_0 、初期流速 v_0 、終期水深 h_e 、終期流速 v_e の各値を適用すれば、初期フルード数は0.25、終期フルード数は0.24であって1よりも充分に小さい。従って、次式によって運動方程式である(3-5)式においては左辺第2項よりも第3項の水面勾配の方が支配的であるといえる。

$$\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Fr^2}{2} h \right) \quad \dots(3-30)$$

ここで、 Fr :フルード数である。

以上の理由によって、ここで取扱うような緩勾配水路での定常流れにおいては平均的に運動方程式である(3-5)式中の一階微分の各項を省略して等流と同じ取扱いが可能であると判断される。

なお、ここでは、水路における流況(水位、流速、流量)操作は増量操作の場合を取扱うこととする。

1. 水深 h 、流速 v 、流量 Q の測定

Fig. 3-5(a)に示されている測点1から測点5までの各地点において、時間 $t=0$ から10分おきに水深 h 、流速 v を測定した。

水深 h に関しては、あらかじめ側壁に設けておいた印から水面までの下がりを実測して、その下がりの値を水深に換算することによって、水深 h の実測値とした。

流速 v に関しては、まず各測点において10mの区間を設けて長さ約20cmの浮子の移動速度を実測し、次にその移動速度を(3-31)式に示されているパラメータ η によって流速 v に換算した。

$$\text{断面の平均流速 } v = \eta \cdot (\text{浮子の移動速度}) \quad \dots(3-31)$$

なお、 η は次の手順で決定した。

① 測点2においては、Fig. 3-6のような等流速線図を実測によって求め、これから断面の平均流速 v を算定した。さらに、この v と表面付近の局所的な流速との比を一定値であると仮定して η を求めた。

② なお、等流速線図の与えられていない地点(測点1, 3-5)に関しては、まず水深 h の測定値の10分おきの変動が小さくなっている流況を定常状態であるとした。そして、測定2を含むすべての地点においてパラメータ η を用いて得られる流量 Q の値が初期または終期の定常状態においてできるだけ等しくなることを前提条件として、各測点(測点1, 3-5)における η の値を定数で与えた。

このようにして測点1から測点5において決定されたそれぞれの η の値を Table 3-2 に示す。これによれば、各々の η の値は0.9もしくは1.0である。

以上の手順によって得られた流況の時系列変動の例を水深 h に関して Fig. 3-7 に、流速 v に関して Fig. 3-8 に、また流量 Q に関して Fig. 3-9 に示す。

なお、Fig. 3-9 に示されている流量 Q の時系列変動のうち特に精度が高いと思われる測点2の時系列変動に注目して、初期の流量 Q_0 を $0.63 \text{ m}^3/\text{sec}$ 終期の流量 Q_e を $1.20 \text{ m}^3/\text{sec}$ とした。この場合、(3-2)～(3-4)式から Wave front の到達をあらわす $K_q=0.1$ に対応する流量は $0.69 \text{ m}^3/\text{sec}$ であり、同様に $K_q=2/3$ に対応する流量は $1.01 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、 $K_q=0.9$ に対応する流量は $1.14 \text{ m}^3/\text{sec}$ である。これらの流量は Fig. 3-9 にも示されているのであるが、測定結果が小周期かつ振幅の小さいノイズを含んでいるので、測点によっては流量 Q が $0.69, 1.01, 1.14 \text{ m}^3/\text{sec}$ となる時間を一義的に決定できない場合がある。そこで本章においては、上述のノイズを除くために、流況に応じてつぎの(3-1)、(3-2)お

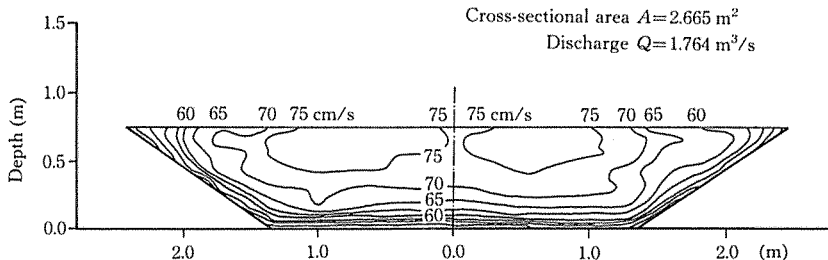


Fig. 3-6 Equi-velocity lines at the measuring point number 2.

Table 3-2 Values of η (in eq.(3-31)) defined as the ratio of flow velocity v versus float velocity

MP 1	MP 2	MP 3	MP 4	MP 5
0.9	0.9	0.9	1.0	1.0

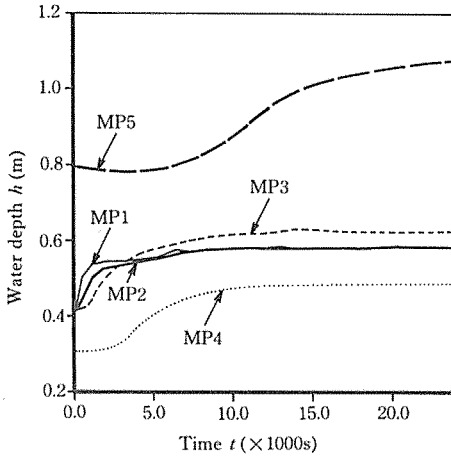


Fig. 3-7 Changing of the measured water depth h due to time t at the each measuring point in the open-channel.

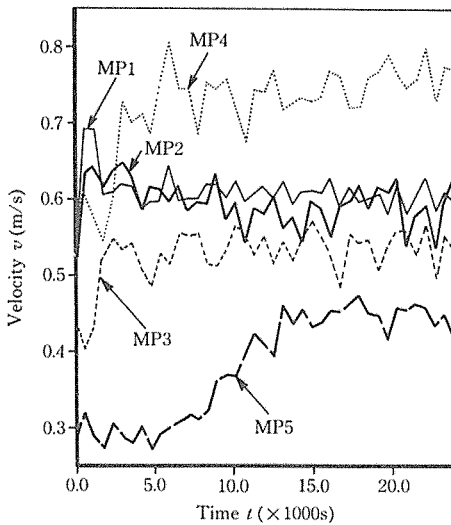


Fig. 3-8 Changing of the measured velocity v due to time t at the each measuring point in the open-channel.

