

スポーツシューズの不静定応力解析*

松本金矢^{*1}, 座古 勝^{*2}, 清水信行^{*3}
神田利広^{*4}, 桜井敬久^{*5}

Statically Indeterminate Stress Analysis of Sport Shoes

Kin'ya MATSUMOTO^{*6}, Masaru ZAKO, Nobuyuki SHIMIZU,
Toshihiro KANDA and Hirohisa SAKURAI^{*6} Mie University, Fac. of Education, Kamihama-cho 1515, Tsu, Mie, 514-8507 Japan

Such high polymer materials as silicone gel are used for the shock absorber in sport shoes. In the stress analyses of shoe soles, it is difficult to determine the load conditions by measured pressure. Because the distribution of pressure upon the shoe sole changes according to the stiffness of these materials, which generally show the nonlinear behavior in the stress-strain relations. So a stress analysis method considering the statically indeterminate problems is proposed to identify the pressure distributions on variable shoe sole models. The compression testing of nonlinear materials is carried out and the results of experiments indicate the effectiveness of the proposed method. And the strain energy of a shoe sole model is calculated under the condition of the identified load and compared with the result using the measured pressure directly.

Key Words: Nonlinear Problem, High Polymer Materials, FEM, Statically Indeterminate Problem, Sport Shoes, Strain Energy, Silicone Gel

1. はじめに

シリコーンゲルのような高分子材料は、エネルギーを吸収し蓄積するという力学的特性を示し、軽量で大きなひずみに耐えることから、シューズの緩衝材料として利用されている。しかし、これらの材料は高価であるため、少量で最大限の緩衝効果を発揮できるような構造設計が必要となる。これまではシューズモデルの衝撃試験を行い、エネルギー吸収特性を評価する方法がとられてきたが⁽¹⁾、試験体の作成にコストや時間がかかるなどの問題点がある。構造解析手法もシューズを設計する手段として利用されているが⁽²⁾、入力データである荷重条件が形状や材料構成に伴って変化する、いわゆる不静定問題となることから、設計段階での性能評価は困難である。

そこで本研究では、シューズ材料の非線形剛性を考慮した荷重同定手法を提案する⁽³⁾。すなわち、足底面を一枚の板でモデル化し、一樣な床面上を歩行した場合に測定される足底の圧力分布状態から足モデル各部

の等価弾性係数を決定する方法である。この等価弾性足モデルをシューズモデルに重ねて強制変位を与えることで、歩行時にシューズにかかる圧力分布を不静定問題として同定するものである。これによりシューズの材料構成を変更した場合の荷重の変化に対応することが可能となる。また、歩行時の荷重の時刻歴に対する挙動を、連続する静的なつり合い状態の変化として近似する疑似動的解析法を提案し⁽⁴⁾、区間線形理論を応用した非線形応力解析システムを開発した。これにより、シューズ各部のひずみエネルギー変化量を評価し、緩衝材料の有効な配置を決定することを可能とした。

開発した荷重同定手法の有効性を検証するために、剛性の異なる高分子材料の圧縮試験を行い発生する圧力分布を同定結果と比較した。さらに、シューズモデルに対してひずみエネルギーによる性能評価を行った。

2. 解析手法

2.1 材料非線形性のモデリング手法 高分子材料は強い材料非線形性を示すものが多く、区間線形理論に基づいた解析を行うためには、各解析ステップにおいて弾性係数を適切に更新する必要がある。

緩衝材料には、ひずみとともに剛性が増大するタイプの非線形性を示すものも多く、一般に金属材料に利

* 原稿受付 1998年5月11日。

^{*1} 正員, 三重大学教育学部 (☎ 514-8507 津市上浜町1515)。^{*2} 正員, 大阪大学大学院工学研究科 (☎ 565-0871 吹田市山田丘2-1)。^{*3} 正員, いわき明星大学理工学部 (☎ 970-8551 いわき市中央台飯野5-1)。^{*4} 積水プラントシステム(株) (☎ 531-0076 大阪市北区大淀中1-1-30)。^{*5} (株)シーゲル (☎ 424-0911 清水市宮加三789)。

