

ハニカムサンドウィッチ板の等価弾性パラメータ同定逆問題*

松本 金 矢*¹, 座 古 勝*²
古 野 雅 美*³, 藤 田 知 正*⁴Inverse Problem to Identify Equivalent Elastic Parameters
of Honeycomb Sandwich PanelsKin'ya MATSUMOTO, Masaru ZAKO,
Masami FURUNO and Tomomasa FUJITA

Elastic parameters are essential for structural analysis. The elastic parameters of composite materials, however, are difficult to determine by either theoretical or experimental approaches. Therefore, an inverse analysis method to identify anisotropic parameters of composite materials by using FEM eigenvalue analysis is presented. A finite shell element for unsymmetrically laminated composites is formulated with the first-order shear deformation theory. As numerical examples, elastic parameters of composite shell structures are analyzed and compared with excitation tests. Equivalent stiffness parameters of a honeycomb sandwich panel are determined regarding as a simple shell with a low transverse shear modulus.

Key Words: Vibration, Inverse Problem, Identification, Sensitivity Analysis, Eigenvalue Analysis, Transverse Shear, Finite Element Method, Elastic Parameters, Honeycomb Sandwich Panel

1. 緒 言

FRPなどの複合材料は、比強度、比剛性が優れていることから航空・宇宙分野やスポーツ用品などへの応用が広がっており、設計・構造解析のため、その力学的特性を明らかにする必要がある。しかしながら、複合材料は金属のような単一材料とは異なり、局所的な変形や破壊を生じやすいことから材料試験を行うことが困難であり、弾性パラメータ等の材料特性を実験的に求めにくいという欠点がある。このような問題に対して関根ら⁽¹⁾は複合材料の振動特性から曲げ剛性の同定を行っている。また、斉藤ら⁽²⁾はハニカム構造板をTimoshenkoはり理論に基づいてモデル化し、パラメータ同定を行っている。

これに対し、著者らは有限要素法固有値解析と感度解析法とを組み合わせることにより、加振実験から比較的容易に測定することのできる固有振動数を用いて異方性弾性パラメータを同定するプログラムを開発した。前報⁽³⁾では、積層構造材料に対応したシェル要素モデルを用いて、任意の積層角度をもつ異種積層材料の異方性パラメータ同定を行い、FEM固有値解析結果と比較することで本手法の有効性を確認してきた。

本報では一次せん断変形理論によるシェル要素を用いることにより、薄肉構造物だけでなくサンドウィッ

チパネル等の厚肉構造物の同定問題にも対応できるようにする。また、感度マトリックスを求める手法として摂動法を用い計算時間の短縮を試みる。解析例として、まずGFRP試験片の加振実験結果より同定した弾性パラメータを用いて、GFRP椅子シート部品の構造解析を行う。得られた結果と椅子の加振実験結果を比較することにより本手法の実材料への適用性について検討する。また、本手法をハニカムを心材とするサンドウィッチパネルの等価弾性パラメータ同定に適用する。ハニカムサンドウィッチ板は、曲げ剛性が高くせん断剛性は低くなるため、板厚方向のせん断変形を考慮する必要がある。このような同定問題に対して一次せん断変形理論を導入した本手法が有効であることを明らかにする。

2. 解析方法

2.1 概要 本手法は有限要素法と逆問題解析法とを組み合わせたものである。有限要素法固有値解析では一次せん断変形理論を導入することにより厚肉構造物にも対応したシェル要素を用いており、非対称積層材の板厚方向のせん断変形を考慮した解析ができるようにモデル化を行っている。逆問題解析法としては、感度解析を利用した最急降下法を用いる。また、異方性パラメータ同定過程において固有モードの順序が入れ替わるという問題が生じる場合があるが、これに対してはベクトルのパターン類似率から求められるMACを用いて対応づけを行っている。また、再解析手法として摂動法を用い、計算時間の短縮をはかる。