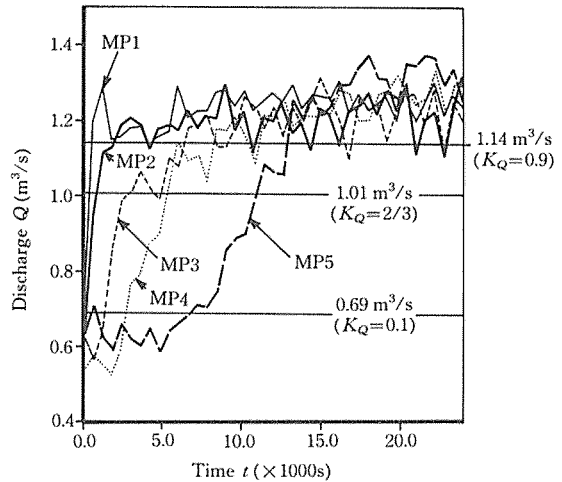


Fig. 3-9 Changing of the measured discharge Q due to time t at the each measuring point in the open-channel.

よび(3-3)の方法を用いてそれらの時間を決定した。

① $K_q=0.1$ つまり流量 Q が $0.69 \text{ m}^3/\text{sec}$ となるいくつかの時間 t のうち、最も大きい時間 t において(3-2)式が満足されているものとする(例えば Fig. 3-11 の A 点)。

② $K_q=2/3$ つまり流量 Q が $1.01 \text{ m}^3/\text{sec}$ となる場合には、いくつかの時間 t のうち最も小さい時間 t において(3-3)式が満足されているものとする(例えば Fig. 3-11 の B 点)。

③ $K_q=0.9$ つまり流量 Q が $1.14 \text{ m}^3/\text{sec}$ となる場合も(3-2)と同様に、最も小さい時間 t において(3-4)式が満足されているものとする(例えば Fig. 3-11 の C 点)。

2. w_0, μ_0 の決定

水深 h の時系列変動は Fig. 3-7 に示されているように各測点によって異なるのであるが、中間的と思われる測点 2 の水深 h に注目して初期水深 h_b を 0.395 m 、終期水深 h_e を 0.580 m とした。

この場合、Fig. 3-5(b) に示されている cross-section 1 によって、初期の通水断面積 $A(h_b)$ は 1.30 m^2 、終期の通水断面積 $A(h_e)$ は 2.07 m^2 となって、前述の $Q_b=0.63 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、 $Q_e=1.20 \text{ m}^3/\text{sec}$ および(3-9)式から、 w_0 は $0.74 \text{ m}/\text{sec}$ となる。

初期の流速 v_b は Q_b を $A(h_b)$ で除すことによって $0.484 \text{ m}/\text{sec}$ となり、終期の流速 v_e は同様の手順に

よって 0.579 m/sec となる。

路床勾配 i は、Fig. 3-5(a) に示されているサイホン部を除く各水路区間の路床勾配に関して各区間長を重みとする平均値として表わせば $1/4,000$ である。

以上のようにして得られた h_b, h_e, v_b, v_e, i の各値を (3-10) 式に代入することによって、 $K_q=0.1$ の場合の μ_0 は $382 \text{ m}^3/\text{sec}$ となる。同様に (3-11) 式から、 $K_q=2/3$ の場合は μ_0 は $672 \text{ m}^3/\text{sec}$ となる。

3. 現地実験の結果と理論式との比較

以上のようにして種々の K_q に対応する実測から得られた w_0, μ_0 の各値を用いて (3-16) 式、(3-17) 式から実測の X, T を求め、Fig. 3-10 にプロットした。

また、あわせて厳密解 [(3-15) 式]、簡略式 [(3-26) ~ (3-28) 式] による解を Fig. 3-10 に描いた。

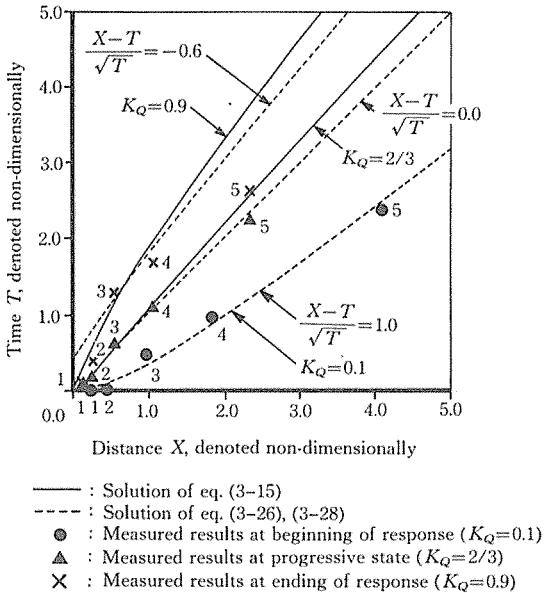


Fig. 3-10 Comparison of the contour lines of $K_q=0.1, 2/3, 0.9$ on $X \sim T$ plane with the solution of eq. (3-15), with the solution of eq. (3-26)~(3-28), and experimental results in the open-channel.

第6節 考 察

白石⁸⁾らは不等流解析によって、送水変更操作に伴う用水到達状況の推定を行っている。これに対し、本章では、縦断勾配が緩やかな水路を対象に、操作の前後に到達する流れの形態を疑似等流と仮定することによって用

水到達状況を推算することを試みた。その結果、筆者らの提案する簡略式 (3-26) ~ (3-28) 式によってこのような緩勾配水路における用水到達状況の推定が可能などが明らかになった。

以下に現地実験および厳密解と対応させながら簡略式の性質に関する考察を試みる。

Fig. 3-10 に示されている現地実験結果から、まず以下の①~③が言える。

① 測点 1, 2 の現地実験結果において、無次元表示の距離 X の値はおよそ 0.1 から 0.5 までとなり 1 より小さい。即ち、(3-23) 式によれば、今回の現地実験の測点 1, 2 における流況変動は他の測点の流況変動に比べて最も Dynamic wave に近いものであると考えることができよう。従って、以下において測点 1, 2 を「上流端に近い地点」と呼ぶこととする。

