

積層複合材料の振動伝達特性最適化*

松本金矢*¹, 座古 勝*², 中西康雅*³

Optimization for Vibrational Response of Laminated Composites

Kin'ya MATSUMOTO*⁴, Masaru ZAKO and Yasumasa NAKANISHI*⁴ Faculty of Education, Mie University, 1515 Kamihama-cho, Tsu-shi, Mie, 514-8507 Japan

Dynamic characteristics as natural frequencies and modal damping ratios of laminated composite materials are influenced by the fiber orientations and the stacking sequence. Since the transfer functions of laminated composite structures are determined by these characteristics, we pay attention to the relations between the fiber orientations (including the stacking sequence) and transfer functions in order to minimize the vibrational response of structures. This paper presents an optimum design method of laminated composite structures to minimize the vibrational response. The optimization program evaluates the frequency response functions as an objective function of the genetic algorithm. With this evaluate function, the proposed method can minimize the vibrational response against the various vibrational forces in any frequency domains. As numerical examples, the proposed method is applied to the design of a rectangular plate and a cylindrical cantilever of CFRP.

Key Words: Vibration, Laminated Composites, Frequency Response Function, Genetic Algorithms, Optimization, Eigenvalue Analysis, Strain Energy Method

1. 緒 言

繊維強化複合材料は軽量、高剛性などの材料特性を有し、これらの特長を活かした材料設計が可能であることから多くの工業分野で応用されている。また複合材料を用いた構造設計においては、強度だけでなく振動特性についても厳しい要求がなされ、固有振動数、モード減衰比といった動特性を考慮した材料・構造設計が重要となる。特に宇宙空間では、空気抵抗による振動減衰が期待できないため、材料自体の振動減衰性能を最大限に発揮させる設計が必要となる。

また、積層複合材料は強い異方性を有し、各層の繊維配向角を選択することにより、力学的特性を変化させることができ、これまでにこの特長を利用した積層構成最適化問題について研究が行われてきた。^{1)~3)}特に振動特性の最適化問題においては、積層構成を設計変数とした固有振動数最大化問題に関する研究が数多くなされてきた。

一方、構造物に作用する振動外力の周波数領域は、

それらがおかれる環境により変化する。したがって、入力周波数帯域において共振を避け、その範囲で減衰を大きくするような設計が有効である。すなわち振動外力が作用する周波数領域をあらかじめ把握している場合、固有振動数やモード減衰比を制御し、振動応答を低減する方法が考えられる。しかしながら、材料の減衰特性まで考慮した最適設計手法に関する研究はほとんど行われていないのが現状である。遠藤ら⁴⁾は自由振動の減衰項が固有振動数とモード減衰比の積で表せることに着目し、各モードにおけるこれらの積の最小値を最大化する最適化手法を提案してはいるが、振動外力まで考慮したものはほとんどない。

そこで本研究では振動外力の周波数特性を考慮した積層複合材料構造物の、振動応答を最小化する設計手法を提案する。解析手法として、有限要素法固有値解析法と、ひずみエネルギー理論を用いて、固有振動数とモード減衰比を算出し、周波数応答関数を求める。その周波数応答関数の最大値を最小化、またはその下方の面積の最小化を図ることで、振動応答を最小化するものである。ここで各層の繊維配向角を最適化問題の設計変数にとると、目的関数が多峰性を示すため、最適化手法として離散的問題に対応できるGA(遺伝的アルゴリズム)を用いた。

* 原稿受付 2000年11月16日。

*¹ 正員, 三重大学教育学部(☎514-8507 津市上浜町1515)。*² 正員, 大阪大学大学院工学研究科(☎565-0871 吹田市山田丘2-1)。*³ 三重大学大学院。

E-mail: matumoto@edu.mie-u.ac.jp

2. 解析手法

2.1 直交異方性材料のモデル化 繊維強化複合材料は相対的にせん断剛性が低く、その値が固有振動数やモード減衰比に大きな影響を及ぼすため、板厚方向のせん断変形をモデル化する必要がある。そこで本研究では一次せん断変形理論を導入した三角形シェル要素を用いて、繊維強化複合材料積層板のモデル化を行う。

要素座標系における積層シェルの一般的な意味での応力-ひずみ関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_P \\ \sigma_B \\ \sigma_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_P & D_C & 0 \\ D_C & D_B & 0 \\ 0 & 0 & D_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_P \\ \epsilon_B \\ \epsilon_S \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

