

## 同種同齡林の全生長過程に関する一考察

林 拙 郎

A Study on the All Growth Process of Even-Aged Pure Stand

Setsuo HAYASHI

HAYASHI, Setsuo: A Study on the growth process of even-aged pure stand *Bull. Fac. Mie Univ.* 74: 39~52, 1987  
 In the previous paper, the  $\rho$ -logistic equation was given as the growth equation under natural decrease on stand density. In the present paper, one of 3/2th power laws is derived theoretically based on the assumption that growth goal ( $W$ ) in this  $\rho$ -logistic growth equation is constant. This theoretical solution includes all growth stages of the plant stand regarding the full-density curve, and gives  $(w/w_0)[(\rho/\rho_0) \wedge \beta + \delta] = 1$ ,  $\delta = w_0/W_c$ . Here,  $w$  is the mean plant weight,  $w_0$  is the initial value of  $w$ ,  $\rho$  is the stand density,  $\rho_0$  is the initial stand density,  $W_c$  is the goal value of  $w$  and  $\beta$  is the power of the 3/2th power law. This equation is called the expanding 3/2th power law. If we assume  $\delta \rightarrow 0$  in this equation. We obtained the normal formula for the 3/2th power law, and  $w(t)$  equation for the 3/2th power law is solved by substituting the  $\rho(t)$  formula of the previous paper into the normal formula for the 3/2th power law. This equation is as follows:  $w = w_{0f} \exp(\beta(t-t_0) \wedge m/\alpha)$ . Here  $w_{0f}$  is the initial value of  $w$  for the 3/2th power law, and  $t_0$ ,  $m$  and  $\alpha$  are the constants. On the other hand, the expanding formula for  $w$  in the previous paper again yielded the same way by use of this expanding 3/2th power law as growth goal ( $W$ ). Furthermore, this  $w$  can be used as new growth goal ( $W$ ) in the  $\rho$ -logistic growth equation, and the solution of the  $\rho$ -logistic equation under this new growth goal represents the  $w$ - $\rho$  curve for all growth process in the plant stands. A result which supports the assumption obtained by fitting this solution of the growth equation to SPURR *et al.*, data. (the symbol  $z \wedge x/a$  represent  $z^x/a$  in the above formulas.)

林 拙郎：同種同齡林の全生長過程に関する一考察  
 三重大学農学報74 39~52 1987 筆者の  $\rho$ -logistic 生長方程式中の目標値  $W$  を一定と仮定とすることによって、3/2乗則線の一つが理論的に導かれた。その理論解は、森林が生長を終える段階までを含んでおり、次式で表される。 $(w/w_{0f})[(\rho/\rho_0) \wedge \beta + \delta] = 1$ ,  $\delta = w_0/W_c$  ここに、 $w$ : 平均個体重、 $w_{0f}$ : その初期値、 $\rho$ : 個体密度、 $\rho_0$ : その初期値、 $\beta$ : 3/2乗則線のベキ係数、 $W_c$ :  $w$  の目標値である。上式を拡張3/2乗則と呼ぶ。ここで、 $\delta \rightarrow 0$  とすれば、従来の3/2乗則線が得られる。一方、この場合の  $w(t)$  式は従来の3/2乗則線に既報の  $\rho(t)$  式を代入することによって次式のように表される。 $w = w_{0f} \exp(\beta(t-t_0) \wedge m/\alpha)$  ここに、 $t_0$ ,  $m$ ,  $\alpha$  は定数、 $w_{0f}$  は3/2乗則線上での  $w$  の初期値である。次に、この拡張3/2乗則線を新たに  $\rho$ -logistic 生長方程式の目標値  $W$  と

することにより、全生長過程を表現する  $w$ - $\rho$  曲線を導いた。この曲線を SPURR 等のデータにあてはめたところ結果は良好であった (式中の  $\wedge$  はベキ乗を表す)。

## I はじめに

既報 (林, 1985) では、寿命分布にワイブル分布を仮定することによって、個体密度  $\rho$  の減少式、すなわち次式を導いた。

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-tm/\alpha} \quad (1)$$

ここに、 $\rho_0$ : 初期個体密度、 $t$ : 時間、 $m$ ,  $\alpha$ : 定数である。また、平均個体重  $w(t)$  式については、logistic 式の成立を前提とすることによって  $\lambda$  型の logistic 式として次式を推定した<sup>注1)</sup>。

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{dt} = \lambda(t) \left(1 - \frac{w}{W}\right) \quad (2)$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{m}{\alpha} t^{m-1}$$

ここに、 $\lambda_0$ : 生長係数、 $W$ : 目標値である。さらに、この(1)、(2)式より、 $t$ を消去することによって次の $\rho$ -logistic 生長方程式を導いた。

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{d\rho} = -\frac{\lambda_0}{\rho} \left(1 - \frac{w}{W}\right) \quad (3)$$

ところで、上の(3)式は(1)、(2)式が成立することを前提として、得られているので、逆に(3)式が成立していれば、(2)式は、 $m$ 、 $\alpha$ を含めて成立することになる。しかし、(2)式は推定されただけであるので、必ずしも常に成立しているとは言えない面がある。今回はこの点をまず検討する。

一方、既報(林, 1985)より、上の(1)式は SPURR 等のデータで、閉鎖が十分に進んだとみられる生長段階において適合性が確かめられている。また、(2)式の $\lambda(t)$ の関数型については、篠崎・吉良(1985)のダイズのデータに対して確認されている。ここでは、林木に対して(2)式の検討を行いたい。したがって、今回は、(1)式の成立を前提とし、(3)式の成立を仮定することで以下の考察を行う。

さらに、既報では、目標値 $W$ を変数、つまり $W(\rho)$ とした場合に対して $\rho$ -logistic 生長式の検討を行ったが、 $W$ を定数とした場合の検討は全く手つかずであった(林, 1985)。そこで今回はまず、 $W$ を定数とした場合の $\rho$ -logistic 式の解について考察する。この解が、より広い範囲の3/2乗則線(最多密度曲線)<sup>注2)</sup>を表しているものであることが示唆され、それより、3/2乗則線そのものも求められる。

さて先の $\rho$ -logistic 方程式より得られた一般化3/2乗則線に対する既報の適用域は、自然枯死線(只木, 1969)上の後半部から3/2乗則線までの生長段階に対してのみを対象にしたものであった。

本報では、その範囲をさらに一般化し、自然枯死線の当初(植栽当初)から3/2乗則線の終りまでの全 $v$ - $\rho$ 曲線を個体群の生長曲線として考察する。ここに、 $v$ は平均単木幹材積である。この範囲の $v$ - $\rho$ 曲線を、ここでは、仮に拡張自然枯死線と呼ぶことにする。その場合の生長段階は、単木状の生長段階から自然間引の段階までの生長段階が含まれる。これは箕輪(1982, 1983)が対象とした生長段階の範囲(自然間引の開始以後の段階)を、さらに一般化したものにあたり、穂積モデル(穂積, 1980)の適用範囲と同一の生長範囲を対象にしたものである。結論を先に言えば、既報の一般化3/2乗

則線は、箕輪と同じ自然間引の開始段階からの $v$ - $\rho$ 曲線に相当していた、ということが今回の考察から明らかになる。

なお、以下の考察においては、SPURR等のデータに対して穂積(1980)が追加決定したデータも利用する。また、個体の平均重量 $w$ は、実際の林木データへの適用にあたっては平均単木幹材積 $v$ を用いる。

## II 3/2乗則線の誘導

### 1. 考 え 方

既報(林, 1985)の一般化3/2乗則においては、また穂積モデル(穂積, 1980)や箕輪モデル(箕輪, 1982, 1983)においてもそうであるが、最多密度状態に到達すると、林木の生長は3/2乗則線(最多密度曲線)によって規定されるということが、重要な役割をはたしていた。

以下、3/2乗則線の誘導を行うにあたって、次のような3/2乗則線を考える。

$$w\rho^\beta = k \quad (4)$$

ここに、 $w$ : 平均個体重量又は平均幹材積、 $\rho$ : 個体密度、 $k$ : 定数、 $\beta$ : 1.5~2程度の定数である。上式を $w$ 、 $\rho$ 曲線上での初期値 $w_0$ 、 $\rho_0$ を用いて無次元化すれば、

$$\frac{w}{w_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\beta = K_* \quad (5)$$