② 同様に、測点 3, 4 に関しては X の値が 0.5 から 1.8 までとなり、Dynamic wave から Kinematic wave へと遷移する過渡的な流況変動となっている。従って、測点 3, 4 を「上流端からある程度離れている地点」と呼ぶ。

③ なお、測点 5 に関しては X の値が 2.3 から 4.1 までとなり 1 よりも大きい。しかも、今回の現地実験においては最も下流に位置する測点であり、最も Kinematic wave に近いので「上流端から遠い地点」と呼ぶこととする。

さて、用水到達の程度を表わしている $K_q=0.1, 2/3, 0.9$ のそれぞれの場合についての考察を以下に示す。

(1) Wave front の到達、すなわち $K_q=0.1$ の場合

上流端に近い地点から、上流端から遠い地点までの各測点において、厳密解 (Fig. 3-10 の実線)、簡略式による解 (点線)、および現地実験結果 (プロット) の間には非常に良好な一致が見られる。

厳密解が現地実験結果と良く一致しているということは $K_q=0.1$ なる場合に (3-8) 式に示されている線形拡散型方程式の有効性が大きいことを示している。

(2) 中間的な流量、すなわち $K_q=2/3$ の場合

上流端に近い地点から、上流端に遠い地点までの各地点において、厳密解、簡略式による解、現地実験結果の間に良好な一致が見られる。

(3) 用水到達が完了となる $K_q=0.9$ の場合

上流端に近い地点において、厳密解と現地実験結果には良好な一致が見られる。上流端からある程度離れてい

る地点では、厳密解、現地実験結果のみならず簡略式による解も良好な一致を示している。

しかし、上流端から遠い測点5においては、現地実験結果、厳密解、簡略式による解のいずれもそれぞれ著しい相違を見せている。このことの原因を検討するためにFig. 3-11に測点5で得られた流量の時系列変動を再記する。そして、そのFig. 3-11に(3-4)、(3-15)式による厳密解および(3-28)式の簡略式による解をプロットした。

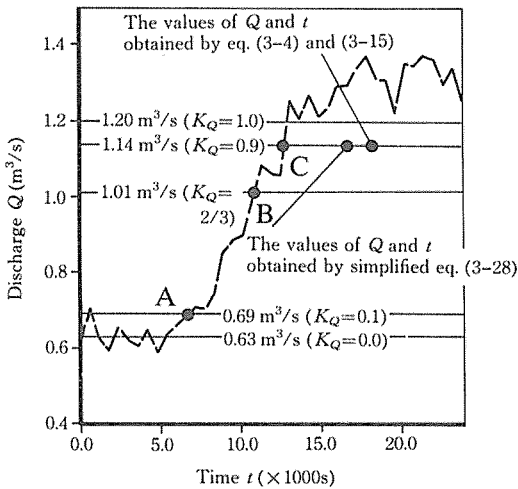


Fig. 3-11 Changing of the measured discharge Q due to time t at the measuring point number 5 in the open-channel.

Fig. 3-11 によって以下の2点が明らかとなった。

① Fig. 3-11 を概観してみれば、(3-4)、(3-15)式による解を満足する時間 t あるいは(3-28)式の解を満足する時間 t において流況は終期の流れに近いものとなっているように思われる。すなわち、(3-4)式を定義する発端となった用水到達の終わる時間 t を予測するという目的に対しては(3-15)、(3-28)式とも有効性は失われていない。

② 測点5における現地実験結果の流量 Q は流れが終期の定常に近い流れとなる場合、少し大きく算出されている。このことは、測点5において $K_Q=0.9$ を満足する時間の詳細な算定のためには、パラメータ η に関する更なる検討が必要なることを示唆しているものと考えられる。

第7節 あとがき

単一開水路における用水の到達を、線形拡散型方程式の厳密解 [(3-15)式] および林の行った微小振幅の長波の分類によって検討したところ、上述の厳密解の簡略式 [(3-26)~(3-28)式] を得ることができた。そして、これらの式の有効性を現地実験結果と比較することによって確認することができた。

第四章 直列配置の階段工を有する開水路における操作と応答

第1節 はしがき

開水路システム内における流況を制御量として取り扱いコントロールしようとするという立場においては、幾つかのテクニックがあるものと思われる。例えば、フィードバックコントロールなどは、その為の基本的なテクニックの一つであろう。その際、システムの入出力信号間の変換関係を表わすものとして幾つかの基本的な伝達要素が知られている。これらの伝達要素を対象としたフィードバックコントロールに関しては、既に多くの資料もある。従って、開水路システムにこの伝達要素を近似できれば、開水路内流況のコントロールを多くの資料のもとに比較的有利に行うことができるものと思われる。

これらの近似には、①この要素の構造や動作の状態から理論的に行う方法と、②過渡応答や周波数応答の実験による方法の2つがある¹⁰⁾。しかし、開水路内における流況は水理学的に既に取り扱われており、多くの知見が得られている。従って、幾つかの条件のもとでは、開水路システムを前者の理論的な方法で伝達要素に近似することが可能と思われる。本章においてはその可能性を探ってみることとした。

具体的には以下に示されているような広長方形断面の開水路システムを想定して考察を試みた。

まず、岩崎⁴⁾が行ったのと同様に、無次元表示の単位幅流量 $K_Q(x, t)$ を(4-1)式に定義した。

$$K_Q(x, t) = \frac{q(x, t) - q_b}{q_e - q_b} \quad \dots(4-1)$$

ここで、 q : 単位幅当りの流量 ($\text{m}^3/\text{sec}/\text{m}$)、 x : 上流端から下流方向への距離 (m)、 t : 送水変更操作が行われてからの時間 (sec)、添え字 b : 初期の等流に近い定常流れ、添え字 e : 終期の等流に近い定常流れである。

次に、システムの上流端における単位幅流量を(4-1)式によって無次元化して時間 t に関するステップ関数で

表わし、それをシステムに対する入力とみなした。同様に、下流端における単位幅流量を(4-1)式によって無次元化してシステムに対する出力とみなした。

上記の入力に対する開水路システムの応答は、システム論的にはインディシャル応答として既に知られているものであるが、その出力波形を理論的に検討してみることによって基本的な伝達要素を決定しているいくつかのパラメータ(例えば、後述のむだ時間 D と時定数 T_c)の値を推定することを試みた。

