

有限要素法固有値解析を利用した
異種積層複合材料の異方性パラメータ同定法*松本金矢*¹, 座古 勝*², 古野雅美*³Identification of Anisotropic Parameters
for Hybrid Laminated Composites
Using FEM Eigenvalue Analysis

Kin'ya MATSUMOTO, Masaru ZAKO and Masami FURUNO

Elastic parameters are essential for structural analysis. The elastic parameters of laminated composite materials, however, are difficult to determine by either theoretical or experimental approaches because of their anisotropy. This paper presents an inverse analysis method to identify anisotropic parameters of laminated composite materials using FEM eigenvalue analysis. A shell element model is formulated for unsymmetrically laminated composites. The modal assurance criterion, MAC, is adopted to compare analyzed vibration modes with observed modes, because the order of vibration modes of anisotropic materials changes according to the ratio of elasticity E_L/E_T . As numerical examples, elastic parameters of single- and multilayered composite plates are identified.

Key Words: Vibration, Inverse Problem, Identification, Elastic Parameters, Sensitivity Analysis, Finite Element Method, Eigenvalue Analysis, Hybrid Laminated Composites, Modal Assurance Criterion

1. 緒 言

FRP等の複合材料は、強化繊維と樹脂マトリックスの組み合わせや含有率さらには積層構成等によって、多種多様な特性が得られる材料である。これら複合材料で構成される構造物を設計するために必要な様々な構造解析手法が開発されているが、いずれの解析手法においても複雑な材料パラメータを正確に把握する必要がある。しかしながら、一般に複合材料の弾性パラメータの測定は金属のような単一材料に比べ困難である。その理由として、強い材料異方性を有するものが多く、材料試験のための試験片作成が難しいことなどが挙げられる。

これに対して逆問題解析法を適用し、材料の弾性変位から材料パラメータを推定しようとする研究が行われている⁽¹⁾。これらの研究では、弾性変位解析結果をもとにパラメータを推定するものが多い。しかしながら、この手法を実際のパラメータ同定問題に適用する場合には、試験片各部の微小変位を高い精度で測定する必要があり、従来の材料試験による物性値測定法

と同様の問題が発生するものと思われる。この問題点を解決するために、材料の振動特性を利用した同定法の研究も行われている^{(2), (3)}。

本研究では構造物の固有振動数を用いて、有限要素法固有値解析結果から材料パラメータを同定する逆解析手法を提案する。これは、加振実験から比較的容易に測定することのできる固有振動数を観測値とし、有限要素法固有値解析法に逆問題解析法を組み合わせることにより、異方性弾性パラメータを推定しようとするものである。本手法を応用し、積層構造材料に対応したシェル要素モデルを用いて、任意の積層角度を持つ異種積層材料の物性値同定が可能な解析プログラムを開発した。本プログラムはFEM固有値解析を利用することにより、任意形状の試験片から材料パラメータを推定することができ、しかも異方性材料に特有な振動モードの入れ替わりにも対応できる特徴を有している。開発したプログラムを用いて積層複合材料の異方性パラメータ同定解析を行い、その有効性の検証を行うとともに、固有振動数の測定誤差が同定精度に与える影響についても考察する。

2. パラメータ同定手法

2・1 概要 本手法は有限要素法と逆問題解析法

* 原稿受付 1995年7月6日。

¹ 正員, 三重大学教育学部 (☎514 津市上浜町1515)。² 正員, 大阪大学工学部 (☎565 吹田市山田丘2-1)。³ 三重大学大学院。

とを組み合わせたものである。有限要素法固有値解析では薄肉構造物に対応したシェル要素を用いており、非対称積層材を解析できるようにモデル化を行っている。逆問題解析法としては、感度解析を利用した最急降下法を用いる。また、異方性パラメータ同定過程において固有モードの順序が入れ替わるという問題が生じる場合があるが、これに対してはベクトルのパターン類似率から求められる MAC (4) を用いて対応づけを行っている。以下それぞれについて説明する。