を得る。ここに、 $K_*$ は無次元定数である。

もし、植栽当初の林分が既に3/2乗則線上に存在するのであるならば、植栽当初は(5)式の $w$ 、 $w_0$ 、 $\rho$ 、 $\rho_0$ を

$$w \rightarrow w_{0f}, \quad w_0 \rightarrow w_{0f}, \quad \rho \rightarrow \rho_{0f}, \quad \rho_0 \rightarrow \rho_{0f}$$

とすればよい。したがって、その場合 $K_*$ は

$$\left(\frac{w_{0f}}{w_{0f}}\right) \left(\frac{\rho_{0f}}{\rho_{0f}}\right)^\beta = 1 = K_* \quad (6)$$

となる。つまり、その林分が植栽当初から3/2乗則線上にある場合には、次式

$$\frac{w}{w_{0f}} \left(\frac{\rho}{\rho_{0f}}\right)^\beta = 1, \quad \text{又は} \quad w\rho^\beta = w_{0f}\rho_{0f}^\beta \quad (7)$$

のようになる。したがって、3/2乗則線の理論解は上の(7)式を満足しなければならない。

### 2. 3/2乗則線の誘導

依田等(1963)は、植物個体群の自然間引が被度100%で進行するとしたとき、3/2乗則すなわち(1)式上で、なぜ $\beta=3/2$ が成立するかを一個体当りの占有面積

と相似形の仮定から明らかにしている。しかし、依田等の証明では、密度の減少に伴って、なぜ  $w$  が  $\rho$  のべき乗で増加するかを  $\rho$  の減少経過上から明らかにしなかった。つまり、依田等の証明は、占有面積 ( $1/\rho$ ) が個体重  $w$  の2/3乗に比例するという静的な関係を基本にしたものであった。ここでは以下、個体密度の漸減に伴う平均個体の生長方程式、つまり第I章の  $\rho$ -logistic 式を直接解くことによって3/2乗則線を誘導する。

さて、 $\rho$ -logistic 生長方程式(3)式で目標値  $W$  を

$$W(\rho) = W_0 (\rho_0/\rho)^{\beta}$$

とおいた生長方程式(3)式の解が既報(林, 1985)の一般化3/2乗則であった。ここでは、

$$W = \text{const.} = W_c \quad (8)$$

とした  $\lambda$  型  $\rho$ -logistic 生長方程式を考える。また、既報の  $\lambda W$  型  $\rho$ -logistic 式の生長係数  $\lambda_0$  と区別するために、今回は、 $W$  を  $W_c$  とした場合の生長係数として  $\lambda_c$  を用いると、この(3)、(8)式の一般解は、 $c$  を任意定数として

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{W_c} + c\rho^{\lambda_c}$$

で与えられる。ここで、初期条件を

$$w = w_{0f}, \quad \rho = \rho_{0f} (t = t_0)$$

としたときの解は、次式

$$\frac{w}{w_{0f}} \left[ \frac{w_{0f}}{W_c} + \left(1 - \frac{w_{0f}}{W_c}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_{0f}}\right)^{\lambda_c} \right] = 1 \quad (9)$$

のようになる。さらに

$$n_c = W_c/w_{0f}$$

とすれば次式が得られる。

$$\frac{w}{w_{0f}} \left[ \left(\frac{\rho}{\rho_{0f}}\right)^{\lambda_c} + \frac{1}{n_c - 1} \right] = \frac{n_c}{n_c - 1} \quad (10)$$

ここで(10)式の意味を考えてみよう。まず、植栽直後の森林が当初から3/2乗則線上にあるような仮想的な場合を考える。平均個体重  $w$  を幹材積にとり、後に示す SPURR 等 (1957) のデータを用いて植栽後の幹材積を見積れば

$$w_{0f} = 3.1 \times 10^{-4} \text{ (ft}^3\text{)} \quad (11)$$

となる(穂積, 1980)。また、目標値  $W_c$  は少なく見

積っても

$$W_c \approx 10 \text{ (ft}^3\text{)} \quad (12)$$

程度である。したがって、 $n_c$  は

$$n_c = W_c/w_{0f} \approx 10^5/3 \quad (13)$$

以上と考えられる。それ故に、(10)式中の右辺は

$$n_c/(n_c - 1) \approx 1 + 1/n_c = 1 + 3 \times 10^{-5} \approx 1 \quad (14)$$

と見ることができる。一方、左辺の中カッコ内の二つの項は、両項を比較すると、当初から  $\rho/\rho_{0f}$  のある段階までは

$$1/(n_c - 1) \ll (\rho/\rho_{0f})^{\lambda_c} \quad (15)$$

であり、第2項は第1項に較べて無視できることになる。このように、中カッコ中の第2項が無視できる場合(10)式は実用上

$$\frac{w}{w_{0f}} \left(\frac{\rho}{\rho_{0f}}\right)^{\lambda_c} = 1 \quad (16)$$

と表すことができる。ここでは、 $w_{0f}$  が植栽直後から3/2乗則線上にあるとして  $W_c$  の値を考えたが、途中から3/2乗則線に移行する場合でも、それ以後を考えれば、同じことになる。但し、その場合には  $W_c$  は植栽直後に対する値より大きくなる。

ところで上式と先の(7)式とを比較すれば、 $\lambda_c$  は

$$\lambda_c = \beta$$

を満足しなければならない。ここに、 $\beta$  は、3/2乗則線の両対数グラフ上での勾配である。したがって、この場合  $\lambda$  型  $\rho$ -logistic 生長方程式の解として

$$\frac{w}{w_{0f}} \left(\frac{\rho}{\rho_{0f}}\right)^{\beta} = 1 \quad (17)$$

が得られる。以上より、(3)式の成立を仮定することによって、3/2乗則線の一つの理論解が得られたことになる。

当初  $\lambda$  は、群落内の個体の生長係数として導入された(林, 1985)のであるが、上で得られた解の  $\lambda_c$  は、最多密度状態で生長する個体の生長係数  $\beta$  に一致することになる。逆に、言えば、3/2乗則線の  $\beta$  は群落全体における個体の生長係数を意味していると考えられることができる。なお、箕輪(1983)は生長関係を表現する行列を考え、その固有ベクトルから3/2乗則線の傾き  $\beta$  を論

じている。

さて、上の(10)式から(17)式が成立するには、(15)式を満足することが必要であった。もし、目標値  $W_c(W)$  が

$$W_c = \infty$$

であるならば、(15)式は、 $\rho \neq 0$  の場合いつでも満されており、(17)式も無条件に成立することになる。しかし、このような特別な場合を除いて、 $W_c$  を上の例のように小さ目に見積れば、(12)式程度の値と考えられる。したがって、 $\rho/\rho_0$  が徐々に小さくなって(15)式が成立しなくなれば、同様に  $w$  も(17)式を満足しなくなる。その場合、(17)式は実用上次式<sup>注3)</sup>で表される。

$$\frac{w}{w_0} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta + \delta \right] = 1 \quad (18)$$

$$\delta = 1/(n_c - 1) \doteq w_0/W_c$$

SPURR 等 (1957) のデータを用いて、上式中の  $\delta$  を 3 種類、つまり  $W_c$  (図中では  $V_c$ ) を 10, 100, 300 (ft<sup>3</sup>) とした時の  $w$  (図中では  $v$ ) の曲線形を図-1 の (a), (b), (c) で示した。図-1 は、両対数グラフであり、右上の直線が SPURR 等のデータに対応する 3/2 乗則線である。図中の 3/2 乗則線は(7)式の  $\rho_0, w_0$  に

$$\rho_0 = 3507 \text{ (本/acre)}, \quad w_0 = 0.784 \text{ (ft}^3\text{)}$$

を用いて、次式より求めた。

$$w_0^\beta = 0.784 \times 3507^\beta = 3.683 \times 10^5 = k \quad (19)$$

$$\beta = 1.6$$

ここに  $\beta, k$  は、前回最小二乗法によって決めた値であり (林, 1985),  $\rho_0, w_0$  の値は前回の  $\rho(t)$  の初期値 ( $t_0 = 19$  (年)) に対応させたものである。もちろん、上の(19)式はこれまで指摘されているように (安藤, 1982), 3/2 乗則線上のデータに対してよく一致している。図中の (a), (b), (c) の曲線は、明らかに  $\delta$  の存在によって頭打ち傾向を示す。つまり(18)式は、 $w$  が目標値  $W_c$  の値によってはそれに限界があることを示しており、最多密度状態で生長する群落内の個体の、一つの全生長過程を (最終的な生長関係までを含めて) 表しているものと考えられる<sup>注4)</sup>。