E mail: matumoto@edu.mie-u.ac.jp

用される塑性モデルを利用することは困難である。したがって、本研究では次式で示すような硬化型の非線形応力-ひずみ関係式を導入する。

$$\sigma = a\varepsilon^n + b\varepsilon \dots \dots \dots (1)$$

ここで σ , ε はそれぞれ真応力, 対数ひずみを表す。また a , b , n は, 非線形材料定数であり, 材料試験から得られた真応力-対数ひずみ関係を満足するように最小二乗法により同定する。圧縮試験より得られた真応力 σ_i と対数ひずみ ε_i より正規方程式を導くと次式のようなになる。

$$S = \sum_i \{\sigma_i - (a\varepsilon_i^n + b\varepsilon_i)\}^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_i (-2\sigma_i \varepsilon_i^n + 2a\varepsilon_i^{2n} + 2b\varepsilon_i^{n+1}) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= \sum_i (-2\sigma_i \varepsilon_i + 2a\varepsilon_i^{n+1} + 2b\varepsilon_i^2) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial n} &= \sum_i (-2a\sigma_i \varepsilon_i^n \log \varepsilon_i + 2a^2 \varepsilon_i^{2n} \log \varepsilon_i + 2ab\varepsilon_i^{n+1} \log \varepsilon_i) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

これらの式に実測値を代入し, 連立方程式を解くことにより非線形材料定数を求める。

式(1)をひずみ ε で微分することにより, 非線形剛性係数 E が次式のように定義される。

$$E = an\varepsilon^{n-1} + b \dots \dots \dots (4)$$

せん断剛性係数およびポアソン比については非線形特性を測定することが困難であるため, ポアソン比 ν を固定し, 次式により非線形せん断剛性係数 G を算出する。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots \dots \dots (5)$$

本解析手法では区間線形理論を直接適用するのではなく, 次の手順で非線形剛性係数 E の更新を行う。

まず各荷重ステップにおいて次式で示されるひずみの代表値 ε_e を求める。

$$\varepsilon_e = \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} \dots (6)$$

ここで, ε_x , ε_y , ε_z は三軸方向のひずみである。

このひずみ ε_e を式(4)に代入して剛性係数 E_1 を求め,

そのステップにおける変位解析を行う。次に変形後のひずみにおける剛性係数 E_2 を同様に算出する。この2つの剛性係数 E_1 と E_2 の平均値をそのステップにおける剛性係数 E とし, 改めて変位解析を行う。これにより, 非線形性の強い材料でも少ないステップ数で精度良く応力解析を行うことが可能となる。

2.2 非線形材料のひずみエネルギー算出方法 本研究では, シューズソール部のひずみエネルギーの変化量が大きい場合に緩衝材料が有効に作用するものと考え, 緩衝効果の評価方法としてひずみエネルギーを用いるものとする。

三軸応力状態におけるひずみエネルギー U は各ひずみ成分により次式で定義される。

$$U = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right\} \dots (7)$$

区間線形理論における非線形性材料の各荷重ステップでのひずみエネルギー変化量 δU は, 各ひずみ成分の変化量 $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$ によって, 次式で表される。

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_x} \delta\varepsilon_x + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_y} \delta\varepsilon_y + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_z} \delta\varepsilon_z + \frac{\partial U}{\partial \gamma_{yz}} \delta\gamma_{yz} + \frac{\partial U}{\partial \gamma_{zx}} \delta\gamma_{zx} + \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}} \delta\gamma_{xy} \dots (8)$$

各要素の単位体積当たりのひずみエネルギー変化量 δu は数値積分により次式のように求める。

$$\delta u = \frac{1}{V} \sum_r w_r \delta U_r \det J_r \dots \dots \dots (9)$$

ここで, δU_r は要素内の r 番目の積分点でのひずみエネルギー変化量, w_r は積分点の重みであり, V は要素の体積, J_r は要素のヤコビアンマトリックスである。