2.2 非対称積層材のモデル化 非対称積層材では、面内力と面外力による応力が積層板の中央面の上下でつり合わないため、面内力と面外力の連成を考慮する必要がある。そこで、カップリング剛性を導入し、対称積層材だけでなく非対称積層材のパラメータ同定問題も解析可能とした。

面内力と面外力との連成を考慮した一般的な意味での応力-ひずみ関係式は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & D_c \\ D_c & D_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 σ 、 ϵ はそれぞれ面内応力と面内ひずみベクトルを表し、 μ 、 κ は曲げモーメントと曲率ベクトルを表す。 D_p 、 D_c 、 D_b はそれぞれ面内、カップリングおよび面外に対応する応力-ひずみ関係マトリックスであり、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} D_p &= \sum_{i=1}^{NTL} d_i (h_i - h_{i-1}) \\ D_c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NTL} d_i (h_i^2 - h_{i-1}^2) \\ D_b &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{NTL} d_i (h_i^3 - h_{i-1}^3) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 d_i は第 i 番目の層の面内応力-ひずみ関係マトリックス、 h_i は積層材の中央面から第 i 番目の層までの距離を、また NTL は総積層数を表す。

2.3 逆問題解析法 提案する同定手法では、逆問題解析法として感度解析法を用いる。弾性パラメータの変化量に対する固有振動数の変化量を表す感度マトリックス A の各成分を次式により求める。

$$A_{ij} = \frac{\Delta f_j}{\Delta e_i} \quad \text{----- (3)}$$

ここで Δf_j は、 i 番目の弾性パラメータの変化量を Δe_i としたときの j 次の固有振動数の変化量である。

実験的に同定された固有振動数を観測値とし、解析による固有振動数をこれに一致させるために必要なパラメータの変更量ベクトル ΔE は、式 (3) の成分をもつ感度マトリックス A の逆マトリックス A^* および固

有振動数の観測値との差のベクトル ΔF を用いて、

$$\Delta E = \alpha A^* \Delta F \quad \text{----- (4)}$$

として求められる。ここで、 α は発散を防ぐための修正係数であり、1以下の値を用いて収束計算を行う。一般に、感度マトリックス A は正方マトリックスではないため、式 (4) の同定問題は不適切となる。本研究では、この逆マトリックスとして、次に示す特異値分解による Moore-Penrose の一般逆マトリックスを用いる (5)。 A が m 行 n 列であるとき適当な直交マトリックス U, V を選ぶと、 A の逆マトリックス A^* を式 (5) のように分解することができる (6)。

$$A^* = VB^*U^T \quad \text{----- (5)}$$

ここで、 U および V はそれぞれ m 行 m 列、 n 行 n 列のマトリックスであり、 B^* は m 行 n 列の対角マトリックス B の一般逆マトリックスである。

$$B^* = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 & & \\ & 1/\lambda_2 & & & \\ & & \dots & & \\ 0 & & & & 1/\lambda_n & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

λ : A の特異値

また、異方性材料の同定過程において、弾性パラメータの初期推定値によっては、測定されるモードの順序と解析によるモードの順序が異なるという問題が生じる場合があるが、これに対しては MAC (Modal Assurance Criterion) を用いてモードを対応づけることにより適切な同定を可能にした。解析による固有モード x と実験により得られる固有モード x^* より MAC は、

$$MAC = \left(\frac{x_j \cdot x_j^*}{|x_j| \cdot |x_j^*|} \right)^2 \quad \text{----- (7)}$$

となる。この値が1に近い場合に2つの固有モード x 、 x^* を同一であるとみなし、式 (3) の感度マトリックス成分の算出における Δf_j を決定する。 MAC の計算に用いる固有モードは、固有値解析に必要な全ての自由度について測定する必要はなく、モードの分離ができる程度の自由度があれば十分である。