### 3. 3/2乗則線上の $w \sim t$ 曲線

前節より、3/2 乗則線が、 $\rho$ -logistic 式(3)式で

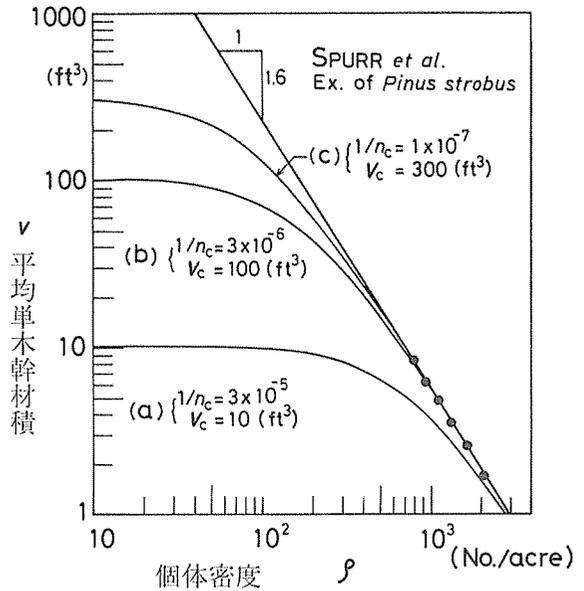


図-1 拡張3/2乗則

3/2th power expanding law (original data in fig. 1-fig. 8 is from SPURR et al. (1957))

$W = \text{const.}$  とした解のうち、 $W = \infty$  とすることによって求められることが示された。ここでは、(3)式によって得られた3/2乗則線より、(1)式を用いることによって3/2乗則線上の  $w \sim t$  曲線が求められることを示す。

そこで、(1)式の  $\rho_0$  を  $\rho_0$  とし、時間に関する初期値  $t_0$  を導入して(17)式に代入すれば次式を得る。

$$w = w_0 e^{\beta(t-t_0)/\alpha} = w_0 e^\tau \quad (20)$$

$$\tau = \beta(t-t_0)/\alpha$$

上式がデータに合っているかどうかは、既に求められている定数を用いることによって、(20)式を理論式の形で示し、その式と  $w \sim t$  データとを比較すればよい。前回 (林, 1985) 示したように、枯死率  $\mu$  の減少期は  $t_0 = 19$  (年) から始まるとみられるが、この減少期に対して求められた定数  $m, \alpha$  は

$$m = 2/3, \quad 1/\alpha = 0.145$$

であった。一方、先の3/2乗則線のあてはめより、 $\beta, w_0$  として

$$\beta = 1.6, \quad w_0 = 0.784 \text{ (ft}^3\text{)}$$

が決定されている。したがって、これまでの考察により

予測される  $w \sim t$  式として次式を得る。

$$w = 0.784 e^{\tau} \quad (21)$$

$$\tau = 1.6 \times 0.145 (t - 19)^{2/3} = 0.232 (t - 19)^{2/3}$$

なお、先に示した(20)式と類示した式が穂積(1980)によって示されているが、 $\beta$ の解釈は特に述べられていない。

上の(21)式と各  $w, t$  データとを片対数グラフで比較したものが図-2 (図中  $w$  は  $v$  で表示) である。図中の直線が(21)式であり、同図より黒マルのデータと(21)式とは、3/2乗則線にまだ到達していないとみられる最初(図中の一番左側)のデータを除けば、ほぼ合っているとみることができる。一方、(21)式の係数は  $w \sim t$  関係とは全く別々に決められているので、(21)式は黒マルのデータとは別に与えられた式である。したがって、このような(21)式とデータとがほぼ合っているとみなせることから、(21)式又は(20)式は3/2乗則線上での  $w \sim t$  関係に対して成立しているとみなすことができる。

ところで、(20)式の  $\tau$  の関係式を含めて調べるのに上のような調べ方では、 $m=2/3$  を用いているので、最も重要な  $\tau$  の検討をしたことにはならないという考え方もあろう。そこで、既報(林, 1985)と同じように、(20)式の数値をとって  $\tau$  を直接調べてみる。すなわち、

$$\tau = \ln(w/w_0) = \beta(t - t_0)^m / \alpha \quad (22)$$

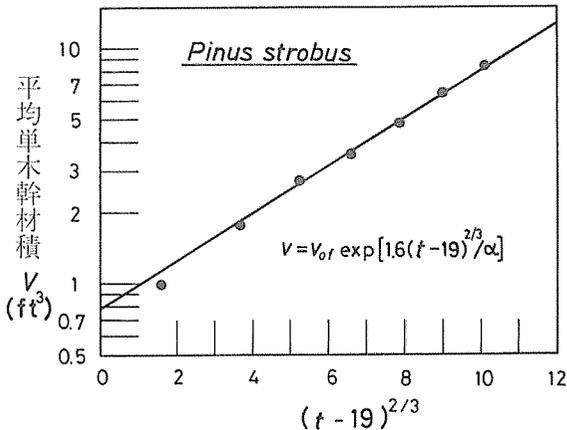


図-2 最多密度曲線上の平均単木幹材積  $v$  と  $(t-t_0)^{2/3}$  の関係

Relationship of mean stem-volume ( $v$ ) per tree and  $(t-t_0)^{2/3}$

$$v_0 = 0.784 \text{ (ft}^3\text{)}, 1/\alpha = 0.145$$

となる。ここで、 $t_0, w_0$  に先の値を用いて、 $\tau$  と  $t$  の関係値をプロットしたものが図-3の黒マルである。また、図中の直線は先に示した定数を用いた式によって算出されたものである。両者は、図-2と同様3/2乗則線にまだ到達していないとみられる最初の点(図中の左側の点)を除けば、ほぼ一致しているとみなすことができる。

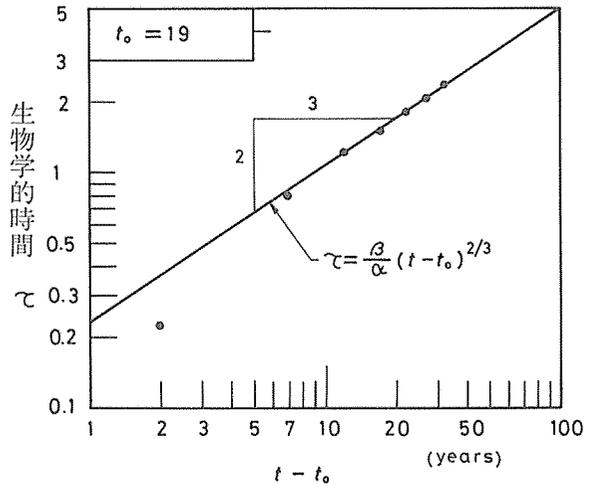


図-3 生物学的時間  $\tau$  と  $(t-t_0)$  との関係  
Relationship of biological time ( $\tau$ ) and years  $(t-t_0)$

なお、刀根(1981)の非線形最小二乗法によって、 $t=21$ (年)目のデータを除いた他の  $w \sim t$  データより直接  $m, \beta/\alpha, w_0$  を逆算すれば、

$$m = 0.68, \beta/\alpha = 0.227, w_0 = 0.754$$

を得る。これらは既に決定された値に近く、逆算結果も、(21)式の係数の信頼性を裏付けている。したがって、 $w \sim t$  関係とは別のより信頼できる関係式から得られた(22)式の係数は、図-2にみられるように実用に用いることができるものと考えられる。以上で  $\tau$  の関数形を含めて(20)式は、データのある範囲では、ほぼ確認されたと言えることができる。

さて、ここで検討した(20)式は、3/2乗則線(17)式に(1)式を代入することによって求められたが、もとの  $\rho$ -logistic 生長式の解は前節の(9)式又は(10)式であった。この式は、前節でも述べたように最多密度状態で生長する群落内の個体の一つの全生長過程を予測しているものと考えられるが、この(9)式に(1)式を代入した解も全期間での一つの  $w \sim t$  関係式を表しているものとみられる。