それらパラメータ値の推定の可否を確かめる為に、本報告では、直列配置の階段工を有する開水路内における流況を対象として数学モデルを作成することとした。その水路形状を Fig. 4-1 に示す。

この場合、用水の到達状況を水理的に取り扱うのであれば、階段工によって生じる不連続な水面のために、重積分、あるいは数値実験など煩雑と思われる計算を行わなくてはならない。従って、多くの手間と演算時間が必要となる。この多くの手間と演算時間を省くといった意味においても、開水路システムを基本的な伝達要素で近似できれば、好都合と思われる。

以下においては、まず、第2節で線形のシステム論に基づいた基礎方程式を示し、第3節で、その基礎方程式と水理学で取り扱われている基礎式との関連を探ることによって、線形システムのパラメータ推定のための式を求めた。そして、第4節で、①線形システムの出力波形として表わされる流量の到達状況と、②水理学の基礎式の厳密解として表わされる流量の到達状況との2つの比較を行い、第5節のむすびにおいて、考察を試みた。

第2節 線形のシステム論に基づいた基礎方程式

本章では、開水路系の流量到達状況を示す基本的な伝達関数を導く。基礎式を導くに当たって、初期条件および境界条件の線形システム論として取り扱いを整理すると以下ようになる。

まず、初期条件としては定常流を想定して、

初期条件： $t \leq 0$,

$$q(x, t) = q_b \text{ すなわち (4-1) 式から } K_q(x, t) = 0 \quad \dots(4-2)$$

とした。

上流端における境界条件としては、そこでのゲート操作に要する時間が後述のむだ時間 D あるいは時定数 T_c といった時間のスケールに比べて非常に短い場合を想定して、

境界条件： $t > 0$,

$$q(0, t) = q_e \text{ すなわち (4-1) 式から } K_q(0, t) = 1 \quad \dots(4-3)$$

とした。

階段工地点における境界条件としては、支配断面が生じており、下流側の流況変動の影響を受けないことを想定して、

$$x = kl, \quad v = \sqrt{gh} \quad \dots(4-4)$$

とした。ここで、 h : 水深 (m), v : 流速 (m/sec), l : Fig. 4-1 に示されている各階段工の区間長 (m), k : 1 から N までの任意の整数, N : 上流端から数えた階段工の段数である。(4-2), (4-3)式から次式を得る。

$$K_q(0, t) = H(t) \quad \dots(4-5)$$

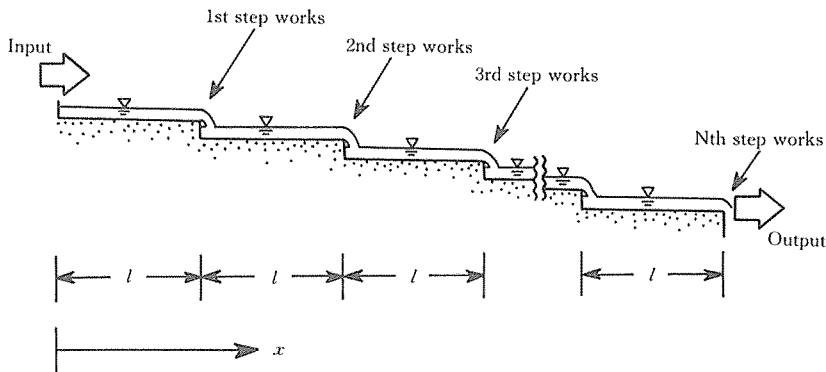


Fig. 4-1 Illustration of the open-channel with step works in series, in which l ; length of interval of each steps.

ここで、 $H(t)$ はステップ関数であって、次式で定義されている。

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \quad \dots(4-6)$$

あるいは、

$$H(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \quad \dots(4-7)$$

ここで、 L^{-1} は(4-8)式の関数 L の逆関数であって、ラプラス逆変換である。

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \dots(4-8)$$

$L\{f(t)\}$ は上式に示されているように任意の関数 $f(t)$ に関するラプラス変換である。

ところで、各階段工区間の水路内の流況を如何なる伝達要素の組合わせで表現するかについて考える場合、流況の水利学的な特性を損なわないように留意しなければならない。本報告では、最も注意すべき諸点として次の2点を考慮した。

まず、①流況変動が微小であって、その流況変動を表わすのに線形の移流拡散方程式のように線形化された基礎方程式が適用できる場合には、各階段工区間の長さ l の水路を線形システムとして取り扱えるものと思われる。一方、②(4-2)～(4-4)式に示されているような条件のもとでの一段目の階段工地点における流量到達状況は、Fig. 4-2 あるいは(4-9)式に示されているように、指数関数で近似できるものと思われる。この指数関数による曲線は Fig. 4-2 あるいは(4-9)式からも明らかのようにむだ時間 D および時定数 T_c によって特徴づけられている。

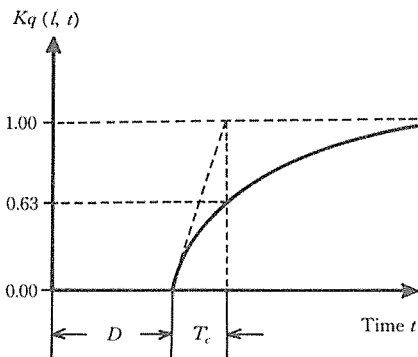


Fig. 4-2 Indicial response of $K_q(l, t)$ derived from terms of dead time D and time constant T_c .