2.3 不静定荷重同定手法 本手法は, 圧力分布測定装置から得られる実測データから足のモデリングを行うことにより, この足モデルが様々なシューズソールモデル上を歩行したときの圧力分布状態を同定するためのものである。本来, 足底の圧力分布を決定する要因は足の形状とその内部構造にあると考えられるが, 足の精密なモデルを作成することは困難である。そこで, 足をシューズに接する等価な板としてモデル化し, 各部の等価剛性を求める方法を提案する。

図 1(a) に示すように, 足モデル各部の等価弾性係数を同定するため, 圧力分布測定装置から得られた実

測データ P_1 を用いて足モデルと床を重ねた場合を想定する。ここで、添え字の f, g, s はそれぞれ足, 床, シューズ材料を表す。

まず、裸足で均一な床面を歩行した場合の足モデルにかかる仮想的な強制変位 δ_1 と床の高さ h_g 、足モデルの厚さ h_f および床の弾性係数 E_g について、物理的な矛盾を生じないような適当な値を決定する。

図 1(a) より、仮想的な強制変位 δ_1 は、足モデルの変位 δ_f と床面の変位 δ_g の和であるから、

$$\delta_1 = \delta_f + \delta_g \dots \dots \dots (10)$$

となり、フックの法則より

$$\delta_1 = \frac{h_f}{E_f} P_1 + \frac{h_g}{E_g} P_1 \dots \dots \dots (11)$$

となる。したがって足の等価弾性係数 E_f は

$$E_f = \frac{P_1 E_g h_f}{\delta_1 E_g - P_1 h_g} \dots \dots \dots (12)$$

で求めることができる。

次に、図 1(b) について同様に考えると、シューズを履いた場合の強制変位 δ_2 の区間線形理論による各解析ステップでの増分 $d\delta_2$ は、次式のように求められる。

$$d\delta_2 = \frac{\delta_1 E_g P_1 h_g}{P_1 E_g} dP_2 + \frac{h_s}{E_s} dP_2 \dots \dots \dots (13)$$

したがって、解析用の圧力 P_2 は各解析ステップでの圧力増分の和として次式で求められる。

$$P_2 = \int \frac{d\delta_2 P_1 E_g E_s}{\delta_1 E_g E_s - P_1 E_s h_g + P_1 E_g h_s} \dots \dots \dots (14)$$

ただし、 E_s はシューズの非線形剛性係数であり、次式で計算される。

$$E_s = a_s n_s \left[\ln \frac{P_1 E_g h_s - \delta_2 P_1 E_g + \delta_1 P_2 E_g - P_1 P_2 h_g}{P_1 E_g h_s} \right]^{n_s - 1} + b_s \dots \dots \dots (15)$$

式(14)、(15)を満足し、しかも次式に示すように解析の各ステップにおける荷重の合計値が圧力分布測定実験によって測定された圧力の合計値 W と等しくなるように δ_2, P_2 を同定する。

$$\sum_j P_{2j} S_j = W \dots \dots \dots (16)$$

ここで j は負荷面要素番号、 S_j は負荷面の面積を表す。

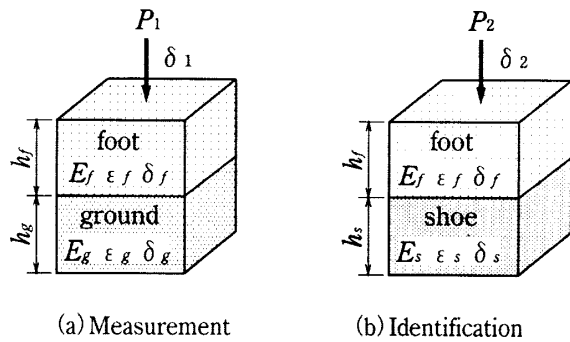


Fig.1 Foot model for load identification

2.4 疑似動的解析手法 慣性成分が荷重に比べて小さく、しかも歩行時のようにひずみ速度が比較的小さい場合、材料の速度依存性の影響を無視できると仮定すると、時間とともに変化する荷重を連続した静的な外力に変換することができ、静解析プログラムを用いて、動的荷重に対応した応力解析が可能となる。

