

カップリング特性を考慮した CFRP ゴルフクラブシャフト の振動解析*

松本金矢^{*1}, 座古 勝^{*2}, 松本紀生^{*3}

Vibration Analysis of CFRP Golf Club Shafts Considering the Coupling Effect

Kin'ya MATSUMOTO^{*4}, Masaru ZAKO and Norio MATSUMOTO

^{*4}Mie University, Fac. of Education, Kamihama-cho 1515, Tsu, Mie, 514-8507 Japan

An FEM eigenvalue analysis program for such sheet winding products as CFRP golf club shafts is developed. A new cylindrical beam element is formulated considering the coupling effect between tension and torsion for anisotropic materials. In order to verify the coupling effect of the presented method, composite cylindrical cantilevers are analyzed. And the non dimensional torsion by the axial tension of the beam element model is compared with a shell element model. And the influence of coupling effect on the natural frequencies of CFRP golf club shafts is evaluated for various fiber angles by eigenvalue analyses.

Key Words: Vibration, Finite Element Method, Eigenvalue Analysis, Cylindrical Beam, Coupling Effect, Laminated Composite, Golf Club Shaft

1. はじめに

FRPに代表される繊維強化複合材料は、繊維や樹脂の種類、繊維含有率、板厚、繊維配向角度等の多くの設計変数を有するため、高い機能性を満たす設計が可能な材料である。また、金属などと比較しても、軽量で高い強度を有し、立体的な成型が容易なことから、スポーツ用品など多くの製品に応用することが可能である。したがって、ゴルフクラブやテニスラケットに代表されるスポーツ用品として、その特性を活かしたより高性能な製品の設計、開発が望まれている。そのためには、設計変数を多く有する複合材料の力学的特性を正しく評価する手法が必要である。

以上のような背景から、これまで著者らは、CFRPゴルフクラブの有限要素法解析プログラムを開発してきた。⁽¹⁾⁽²⁾そこでは、フィラメントワインディング成形されたシャフトをビーム要素としてモデリングすることにより、要素のアスペクト比の影響による解析精度の低下を改善した。

本研究ではその内容を発展させ、繊維配向角度を考慮した引張-ねじりカップリング項を導入することにより、ゴルフクラブシャフトの製造で多くみられるシートワインディング製品の解析を可能とした。

本プログラムの有効性を検証するために、シェル要素による複合材料円筒構造物の解析結果との比較を行った。また、CFRP製ゴルフクラブシャフトをモデル化し固有値解析を行うことで、積層形態による振動特性の変化を明らかにした。

2. モデリング手法

2.1 ビーム要素によるシャフトのモデル化 ゴルフクラブシャフトのような内径や板厚がともに変化する円筒構造材をビーム要素によってモデリングする手法を開発することにより、解析モデルの自由度を低減し計算速度の向上とアスペクト比の影響による解析精度低下を改善した。ここでは、そのモデリング手法について説明する。

図1に示すように長さが l で内径 $d_r(z)$ 、板厚 $t_r(z)$ が線形変化する積層円筒構造物を、 i, j 2節点を有するビーム要素でモデル化する。まず内径および板厚の変化が長さに比べ小さく、変位が微小であるとし、伸び、曲げ、ねじり変位がそれぞれ独立して生じると仮定する。⁽³⁾ z 軸方向の伸び w 、 x 軸方向のたわみ u 、

* 原稿受付 1999年12月6日。

^{*1} 正員, 三重大学教育学部 (☎ 514-8507 津市上浜町1515)。

^{*2} 正員, 大阪大学大学院工学研究科 (☎ 565-0871 吹田市山田丘2-1)。

^{*3} 正員, (株)フジクラエンタープライズ (☎ 975-0027 原町市上北高平字植松268)。

E-mail: matumoto@edu.mie-u.ac.jp

y 軸方向のたわみ v および z 軸まわりのねじり s を、それぞれ次式のように z の多項式で近似する。

$$\left. \begin{aligned} w(z) &= a_1 + a_2 z \\ u(z) &= a_3 + a_4 z + a_5 z^2 + a_6 z^3 \\ v(z) &= a_7 + a_8 z + a_9 z^2 + a_{10} z^3 \\ s(z) &= a_{11} + a_{12} z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $a_1 \sim a_{12}$ は未定係数である。