本解析プログラムの流れを図1に示す。まず、データ入力部分では、試験片の形状データと実験により得られた固有振動数、固有モードおよび弾性パラメータの初期推定値を入力する。次に初期推定値である弾性パラメータを微小変化させながら固有値解析を行い、式 (3) における変化量 Δe_i および Δf_j を求める。解析と実験により得られた固有モードどうしの対応づけを行った後、感度マトリックスを作成する。特異値分解を用いて感度マトリックスの一般逆マトリックスを求め、弾性パラメータの同定を行う。同定された弾性パ

ラメータを用いてさらに固有値解析を行い、その結果得られた固有振動数が観測値に収束していれば同定解析を終了し、そうでなければ収束するまで同定解析を繰り返す。

3. 同定解析結果

3.1 概要 提案する同定解析手法の有効性を検証するために、等方性、異方性単層板および積層板の同定解析を行った。そこでは、同定解析のための目標値となる弾性パラメータを入力データとして FEM 固有値解析を行い、得られた固有振動数を同定解析のための観測値とした。等方性板では縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν の 2 つのパラメータを同定し、それらからせん断弾性係数 G を計算により求める。異方性板では繊維方向と繊維直角方向の縦弾性係数 E_L, E_T 、せん断弾性係数 G_{LT} 、ポアソン比 ν_{LT} の 4 つのパラメータを同定する。同定においては等方性板は 4 次、異方性板は 8 次までの固有振動数に注目し、全ての固有振動数において観測値との差が 0.5% 以内になったときに収束したと判断する。観測値を求めるための固有値解析において入力した弾性パラメータ \bar{P}_i に対する同定された弾性パラメータ P_i の誤差として次式に示す誤差ノルム e を求め、同定精度を評価する。

$$e = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\bar{P}_i - P_i}{\bar{P}_i} \right)^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

解析例として、まず長方形板モデルを用いて単層材の同定解析を行い、解析モデルの形状による局所解の分布について考察を行った後、L 字型モデルを用いて積層材および異種積層材の同定解析を行った。また、測定誤差が同定結果に与える影響についても調べた。

3.2 長方形板のパラメータ同定 全周が単純支持された等方性および異方性単層材の同定解析を行った。モデルは、縦 250mm、横 300mm、板厚 1mm の長方形板で、異方性板の繊維配向角度は 0° とした。また、有限要素分割は縦 5 分割、横 6 分割で 42 節点 60 要素とした。