圧力分布測定装置から得られる歩行時の実測圧力時刻歴データ P_1 を用いて、式(14)により同定された圧力ベクトル列 $P_2 \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ を、次式のように静解析に用いる荷重ベクトル列 $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_m\}$ に変換する。

$$F_i = f_i - f_{i-1} \quad (i=1 \sim m, f_0 = \{0\}) \dots \dots (17)$$

さらに、作成した各荷重ベクトル F_i を区間線形理論により解析ステップごとに分割して非線形解析を行うことで、非線形材料を用いた構造物の動的な挙動を解析することが可能となる。

2.5 解析システムの流れ 三次元有限要素法シューズ解析システムの流れを図2に示す。

本システムでは、はじめに圧力分布測定装置を用いて足底面に加わる圧力分布データを収集するとともに、材料圧縮試験により非線形材料パラメータデータベースを作成する。疑似動的解析用の荷重データは、シューズソールの形状を表すメッシュデータと、収集した圧力分布データを選択するだけで、荷重同定プログラムにより自動的に作成される。

次に三次元疑似動的解析プログラムにより非線形解析を行う。ここでは、三次元 20 節点アイソパラメトリック要素による FEM 応力解析プログラムに、式(4)の非線形剛性係数を用いた区間線形理論を組み込むことにより非線形解析を行い、同時にひずみエネルギーの算出を行う。

最後に得られた応力状態やひずみエネルギー変化量からシューズの評価を行う。ここで、緩衝効果を高めると考えられるモデルに変更し、繰り返し計算を行い、最終的な材料構成を決定する。

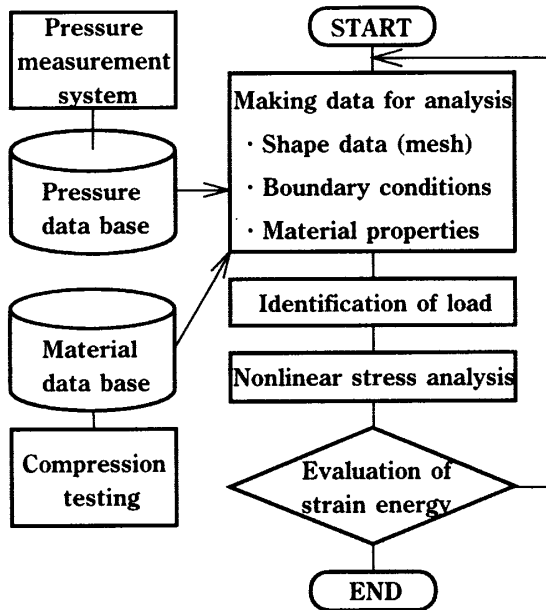


Fig.2 Flowchart of quasi-dynamic analysis system

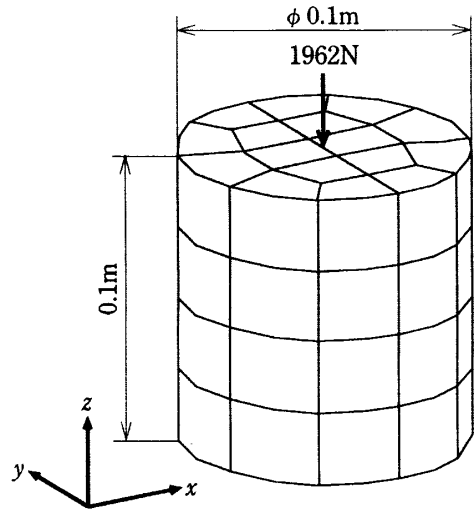


Fig.3 Analysis model of compression testing

3. 解析手法の検証

3.1 区間線形理論による非線形解析 開発した応力解析システムを用いて、シリコンゲル材およびフォーム材の応力解析を行い、得られた荷重-変位関係を実験結果と比較した。まず、インストロン製 4465 万能試験機を用いて、図 3 に示す直径 0.1m、高さ 0.1m の円柱試験片の圧縮試験を行い荷重-変位関係を求め、それより真応力-対数ひずみ関係を算出した。次に、カーブフィットにより非線形パラメータを同定して、試験片と同じモデルの応力解析を行った。境界条件は、下面を完全拘束、上面を xy 方向拘束とし、 z 方向に 1960N の等分布圧縮荷重を加えた。