そこで、(9)式の  $\lambda_c$  を  $\lambda_c = \beta$  とした式に(1)式を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} w &= W_c / \{1 + (n_c - 1) e^{-\tau}\} \\ \tau &= \beta t^m / \alpha, \quad n_c = W_c / w_{0f} \end{aligned} \quad (23)$$

上式は、次のようにも書ける。

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{W_c} + \left( \frac{1}{w_{0f}} - \frac{1}{W_c} \right) e^{-\tau} \quad (24)$$

上の二つの式は、 $\tau = \infty$  で、 $w = W_c$  に達する式であり、適当な  $W_c$  が与えられれば、 $w \sim t$  関係を  $t = \infty$  まで予測することが可能である。また、上の(23)式と(24)式は  $\lambda$  型 logistic 式の解に一致している。なお、生物学的時間  $\tau$  のべき係数  $m$  が最後まで一定であるかどうかは、明らかではないが、もし変わるとしても、 $m$  が一定となる生長期ごとに  $\tau$  を設定すれば(23)式はそのまま成立することになる。

篠崎・吉良 (1956) は、 $\lambda W$  型 logistic 式が生長式として妥当であるとしているが、先の(23)式は、 $\lambda$  型 logistic 式における一つの理論解に一致している。したがって、(23)式を求めるときに前提とした(9)、(10)式あるいは(18)式に示される全生長過程に対する3/2乗則線は一つの理論解であるということができる。

### III 植栽当初からの $v \sim \rho$ 曲線

この章では、既報 (林, 1985) で考察出来なかった  $v \sim \rho$  曲線の全過程を考察する。ここに、 $v$  は平均単木幹材積である。また、植栽当初からの自然枯死条件下における個体密度の減少経過部分についても検討し、それに基づき密度効果についても言及する。

しかしその前に、前章で明らかにした全生長過程を表す3/2乗則線を用いて、既報 (林, 1985) の一般化3/2乗則を生長の最終段階まで表す式に拡張する。このような拡張は、現段階では必ずしも実用的であるとは言えないが、植物群落の生長過程を最終段階まで検討する上で重要であると思われる。

#### 1. 自然枯死条件下における $v \sim \rho$ 曲線

ここでは、生長の最終状態までを含めて表す式を求めるために  $\rho$ -logistic 方程式の  $W(\rho)$  に(18)式を用いて、既報 (林, 1985) と同じことを行う。用いる式としては、既報で示した次式

$$\frac{1}{w} = \rho^{\lambda_0} \left\{ -\lambda_0 \int \frac{\rho^{-(\lambda_0+1)}}{W(\rho)} d\rho + c \right\} \quad (25)$$

を出発点とする。計算の便を考慮して上式の  $\rho$  を

$$\rho_* = \rho / \rho_0$$

で無次元化すれば

$$\frac{1}{w} = \rho_*^{\lambda_0} \left\{ -\lambda_0 \int \frac{\rho_*^{-(\lambda_0+1)}}{W(\rho_*)} d\rho_* + c \right\} \quad (26)$$

と表される。 $W(\rho_*)$  は、(18)式の  $w$ ,  $w_{0f}$  を目標値の  $W$ ,  $W_0$  で置き換えることによって

$$\begin{aligned} W(\rho_*) &= W_0(\rho_*^{\lambda_0} + \delta)^{-1} \\ \delta &= 1/(n_c - 1), \quad n_c = W_c / W_0 \end{aligned} \quad (27)$$

となる。上の(27)式を(26)式に代入した一般解は

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{W_0} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \beta} \rho_*^{\lambda_0} + \delta \right) + c \rho_*^{\lambda_0}$$

であり、初期条件を

$$\rho_* = 1 (t = t_0) \quad \text{のとき} \quad w = w_0$$

とすれば、任意定数  $c$  は

$$c = \frac{1}{w_0} - \frac{a + \delta}{W_0}, \quad a = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \beta}$$

で与えられる。したがって、この場合の生長式として次式を得る。

$$w_* (E + D \rho_*^{\lambda_0} + \rho_*^{\lambda_0}) = K_0 \quad (28)$$

ただし

$$E = \frac{\delta}{n - (a + \delta)}, \quad D = \frac{a}{n - (a + \delta)}, \quad K_0 = \frac{n}{n - (a + \delta)}$$

$$n = W_0 / w_0, \quad w_* = w / w_0, \quad a = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \beta}, \quad \delta = W_0 / W_c$$

上式は、 $\delta$  が

$$\delta \rightarrow 0$$

とできる場合には、既報 (林, 1985) の一般化3/2乗則線に一致する。一方(28)式は、 $\rho_*$  が減少するに従い、左辺のカッコの中の第3項が他の項と比べて小さくなり、 $\rho_*$  のある値以下になると、前章の拡張3/2乗則線に一致し、 $w \sim \rho$  関係は、前章の図-1のような生長の上限を生ずるものと考えられる。 $\delta$  の値は、今のところ決められないが、他の値は、既報の値をそのまま用いることができる。

2.  $v \sim \rho$  曲線の全過程 (拡張自然枯死線)

既報 (林, 1985) では, 出発点とした  $v_0, \rho_0$  の値は植栽当初より, 10年程度経過した時点での値であり, 既に自然間引きが始まったと考えられる生長段階での適当な  $\rho, v$  の値を, その初期値として用いたものであった。ここでは, 植栽当初からその林分が消滅するまでの  $v \sim \rho$  曲線の全経過を明らかにしたい。

さて,  $\rho$ -logistic 生長方程式 ( $\rho$ -1式) を解くために, 前節では, (27)式を仮定した。ところで, この  $W(\rho)$  の式形は, 前章で述べた  $W = \text{一定}$  とした場合の  $\rho$ -1式の実用解で  $w \rightarrow W$  とした式に相当する。したがって, 次のような関数が成立する。

$W = \text{一定}$  としたときの  $\rho$ -1式の解  $\rightarrow$  3/2乗則線

$W$  に3/2乗則線を仮定したときの  $\rho$ -1式の解  $\rightarrow$  一般化3/2乗則線

このように考えると, 全  $w \rightarrow \rho$  曲線 (拡張自然枯死線) に対しても

$W$  に一般化3/2乗則線を仮定したときの  $\rho$ -1式の解  $\rightarrow$  全  $w \sim \rho$  曲線 (拡張自然枯死線)

と考えることができる。こうして, 前過程に対する  $w \sim \rho$  曲線を求めるために, 既報の  $\rho$ -1式の解, あるいはより一般的には前節の  $\rho$ -1式の解をここでの目標対象  $W(\rho)$  の生長式として期待することができる。

こうすれば, 目標値  $W(\rho_*)$  は次式で与えられる。

$$W(\rho_*) = K_0 W_{00} (E + D\rho_*^\beta + b\rho_*^{\lambda_0})^{-1} \quad (29)$$

ここに,  $W_{00}$  は目標値の初期値であり,  $E, D, K_0$  は (28)式の条件式と同一である。残りの  $n$  はこの場合

$$n = W_0 / W_{00}$$

となる。又この場合の生長係数を  $\lambda_0 (> \lambda_0 > \beta)$  とすれば, (26)式は

$$\frac{1}{w} = \rho_*^{\lambda_0} \left[ -\lambda_0 \int \frac{\rho_*^{-\lambda_0+1}}{W(\rho_*)} d\rho_* + c \right] \quad (26')$$

と表される。(29)式を(26')式に代入すれば一般解は

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{K_0 W_{00}} (E + a_0 D \rho_*^\beta + b \rho_*^{\lambda_0}) + c \rho_*^{\lambda_0}$$

$$a_0 = \lambda_0 / (\lambda_0 - \beta), \quad b = \lambda_0 / (\lambda_0 - \lambda_0)$$

となり, 初期条件を

$$\rho_* = 1 \quad \text{のとき} \quad w = w_0$$

とすれば, 任意定数  $c$  は

$$c = \frac{1}{w_0} \frac{E + a_0 D + b}{K_0 W_{00}}$$

で与えられる。以上より, 当初からの生長を表す式として次式を得る。

$$w_* [E + a_0 D \rho_*^\beta + b \rho_*^{\lambda_0} + n_0 k_0 - (E + a_0 D + b) \rho_*^{\lambda_0}] = n_0 K_0 \quad (30)$$