* 1996年8月8日 D&D Conference '96において講演、原稿受付 1996年10月21日。

*¹ 正員、三重大学教育学部(〒514 津市上浜町1515)。

*² 正員、大阪大学工学部(〒565 吹田市山田丘2-1)。

*³ 日東電工(株)(〒567 茨木市下穂積1-2)。

*⁴ 藤倉ゴム工業(株)(〒331 大宮市三橋1-840)。

以下それぞれについて説明する。

2.2 一次せん断変形理論によるシェル要素のモデル化 三角形平面シェル要素におけるたわみ w を面積座標 (L_1, L_2, L_3) を用いて次のように表す⁽⁴⁾。

$$w = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + a_4 (L_1^2 L_2 + L_{123}) + a_5 (L_1 L_2^2 + L_{123}) + a_6 (L_2^2 L_3 + L_{123}) + a_7 (L_2 L_3^2 + L_{123}) + a_8 (L_3^2 L_1 + L_{123}) + a_9 (L_3 L_1^2 + L_{123}) \quad (1)$$

$$L_{123} = \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \quad (2)$$

ここで a は面積座標に関する係数である。また、一次せん断変形理論により、回転角 $\bar{\theta}_y, \bar{\theta}_x$ およびせん断ひずみ $\bar{\gamma}_y, \bar{\gamma}_x$ は式 (3), (4) のように表せる⁽⁵⁾。

$$\bar{\theta}_y = -\frac{\partial w}{\partial x} - \bar{\gamma}_y, \quad \bar{\theta}_x = -\frac{\partial w}{\partial y} - \bar{\gamma}_x \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_y &= a_{10} L_1 + a_{11} L_2 + a_{12} L_3 \\ \bar{\gamma}_x &= a_{13} L_1 + a_{14} L_2 + a_{15} L_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上記の式より形状関数 N および変位-ひずみ関係マトリックス B を算出し、これらのマトリックスを用いてシェル要素における剛性マトリックスを作成する。各要素の剛性マトリックス k_e は面内、曲げ、カップリングおよびせん断変形に対する各剛性マトリックス k_p, k_b, k_c および k_s の和として次式のように表される。

$$k_e = k_p + k_b + k_c + k_s \quad (5)$$

$$= \int_A B_p^T D_p B_p dA + \int_A B_b^T D_b B_b dA + \int_A B_c^T D_c B_c dA + \int_A B_s^T D_s B_s dA$$

ここで添え字 p, b, c および s はそれぞれ面内、曲げ、カップリングおよびせん断変形に対応する成分を表す。非対称積層板の応力-ひずみ関係マトリックスは次式により求められる。

$$\left. \begin{aligned} D_p &= \sum_{i=1}^{NTL} d_{ip} (h_i - h_{i-1}) \\ D_b &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{NTL} d_{ib} (h_i^3 - h_{i-1}^3) \\ D_c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NTL} d_{ic} (h_i^2 - h_{i-1}^2) \\ D_s &= \sum_{i=1}^{NTL} d_{is} (h_i - h_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 h_i は積層板の中央面から第 i 番目の層までの距離を、また NTL は総積層数を表す。 d_{ip} および d_{is} は第 i 番目の層の面内およびせん断の応力-ひずみ関係マトリックスで、縦弾性係数 E 、せん断弾性係数 G およびポアソン比 ν により、以下のように表される。

$$d_{ip} = T^T \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} T, \quad d_{is} = \begin{bmatrix} d_{44} & 0 \\ 0 & d_{55} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$d_{11} = \frac{E_x^2}{E_x - E_y \nu_{xy}^2}, \quad d_{22} = \frac{E_x E_y}{E_x - E_y \nu_{xy}^2}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{E_x E_y \nu_{xy}}{E_x - E_y \nu_{xy}^2}$$

$$d_{44} = G_{yz}, \quad d_{55} = G_{zx}, \quad d_{66} = G_{xy}$$

ここで、 T は繊維配向角による座標変換マトリックスである。

また、積層板全体の質量マトリックス m_e は、面内、面外並進、回転およびせん断による慣性力を考慮した質量マトリックス m_p, m_b, m_r および m_s それぞれをたしあわせて次のように表現できる。

$$m_e = m_p + m_b + m_r + m_s \quad (8)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} m_p &= \sum_{i=1}^{NTL} \rho_i (h_i - h_{i-1}) \int_A N_p^T N_p dA \\ m_b &= \sum_{i=1}^{NTL} \rho_i (h_i - h_{i-1}) \int_A N_b^T N_b dA \\ m_r &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{NTL} \rho_i (h_i^3 - h_{i-1}^3) \int_A N_r^T N_r dA \\ m_s &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NTL} \rho_i (h_i^2 - h_{i-1}^2) \int_A N_s^T N_s dA \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