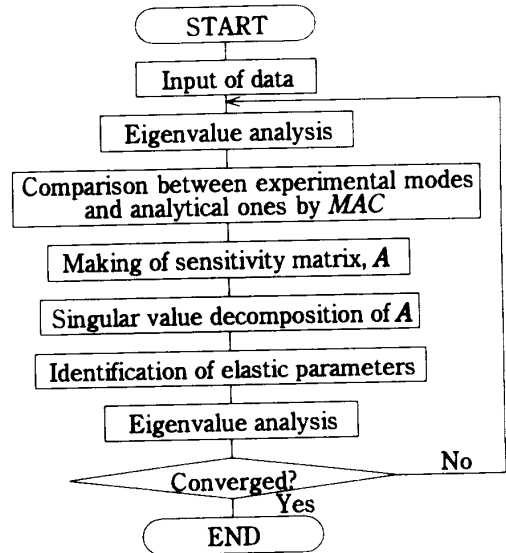


Fig.1 Flow chart of identification

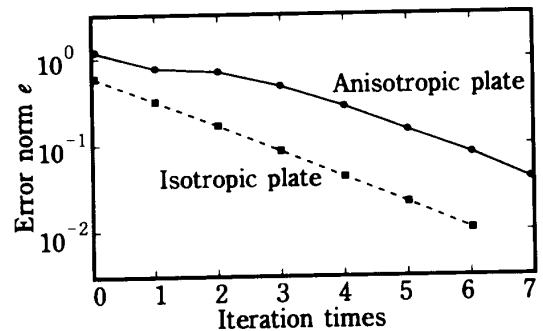


Fig.2 Convergence of elastic parameters

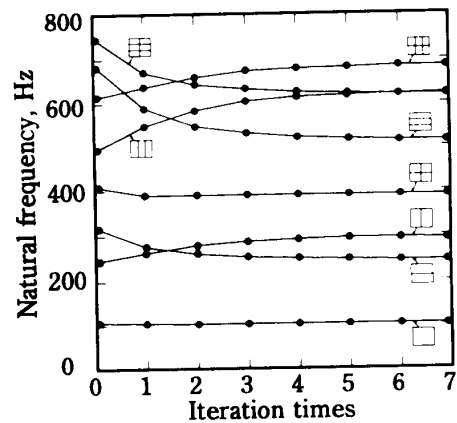


Fig.3 Natural frequencies of an anisotropic plate during identifying process

Table1 Identified parameters of rectangular plate

Parameters		Initial	Target	Identified	Error %
Isotropic plate					
Tensile modulus	E GPa	100.0	200.0	197.9	1.1
Poisson's ratio	ν	0.400	0.300	0.300	0.0
Anisotropic plate					
Tensile modulus	E_L GPa	100.0	200.0	198.8	0.6
	E_T GPa	100.0	50.0	50.2	0.4
Shear modulus	G_{LT} GPa	10.0	17.0	16.8	1.2
Poisson's ratio	ν_{LT}	0.300	0.250	0.260	4.0

図2はパラメータの収束状況として、収束計算の繰り返し回数に対する誤差ノルムの変化を表したものである。また、表1には目標値と弾性パラメータの初期値および同定結果を示す。図2から、等方性材はほぼ直線的に収束しているが、異方性材ではやや非線形性が表れているのがわかる。また表1によると、異方性材のポアソン比については誤差は4%あるものの弾性係数については1%程度で、高精度の同定が可能であるといえる。また、図3は異方性板の同定過程における固有振動数の変化を示したものであるが、初期推定値を等方性として入力したために、パラメータの推移によりモードの次数が入れ替わっているのが分かる。すなわち、初期推定段階で3,7,8次のモードが、実際にはそれぞれ2,5,6次のモードに対応していることになる。このような異方性材料の材料定数同定においては、モードの整合性を確認する必要があり、MACを用いる本手法が有効であることを示している。

3・3 形状変更による収束性の改善 前節において、長方形板モデルに本同定法を適用することによって異方性弾性パラメータの同定が可能であることが明らかとなったが、異種積層材のような複雑な材料の同定においては収束性が悪化するなどの問題が発生する。その原因として同定パラメータが局所解に収束し、大域的な最適解に達しないということが考えられる。この問題を明らかにするために、パラメータと固有振動数の関係を調べたものが図4である。これらは、先程用いた異方性長方形板モデルの縦弾性係数を変化させたものと、せん断弾性係数、ポアソン比を変化させたものについて固有値解析を行い、その結果得られた8次までの固有振動数について、観測値である固有振動数との差の二乗和の平方根を誤差ノルムとして表したものであり、図4(b)ではいくつかの局所解が存在することがわかる。この問題を回避する手段として、弾性パラメータと固有振動数の対応を一意的にするために解析モデルをL字型板に変更し、解析モデルの形状の対称性をなくす方法を用いる。L字型板について長方形板と同様に固有振動数とパラメータの関係を調べたものが図5である。この図から、形状の変更により局所解はなくなり、誤差ノルムは真の解に向かって単純減少していることがわかる。このようなモデルを用いれば、局所解におちいることなく安定した同定が可能となる。

この方法を利用して、図6に示すようなL字型板による対称積層材の同定解析を行った。繊維配向角度 θ を 15° 、 30° 、 45° の3種類とし、境界条件はL字型板の上端および右端部を単純支持としたものと固