以上の2点を考慮して、本章においては各階段工区間の水路をむだ時間を含む一次遅れ要素として取扱ってみることにした。

ここで、Fig. 4-2 に示されている曲線は、

$$K_q(l, t) = (1 - e^{-\frac{t-D}{T_c}}) H(t-D) = L^{-1}\left\{G(s) \frac{1}{s}\right\} \quad \dots(4-9)$$

である。また、 $G(s)$ は伝達要素を表わしている伝達関数であって、(4-9)式中においては上流側からの入力 $K_q(0, t)$ と出力 $K_q(l, t)$ との関係を表わすものである。そして、ここでは、むだ時間を含む一次遅れ要素が仮定されているので、 $G(s)$ は次式によって定義されることとなる。

$$G(s) = \frac{e^{-sD}}{1 + T_c s} \quad \dots(4-10)$$

この(4-10)式に示されている伝達関数の適用に際して、類似性があると思われるものを Fig. 4-3 に示した。

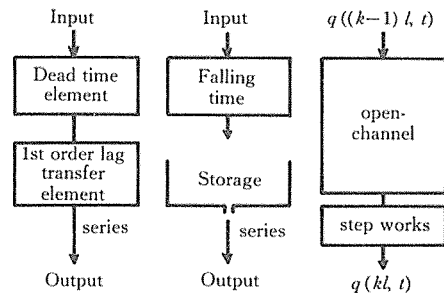


Fig. 4-3 Systems characterised with terms of dead time D and time constant T_c .

(4-4)式にも示したように、階段工地点における境界条件として本章では、下流側の流況変動の影響を受けない場合を想定している。従って、本報告で取扱われている水路のモデルは Fig. 4-3 に示されている他の類似のモデルと同様に要素が直列配置になっていると解することができる。

そして、その為に、適用される伝達関数 $G(s)$ の個数は、要素の個数すなわち階段工の個数に等しい。

ところで、2段目の階段工における用水到達は、(4-10)式に示されている伝達要素 $G(s)$ が2つ直列に繋がれたシステムからの出力 $K_q(2l, t)$ として次式で示される。

$$\begin{aligned} K_q(2l, t) &= L^{-1}\left\{G(s)^2 \frac{1}{s}\right\} \\ &= \left[1 - e^{-\frac{t-2D}{T_c}} \left(1 + \frac{t-2D}{T_c}\right)\right] H(t-2D) \quad \dots(4-11) \end{aligned}$$

任意の N 段目に関しては,

$$K_q(Nl, t) = L^{-1} \left\{ G(s)^N \frac{1}{s} \right\}$$

$$= \left\{ 1 - e^{-\frac{t-ND}{T_c}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{t-ND}{T_c} \right)^j \right\} H(t-ND) \dots (4-12)$$

となる。この(4-12)式に示されている出力 $K_q(Nl, t)$ は(4-10)式に示されている伝達要素を Fig. 4-4 に示されているように N 個直列につないだものからの出力である。

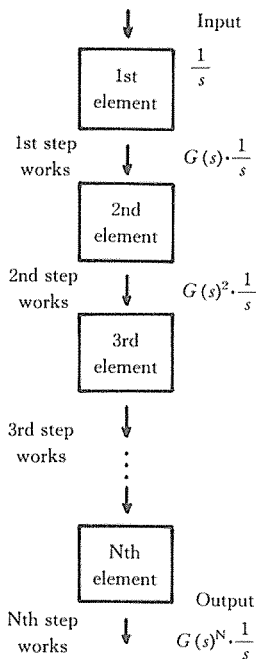


Fig. 4-4 System consisted of elements in series.

第3節 むだ時間 D および時定数 T_c の推定式

長方形水路を仮定すれば、連続の式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \dots (4-13)$$

ところで、この(4-13)式は、①微分方程式であって代数的な式に比べれば取扱いにくい。しかも、②このままでは、むだ時間 D あるいは時定数 T_c との関連が不明確である。これら2つの理由によって、この(4-13)式の左辺の第1項、第2項を距離 x に関しては0から Nl まで積分し、時間 t に関しては0から ∞ まで積分してみることにした。(4-13)式の左辺第1項をそのよう

に積分にしたものを G_1 として、第2項をそのように積分したものを G_2 とすれば、(4-13)式から明らかに、

$$G_1 + G_2 = 0 \quad \dots (4-14)$$

となる。この G_1, G_2 を以下のように求めてみることにした。

まず、各階段工の区間内における流況は、定常状態において等しいものと考えられるので、第1項の積分 G_1 は次式で与えられる。

$$G_1 = \int_0^{Nl} \int_0^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t} dt dx$$

従って、

$$G_1 = N \int_0^l \{h_e(x) - h_b(x)\} dx \quad \dots (4-15)$$

次に、第2項の積分 G_2 は、

$$G_2 = \int_0^{\infty} \int_0^{Nl} \frac{\partial q}{\partial x} dx dt$$

従って、

$$G_2 = \int_0^{\infty} \{q(Nl, t) - q(0, t)\} dt \quad \dots (4-16)$$

さらに、以下の①～⑤の手順によって(4-17)式を得た。

① まず、(4-16)式の右辺は(4-1)式を代入して、 $q(Nl, t), q(0, t)$ を消去すれば、

$$G_2 = (q_e - q_b) \int_0^{\infty} \{K_q(Nl, t) - K_q(0, t)\} dt$$

② さらに、上式の被積分関数に $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$ を掛ければ、

$$G_2 = (q_e - q_b) \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \{K_q(Nl, t) - K_q(0, t)\} e^{-st} dt$$

③ 即ち、(4-8)式の定義によって、上式は、

$$G_2 = (q_e - q_b) \lim_{s \rightarrow 0} L\{K_q(Nl, t) - K_q(0, t)\}$$

④ (4-10)、(4-12)式を $K_q(Nl, t), K_q(0, t)$ に適用すれば、上式は、

$$G_2 = (q_e - q_b) \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{e^{-sD}}{1 + T_c s} \right)^N \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right\}$$