ここに,

$$E = \frac{\delta}{n - (a + \delta)}, \quad D = \frac{a}{n - (a + \delta)}, \quad K_0 = \frac{n}{n - (a + \delta)}$$

$$a_0 = \frac{\lambda_{00}}{\lambda_{00} - \beta}, \quad b = \frac{\lambda_{00}}{\lambda_{00} - \lambda_0}, \quad a = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \beta}$$

$$n_0 = \frac{W_{00}}{w_0}, \quad n = \frac{W_0}{W_{00}}, \quad w_* = w/w_0, \quad \rho_* = \rho/\rho_0$$

$$\lambda_{00} > \lambda_0 > \beta$$

である。

生長式として3/2乗則線までを対象とする解は, 上式で  $\delta = 0$  とすればよく, また  $\rho$  が減少していつてある値以下になれば, 上式左辺の大カッコの中の第4項, 第3項はゼロになり, 結局第2項のみが残ることになる。その場合,  $w, \rho$  を  $w \rightarrow w_f, \rho \rightarrow \rho_f$  で表せば, 3/2乗則線は(5)式の  $K_*$  を用いて次式で与えられる。

$$\frac{w_f}{w_0} \left( \frac{\rho_f}{\rho_0} \right)^\beta = n_0 K_0 / (a_0 D) = K_* \quad (31)$$

ここに,  $\rho_0, w_0(v_0)$  は SPURR のデータによる初期値であり, 後出の(33)式の値を用いる。したがって, 3/2乗則線の無次元定数  $K_*$  として次式を得る。

$$K_* = n n_0 / (a a_0) \quad (32)$$

3. ストローブマツによる検討

今回は, 穂積 (1980) が SPURR 等 (1957) のストローブマツのデータに補強したのもも含めて用いて(30)式 (拡張自然枯死線) の検討を行う。以後のあてはめに当っては, 個体の平均重量  $w$  を平均幹材積  $v$  に置き換えて行う。

植栽当初の  $\rho_0, v_0$  は, 穂積によれば表-1 のように

$$\rho_0 = 4840 \text{ (本/acre)}, \quad v_0 = 3.1 \times 10^{-4} \text{ (ft}^3) \quad (33)$$

で与えられている。表-1 には, 彼によって推定された

表-1 ストローブ マツの生長に関する特性量 (基礎データは SPURR ら (1957) による)  
 Characteristics of growth in Pinus strobus (Original data is from SPURR *et al.*  
 (1957))

$t$	$\rho$ (Ac)	$\rho$ (Ca)	Dev	$v$ (Ac)	$v$ (Ca) ( $\beta=1.6$ )	Dev
(years)	(No./ac)	(No./ac)	(%)	(ft <sup>3</sup> )	(ft <sup>3</sup> )	(%)
0	4840*	(4840)	—	3.1E-4*	(3.1E-4)	(0.0)
4	4800	4733	1.4	0.00223*	0.00223	-0.4
12	4265	4190	1.8	0.1829	0.1875	2.5
16	3682	3749	-1.8	0.4364	0.4153	-4.8
21	2786	2786	0.0	0.9835	1.021	3.9
26	2052	2063	0.5	1.752	1.824	4.1
31	1630	1640	0.6	2.695	2.663	-1.2
36	1353	1346	-0.5	3.571	3.595	0.7
41	1144	1123	-1.8	4.850	4.704	-3.0
46	925	951	2.8	6.399	6.611	3.3
51	815	813	-0.2	8.560	8.095	-5.4

注) ac: acre, Ac: Actual, Ca: Calculated, Dev: Deviation, \*: Estimated by HOZUMI,  
 $3.1E-4=3.1 \times 10^{-4}$

他のデータも示されている。

平均個体重  $w$  の推定式(30)式の係数のうち,  $\beta$ ,  $\lambda_0$  は既報 (林, 1985) の結果より,

$$\beta=1.6, \lambda_0=8.5 \quad (34)$$

を用いる。残りの係数は  $\lambda_{00}$ ,  $n_0$ ,  $n$  であるが, ここで, 3/2乗則線を(31)式で与えるとすると, 無次元定数  $K_*$  は(31)式の右辺としてデータから与えられることになる。そうすると,  $n$  は(32)式より

$$n = K_* a a_0 / n_0 \quad (35)$$

$$a_0 = \lambda_{00} / (\lambda_{00} - \beta), \quad a = \lambda_0 / (\lambda_0 - \beta)$$

で求められることになる。したがって, 最終段階での未知係数は  $\lambda_{00}$ ,  $n_0$  の二つになる。

そこで既報と同じように, 次の  $DW$

$$DW = (\text{計算値} - \text{実測値})^2 / \text{実測値}$$

に, 各データの重さに乗じてその和の最小値を求めた。各データの重さとしては, 両対数グラフ上での  $v-\rho$  データの距離にほぼ近い値を3乗したものをを用いた。こうして次のような各係数が求められた。

$$\lambda_{00}=240, \quad n_0=263, \quad n=7.12 \quad (36)$$

なお, 無次元定数  $K_*$  の値としては次の値を用いた<sup>注5)</sup>。

$$K_* = 1510 \quad (\rho_0=4840, v_0=3.1 \times 10^{-4})$$

以上のようにして得られた係数による計算結果を表-1と図-4中の縦の曲線で示した。その図と表からわかるように計算結果は, 良好である。念のため,  $\lambda_0$  も変えて計算してみたが,  $\lambda_0=8.5$  が最良であった。

図-4には他の  $v-\rho$  曲線も示されているが, これを描くには, 図-5のように各植栽時の  $v_0$  ( $=3.1 \times 10^{-4}$ ) を出発点として, 異なる植栽密度に対する  $v-\rho$  曲線を求めなければならない。例えば, ここに図-5中の曲線A (SPURRのデータによる  $v-\rho$  曲線に相当) の各係数が求められているとする。続いて曲線Bを描きたいが, その初期値 ( $\rho_{0B}$ ,  $v_{0B}$ ) に対する(30)式の各係数は求められていないとする<sup>注6)</sup>。ところで, 各  $v-\rho$  曲線が相似形を保っているとするれば, 曲線Bの係数については次のように考えることができる。

まず,  $\rho_{0B}$  に対応する3/2乗則線上の  $v$  を  $v_{0B}$  と書けば, 先の(31)式で,  $\beta=1.6$  とした次式

$$\frac{v_f}{v_0} \left( \frac{\rho_f}{\rho_0} \right)^{1.6} = K_*$$

より,  $v_{0B}$  は,  $\rho_f = \rho_{0B}$  として

$$\frac{v_{0B}}{v_0} = K_* \left( \frac{\rho_{0B}}{\rho_0} \right)^{-1.6} = K_{*B}, \quad v_{0B} = K_{*B} v_0$$

$$v_{0B} = v_{0A} = v_0$$

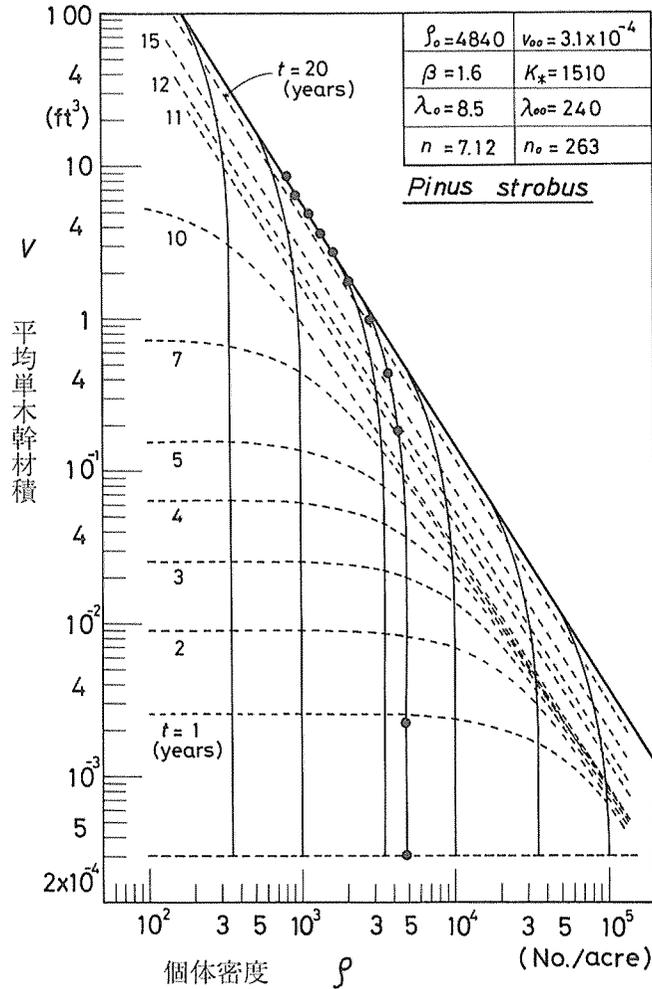


図-4  $v$ - $\rho$  曲線と C-D 効果図 (I)