固有値解析のための剛性、質量マトリックスは、伸び、曲げおよびねじりの各変位に対する剛性、質量マトリックスの組み合わせとして表すことができる。式(1)より、各変位に対応する剛性マトリックス・質量マトリックスを列挙すると、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_w &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} E_r \int A_r(z) \mathbf{B}_w^T \mathbf{B}_w dz \\ \mathbf{K}_u &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} E_r \int I_r(z) \mathbf{B}_u^T \mathbf{B}_u dz \\ \mathbf{K}_v &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} E_r \int I_r(z) \mathbf{B}_v^T \mathbf{B}_v dz \\ \mathbf{K}_s &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} G_r \int I_{pr}(z) \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_w &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} \rho_r \int A_r(z) \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dz \\ \mathbf{M}_u &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} \rho_r \int A_r(z) \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dz \\ \mathbf{M}_v &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} \rho_r \int A_r(z) \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v dz \\ \mathbf{M}_s &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} \rho_r \int I_{pr}(z) \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで、 \mathbf{B} は変位-ひずみ関係マトリックス、 \mathbf{N} は形状関数であり、添え字の w, u, v および s はそれぞれ z 軸方向の伸び、 x 軸方向の曲げ、 y 軸方向の曲げおよび z 軸まわりのねじりの成分をあらわす。また N_{TL} は、総積層数をあらわしており、 E_r, G_r および ρ_r は、それぞれ第 r 番目の層の z 軸方向の縦弾性係数、せん断弾性係数および密度である。 $t_r(z), d_r(z), A_r(z), I_r(z)$ および $I_{pr}(z)$ は各層の板厚、内径、断面積、断面二次モーメントおよび断面二次極モーメントをあらわし、これらは全て断面形状の線形変化に対応するために、座標 z の関数となっている。

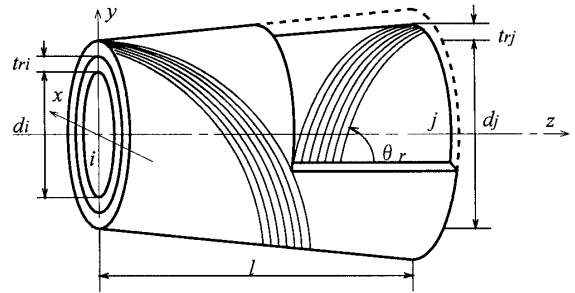


Fig.1 Co-ordinate system of laminated composite cylindrical beam elements

2・2 カップリング剛性のモデル化 繊維強化複合材料は繊維配向角度によって材料特性が変化し、特にシートワインディング製法による一方向強化材料製品においては、引張-ねじりカップリングを考慮に入れなければならない。図2に示すように円筒側面の稜方向と円筒方向に $\xi\eta$ 座標軸を、また材料主軸方向に LT 座標軸をとり、 ξ 軸に対する L 軸の傾きを繊維配向角度 θ とする。

異方性材料の材料主軸方向の応力-ひずみ関係は、次式であらわされる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

式(4)を座標変換することにより、局所座標系 $\xi\eta$ 方向の応力-ひずみ関係式を求めると、

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで、マトリックスの各成分は、

$$\left. \begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

とあらわされる。

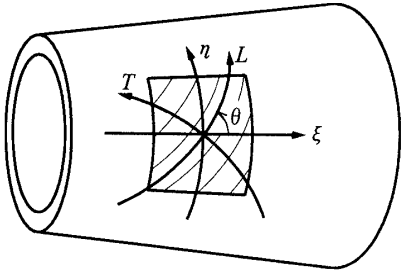


Fig.2 Local co-ordinate system of cylindrical beam model

式(5)において、円筒 z 軸方向の垂直荷重のみが作用する場合 ($\sigma_n = \tau_{\xi\eta} = 0$) のひずみと、 z 軸まわりのねじりモーメントのみが作用する場合 ($\sigma_\xi = \sigma_n = 0$) のひずみを求め、重ねあわせの原理を用いて解くと次式の応力-ひずみ関係が導かれる。