⑤ 上式の右辺を通分してロピタルの定理を適用することによって次式を得る。

$$G_2 = -(q_e - q_b) \cdot N \cdot (D + T_c) \quad \dots (4-17)$$

結局、(4-14)、(4-15)、(4-17)式によって、以下の

(4-18)式を得る。

$$D+T=\frac{\int_0^l |h_e(x)-h_b(x)| dx}{q_e-q_b} \quad \dots(4-18)$$

なお、前述のように、本章では定常流れとして、等流に近い流況を仮定しているの、上式は近似的に、

$$D+T_c=\frac{l}{w_0} \quad \dots(4-19)$$

となる。ここで、 w_0 :理想段波速度 (m/sec) すなわち、

$$w_0=\frac{q_e-q_b}{h_e^*-h_b^*} \quad \dots(4-20)$$

である。 h_b^* , h_e^* は Manning 式による等流水深であり、それぞれ(4-21), (4-22)式で定義されている。

$$h_b^*=(n \cdot q_b/\sqrt{i})^{0.6} \quad \dots(4-21)$$

$$h_e^*=(n \cdot q_e/\sqrt{i})^{0.6} \quad \dots(4-22)$$

n : Manning の粗度係数, i : 路床勾配である。

一方、むだ時間 D は、Fig. 4-2 から明らかに、wave front の到達時間である。この時間の近似的な推定法は、岩崎⁴⁾によっても検討されているが、ここでは、前章⁶⁾のように、①定常流れが等流に近いこと、および、②非定常性、フルード数あるいは送水の変更操作量がさほど小さくなく、③ il/h の値が 10° のオーダーであることなどを想定して、線形の移流拡散方程式に基づく以下の近似式を適用した⁶⁾。

$$\frac{w_0 l}{4\mu_0} - \frac{w_0^2 D}{4\mu_0} = \sqrt{\frac{w_0^2 D}{4\mu_0}} \quad \dots(4-23)$$

ここで、 μ_0 は以下の(4-24)式に示される。

$$\mu_0 = \frac{q_b}{2i} \quad \dots(4-24)$$

なお、(4-23)式は、本来 $K_q=0.1$ となる場合の時間と距離との関係を示すものであるが、ここでは $K_q=0.0$ の場合であるむだ時間 D と距離 l との関係を近似的に示すものとして用いた。

(4-18)式あるいは(4-19)式によって $D+T_c$ の値を推定して、(4-23)式によってむだ時間 D の値を推定すれば、時定数 T_c の値も推定できることとなる。

第 4 節 数値計算例

前章までに、出力 $K_q(Nl, t)$ は(4-12)式のように決められて、その式中のパラメータむだ時間 D と時定数 T_c

は、(4-19), (4-23)式によって推定されることとなった。本章では、それら推定の可否を検証する為に、以下において数値実験を行うこととした。

すなわち、①線形システムの出力波形として表わされる流量到達状況、すなわち(4-12)式によって得られる $K_q(Nl, t)$ と、②水理学の基礎式の厳密解として表わされる流量の到達状況 $K_q(Nl, t)$ との適合性を検討するために、以下に計算例を示した。

1. 計算に際しての設定条件としてそれに対応する D, T_c の値

今、初期の単位幅当りの流量 q_b を $1 \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m}$ 、終期の単位幅当りの流量 q_e を $2 \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m}$ とし、路床勾配 i を $1/1000$ 、Manning の粗度係数 n を 0.015 とすれば、(4-21), (4-22)式によって $h_b^*=0.639 \text{ m}$ 、 $h_e^*=0.969 \text{ m}$ となる。なお、各階段工の区間長 l は 1000 m であることとした。

以上の、 $q_b, q_e, h_b^*, h_e^*, i, l$ の各値によって、(4-20)式から、 $w_0=3.03 \text{ m}/\text{sec}$ 、(4-24)式から $\mu_0=500 \text{ m}^2/\text{sec}$ となり、(4-19)式から $D+T_c=330 \text{ sec}$ 、(4-23)式から $D=150 \text{ sec}$ となる。この場合、明らかに時定数 T_c は 180 sec である。

いま、線形システムの出力波形としての流量到達状況 $K_q(Nl, t)$ の値は、(4-12)式にこれら D, T_c の各値を代入して求まることとなる。

2. 水理学の基礎式による厳密解

用水到達状況 $K_q(Nl, t)$ の値を水理学の基礎式によって厳密に求めた。基礎式としては、既に(4-13)式に示されている連続の条件、および、以下の運動方程式を用いた。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - i + i_f = 0 \quad \dots(4-25)$$

ここで、 i_f は摩擦損失勾配であって Manning 式に基づき次式で定義した。

$$i_f = \frac{n^2 v^2}{h^{4/3}} \quad \dots(4-26)$$

(4-13), (4-25)式を解いて、得られた数値解 $q(Nl, t)$ を(4-1)式によって無次元化して、ここでの厳密解 $K_q(Nl, t)$ とした。

数値解 $q(Nl, t)$ を得る手順としては、その $q(Nl, t)$ が滑らかな曲線として与えられれば比較的考察を行いやすいものと考えて、まず既定時間間隔による特性曲線法⁹⁾を検討した。すなわち、流速 v の算定に関しては以下

の(4-27)式を適用した。

$$v(x, t + \Delta t) = (2 \cdot i - i_{r1} - i_{r2}) \cdot g \Delta t + v_1 + v_2 + 2\sqrt{gh_1} - 2\sqrt{gh_2} / 2 \quad \dots(4-27)$$

ここで、 Δt : Fig. 4-5 に示されているように、時間 t のきざみ (sec) である。 i_{r1} , i_{r2} : それぞれ Fig. 4-5 に図示されているように、距離 x , 時間 $t + \Delta t$ を通過する 2 本の特性曲線上の各摩擦損失勾配 i_r のうち、特に時間 t における摩擦損失勾配、すなわち Point 1, 2 における摩擦損失勾配であり、 v_1 , v_2 : 同様に、Point 1, 2 における流速である。

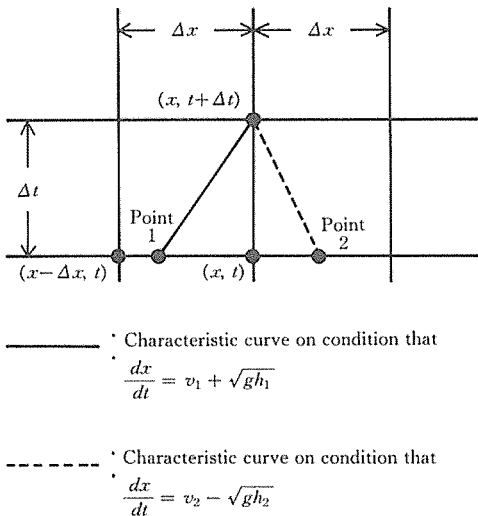


Fig. 4-5 Grids and characteristic curves on $x \sim t$ plane for numerical analysis⁹⁾.