となる。σ_P, σ_B, σ_Sはそれぞれ合応力、合モーメント、合せん断応力ベクトルを表し、ε_P, ε_B, ε_Sはそれぞれ中央面ひずみ、曲率、せん断ひずみベクトルを表す。また、D_P, D_B, D_S, D_Cはそれぞれ面内、面外、せん断、カップリングに対応する応力-ひずみ関係マトリクスである。

減衰特性のモデル化には、Adamsらの提案するひずみエネルギー理論⁵⁾を適用して、振動減衰モデルを定式化する。

要素座標系における積層シェルの減衰能マトリクスΨは

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_P & \Psi_C & 0 \\ \Psi_C & \Psi_B & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_S \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

となる。Ψ_P, Ψ_B, Ψ_S, Ψ_Cはそれぞれ面内、面外、せん断、カップリングに対応する減衰能マトリクスである。

これより、第r次モードにおいて1周期に失われる振動エネルギーΔU_rは次式で定義される。

$$\Delta U_r = \frac{1}{2} \int_S \epsilon_r^T \Psi \epsilon_r dS \dots\dots\dots (3)$$

また、そのときの最大ひずみエネルギーU_rは次式のようになる。

$$U_r = \frac{1}{2} \int_S \epsilon_r^T D \epsilon_r dS \dots\dots\dots (4)$$

ここでSは要素の面積、Dは式(1)の応力-ひずみ関係マトリクスを表し、ε_rは第r次モードの無次元ひずみベクトルである。

したがって、第r次のモード減衰比ζ_rは、最大ひずみエネルギーU_r、消散ひずみエネルギーΔU_rより次式で定義される。

$$\zeta_r = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta U_r}{U_r} \dots\dots\dots (5)$$

2.2 積層構成による振動特性の変化 ここでは繊維強化複合材料構造物の振動問題において、繊維配向角が固有振動数とモード減衰比にどのような影響を与えるかを明らかにし、最適設計の必要性を考える。

著者らはこれまで加振実験を用いた逆問題固有値解析法による弾性・減衰パラメータ同定手法を提案し、その有効性を確認してきた。⁶⁾⁻⁸⁾ それをもとに数値例として、表1に示す一方向GFRP対称積層板を取りあげ、繊維配向角による固有振動数とモード減衰比の変化を求める。ここで、繊維断面のせん断弾性係数G_{TV}は面内等方性と仮定し、次式を用いて算出した。

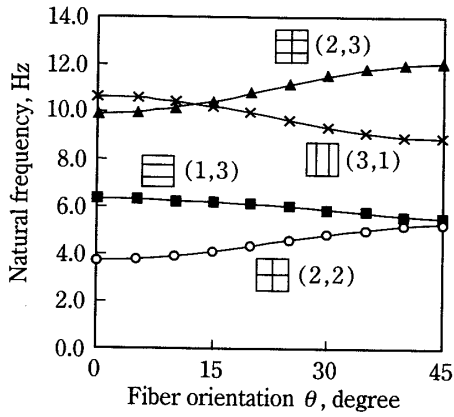
$$G_{TV} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TV})} \dots\dots\dots (6)$$

試験片は0.5×0.5 mの正方形板で、境界条件は完全自由とした。積層条件は4層アングルプライ対称積層板[θ/-θ]_Sとし、各層等厚で、総板厚0.6 mmである。繊維配向角θを5°刻みで0°から45°まで変化させた場合の、固有振動数とモード減衰比を求めた。その結果を図1に示す。

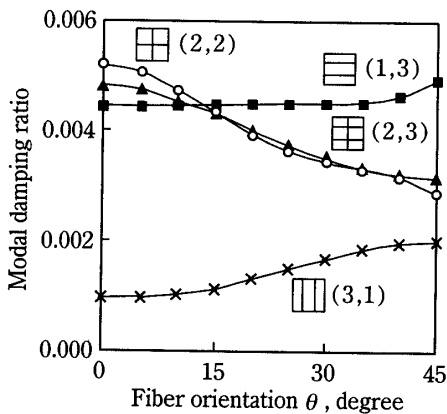
固有モード(2,2)に注目すれば、繊維配向角θが大きくなるに従い固有振動数は上昇するが、モード減衰比は逆に低下するという関係が得られる。また他の固有モードにおいても固有振動数、モード減衰比は相反する変化を示していることが分かる。以上のことから、単純に固有振動数とモード減衰比がともに高くなる積層構成を見つけることは困難であり、何らかの振動特性最適化手法が必要であることがわかる。