$$\sigma_\xi = \frac{D_1 D_2^2}{D_2^2 - D_1 D_3} \varepsilon_\xi - \frac{D_1 D_2 D_3}{D_2^2 - D_1 D_3} \gamma_{\xi\eta} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{D_2^2 D_3}{D_2^2 - D_1 D_3} \gamma_{\xi\eta} - \frac{D_1 D_2 D_3}{D_2^2 - D_1 D_3} \varepsilon_\xi \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= (\overline{Q_{11} Q_{26}^2 + Q_{12}^2 Q_{66} + Q_{16}^2 Q_{22}} \\ &\quad - \overline{Q_{11} Q_{22} Q_{66} - 2 Q_{12} Q_{16} Q_{26}}) / (\overline{Q_{26}^2 - Q_{22} Q_{66}}) \\ D_2 &= (\overline{Q_{11} Q_{26}^2 + Q_{12}^2 Q_{66} + Q_{16}^2 Q_{22}} \\ &\quad - \overline{Q_{11} Q_{22} Q_{66} - 2 Q_{12} Q_{16} Q_{26}}) / (\overline{Q_{16} Q_{22} - Q_{12} Q_{26}}) \\ D_3 &= (\overline{Q_{11} Q_{26}^2 + Q_{12}^2 Q_{66} + Q_{16}^2 Q_{22}} \\ &\quad - \overline{Q_{11} Q_{22} Q_{66} - 2 Q_{12} Q_{16} Q_{26}}) / (\overline{Q_{12}^2 - Q_{11} Q_{22}}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

である。式(7)、(8)において、

$$\left. \begin{aligned} D_\xi &= \frac{D_1 D_2^2}{D_2^2 - D_1 D_3} \\ D_c &= \frac{D_1 D_2 D_3}{D_2^2 - D_1 D_3} \\ D_{\xi\eta} &= \frac{D_2^2 D_3}{D_2^2 - D_1 D_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、引張-ねじりカップリングを考慮した応力-ひずみ関係は次式のようにあらわされる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \tau_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_\xi & D_c \\ D_c & D_{\xi\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

この応力-ひずみ関係式を円筒ビーム要素に導入すると、式(2)の剛性マトリックス K_w および K_s が次式のように変化し、新たに引張-ねじりカップリング剛性マトリックス K_c があらわれる。

$$\left. \begin{aligned} K_w &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} D_\xi \int A_r(z) B_w^T B_w dz \\ K_s &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} D_{\xi\eta} \int J_{pr}(z) B_s^T B_s dz \\ K_c &= \sum_{r=1}^{N_{TL}} D_c \int J_{pr}(z) B_w^T B_s dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $J_{pr}(z)$ は断面一次極モーメントである。

2.3 剛性・質量マトリックスと固有値問題
前項により計算された各方向に対応する剛性・質量マトリックスを組み合わせることににより、要素の剛性マトリックス K_e 、質量マトリックス M_e が次式のように得られる。

$$K_e = \begin{bmatrix} K_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_w & K_c \\ 0 & 0 & K_c & K_s \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$M_e = \begin{bmatrix} M_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_s \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

これら各要素の剛性・質量マトリックスを全体座標系に座標変換し、対応する節点についてたし合わせることににより構造全体の剛性・質量マトリックスが得られる。

$$K = \sum_{e=1}^{N_{TE}} T^T K_e T \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$M = \sum_{e=1}^{N_{TE}} T^T M_e T \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで T は、座標変換マトリックスであり、 N_{TE} は総要素数である。

これより固有値問題は次式であらわすことができる。

$$K \delta_n = \lambda_n M \delta_n \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで δ_n は第 n 次の固有ベクトル、 λ_n は固有値を表す。

3. カップリング特性の評価

提案するビーム要素モデルのカップリング特性を検証するために図3に示すような一端が固定された円筒の引張解析を行い、積層角度によるカップリング効果の変化を明らかにするとともに、三角形平面シェル要

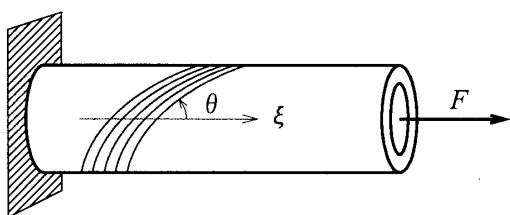


Fig.3 Boundary condition of cylindrical beams

Table 1 Elastic parameters of CFRP cylindrical beams

Tensile moduli	E_L , GPa	150.0
	E_T	10.0
Shear modulus	G_{LT} , GPa	15.0
Poisson's ratio	ν_{LT}	0.25