水深 h の算定に関しては初期の定常流れにおいて初期条件(4-2)式が十分満足されるようにと考え、特性曲線法には依らずに、連続の条件(4-13)式に基づく以下の(4-28)式を適用した。

$$h(x, t + \Delta t) = -(q(x, t) - q(x - \Delta x, t)) / \Delta x \cdot \Delta t + h(x, t) \quad \dots(4-28)$$

ここで、 Δx : Fig. 4-5 に示されているように、距離 x のきざみ (m) である。

3. 計算結果

むだ時間 D を推定するために用いた前述の(4-23)式の適用条件の一つに、 il/h の値のオーダーが 10° である

ことを既述した。このことを考慮すれば、水路長 Nl が l の10倍となる程度までは、線形システムの出力波形は流量到達状況を近似できるのではないと思われる。そこで、 $N=1, 4, 16$ なる各階段工地点の用水到達状況 $K_q(Nl, t)$ の値を、Fig. 4-6 の(a), (b), (c) に示した。

Fig. 4-6 において、実線は線形システムの出力波形として表わされる流量到達状況 $K_q(Nl, t)$ であり、破線は水理学の基礎式の厳密解として表わされる用水到達状況 $K_q(Nl, t)$ である。

第5節 あとがき

線形システムからの出力 $K_q(Nl, t)$ は、多段で構成されている水路において、1 段目、4 段目の階段工の地点のように階段工の数が比較的少ない地点では、Fig. 4-6 (a), (b) に示されているように、厳密解と良く一致している。しかし、階段工の数が増えて、例えば Fig. 4-6(c)

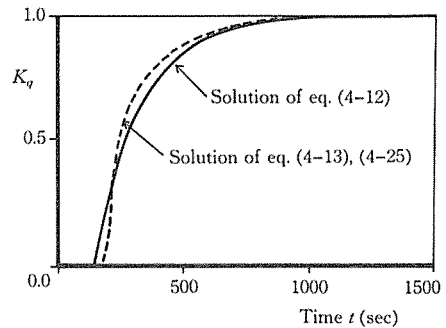


Fig. 4-6 Changing of the non-dimensional discharge K_q due to variable time t .
(a) Non-dimensional discharge at the 1st step works.

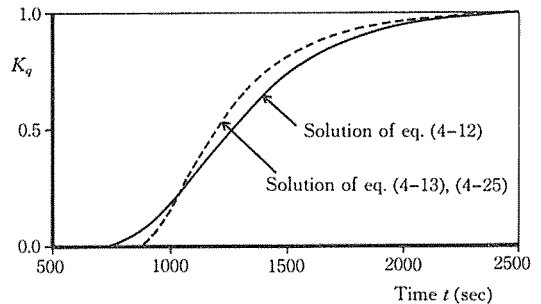


Fig. 4-6 Changing of the non-dimensional discharge K_q due to variable time t .
(b) Non-dimensional discharge at the 4th step works.

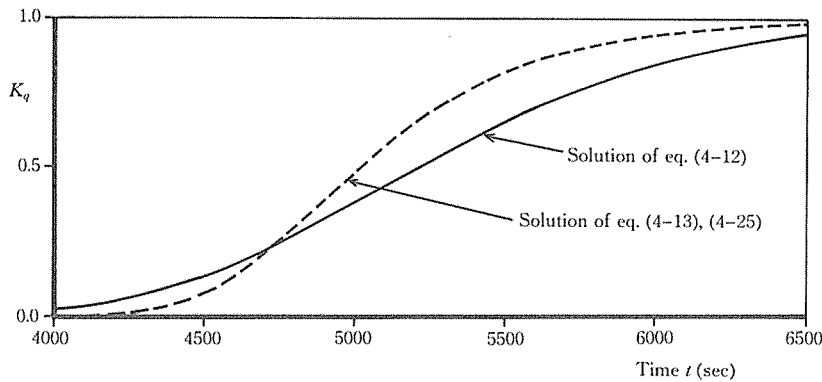


Fig. 4-6 Changing of the non-dimensional discharge K_q due to variable time t .
(c) Non-dimensional discharge at the 16th step works.

のように階段工の数が16段目の地点ともなればさほどの一致は見られない。

すなわち、本章で取り扱った多段の階段工のある開水路システムに関して、本章で取り扱った程度の近似は、およそ10段目までであれば、①開水路システム内における流況を制御量として取り扱いコントロールしようとするという立場、あるいは、②用水到達状況の近似解を得ようとする立場において、十分に厳密解に近いものであると思われる。

第V章 総 括

各章ごとに、流れの操作と応答に関して検討と考察を行なったが、ここでは、各章相互の関連性を中心として、要点を以下にまとめる。

まず、第II章においては、主として解析解による取扱いおよび数値実験によって、一様広長方形水路における流況操作に伴う用水到達状況の特徴的な三つの状況に分類することができた。ここで、このような分類のパラメータとしては、(2-27)式に示される α が有効な役割を果たすことが明らかになった。

$$\alpha = \sqrt{\frac{w_0 x}{4\mu_0}} = \sqrt{\frac{w_0^2 t}{4\mu_0}} \quad \dots(2-27)$$

上式は無次元表示の距離 X と、無次元表示の時間 T を用いて表わせば、

$$\alpha = \sqrt{X} = \sqrt{T} \quad \dots(2-27)'$$

である。

第III章においては、線形拡散型方程式の厳密解 [(3-

5)式] および林の行った微小振幅の長波の分類によって検討したところ、上述の厳密解の簡略式 [(3-26)~(3-28)式] を得ることができた。そして、これらの式の有効性を現地実験結果と比較することによって確認することができた。

$$\frac{X-T}{\sqrt{T}} \doteq \begin{cases} 1.0(K_q=0.1, 0.1 \leq X \leq 10.0) & (3-26) \\ 0.0(K_q=2/3, 0.1 \leq X \leq 10.0) & (3-27) \\ -0.6(K_q=0.9, X \doteq 1.0) & (3-28) \end{cases}$$

第II章において取扱われた(2-27)式は(2-27)'式からも明らかに、第IIIにおける(3-27)式に等しい。すなわち、(3-26)~(3-28)式は、用水到達をその到達の始りから終わりまで拡張して取扱ってみた結果である。