Relationship of mean stem volume ( $v$ ) and stand density ( $\rho$ ), and diagram of C-D effect (I) under same growth pattern for each initial stand density

から求められる。今図-5 のように、A 曲線上の  $(\rho_A, v_A)$  点に対する 3/2 乗則線上の  $(\rho_A, v_{rA})$  点の  $v$  に関する比すなわち、 $v_{rA}/v_A$  が上の  $K_{*B}$  の値と同じであったとし、その点での  $n_0$  が既知であるとする。こうすれば、この  $n_0$  を用いて (35) 式より  $n$  が求められることになり、他の係数は曲線形を相似と考えているのでそのまま用いることができ B 曲線を求めることができる。したがって、ここで必要なことは、A 曲線上で  $K_*$  に対する  $n_0$ 、つまり

$$n_0 = f(K_*) \quad (37)$$

という関係式を明らかにすることである。この関係は次

のようにして求められる。

まず、ここで得られた係数を (30) 式に代入して得られるあてはめ曲線に基づいて、 $v$ - $\rho$  の値 (23 組) を拾い出し、 $\beta=1.6$ 、 $\lambda_0=8.5$ 、 $\lambda_{00}=240$  として  $v$  の小さい組から順番にこのデータへの (30) 式のあてはめを行った。こうして次々に、SPURR の  $\rho$ - $v$  曲線上での各出発点  $(v_A, \rho_A)$  に対する  $n$  と  $n_0$ 、 $K_*$  が求められた。次に、(37) 式のように  $n_0$  が  $K_*$  のみによって決定されたと考え、つまり、 $v_0, \rho_0$  が 3/2 乗則線からどの程度離れているかによって、 $n_0$  が決まると考えて、上であてはめた係数の値から  $n_0$  と  $K_*$  の関係を調べてみた。それによれば、

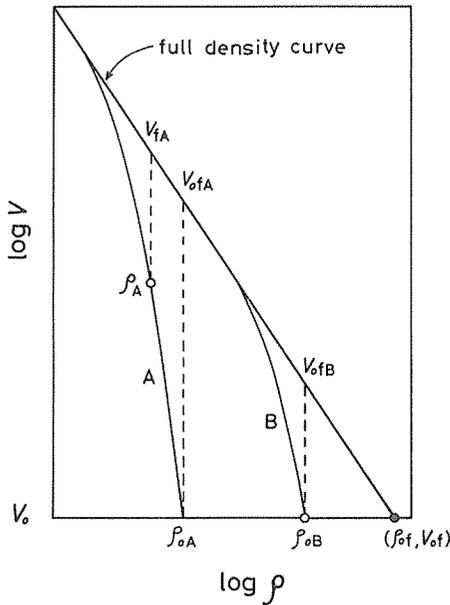


図-5 二つの  $v-\rho$  曲線と最多密度曲線との関係を示す模式図

Sketch showing the relation of full density curve and two  $v-\rho$  curve

$n_0$  と  $K_*$  の関係は、 $K_* < 7$  を除くと両対数グラフ上で直線関係を満足し、次式で表される。

$$n_0 = 0.2145 K_*^{0.971} \quad (K_* \geq 7) \quad (38)$$

この  $K_*$  を用いて、上のような手順で計算したものが、先の図-4 の 6 つの  $v-\rho$  曲線である。計算に当って、当初の  $v_0$  はすべて  $v_0 = 3.1 \times 10^{-4}$  (ft<sup>3</sup>) として  $\rho_0$  は

$$\rho_0 = 3.5 \times 10^2, 1 \times 10^3, 3.5 \times 10^3, 1 \times 10^4, 3.5 \times 10^4, 1 \times 10^5 \text{ (本/acre)}$$

の 6 つを植栽当初の個体密度とした。図上で右に来るほど、自然枯死の期間が短くなり、早くから自然間引の影響を受けることになる。

以上より、植栽時の個体密度が与えられれば、 $\rho$  の漸減に伴う幹材積の推定が可能であることが示されたが、このモデルに対する反省点としては、基本的に既報(林, 1985)と同じことが言える。異なる点は、既報より係数が増えている分だけ、あてはめが少し複雑となり、その結果、モデルの生物学的意義が薄れ、係数も単なるパラメータの感が強くなったことである。ところで、既報で得られた  $w$  の生長式が今回の植栽当初からの生長式に

対しては、そのまま目標値  $W$  になっているが、このことは、数学的に言えば、解の重ね合せという性質を利用していることになる。

4. 自然枯死線上での  $\rho-t$  曲線の近似

個体密度の減少経過についても既報(林, 1985)では、SPURR 等のデータを用いて、枯死率が一定して減少する段階、つまり彼等のデータの19年目以後の段階に対してその関係を調べた。今回は、そのデータに穂積(1980)が補足したデータを用いるが、後の節に必要な  $v-t$  関係式を得るために、単に第I章で示した既報の式をあてはめ、係数を決めるだけとする。

まず、植栽当初 ( $t_0=0$ ) の  $\rho_0$  を穂積の推定値より、

$$t_0=0 \text{ (年)}, \rho_0=4840 \text{ (本/acre)} \quad (39)$$

と仮定する。 $\rho(t)$  式としては、 $t \leq 19$  に対して既報の  $\rho(t)$  式を適用するのは十分ではないが、上で述べたようなことから既報と同じ減少式、すなわち第I章の(1)式

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t-t_0^m/\alpha} \quad (1')$$

を用いる。そして、この生長段階の  $m$  の値も後に示す C-D 効果の定性的関係を調べるための概算として

$$m=2/3$$

と仮定する。又、 $t=19$  年目の  $\rho$  として、既報で得られた値 ( $\rho_0=3507$ ) を採用する。

こうして、植栽後の 0~19年の 5 つのデータに対して上の(1')式を適用する。(1')式を適用するにあたっては、この期間を図-6 のように二つの段階(第I、第II段階)に分け、全体の誤差を最小にするような、第II段階との境界、すなわち次の段階の  $t_0, \rho_0$  を図上で決めることにした。こうして何回か試行を行って、第II段階の  $t_0$  と  $\rho_0, \alpha$  が次のように決定された。

第II段階:  $t_0=10$  (年),  $\rho_0=4645$  (本/acre)

$$\alpha_{II} = 15.4 \quad (40)$$

また、第I段階の  $\alpha$  として

$$\text{第I段階} \quad \alpha_I = 113 \quad (41)$$

が得られる。

結局この方法によれば、19年以後の段階(III)も合せると、SPURR 等のストローブマツの場合 I, II, III という三つの枯死段階に区分されることになる。表-1に、

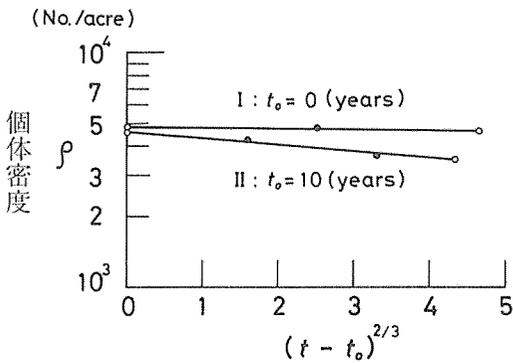


図-6 密度と  $(t - t_0)^{2/3}$  の関係  
Relationship of stand density ( $\rho$ ) and  $(t - t_0)^{2/3}$