素モデルによる解析結果との比較を行った。

解析モデルの寸法は、長さ 1m, 内径 0.199m, 板厚 0.001m である。境界条件はビーム要素モデルおよびシェル要素モデル共に一端固定とし、他端に引張荷重 F を与えた。積層数は 1 層とし、繊維配向角度を $0^\circ \sim 90^\circ$ に変化させた場合の荷重点のカップリングによるねじり角を求めた。材料定数を表 1 に示す。また、ビーム要素モデルは 5 要素, 6 節点, シェル要素モデルは円周方向に 24 分割, 軸方向に 20 分割の 504 要素, 960 節点とした。ビーム要素モデルの自由度はシェル要素モデルの 150 分の 1 程度である。

結果を図 4 に示す。実線がビーム要素モデルの結果, 破線がシェル要素モデルの結果である。ここで ψ は、解析により得られたねじり角 ϕ を次式によって無次元化した値である。

$$\psi = \frac{\phi G_{LT} I_p}{F l} \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 I_p は断面二次極モーメントである。

これを見ると繊維配向角 55° 近傍において最もねじり角が大きくあらわれることがわかる。また、ビーム要素による解析はシェル要素によるものと 3% 以下の誤差で良い一致を示しており、本モデルがカップリング特性の評価に有効であることがわかる。

4. ゴルフクラブシャフトの振動解析

図 5 に示すようなゴルフクラブシャフトモデルの固有値解析を行った。境界条件はグリップ部を固定とし、自由端には 0.5kg のヘッドを取り付けた。積層数は 3 層で、最外層の繊維配向角度を 0° に固定し、内層および中層を 30° から 60° まで変化させた。板厚は最外層が 0.3mm 一定で、内層および中層はヘッド部が

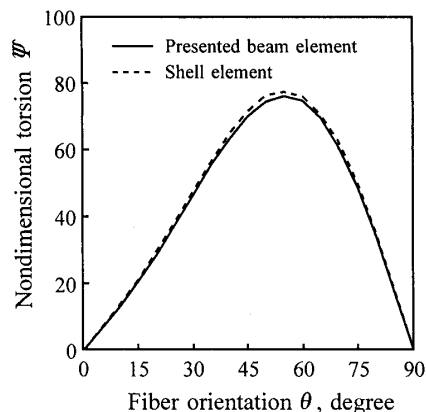


Fig.4 Relation between rotation and fiber orientation of CFRP cylinders

0.9mm, それ以外の部分はいずれも 0.2mm とした。内層, 中層ともに同一方向に巻いた一方向モデルと、逆方向に巻いたアングルプライモデルについて解析し、固有振動数を比較した。材料定数を表 2 に示す。

解析結果として、図 6 に繊維配向角 30° の一方向モデルの固有振動モードを示す。また、図 7 に固有振動数の変化を示す。実線が一方向モデルの結果, 破線がアングルプライモデルの結果である。

図 6 を見ると、2 次および 3 次モードにおいては、振動の節がヘッド中央部に位置することがわかる。⁽⁴⁾ 図 7 を見ると、1 次は全ての角度において両モデルの振動数に大きな差は見られないが、2 次, 3 次ともにアングルプライモデルの方が振動数が高くなるのがわかる。また、繊維配向角が小さいほどその傾向が顕著になる。これは内層と中層の引張-ねじりカップリング特性によるものであると考えられる。すなわち、2 次, 3 次モードにおいては、偏心して取り付けられたヘッドにより強いねじり成分が励起されており、ア