表 1 に同定されたゲル材およびフォーム材の材料定数を示す。表中の a 、 b 、 n は式(1)の非線形パラメータである。ポアソン比については、推定値を用いた。図 4、5 は、非線形解析により得られたゲル材およびフォーム材の荷重-変位関係を実験結果と比較したものである。図中の○および△はそれぞれ区間線形理論におけるステップ数を 10 および 20 とした場合の解析結果を示し、破線は実験結果である。

Table 1 Material properties for nonlinear analysis

		Gel	Foam
Nonlinear parameters	a , MPa	-1.01	7.82×10^{-4}
	b , MPa	0.107	4.05×10^{-3}
	n	4.06	6.85
Poisson's ratio	ν	0.45	0.30

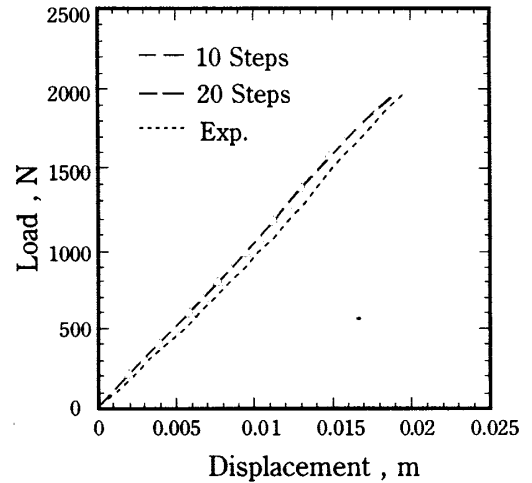


Fig.4 Force-displacement diagram of gel

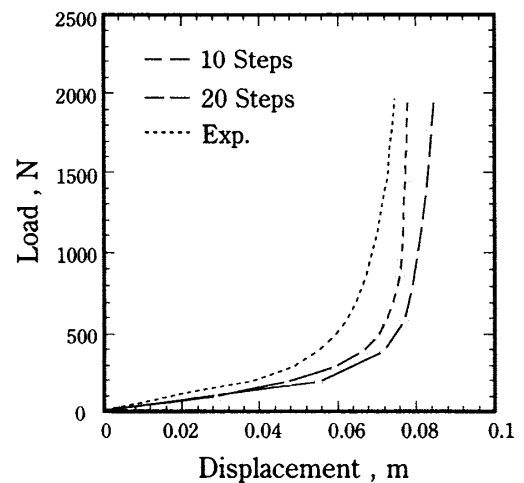


Fig.5 Force-displacement diagram of foam

図4, 図5によると, ゲル材およびフォーム材ともに, 解析と実験の荷重-変位関係はよく一致している。したがって, フォーム材のような強い非線形性を示す材料においても, 少ないステップ数で非線形挙動の正確なシミュレーションが可能であり, 本手法が非線形材料の解析に有効であることがわかる。

3.2 不静定荷重同定 開発した荷重同定プログラムを用いて, シリコンゲル材およびフォーム材で構成される試験体の圧縮実験を行い, 同定手法の検証を行った。検証に用いたのは図6に示すような縦 0.06m, 横 0.04m, 高さ 0.02m のフォーム材とゲル材を並べた直方体試験片であり, 解析時の境界条件は, 最下面完全拘束とした。

まず, この試験片に 98.1N の圧縮面荷重を加え, 発生する圧力分布を圧力測定装置 (FSCAN システム, ニッタ製) により測定する。次に同じ形状の均一なラバー材に発生する圧力分布を同様に圧縮試験により求め, それをフォーム材 - ゲル材の組合せモデルに加えた場合の荷重を式 (14) により同定し, 測定結果と比較した。