Table 1 Elastic and damping parameters of GFRP

Tensile moduli	E _L		34.53
	E _T	[GPa]	12.08
Shearing moduli	G _{LT} = G _{VL}		3.87
	G _{TV}	[GPa]	4.65
Poisson's ratios	ν _{LT}		0.3
	ν _{TV}		0.3
	ν _{VL}		0.105
Density	ρ	[kg/m ³]	1813.9
Damping capacities	ψ _L		0.0101
	ψ _T		0.0565
	ψ _{LT} = ψ _{TV} = ψ _{VL}		0.0665



(a) Relation between fiber orientation and natural frequency



(b) Relation between fiber orientation and modal damping ratio

Fig. 1 Dynamic characteristics of GFRP angle-ply square plate

2.3 振動伝達特性最適設計手法 ここでは周波数応答関数を評価関数として用いた振動特性最適化手法を提案する。2.1の手法より求められた各積層構成に対するモード減衰比から、点*i*を調和加振力*F_i*で加振するときの点*l*の応答振幅*X_l*を考えれば、1~*n*次までを考慮したコンプライアンス*G*は

$$G = \frac{X_l}{F_i} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{K_r(1 - \beta_r^2 + 2j\zeta_r\beta_r)} \dots\dots\dots (7)$$

となる。⁹⁾ ただし、加振力の角周波数を ω 、*r*次の固有角振動数を Ω_r としたとき

$$\beta_r = \frac{\omega}{\Omega_r} \dots\dots\dots (8)$$

である。また*K_r*は第*r*次の等価剛性であり、剛性マトリクス*K*を用いて、次式で表される。

$$K_r = \frac{\phi_r^T K \phi_r}{\phi_{ri} \phi_{rl}} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 ϕ_r を*r*次の固有モードとし、このうち加振点*i*と応答点*l*の成分をそれぞれ ϕ_{ri} 、 ϕ_{rl} とする。

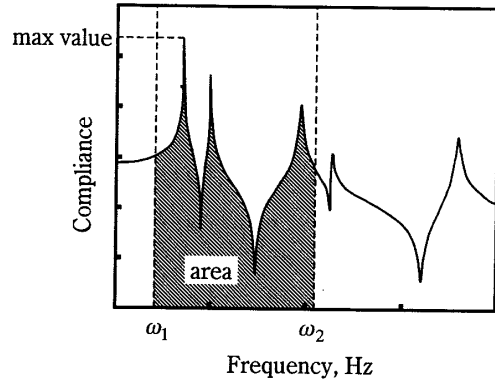


Fig. 2 Frequency response function for optimum design

本研究では、このコンプライアンスの最大値を最小化する最大値最小化規範と、その下方の面積を最小化する最小分散規範に基づく2つの手法を利用する。前者はコンプライアンスの最大値を最小化し、共振時の最大振幅を低減することを目的とするため、ここでは最大値最小化手法(①)とよぶ。後者は、不規則な励振を受ける場合など、加振入力幅広い周波数成分を有する場合に対応し、振動系に伝達される振動エネルギーを最小にするという考えに基づき、共振曲線の下方の面積を最小化することを目的とするため、面積最小化手法(②)とよぶこととする。また両手法とも図2に示すように特定の周波数領域に限れば、その領域で振幅を最小化し、共振を避けることができる。すなわち、これらの2つの手法を構造物がおかれる振動外力の周波数特性に応じて使い分けることで、積層複合材料構造物の振動環境に応じた最適化設計が可能となる。

したがって、*N*層の積層複合材料を考えれば、本研究の組合せ最適化問題は、各ラミナの繊維配向角 θ_k ($-90^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ, 1 \leq k \leq N$)を設計変数として、以下のように定式化される。

① 最大値最小化手法

$$\begin{aligned} &\text{Find } \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots, \theta_N] \\ &\text{Minimize } \text{Max}(G(\omega, \theta_k)) \\ &\text{Subject to } -90^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ &\qquad\qquad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (\omega_1 \geq 0) \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

② 面積最小化手法

$$\begin{aligned} &\text{Find } \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots, \theta_N] \\ &\text{Minimize } \int_{\omega_2}^{\omega_1} G(\omega, \theta_k) d\omega \\ &\text{Subject to } -90^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ &\qquad\qquad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (\omega_1 \geq 0) \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