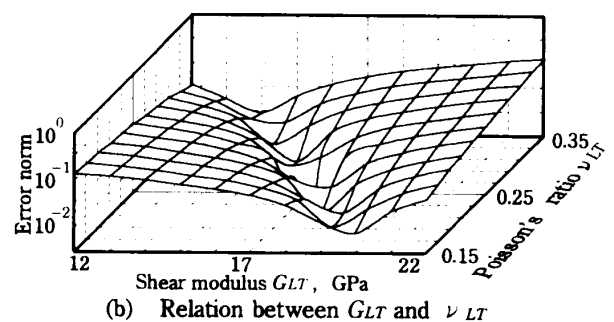
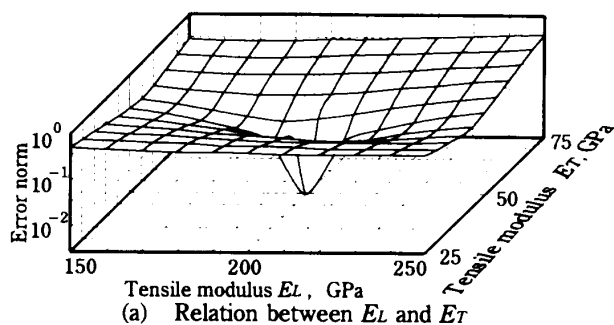


Fig.4 Error norm of natural frequencies around the target value(rectangular plate)

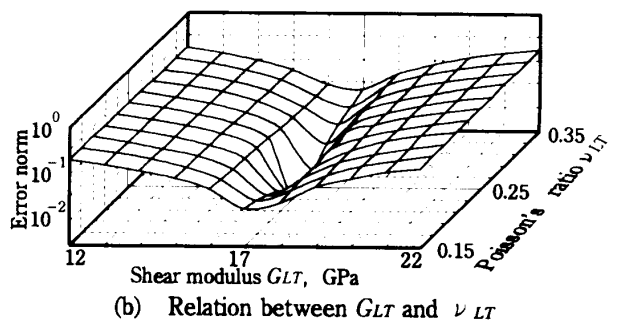
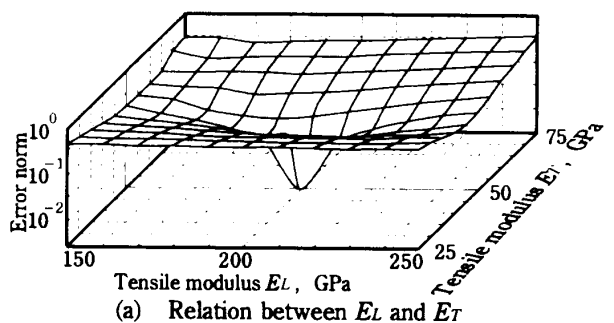


Fig.5 Error norm of natural frequencies around the target value(L-shaped plate)