である。また、 N_p, N_b, N_r および N_s はそれぞれ面内、面外並進、回転およびせん断に対する形状関数を表し、 ρ_i は各層の密度を表す。

構造物全体の剛性、質量マトリックスは、各要素のマトリックス k_e, m_e の対応する成分の和として以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} K &= \sum L^T k_e L \\ M &= \sum L^T m_e L \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、 L は要素座標から全体座標への座標変換マトリックスである。

2.3 逆問題解析法⁽³⁾ 提案する同定手法では、逆問題解析法として感度解析法を用いる。弾性パラメータの変化量に対する固有振動数の変化量を表す感度マトリックス A の各成分を次式により求める。

$$A_{ij} = \frac{\Delta f_{ij}}{\Delta e_i} \quad (11)$$

ここで Δf_{ij} は、 i 番目の弾性パラメータの変化量 Δe_i としたときの j 次の固有振動数の変化量である。

実験的に同定された固有振動数を観測値とし、解析による固有振動数をこれに一致させるために必要なパラメータの変更量ベクトル ΔE は、式 (11) の成分をもつ感度マトリックス A の逆マトリックス A^+ および固有振動数の観測値との誤差ベクトル ΔF を用いて、

$$\Delta E = aA^+ \Delta F \quad (12)$$

として求められる。ここで、 a は発散を防ぐための修正係数であり、1 以下の値を用いて収束計算を行う。一般に、感度マトリックス A は正方マトリックスではないため、式 (12) の同定問題は不適切となる。本研究では、この逆マトリックスとして特異値分解による Moore-Penrose の一般逆マトリックスを用いる⁽⁶⁾。

また、異方性材料の同定過程において、弾性パラメータの初期推定値によっては、測定されるモードの順序と解析によるモードの順序が異なるという問題が生じる場合があるが、これに対しては MAC (Modal Assurance Criterion) を用いてモードを対応づけることにより適切な同定を可能にした。解析による固有モード x_j と実験により得られる固有モード x_j^* より MAC は、

$$MAC = \left(\frac{x_j \cdot x_j^*}{\|x_j\| \cdot \|x_j^*\|} \right)^2 \quad (13)$$

となる。この値が 1 に近い場合に 2 つの固有モード x_j , x_j^* を同一であるとみなし、式 (11) の感度マトリックス成分の算出における Δf_{ij} を決定する。MAC の計算に用いる固有モードは、固有値解析に必要なすべての自由度について測定する必要はなく、モードの分離ができる程度の自由度があれば十分である。

2.4 再解析手法 式 (11) の Δf_{ij} を計算する際の固有振動数は、摂動法を用いて求める⁽⁷⁾。弾性パラメータ変更前の固有値問題 (14) は弾性パラメータを微小変化させることにより剛性マトリックスが ΔK 変化し、式 (15) の固有値問題となる。

$$Kx = \lambda Mx \quad (14)$$

$$(K + \Delta K)x' = \lambda' Mx' \quad (15)$$

ここで弾性パラメータ変更後の 1 次から m 次までの固有ベクトル列 x_m' を変更前の 1 次から m 次までの固有ベクトル列 x_m および m 行 m 列のマトリックス a を用いて式 (16) のように仮定する。

$$x_m' = x_m a \quad (16)$$

式 (15) において、剛性マトリックスと質量マトリックスの左から x_m を式 (17) のように掛けることにより、式 (18) に示す m 次の小さな固有値問題に変換される。式 (18) を解いて得られた固有ベクトル列 a を式 (16) に代入することにより x_m' を計算することができる。

$$x_m^T (K + \Delta K) x_m a = \lambda' x_m^T M x_m a \quad (17)$$

$$K^* a = \lambda' M^* a \quad (18)$$

$$K^* = x_m^T (K + \Delta K) x_m, \quad M^* = x_m^T M x_m$$

この摂動法で弾性パラメータ変更前の固有ベクトルを利用して弾性パラメータ変更後の固有値および固有ベクトルを求めることにより、式 (15) の固有値問題を解く計算時間を短縮することができる。