検証結果として, 図7(a)に測定結果を, また(b)に荷重同定結果を示す。同定結果と測定結果を比較すると, いずれも剛性の高いゲル材に大きな圧力がかかり, 低剛性のフォーム材の圧力は軽減されていることが分かる。両結果は最大圧力において 10 %程度の差で良い一致を示しており, 本同定手法の有効性を示すものと考えられる。

4. シューズの挙動シミュレーション

開発したプログラムを用い, 歩行時にシューズソールに発生するひずみエネルギーを求めた。モデルは最大長さ 0.27m, 最大幅 0.10m, 高さ 0.02m であり, 境界条件は最下面完全拘束とした。材料構成を図8に, また各材料の非線形パラメータを表2に示す。

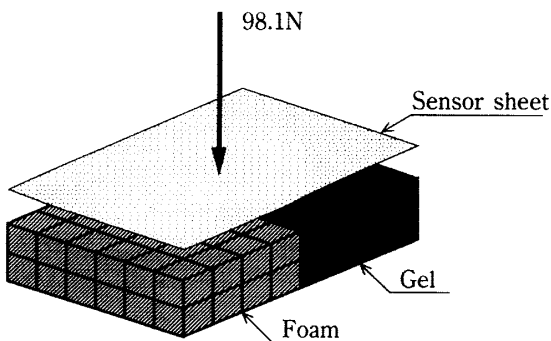
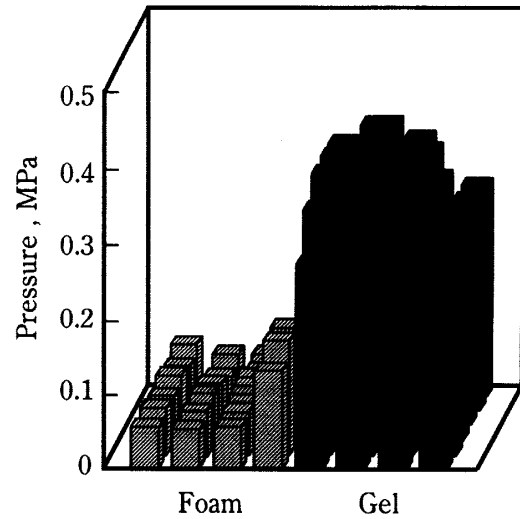
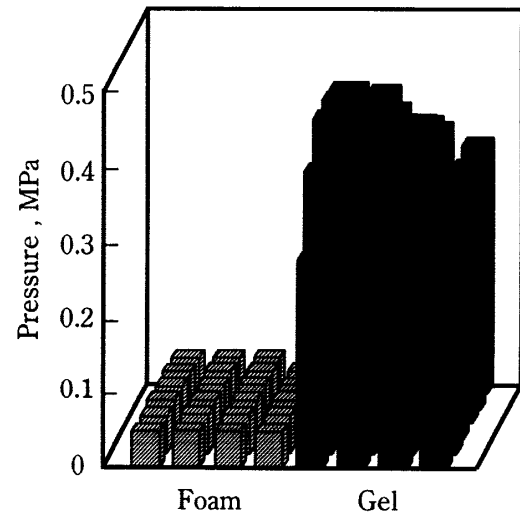