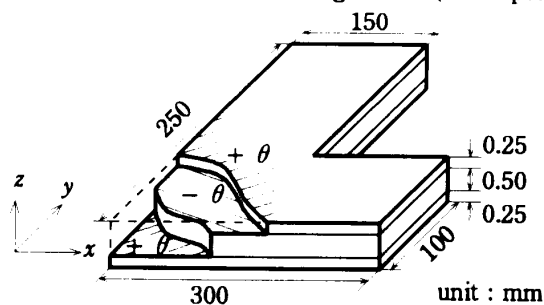


Fig.6 L-shaped laminated plate model for parameter identification

Table2 Identified parameters of laminated plate

Parameters			Target	$\theta=15^\circ$	Error%	$\theta=30^\circ$	Error%	$\theta=45^\circ$	Error%
<supported>									
Tensile modulus	E_L	GPa	200.0	199.5	0.3	198.7	0.7	198.5	0.8
	E_T	GPa	50.0	50.6	1.2	50.6	1.2	50.6	1.2
Shear modulus	G_{LT}	GPa	17.0	16.7	1.8	16.7	1.8	16.8	1.2
Poisson's ratio	ν_{LT}		0.250	0.252	0.8	0.254	1.6	0.265	6.0
<fixed>									
Tensile modulus	E_L	GPa	200.0	200.0	0.0	198.3	0.9	197.0	1.5
	E_T	GPa	50.0	50.7	1.4	51.1	2.2	50.9	1.8
Shear modulus	G_{LT}	GPa	17.0	17.1	0.6	16.1	5.3	16.7	1.8
Poisson's ratio	ν_{LT}		0.250	0.227	9.2	0.273	9.2	0.275	10.0

Table3 Identified parameters of hybrid laminated plate

Parameters			Target	$\theta=15^\circ$	Error%	$\theta=30^\circ$	Error%	$\theta=45^\circ$	Error%
<supported>									
Tensile modulus	E_L	GPa	200.0	192.8	3.6	192.5	3.8	186.7	6.7
	E_T	GPa	50.0	54.2	8.4	54.2	8.4	57.6	15.2
Shear modulus	G_{LT}	GPa	17.0	16.3	4.1	16.3	4.1	15.4	9.4
Poisson's ratio	ν_{LT}		0.250	0.274	9.6	0.284	13.6	0.305	22.0
<fixed>									
Tensile modulus	E_L	GPa	200.0	193.1	3.5	192.8	3.6	186.4	6.8
	E_T	GPa	50.0	54.1	8.2	53.7	7.4	56.5	13.0
Shear modulus	G_{LT}	GPa	17.0	16.5	2.9	16.5	2.9	16.4	3.5
Poisson's ratio	ν_{LT}		0.250	0.255	2.0	0.273	9.2	0.286	14.4

定支持としたものの2種類とした。表2に同定結果を示す。さらに表面層を材料定数が既知のアルミ板、中間層を未知の複合材料とした異種積層材L字型板の同定解析も行った。同定結果として得られた弾性パラメータと目標値との誤差を表3に示す。

表2によると、対称積層材についてはL字型板を用いた効果により、弾性係数は数%以内の誤差で同定できていることがわかる。また表3によると、異種積層材についても弾性係数は10%程度の誤差で目標値に収束していることがわかる。ポアソン比については誤差が大きく、精度がやや低下している。これは、固有振動数は表面の材料に大きな影響を受け、中間層である複合材料のパラメータを変化させても固有振動数に対する影響が少ないためであるが、終了条件の固有振動数の許容誤差を小さくし、収束計算の繰り返し数を増大させることでさらに高い精度で材料定数を同定することも可能である。

このように、FEMを用いることにより収束性の良い形状のモデルの解析ができるため、異種積層材のような複雑な材料の同定も可能となる。

3・4 観測誤差と同定精度の関係 加振実験結果に混入する測定誤差が同定結果に与える影響を明らかにするために、観測値として用いる固有振動数に一樣乱数による誤差を与えて同定結果の変化を調べる。真

の固有振動数を f_i 、0から1までの一樣乱数を r_i 、与える誤差の最大値を ϵ_{max} としたとき、誤差を含んだ観測値 \bar{f}_i を次式で定義する。

$$\bar{f}_i = \epsilon_{max} (2r_i - 1) f_i \quad (9)$$

解析は繊維配向角度 θ を 15° とした単層異方性材を図6に示すL字型モデルの形状で行った。境界条件は、前項と同様、上端と右端部を単純支持および固定支持としたものの2種類とし、修正係数 α を0.5、収束計算の繰り返し回数は10回とした。測定誤差の最大値 ϵ_{max} が0.1、0.5、1.0、5.0%の場合に、それぞれの測定誤差に対し100試行解析してパラメータの誤差の平均をとった。