2.5 同定解析の流れ 本解析プログラムの流れを図 1 に示す。まず、データ入力部分では、試験片の形状データと実験により得られた固有振動数、固有モードおよび弾性パラメータの初期推定値を入力する。次に初期推定値である弾性パラメータを Δe_i 変化させながら摂動法により固有値を求め、式 (11) における変化量 Δf_{ij} を求める。解析と実験により得られた固有モードどうしの対応づけを行った後、感度マトリックスを作成する。特異値分解を用いて感度マトリックスの一般逆マトリックスを求め、弾性パラメータの同定を行う。同定された弾性パラメータを用いてさらに固有値解析を行い、その結果得られた固有振動数が観測値に収束していれば同定解析を終了し、そうでなければ収束するまで同定解析を繰り返す。

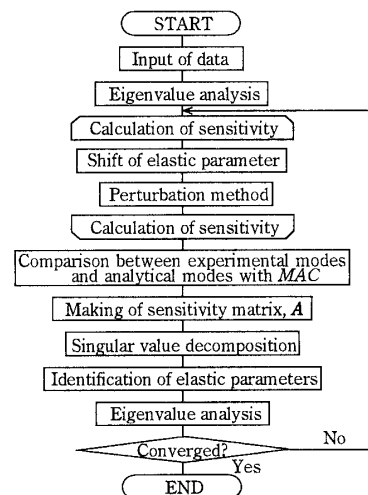


Fig. 1 Flowchart of identification

3. 実験結果を用いた弾性パラメータ同定問題

3.1 概要 開発した同定解析プログラムを用いて加振実験結果から GFRP の弾性パラメータ同定を行った。まず、GFRP 試験片の加振実験を行い、実験モード解析により 4 次までの固有振動数を求める。実験に使用した GFRP は疑似等方性とみなすことができる材料であるため、実験により得られた固有振動数から縦弾性係数、ポアソン比を同定する。同定結果を検証するために、同定解析により得られた弾性パラ

メータを入力して試験片と同じ GFRP 製の椅子の固有値解析を行い、椅子の加振実験結果と比較する。

3.2 弾性パラメータ同定解析 GFRP 長方形板を糸で吊し、境界条件を自由支持として加振実験を行った。試験片は寸法が縦 250mm、横 180mm、板厚 3.65mm で、密度が 1248kg/m^3 のものである。加振実験により得られた 4 次までの固有振動数を表 1 に示す。これらの値を用いて GFRP 試験片の縦弾性係数、ポアソン比を同定した。同定解析の有限要素モデルは縦 8 分割、横 6 分割、節点数 63、要素数 96 である。同定解析の初期値および同定結果を表 2 に示す。

また、2.4 節で説明した再解析手法の有効性を検証するために、感度解析において摂動法を適用したものと固有値解析により感度を計算したものについて計算時間の比較を行った。その結果が表 3 である。摂動法を適用することにより計算時間は半分近く減少しており、摂動法が計算時間短縮に有効であるといえる。

Table 1 Natural frequencies of GFRP rectangular plate

Modal number	Natural frequencies, Hz
1st	116.25
2nd	137.50
3rd	271.25
4th	296.25

Table 2 Identified elastic parameters of GFRP rectangular plate

Parameters	Initial	Identified
Tensile modulus E , GPa	50.0	6.80
Poisson's ratio ν	0.25	0.22

Table 3 Comparison of calculating time

Method	Time, s
Eigenvalue analysis	653
Perturbation method	362

3.3 固有値解析による検証 表 2 に示した同定解析結果を用いて図 2 に示す椅子の固有値解析を行い、固有振動数を同じ椅子の加振実験から得られたものと比較した。有限要素法固有値解析により得られた椅子の 5 次までの固有モードを図 3 に、固有振動数の比較を図 4 に示す。図 4 より固有値解析と加振実験から得られた固有振動数はよく一致しており、実験結果を利用した同定解析により正確な弾性パラメータが得られていることがわかる。