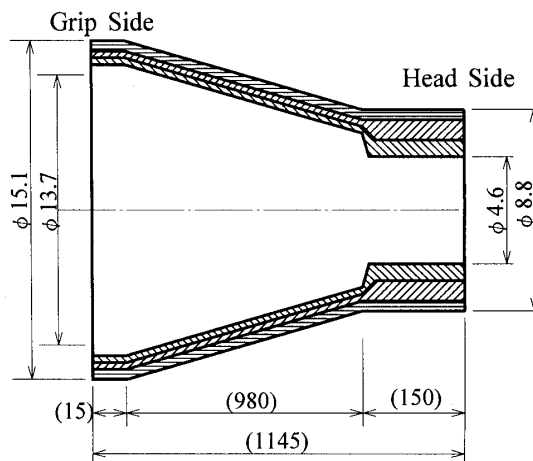


Fig.5 CFRP golf club shaft model

シングルプライモデルの内層および中層のカップリング剛性が互いのひずみをうち消し合うように作用するため、一方向モデルに対して固有振動数が高くなったもので、シートワインディング製品の構造解析に対する本手法の有効性を示すものとする。

5. まとめ

異種積層複合材料円筒のための引張-ねじりカップリング特性を考慮した有限要素法固有値解析プログラムを開発した。本来、複雑な三次元構造物であるハイブリッド積層円筒材をビーム要素でモデル化することにより、シェル要素に比べて大幅に自由度を低減し、計算速度の向上と精度の改善を実現した。また、開発したプログラムの有効性を検証するために、一方向強化材円筒の解析を行い、シェル要素モデルとの比較を行った。その結果、本手法が引張-ねじりカップリング効果を正しく評価できることが明らかとなった。また、ゴルフクラブシャフトの固有値解析を行い、積層形態により振動特性が変化することを示した。

なお本研究を進めるにあたり、元三重大学教育学部学生 川北有紀 君の協力を得たことに謝意を表す。

参考文献

- (1) 松本金矢・座古勝・井上孝治, 積層複合材料円筒ビームの振動解析に関する研究, 機論, 61-591, C(1995), 4148-4152.
- (2) 松本金矢・座古勝・井上孝治, ゴルフクラブシャフトの最適設計に関する研究, スポーツ産業学研究, 7-1, (1997), 37-43.
- (3) 鷲津久一郎・ほか 4 名, 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, (1989), 206.
- (4) 影山和郎, 金原勲, 鈴木敏夫, 大沢勇, 高弾性 CFRP ゴルフクラブのダンピング設計, 機械力学部門講演論文集, No.97-10-1, (1997), 245-248.

Table 2 Material parameters of CFRP golf club models

		shaft	head
Tensile moduli	E_L , GPa	130.3	206.0
	E_T	5.26	206.0
Shear modulus	G_{LT} , GPa	11.0	79.2
Poisson's ratio	ν_{LT}	0.3	0.3
Density	ρ , kg/m ³	1600.	7860.

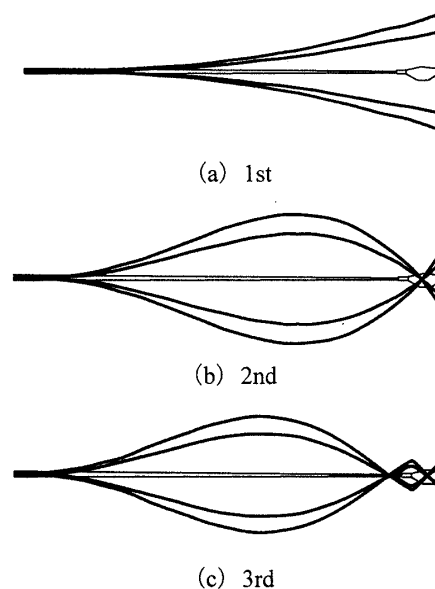


Fig.6 Natural modes of CFRP golf club shaft

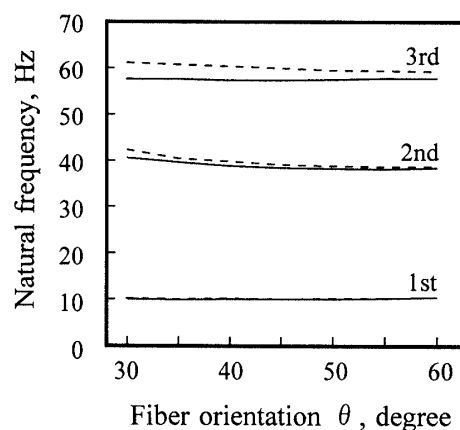


Fig.7 Relation between fiber orientation and natural frequencies

(— unidirectional model, ---- angle-ply model)