こうして求めた計算結果を示すが、注意すべきことは、 $m=2/3$ とした(1')式は、19年以前では  $\rho \sim t$  曲線の全体に合わないことである<sup>註7)</sup>。後に示すC-D図で  $t=4$ 年でデータに合わないのはこのためである。自然枯死線上でのさらに精度のよい  $\rho \sim t$  曲線の検討は、次回に考察することにした。また、箕輪(1983)の結果と図-4を参照すれば、第II段階以後が、箕輪のいう“自己間引”の生長段階に対応していることは明らかであろう。

5.  $v \sim \rho$  曲線とC-D効果の関係

ここでは、吉良等(1953)によって明らかにされたC-D効果の影響を、森林のように自然枯死によって個体密度が減少する場合にあてはめてみる。データとしては先のSPURR等のものを用いるが、データも少なく、いくつかの仮定を必要とした。

さて、C-D効果を表現するという事は、この場合、先の  $v \sim \rho$  曲線上に時間  $t$  と生長量  $v$  との関係を示すことに他ならない。つまり、異なる初期密度  $\rho_0$  より出発した  $v \sim \rho$  曲線上で、同一の時間断面  $t$  の値より  $\rho$  を求め、その  $\rho$  より  $v$  を示せばよいのである。その曲線を同一の時間断面という意味で、ここでは  $v \sim \rho|_t$  図と呼ぶことにする。

そこで、 $t$  を適当に与えて前節の(1')式でI, II, III段階に対する  $\rho$  を求め、それに対する  $v$  を計算したものが図-4中の破線の  $v \sim \rho|_t$  図である。 $\rho \sim t$  関係の計算には、各生長段階ごとに与えられる三種類の各係数  $\alpha_I, \alpha_{II}, \alpha_{III}$  ( $\alpha_{III}$  は既報の  $\alpha$ ) を用いた。又、生長段階の区分は  $\rho_c / \rho_0$  の比によって各段階を区分した。ここに  $\rho_0, \rho_c$  はその生長段階の  $\rho$  の初期値と最終値である。

こうして得られた密度効果の  $v \sim \rho|_t$  曲線の水平部分から曲り始めにかけては、これまでのC-D効果図(例えば篠崎・吉良(1956)や内藤(1984)の上に凸という指摘と同じような形状を示して示る。しかし、曲った後の直線の勾配は3/2乗則線とほぼ平行であり、10年目より後では曲る部分はみられず、すべての  $\rho$  の範囲で3/2乗則線に平行である。さらに時間が経過すれば、 $v$  は3/2乗則線上を進んでいくことになる。ここに示した3/2乗則線に平行な密度効果の  $v \sim \rho|_t$  図は、ほぼ自然間引の始まる段階( $t_0$ )から生じており、それ以後では

$$v\rho^a = k(t)$$

のように書くことができる。上式はC-D効果式ではあるが、箕輪(1982)の仮定に一致している。

ところで、 $\rho$  の増加に対して  $v$  が3/2乗で低下するのは、 $\lambda_0, \lambda_{00}$  を  $\rho_0$  に無関係に一定とした(つまり、 $v \sim \rho$  曲線の立ち上りを相似とした)ためとも考えられ、この点をもう少し現実のC-D効果図(例えば安藤, 1982)に合わす必要がある。安藤(1982)の実測されたデータによるC-D図では、 $\rho$  が小さい間はほぼ水平であり、大きくなると右下り45°(つまり逆数式)の曲線になっているようにみえる。

そこで、もう一つの  $v \sim \rho|_t$  図(図-7)を、実測値に見られるような右下り45°の曲線にするために次のようにして作成した。

- ① SPURRのデータ( $\rho_0=4840$ 本/acre)による  $v \sim \rho(t)$  関係を時間  $t$  の基準にし、図-4の  $v \sim \rho$  曲線で以下の作業を行う。
- ② 自然間引の始まる  $t=10$ 年の  $v \sim \rho|_t$  線を  $\rho_0$  の大きいところで右下り45°と仮定。
- ③  $\rho_0=10^5$  に対する図-4の  $v \sim \rho$  曲線上で②との交点の  $v$  を決定。又、その点の  $\rho$  に一致するように  $\alpha_I$  を決定。 $t=10$ 年の  $\rho$  を生長段階IIの  $\rho_0$  とする。
- ④  $t=3$ 年の線を右下りの領域で右下り45°の直線と仮定。 $v \sim \rho$  曲線との交点より  $v$  を決定。
- ⑤  $t=13$ 年で  $\rho_0=10^5$  の  $v \sim \rho$  曲線が、最多密度曲線に接すると仮定。先の  $t=10$ 年の  $\rho$  とここでの  $\rho$  より  $\alpha_{II}$  を決定。
- ⑥ 上の③, ④, ⑤で得られる  $v, \rho$  より  $\rho_0=10^5$  に対する  $v \sim \rho$  曲線の係数を決定。 $\rho_0=3.5 \times 10^4$  に対しても同様にする。
- ⑦ 各係数と  $\rho_0$  との関係を図対数グラフ(後出の図-

- 8) にプロット。各係数ごとに直線関係を維持させる。
- ⑧  $\rho_0=10^3$  に対する  $\alpha_1, \alpha_{11}, \lambda_{00}, \lambda_0$  の決定。
- ⑨ 全体の  $v \sim \rho$  図の作成。

こうして出来上った  $v \sim \rho$  図が図-7である。結局この図では、10年まで右下り45°の  $v \sim \rho$  線を仮定しており、それ以後も両対数軸上で直線関係を仮定している。そして、このときの  $v \sim \rho$  直線の傾きは、10年以前より少し急になるように与えられている。一方、図-6の各曲線に対応する(30)式の各係数と  $\rho_0$  との関係を図8

に示すが、各係数はほぼ  $\rho_0$  のべき乗関係で与えられる。今回は、初期密度を大きく変えて植栽した場合のデータが得られなかったので、このような種々の仮定をせざるを得なかった。結局、図-7のようなC-D効果があるとするれば、この方法による各係数は、図-8のような関係を満足しなければならないということになる。

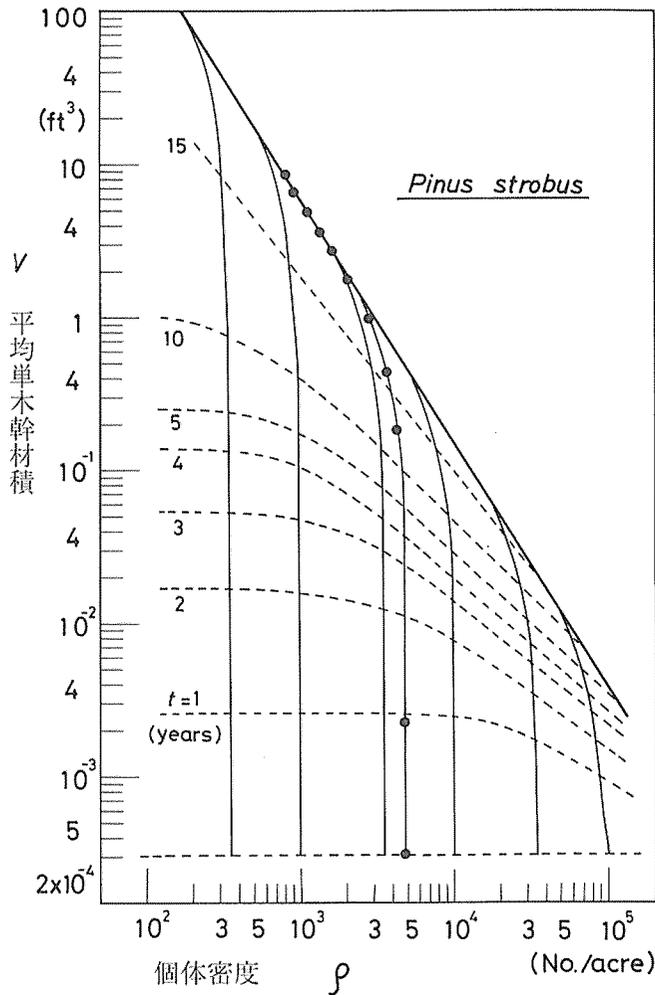


図-7  $v \sim \rho$  曲線と C-D 効果図 (II)