同定結果として各パラメータの誤差を表したものが図7および図8である。これらの図によると境界条件によらずポアソン比の誤差が大きくなっているが、測定誤差5%の場合においても弾性係数は10%程度の誤差で同定できることが分かる。

4. 結 言

本研究では、振動特性から弾性パラメータを同定するために、有限要素法に感度解析法を組み合わせた逆問題解析プログラムを開発した。その中で、異方性板同定過程において生じるモードの入れ替わりに対して、MACを用いることでモードを対応づけた。また、本

手法では FEM によるモデル化を行っているため、局所解の影響を受けにくい形状の試験片を用いることができ、異種積層材のような複雑な材料の同定も精度良く行うことが可能である。

さらに、加振実験結果に含まれる測定誤差が各パラメータの同定精度に与える影響を明らかにした。その結果、ポアソン比については、測定誤差の影響により同定精度の低下が発生するが、弾性係数については十分精度よく同定できることがわかった。

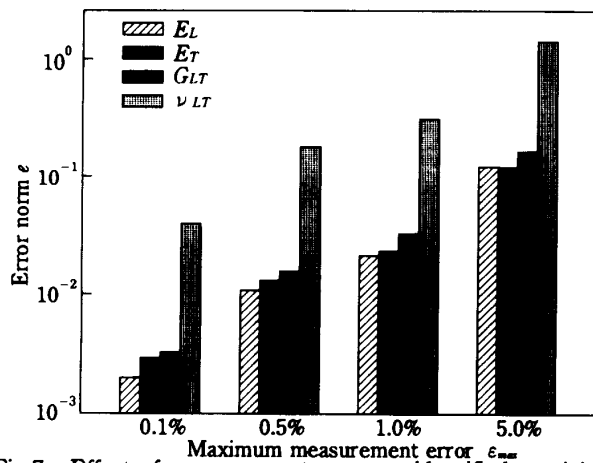


Fig.7 Effect of measurement error on identified precision (single layered anisotropic plate, supported)

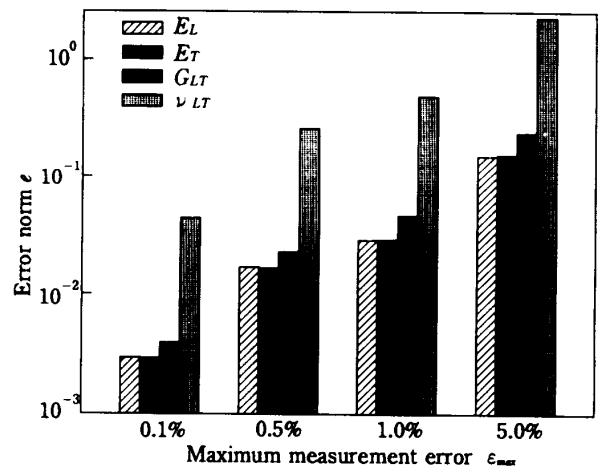


Fig.8 Effect of measurement error on identified precision (single layered anisotropic plate, fixed)

文 献

- (1) 例えば、石田・杉山・村瀬、拡張カルマンフィルタによる異方性弾性パラメータ同定逆解析、機論、60-570, A(1994),153-157.
- (2) 斉藤・奥野・河野、アルミニウムハニカム構造板のパラメータ同定と振動減衰特性、機論、61-583, C(1995),135-142.
- (3) 福永・関根・桑田、振動特性に基づく対称積層板の曲げ剛性同定、機論、60-578, C(1994),20-26.
- (4) 平井・松本・岩原・山川・長松、簡略化モデルによるシリンダブロックの固有モードの識別と振動特性の最適化、機論、59-567, C(1993),49-56.
- (5) 久保、逆問題、(1992),31-37, 培風館.
- (6) 大野・磯田、数値計算ハンドブック、(1990),763-768, オーム社.