本研究では、角周波数 ω の分解能は 1rad/s 、すなわち $1/2\pi\text{Hz}$ とした。

本最適化問題においては、積層構成により固有振動数やモード減衰比だけでなく固有モードも変化するため、目的関数であるコンプライアンスの最大値は不連続となる。したがって、目的関数の勾配を利用して最適解を探索する数値計画法の適用は困難であり、目的関数値のみを用いて最適解を探索するGAの手法が有効であると考えられる。この場合設計変数を各層の繊維配向角とするため、解くべき問題は組合せ最適化問題となる。そこで評価関数を周波数応答関数とするエリート保存戦略を用いた単純GAを適用した。

3. 最適設計例

3.1 CFRP対称積層長方形板の最適設計 振動伝達特性最適化の解析例として、16層対称積層CFRP長方形板を取りあげる。試験片は $0.25 \times 0.5\text{m}$ の長方形板を用い、板厚は各層等厚で、総板厚 2.4mm である。解析に用いたCFRPの材料定数を表2に示す。また本最適設計手法では、任意の位置を加振、応答点として選択可能であるが、ここではともに長方形板の同一頂点とした場合を取りあげる。境界条件は完全自由とし、振動問題で重要となる低次の固有振動応答を低減するため、 $0\sim 160\text{Hz}$ の周波数領域に対して、最大値最小化手法、面積最小化手法を適用した。最適化に用いたGAパラメータを表3に示す。設計変数である繊維配

Table 2 Elastic and damping parameters of CFRP

Tensile moduli	E_L	200
	E_T [GPa]	10.0
Shearing moduli	$G_{LT} = G_{VL}$	5.00
	G_{TV} [GPa]	3.85
Poisson's ratios	$\nu_{LT} = \nu_{TV}$	0.3
	ν_{VL}	0.015
Density	ρ [kg/m ³]	1555.0
Damping capacities	ψ_L	0.0045
	ψ_T	0.0400
	$\psi_{LT} = \psi_{VL}$	0.0650
	ψ_{TV}	0.0750

Table 3 GA parameters for optimization of CFRP plate

Generation size	200
Population size	100
Crossover rate	0.5
Mutation rate	0.03

向角は 5° 刻みとする。

本手法により得られた最適積層構成を表4に示す。またそれぞれの周波数応答関数を図3, 4に示す。比較対象として、積層構成の16層アングルプライ対称積層板 $[(45/-45)_4]_S$ のコンプライアンスを用いる。これより両手法とも、破線で示される16層アングルプライ対称積層板より振動応答が低減されていることが確認できる。これは振幅が大きくなりがちな1次の固有モードの節が応答点に近づくことで振動応答が低減されたと考えられる。また、図3の最大値最小化手法においては対象領域内に多数の固有モードが存在するものの、全てのコンプライアンスのピーク値をほぼ等

Table 4 Optimized stacking sequence of CFRP plate

① Minimize the max value of the compliance	
0-160 Hz	$[25/30/30/30/30/15/15/10]_S$
40-80 Hz	$[40/35/-55/35/-60/-55/-35/50]_S$
② Minimize the area under the compliance	
0-160 Hz	$[35/35/35/30/-35/-35/30/-35]_S$
40-80 Hz	$[45/-60/50/50/-55/40/75/0]_S$

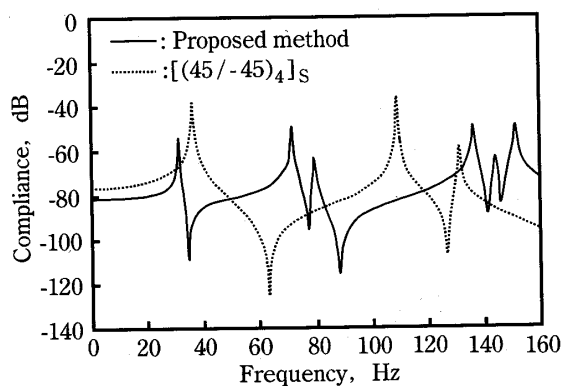


Fig. 3 Optimized compliance to minimize the max value of CFRP plate (0-160 [Hz])