Fig.6 Compression testing of nonlinear materials



(a) Measured pressure



(b) Identified pressure

Fig.7 Pressure distribution of nonlinear materials

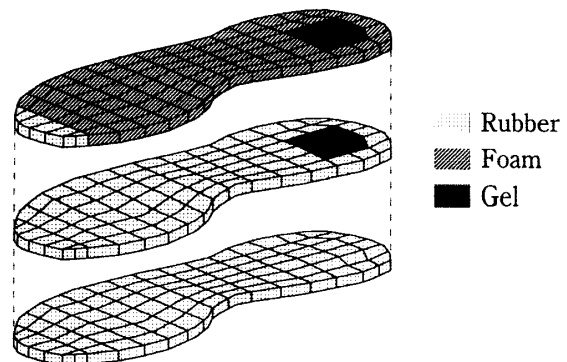


Fig.8 Material composition of the shoe sole model

体重 60kg の人間が均一な床面を歩行した場合の実測圧力データをもとに、このシューズソールモデルにかかる圧力を同定し解析した場合と、測定データをそのまま当てはめた場合とを比較した。シューズソールは積層構成されているため、シューズソール各部の積層材料について圧縮荷重による応力解析から応力-ひずみ関係を求め、それらを単一材料と見なした場合の非線形パラメータを同定した。その値を表 3 に示す。また、荷重同定に用いたパラメータを表 4 に示す。

図 9(a) に均一な床面で測定された圧力分布状態を、また (b) にシューズソールに対して同定された圧力分布状態をそれぞれ歩行中の圧力の積分値として示す。同定された圧力分布は床面上での測定圧力に比べ、高剛性のゲル材が配置されている踵部分に圧力が移行しフォーム材部分の圧力が減少していることがわかる。

図 10 は歩行中の各材料の単位体積当たりのひずみエネルギー変化の平均値を示したもので、測定圧力を用いた解析結果を (a) に、同定圧力によるものを (b) に示す。これによると、測定された圧力を直接荷重として与えた解析結果よりも、シューズソール上を歩行することを考慮して同定した圧力を用いた方が、ゲル材のひずみエネルギーが増加しフォーム材のひずみエネルギーが減少していることがわかる。これはシューズソールの剛性を考慮した結果であり、シューズの材料構成を無視して入力荷重を与えた解析結果では、使用する緩衝材料の効果を正しく評価することができない。したがって、材料の剛性を考慮して荷重同定を行う本手法がシューズの構造解析に有効であることがわかる。

5. おわりに

本研究では、歩行時の圧力測定結果からシューズソール材料の剛性分布を考慮した不静定荷重の同定手法を提案し、シューズの設計変更に伴うひずみエネルギーの変化をシミュレーションするための三次元非線形応力解析プログラムを開発した。

ゲル材料とフォーム材料の圧縮試験結果と解析結果を比較することにより、区間線形理論を用いた本手法の非線形モデルが、強い非線形性を示す材料の評価に有効であることが明らかとなった。

ゲル材とフォーム材で構成された試験片の圧縮実験結果から、提案した荷重同定手法が精度の高い荷重値の同定を可能にすることを明らかにした。また、開発した応力解析プログラムにより、シューズソールに発生するひずみエネルギーの評価を行い、荷重同定結果を用いた場合と測定された圧力をそのまま用いる場合で

Table 2 Material properties of each lamina

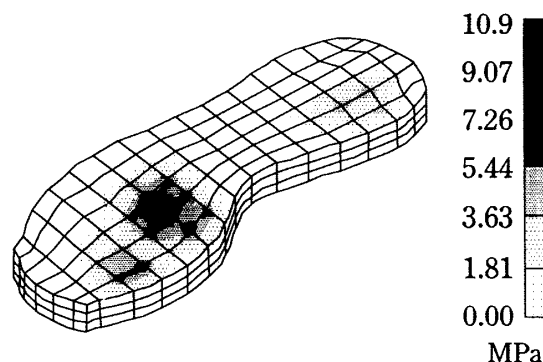
		Rubber	Foam	Gel
Nonlinear parameters	a , MPa	-0.370	7.78×10^{-4}	-1.03
	b , MPa	0.456	4.04×10^{-3}	0.107
	n	2.13	6.89	4.04
Poisson's ratio ν		0.47	0.30	0.45