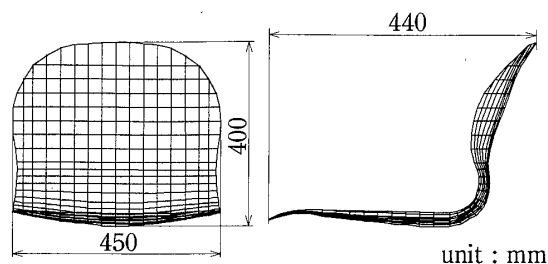


Fig. 2 GFRP chair model

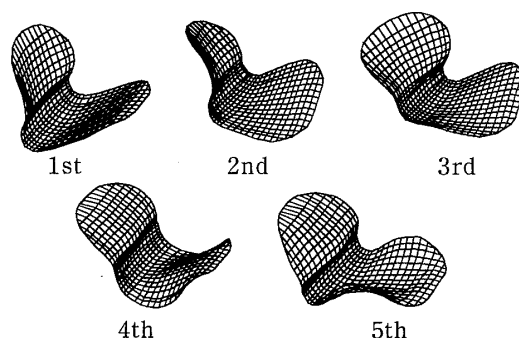


Fig. 3 Natural modes of GFRP chair seat

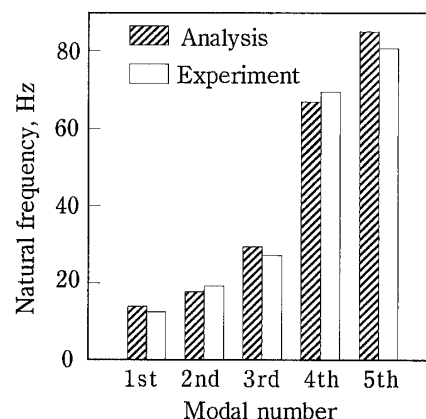


Fig. 4 Comparison of natural frequencies of GFRP chair seat between eigenvalue analysis and excitation test

4. ハニカムサンドウィッチ板の等価剛性同定問題

4.1 概要 ハニカムを心材とするサンドウィッチ板を一枚のシェルとして解析できるようにするため、ハニカムサンドウィッチ板の等価弾性パラメータを同定する。これは、ハニカムサンドウィッチ板の加振実験結果等から得られた固有振動数を観測値とし、同じ固有振動数をもつような一枚のシェルの等価弾性パラメータを同定しようとするものである。

4.2 ハニカムサンドウィッチ板の固有値解析 本研究では、ハニカムサンドウィッチ板の観測値として、固有値解析結果を用いる。図 5 のようなハニカムサンドウィッチ板を表面材、心材ともに有限要素分

割を行い、有限要素法固有値解析により固有振動数と固有モードを求める。解析に用いたハニカムサンドウィッチ板は正方形パネルで、材料は表面材、心材ともにアルミとし、境界条件は一端を完全拘束とした。表4に解析に用いたハニカムサンドウィッチ板の諸元を示す。図5のように表面材の寸法、セルサイズおよび箔厚を固定し、ハニカムコア材の板厚を変化させて固有振動数と固有モードを求めた。板厚を変化させたときの固有振動数の変化を図6に、板厚が40mmのときの固有モードを図7(a)に示す。図6よりコア材の厚さが大きくなるにつれて表面材が中立軸から離れ、剛性が高くなることで固有振動数が大きくなっているのがわかる。また、図7(a)から曲げだけでなくせん断により変形している様子がわかる。

4.3 等価剛性同定解析 ハニカムサンドウィッチ板の固有値解析により得られた6次までの固有振動数と固有モードを用いて等価剛性を同定した。同定を行った等価弾性パラメータは、面内の縦弾性係数 E および板厚方向のせん断弾性係数 G_{yz} , G_{zx} の3つである。また、ポアソン比 ν_{xy} は0.3で固定し、面内の

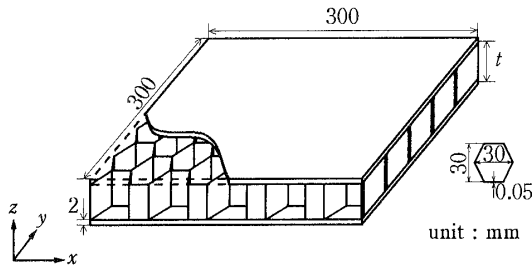


Fig. 5 Honeycomb sandwich panel model

Table 4 Material properties of honeycomb sandwich panel

Aluminum		
Tensile modulus	GPa	72.0
Shear modulus	GPa	26.7
Poisson's ratio		0.35
Density	kg/m ³	1600