第IV章においては、むだ時間要素を含む一次遅れ要素で開水路システムの表現を試みた。

むだ時間の推定には(3-27)式から得られる次式を用いた。

$$\frac{w_0 l}{4\mu_0} - \frac{w_0^2 D}{4\mu_0} = \sqrt{\frac{w_0^2 D}{4\mu_0}} \quad \dots(4-23)$$

一次遅れ要素のパラメータ T_c の推定には、

$$D + T_c = \frac{l}{w_0} \quad \dots(4-19)$$

を用いた。

多段の段落ちのある開水路システムに関して、本報告で取り扱った程度の近似は、およそ10段目までであれば、①開水路システム内における流況を制御量として取り扱いコントロールしようとするという観点から、あるいは、②用水到達状況の近似解を得ようとする観点から、十分

に厳密解に近いものであると思われる。

数値実験によって、(1-3), (1-4)式を用いての伝達要素の適用は、多段の段落ちのある水路における用水到達状況の推定にも有効であることが確かめられた。

謝 辞

本研究を進めるに際しては、九州大学農学部の長智男教授と黒田正治助教授の御指導を賜った。また、九州大学農学部の竹下敬司教授には、原稿の御校閲を頂き、有益な御教示を賜った。なお、現地観測にあたっては、佐賀県土地改良課、佐賀土地改良区の協力を得た。記して、謝意を表する。

引用文献

- 1) CHOW, V. T. 著, 石原藤次郎訳: 開水路の水理学, 丸善, pp. 493~501 (1962)
- 2) HAYAMI, S.: On the Propagation of Flood Waves, D.P.R.I. Kyoto Univ., Bulletin No. 1, pp. 1~16 (1951)
- 3) 林 泰造: 河川の不定流について, 1966年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会, pp. 01-1~01-20 (1966)
- 4) 岩崎和巳: 農業用水路系における用水到達状況の推定法, 昭和54年度農業土木学会講演要旨, pp. 134~135 (1976)
- 5) 加治佐隆光・黒田正治・長 智男: 用水システムの運用操作における流量の応答遅れ, 農業土木学会論文集 114, pp. 91~98 (1984)
- 6) 加治佐隆光・黒田正治・長 智男: 開水路流量の操作と応答に関する解析と実験, 農業土木学会論文集 122, pp. 57~65 (1986)
- 7) 例えは, LAPIDUS, L. and N. R. AMUNDSON: Mathematics of adsorption in beds. VI The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns, J. Phys. Chem. 56, pp. 984~988 (1952)
- 8) 白石英彦・岩崎和巳・伊藤喜一: 幹線水路における用水管理の形態とその機能解析, 農業土木試験場報告第1, pp. 1~42 (1977)
- 9) STREETER, V. L. & WYLIE, E. B. 著, 竹中利夫訳: 流体過渡現象, 日本工業新聞社, pp. 275~296 (1973)
- 10) 例えは, 東京電機大学編: 自動制御の基礎, 東京電機大学出版局, pp. 57 (1975)
- 11) 例えは, 椿東一郎: 水理学Ⅱ, 森北, pp. 41~45 (1978)
- 12) 例えは, 椿東一郎: 水理学Ⅱ, 森北, pp. 107~110 (1978)

Summary

The operation of discharge and delay of response in a open-channel irrigation system were discussed with mathematical analyses and experimental evaluations. Analytical treatments were made based on the linearized diffusion analog model.

[1] It was clarified that parameter α obtained as a result of the analyses was an effective factor to describe the response of the operation, and α was denoted as

$$\alpha = \sqrt{X} = \sqrt{T} \quad \dots(A)$$

in which,

$$X = \frac{w_0 x}{4\mu_0}, \quad T = \frac{w_0^2 t}{4\mu_0}$$

X : Distance represented non-dimensionally, T : time represented non-dimensionally, x : distance from the upside end of open-channel (m), t : time from the change of discharge (sec), w_0 : velocity of hydraulic bore (m/sec), μ : equivalent to $(hv)/2i$, (hv) : discharge per unit wise of channel, suffix 0 shows uniform flow and i : bottom slope.

Also, the phenomena of the response in the operations were transferred to down stream as dynamic, dynamic~kinematic and kinematic waves for $\alpha \ll 1$, $\alpha \approx 1$ and $\alpha \gg 1$, respectively.

[2] A simple and useful equation was derived as a result of solving the linearized diffusion analog model with in the effective range of X .

$$\frac{X-T}{\sqrt{T}} = \begin{cases} 1.0 (K_q=0.1, 0.1 \leq X \leq 10.0) \\ 0.0 (K_q=2/3, 0.1 \leq X \leq 10.0) \\ -0.6 (K_q=0.9, X \approx 1.0) \end{cases} \quad \dots(B)$$

in which, the following indexes were introduced to evaluate the conditions of response with the operation.

- (1) $K_q=0.1$ is the beginning index of the response.
- (2) $K_q=2/3$ is the progressive state index.
- (3) $K_q=0.9$ is the ending index of the response.

K_q : Discharge represented non-dimensionally, equivalent to $(Q-Q_b)/(Q_e-Q_b)$, Q : discharge (m^3/sec), suffix b shows the uniform flow just before the operation and suffix e shows the uniform flow at the end of the response.

The validity of Eq. (B) was confirmed in the transition range of the dynamic and kinematic waves.

[3] The Eqs. (C) and (D) were applied to evaluate dead time D (sec) and time constant T_c (sec) in the indicial response of flow in an open-channel under various conditions.

$$D + T_c = \frac{l}{w_0} \quad \dots(C)$$

$$\frac{w_0 l}{4\mu_b} - \frac{w_0^2 D}{4\mu_b} = \sqrt{\frac{w_0^2 D}{4\mu_b}} \quad \dots(D)$$

Equation (C) was derived from the condition of continuity and Eq. (D) was derived from Eq. (B).

The mathematical model for evaluating dead time D and time constant T_c of the flow in an open-channel with step works in a series was presented and checked using a numerical analysis.

The validity of this model was confirmed within about 10 step works in a open-channel.