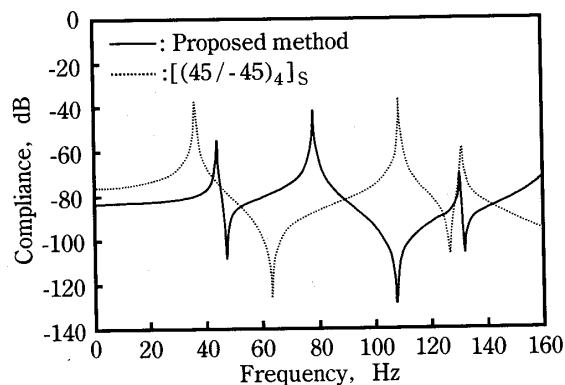


Fig. 4 Optimized compliance to minimize the under area of CFRP plate (0-160 [Hz])

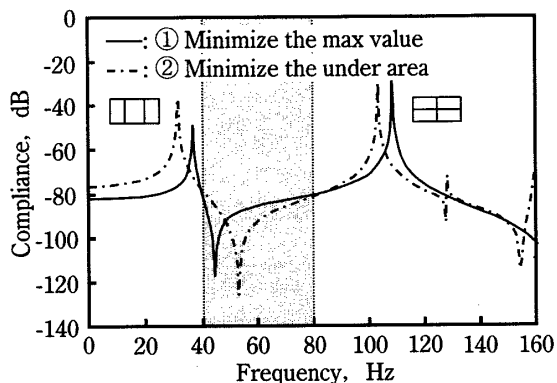


Fig. 5 Optimized compliance of CFRP plate (40-80 [Hz])

しい高さとするこゝで、対象周波数領域全体としての振動応答を低減していることがわかる。すなわち、各層とも10°から30°という同方向の繊維配向角を選択することで、固有モードの節が応答点の近くに集まることにより、全体としての振動応答が低減されたと考えられる。

次に特定の周波数領域に対して振動特性最適化を行った。図3, 4をみると、40 Hz~80 Hzの範囲に低次の固有振動が存在しているため、この周波数領域に振動外力が分布していると仮定して本最適化手法を適用した。得られた最適積層構成を表4に、コンプライアンスを図5に示す。

これより両手法による結果とも、1次の固有振動数は40 Hz以下、2次の固有振動数は80 Hz以上の対象周波数領域外に移動することにより、振動応答が低減されていることが確認できる。図5に示したように、1次モードは曲げ変形、2次モードはねじれ変形を示すため、1次では曲げモーメント、2次ではせん断力が支配的となる。そこで表5からわかるように、各層±45°と±60°付近の繊維配向角を選択し、せん断剛性が増加することで、2次の固有振動数は大きくなる。同時に曲げ剛性は小さくなり、1次の固有振動数は低下し、対象周波数領域外に移動したと考えられる。また、最大値最小化手法においては対象周波数領域の最大値が両端でほぼ等しくなっており、最大値最小化が実現されている。

3.2 円筒片持りの最適設計 繊維強化複合材料を用いて製作されることの多い円筒構造物に対して、振動特性最適化を行った。解析モデルはCFRP8層対称積層で、図6に示すように片端部を完全拘束し、自由端の上端を加振点、下端を応答点にとり、円周方向に12分割、軸方向に10分割とする。板厚は各層等厚で、総板厚1.2 mmとした。各パラメータは前述の長

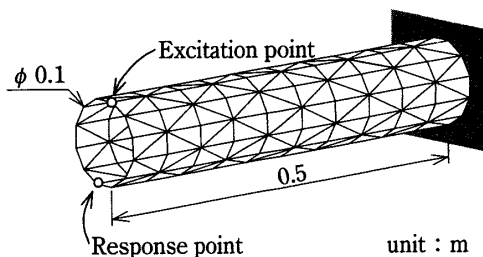


Fig. 6 Finite element model of CFRP cylindrical cantilever

Table 5 Optimized stacking sequence of CFRP cantilever

① Minimize the max value of the compliance	
0-500 Hz	[65/-35/60/50] _s
200-400 Hz	[-55/50/50/50] _s
② Minimize the area under the compliance	
0-500 Hz	[65/50/50/-30] _s
200-400 Hz	[-50/50/55/55] _s