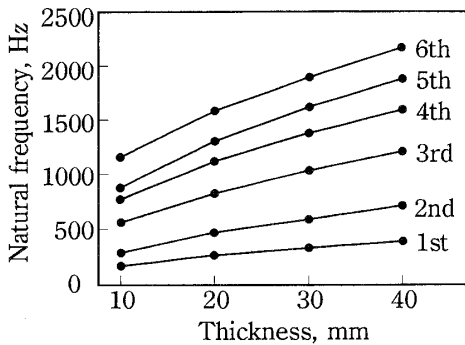
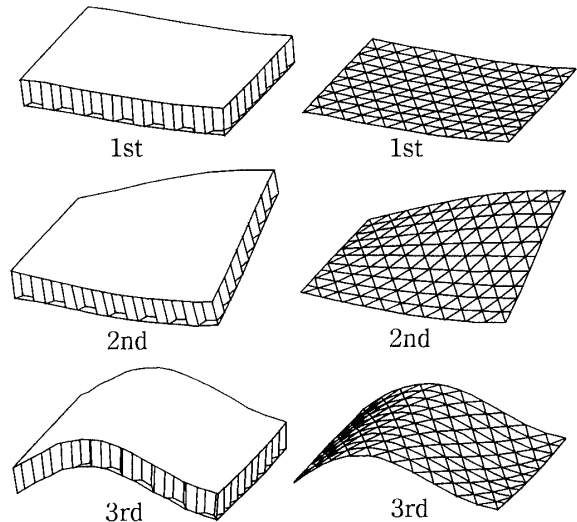


Fig. 6 Natural frequencies of honeycomb sandwich panels

せん断弾性係数 G_{xy} は次式により計算した。

$$G_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu_{xy})} \quad (19)$$

同定解析モデルは図5のハニカムサンドウィッチ板と同じ大きさでハニカムサンドウィッチ板の質量から計算した平均密度をもつ一枚の板である。表5に板厚と平均密度を示す。固有モードはハニカムの上板のみの変位を取得し、等価板の固有モードと比較することにより対応づけを行った。固有モードの比較を示したものが図7である。この図からわかるように、ハニカムサンドウィッチ板と同じように板厚方向にせん断変形する等価剛性モデルを板厚方向のせん断変形を考慮したシェル要素により表すことができることがわかる。板厚が30mmのときの等価剛性同定結果を表6に示す。これより、面内の弾性係数に比べて板厚方向のせん断弾性係数が非常に小さいことがわかる。また、



(a) honeycomb sandwich panel (b) equivalent shell model

Fig. 7 Natural modes

Table 5 Thickness and density of honeycomb sandwich panel

Thickness, mm	Density, kg/m ³
10	538.32
20	296.35
30	205.61
40	158.08

Table 6 Identified equivalent parameters of honeycomb sandwich panel ($t=30\text{mm}$)

Parameters, MPa	Initial	Identified
Tensile modulus E	50000	30300
Shear modulus G_{yz}	100	77.1
G_{zx}	100	64.9

板厚を 10 ~ 40mm まで変化させたときのハニカムサンドウィッチ板全体の板厚 t に対する表面材の板厚 t_f の比と等価弾性パラメータとの関係を表したものが図 8, 図 9 である. これらの図から, 表面材が厚くなるにつれて面内の弾性係数, 板厚方向のせん断弾性係数はともに増加することがわかる.

さらに, 板厚が 30mm のときの等価剛性を用いて, 図 10 に示すような片持ちばりの等価板の固有値解析を行い, ハニカムサンドウィッチ板の固有値解析結果と比較した. 固有モードの比較を図 11 に, 固有振動数の比較を図 12 に示す. これらより, ハニカムの等価剛性シェルモデルが構造解析に有効であり, 本手法によりハニカムサンドウィッチ板の等価剛性が正しく同定されているといえる.

5. 結 言

有限要素法固有値解析と感度解析法を組み合わせた弾性パラメータ同定プログラムを開発し, GFRP 試験片の加振実験結果から弾性パラメータを同定した. 同定された弾性パラメータを用いて GFRP 製の椅子の固有値解析を行い加振実験結果と比較することで, 本プログラムが実材料の弾性パラメータ同定に適用可能であることが明らかとなった. さらに, ハニカムサンドウィッチ板を一次せん断変形理論を導入したシェル要素でモデル化することにより, ハニカムの等価剛性を同定することが可能となった.