Table 3 Material properties of laminated sole model

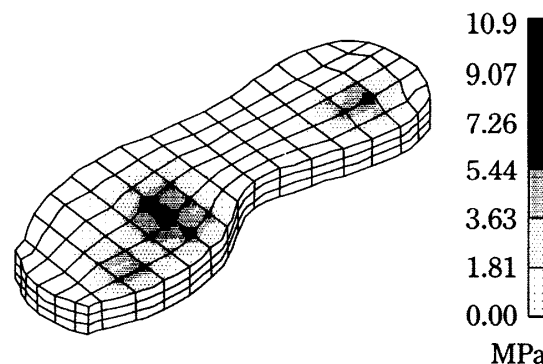
		Gel+Rubber	Foam+Rubber
Nonlinear parameters	a , MPa	-9.80×10^{-3}	1.08×10^6
	b , MPa	0.228	6.41×10^{-3}
	n	6.78	19.7
Poisson's ratio ν		0.45	0.30

Table 4 Conditional parameters for load identification

Forced displacement	δ_1 , m	0.001
Thickness of ground	h_g , m	1.0
Elastic modulus of ground	E_g , MPa	981.

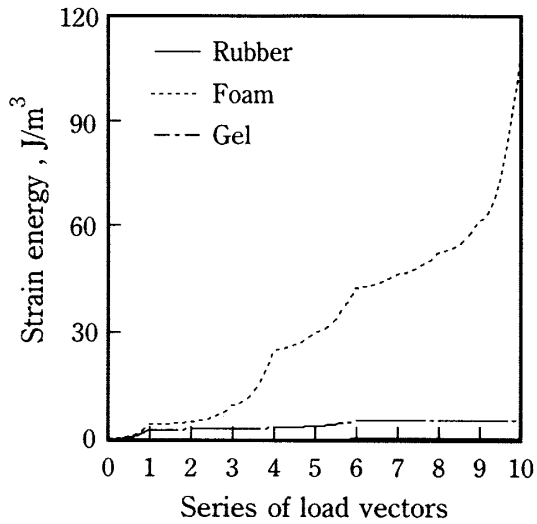


(a) Measured pressure on the ground

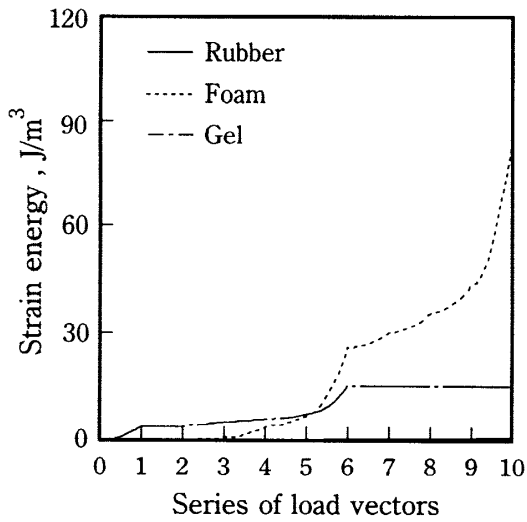


(b) Identified pressure on the shoe sole model

Fig.9 Surface pressure distribution of shoe sole models



(a) Measured pressure



(b) Identified pressure

Fig.10 Strain energy of shoe sole models during walking

は、シューズ性能の評価に差が出ることを示した。

なお、本研究を進めるに当たり元三重大学教育学部学生 石田貴子 君、水谷真由子 君の協力を得たことを記し感謝の意を表する。

文 献

- (1) Woo S. H.・宇治橋貞幸・伊能教夫, ランニング・シューズの力学的特性の計測と評価法, スポーツ工学シンポジウム講演論文集, No.97-10-2, (1997), 46-53.
- (2) 磯部真志・西脇剛史, 有限要素法を用いたスパイクシューズの突き上げ評価法, スポーツ工学シンポジウム講演論文集, No.940-59(S), (1994), 91-94.
- (3) 松本・水谷, 仮想荷重同定によるスポーツシューズの応力解析, スポーツ工学シンポジウム講演論文集, No.97-34, (1998), 73-77.
- (4) 座古・松本・神田, 三次元有限要素法によるシューズの疑似動的解析, D&D CONFERENCE'95 講演論文集, No.95-8 (I), (1995), 187-190.