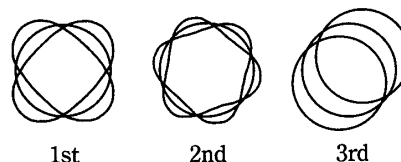


Fig. 7 Natural mode shape of cross section of CFRP cantilever

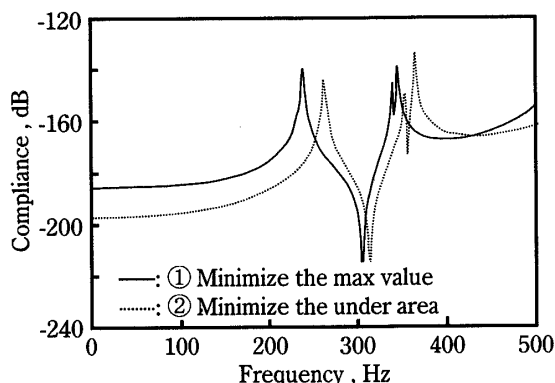


Fig. 8 Optimized frequency response function of CFRP cantilever (0-500 [Hz])

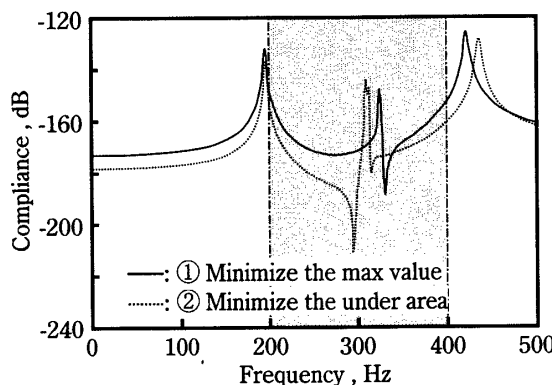


Fig. 9 Optimized frequency response function of CFRP cantilever (200-400 [Hz])

方形板と同様, 表 2, 3 の値を用いた. この円筒モデルに対して, 0~500 Hz, および 200~400 Hz の周波数領域を対象に最適化を行った. 図 7 に固有モードを示す.

得られた最適積層構成を表 5 に, コンプライアンスを図 8, 9 に示す.

まず, 図 8 に示す 0~500 Hz の範囲に対する最適化結果について考察する. 最大値最小化手法においては, 3.2 と同様にコンプライアンスのピークの高さが等しくなるような積層構成を選択することで振動応答を低減していると考えられる. 次に図 9 の 200~400 Hz の範囲の最適化結果に注目すれば, 1 次と 3 次の固有振動モードは対象周波数領域からはずれ, 2 次モードは対象範囲に残るものの振動応答は低減されている.

以上のことから, 形状や拘束条件, 加振点や応答点の位置に関わらず, 本手法が積層複合材料の最適設計に有効であることが明らかとなった.

4. 結 論

繊維強化複合材料の振動応答を低減する最適設計手法として, 周波数応答関数を評価関数とした GA による最適化プログラムを開発した. そして本手法を積層複合材料長方形板および円筒片持ばりに適用した. これにより, 繊維強化積層複合材料の力学的特性を活かし,

振動外力の周波数特性を考慮した最適設計が可能であることが明らかとなった.

文 献

- (1) 轟章・石川哲也, GA を用いた複合材料の積層構成最適化における応答局面の実験計画法, 機論, 66-645, A (2000), 978-985.
- (2) 亀山正樹・古田成毅・福永久雄・関根英樹, 近似法に基づく複合材構造の効率的振動特性最適化, 機論, 66-649, C (2000), 2912-2918.
- (3) 成田吉弘・新田敏則, 積層偏平シェルの基本振動数最大化と解の近似による影響について, 機論, 65-634, C (1999), 2161-2167.
- (4) 遠藤満・西垣勉・上杉貴久, FRP 積層円筒殻の減衰も考慮した振動特性評価, 機論, 66-647, C (2000), 2143-2150.
- (5) Lin, D. X., Ni, R. G. and Adams, R. D., Prediction and Measurement of the Vibrational Damping Parameters of Carbon and Glass Fibre-Reinforced Plastic Plates, *J. Compos. Mater.*, 18 (1984), 133-152.
- (6) 松本金矢・座古勝・古野雅美, 有限要素法固有値解析を利用した異種積層複合材料の異方性パラメータ同定法, 機論, 62-596, C (1996), 1341-1346.
- (7) 松本金矢・座古勝・古野雅美・藤田知正, ハニカムサンドウィッチ板の等価弾性パラメータ同定逆問題, 機論, 63-611, C (1997), 2256-2261.
- (8) 松本金矢・細川健治・座古勝・小林博, 積層複合材料の減衰パラメータ同定法, 機論, 65-636, C (1999), 3129-3134.
- (9) 長松昭男, モード解析(1985), 培風館