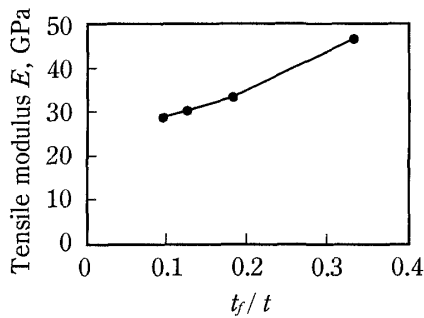


Fig. 8 Identified equivalent elastic parameters, E

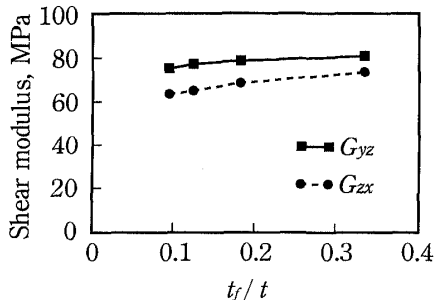


Fig. 9 Identified equivalent elastic parameters, G_{yz}, G_{zx}

文 献

- (1) 福永・関根・糸田, 振動特性に基づく対称積層板の曲げ剛性同定, 機論, 60-578, C(1994), 20-26.
- (2) 斉藤・奥野・河野, アルミニウムハニカム構造板のパラメータ同定と振動減衰特性, 機論, 61-583, C(1995), 135-142.
- (3) 松本・座古・古野, 有限要素法固有値解析を利用した異種積層複合材料の異方性パラメータ同定法, 機論, 62-596, C(1996), 95-100.
- (4) O.C.Zienkiewicz 著, 吉識, 山田 訳, マトリックス有限要素法, (1984), 235-239, 培風館.
- (5) Whitney, J. M. and Pagano, N. J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 37(1970), 1031-1036.
- (6) 久保, 逆問題, (1992), 31-37, 培風館.
- (7) 山川, 最適化デザイン, (1993), 120-125, 培風館

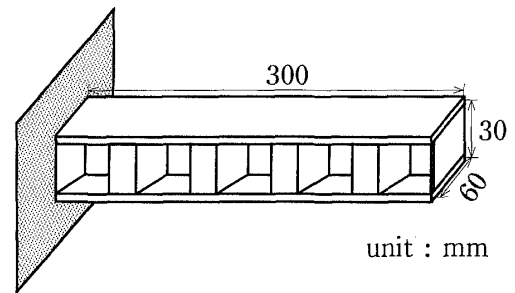
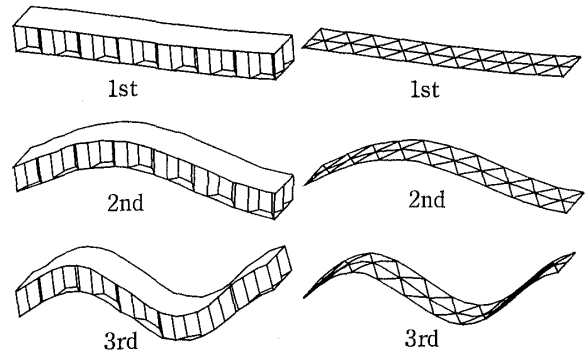


Fig. 10 Cantilever beam model



(a) honeycomb sandwich panel (b) equivalent shell model
Fig. 11 Natural modes of cantilever beam

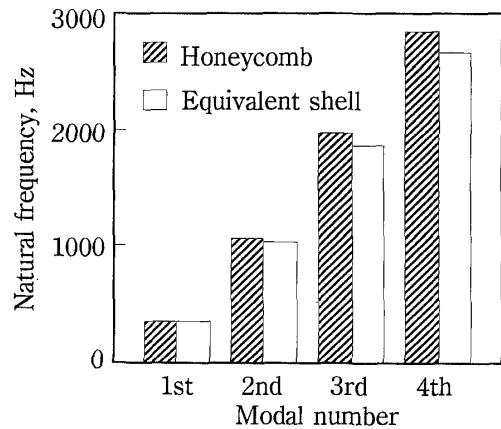


Fig. 12 Natural frequencies of honeycomb sandwich beam and equivalent shell model