Relationship of mean stem volume ( $v$ ) and stand density ( $\rho$ ), and diagram of C-D effect (II) under the following assumption for large  $\rho$ :  $v \propto \rho$  ( $t \leq 10$ )

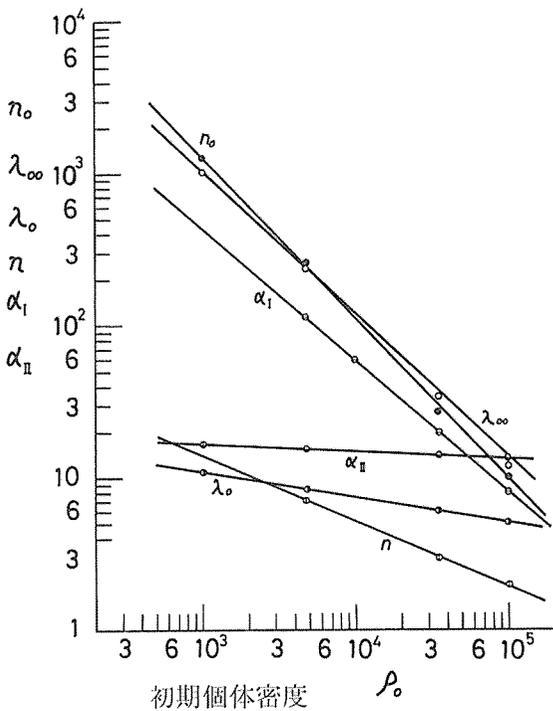


図-8 図-4 に対応する(22)式の各係数  
Relationship of each coefficients of equation (22)  
regarding fig. 4

IV 結 語

今回は、 $\rho$ -logistic 生長方程式で、 $W$ を一定とすることによって3/2乗則に関して考えられる一つの理論曲線、すなわち(10)式が得られた。その曲線は、最多密度状態で生長する群落の最終段階までを表しており、これによって3/2乗則線の全体像の一つの新しい解釈が得られたことになる。得られた(10)式で  $W \rightarrow \infty$  とした解より、3/2乗則線そのものを表す(7)式が求められた。こうすることによって、生長係数  $\lambda_0$  が3/2乗則線のベキ係数  $\beta$  に一致することが示され、3/2乗則線の  $\beta$  は生長係数を意味するベキ係数であると解釈することができる。こうして依田等によって提案され、森林においても現実のデータによって確かめられていた3/2乗則線が、個体密度の減少経過上から、一つの理論的な説明がされたことになる。

また、篠崎・吉良等(1956)のlogistic理論では、これまでlogistic生長方程式の $W$ の解釈がはっきりしていなかったように思われる。既報(林, 1985)と本報と

で、 $W$ が目標対象の生長式であるという性格をもつということができよう。

一方、データの関係で既報(林, 1985)では、 $v-\rho$ 曲線の全範囲に対して一般化3/2乗則を適用することができなかった。しかし、今回の結果を見れば、植栽当初からの $v-\rho$ 関係に対して既報の一般化3/2乗則をあてはめることは無理であった。今回のモデルは、既報のモデルをさらに一般化したものであり、その適用範囲は、 $v-\rho$ 曲線の全域を対象とすることができる。逆に言えば、既報で得られた一般化3/2乗則は、自然間引の開始以後の生長段階に対してのみ適用されるものであるといえるであろう。

既報の最後で少し述べた穂積(1980)の解は、今回の筆者のモデルと同一の全生長段階を対象としており、数値計算が煩雑であるという点を除けば、篠崎・吉良以来のロジスチック理論の展開ということからモデルの完成度は高いものとみられる。

今回の筆者の拡張自然枯死線(30)式は、各係数の生物学的意義付けということについては不明な点が残るが、係数の決定ということについてはそれほど困難な点は見られなかった。また、(30)式の適用範囲も今回の場合  $10^2 \sim 10^5$  (本/acre)程度まで可能であり、実用性はあるものと思われる。しかし、C-D効果を表わす $l$ 断面での $v-\rho$ 曲線( $v-\rho|_l$ 図)については、さらに今後の検討が必要である。また、自然枯死線上での $\rho-t$ 曲線は不十分であった。次回にはこの考察から始めたい。

本研究を行うにあたり、三重大学農学部武田明正助教授には、森林生態学の教えを受けた。また、現東京大学農学部(当時三重大学農学部)の箕輪光博助教授のお話には大変啓発された。ここに記して心からお礼を申し上げる次第である。

注

- 1) 既報(林, 1985)では、既報の(17)→(18)式の変換でまず単純logistic式が成立することを確かめている。そして、その変換と同一の変換を(19)→(20)式を行うことによって $\lambda$ 型logistic式を推定した。既報では、仮定を含めてこの辺の記述が不明確であった。また、式の演算には直接関係しないが、同報のこの節での箕輪(1982, 1983)の引用の仕方が適切でなかったことも付記する。
- 2) 3/2乗則線、最多密度曲線の定義は安藤(1982)、只木(1969)によった。

- 3) 以下、その式を(17)式の3/2乗則線と区別する必要がある場合には、(18)式を拡張3/2乗則線と呼ぶ。
- 4) もちろん、実用上は  $w\rho^a=k$  という従来の3/2乗則で十分である。また、 $w$  のこの傾向は  $\rho$ -logistic 式が  $w$  をベースにした生長式であることにもよっている。
- 5) つまり、3/2乗則線を

$$\left(\frac{v}{3.1 \times 10^{-4}}\right) \left(\frac{\rho}{4840}\right)^{1.6} = 1510$$

とした。

- 6) 当然のことながら、もし、それぞれの  $\rho_0$  に対するデータがあれば、それに対しこれまでと同様にして  $v \sim \rho$  曲線の係数を決定すればよいことは明らかであろう。
- 7) ところが、第I報の図-1に示したように、 $m > 1$  とすれば、この点はかなり解決する。しかし、次回に示すように  $m$  の値は  $t=10$  年より前と後では変化し、二つの  $m$  を決めなくてはならなくなるので、今回はその方法は割愛した。今回は、図-4、図-7のC-D曲線を概観したかっただけであるので、あえて第I報の  $m (=2/3)$  を用いた。

#### 引用文献

- 1) 安藤 貴：林分の密度管理. 126 pp, 農林出版, 東京, 1982
- 2) 林 拙郎：同種・同齢の植物個体群の生長則 (I) ロジスチック理論の拡張. 日林誌 67: 348~357, 1985
- 3) 穂積和夫：植物の相互作用. 124 pp, 共立出版, 東京, 1978
- 4) HOZUMI, K.: Ecological and mathematical considerations on selfthinning in even-aged pure stands (II) Growth analysis of selfthinning. Bot. Mag. Tokyo 93: 149~166, 1980
- 5) 吉良龍夫・穂積和夫・小川房人・上野善和：植栽密度問題の生態学的考察. 園芸学研究集録 6: 69~81, 1953
- 6) 箕輪光博：林木の生長に関する理論的考察 (I) log-MITSCHELTCH 式の理論. 日林誌 64: 461~467, 1982
- 7) 箕輪光博：林木の生長に関する理論的考察 (II) 自己間引モデルの検討. 日林誌 65: 135~142, 1983
- 8) 内藤健司：RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (III)  $w \sim N$  曲線. 日林誌 66: 454~461, 1984
- 9) SHINOZAKI, K. & KIRA, T.: Intraspecific competition among higher plants (VII) Logistic theory of the C-D effect. J. Inst. polytech., Osaka City Univ. Ser. D7: 35~72, 1956
- 10) SPURR, S. H., YOUNG, L. J., BARNS, B. V. & HUGHES, E. L.: Nine Successive thinnings in a Michigan white pine plantation. J. For. 55: 7~13, 1957
- 11) 只木良也：林分密度管理の基礎と応用. 125 pp, 日本林業技術協会, 東京, 1969
- 12) 刀根 薫：BASIC. 239 pp, 培風館, 東京, 1981
- 13) YODA, K., KIRA, T., OGAWA, H. & HOZUMI, K.: Self thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural condition (Intraspecific competition among higher plants XI). J. Biol. Osaka City Univ 14: 107~129, 1963