

## 積層複合材料円筒ビームの振動解析に関する研究\*

松 本 金 矢<sup>\*1</sup>, 座 古 勝<sup>\*2</sup>, 井 上 孝 治<sup>\*3</sup>

## Study on Vibration Analysis for Laminated Composite Pipings

Kin'ya MATSUMOTO, Masaru ZAKO and Kohji INOUE

A simplified FEM vibration analysis program is developed for laminated composite cylindrical beam structures. In this program, a composite cylinder which has various diameters and thicknesses laminated in various fiber orientations is modeled by a single beam element to decrease the degree of freedom of the vibration problems. Therefore, eigenvalues and transfer functions of laminated composite cylinders can be analyzed without influence from the aspect ratio of the element. In the transfer function analysis, a proportional viscous damping is assumed and a method of surmising theoretical damping is utilized. Using this program, the eigenvalue and the transfer function of CFRP golf club shafts are analyzed. And compared with the experimental results obtained by the impact test. As a result, the validity of this program is proven because the analytical results show good agreement with the experimental ones.

**Key Words:** Vibration, Laminated Composite, Cylindrical Beam, FEM, Eigenvalue Analysis, Transfer Function Analysis, Damping, Golf Club Shaft, Impact Test

## 1. はじめに

FRP に代表される纖維強化形複合材料は、近年、様々な工業製品に応用されるようになり、その力学的挙動を解析する手法の確立が望まれている。特に、その高い比剛性や比強度等の材料特性を利用したスポーツ用品が増え、高性能化が進むにつれて、その振動特性が注目されてきている。<sup>(1)</sup>これまで著者らは、任意に積層された複合材料構造物の剛性マトリックスを簡便にモデル化する手法<sup>(2)</sup>について報告してきた。

有限要素法を用いて振動特性を明らかにする上で重要なのは、複雑な異方性を考慮した剛性マトリックスと減衰マトリックスのモデル化手法であるが、確立された定式化の理論がある剛性マトリックス、質量マトリックスに対して、減衰特性を表す減衰マトリックスについては、多くの場合、実験的な方法により構造物の減衰特性を求め、解析に用いるといった方法が採用されている。しかしながら、ゴルフクラブシャフトのように振動特性が機能や使用感覚に大きく影響する製品の設計においては、開発の段階でその振動伝達

関数特性を把握する必要があり、減衰特性を考慮した解析モデルの開発が望まれている。

このような背景から、本研究では積層複合材料として比較的需要の大きい円筒ビーム構造材を対象とした有限要素法振動特性解析プログラムを開発した。本プログラムでは、理論的に減衰能を推定する方法を採用し、比例粘性減衰の仮定を導入した伝達関数解析も可能である。本プログラムを用いて、CFRP 製ゴルフクラブシャフトの解析を行い、加振実験結果との比較を行うことによって、その有効性を検証した。

## 2. 解析手法

ゴルフクラブシャフトのような任意角度に積層された異種積層円筒形構造材をビーム要素によりモデルリングする手法を開発することにより、アスペクト比による解析精度の低下を改善し、しかも大幅な自由度の低減を行って計算速度の向上を図った。ここでは、そのモデル化手法および、減衰特性を推定し伝達関数解析を行う手法について説明する。

**2・1 ビーム要素によるモデル化手法** 図1に示すような長さ  $l$  の積層円筒の微小振動を考える。変位が微小で断面変化がなく、伸び、曲げおよびねじり変位が独立すると仮定すると、固有値解析のための剛性、

\* 原稿受付 1995年3月20日。

<sup>\*1</sup> 正員、三重大学教育学部 (514 津市上浜町1515)。

<sup>\*2</sup> 正員、大阪大学工学部 (565 吹田市山田丘2-1)。

<sup>\*3</sup> 三重大学大学院。

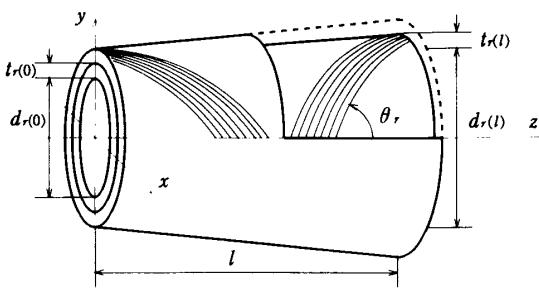


図1 積層複合材料円筒用のビーム要素

質量マトリックスは、各変位に対する剛性、質量マトリックスの組み合わせとして表すことができる。<sup>(3)</sup> それぞれのマトリックスを列挙すると、剛性マトリックスは、

$$\left. \begin{aligned} K_w &= \sum_{r=1}^{NTL} \pi E_r \int d_r(z) t_r(z) \mathbf{B}_w^T \mathbf{B}_w dz \\ K_u &= \sum_{r=1}^{NTL} E_r \int I_r(z) \mathbf{B}_u^T \mathbf{B}_u dz \\ K_v &= \sum_{r=1}^{NTL} E_r \int I_r(z) \mathbf{B}_v^T \mathbf{B}_v dz \\ K_s &= \sum_{r=1}^{NTL} G_r \int I_{pr}(z) \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s dz \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。また同様に、それぞれの質量マトリックスは、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} M_w &= \sum_{r=1}^{NTL} \rho_r \int d_r(z) t_r(z) \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dz \\ M_u &= \sum_{r=1}^{NTL} \rho_r \int A_r(z) \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dz \\ M_v &= \sum_{r=1}^{NTL} \rho_r \int A_r(z) \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v dz \\ M_s &= \sum_{r=1}^{NTL} \rho_r \int I_{pr}(z) \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s dz \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{B}$  は変位 - ひずみ関係マトリックス、 $\mathbf{N}$  は形状関数であり、添え字  $w, u, v$  よび  $s$  は、それぞれ  $z$  軸方向の伸び、 $x$  軸方向の曲げ、 $y$  軸方向の曲げおよび  $z$  軸まわりのねじりを表す。また、 $NTL$  は総積層数を表しており、 $E_r, G_r$  および  $\rho_r$  は、それぞれ第  $r$  番目の層の縦弾性係数、せん断弾性係数および密度である。 $t_r(z), d_r(z), A_r(z), I_r(z)$  および  $I_{pr}(z)$  は各層の板厚、内径、断面積、断面二次モーメントおよび断面二次極モーメントを表し、これら全ては断面形状の変化に対

応するために座標  $z$  の関数となっている。 $z$  軸方向伸びおよび  $z$  軸まわりのねじり変位は、座標  $z$  の一次関数で、また  $x$  軸、 $y$  軸方向曲げ変位は三次関数で近似している。

$z$  軸方向の縦弾性係数は積層理論により座標変換式から求められるが、フィラメントワインディング法等により積層されている場合には、せん断変形係数  $m_1$  により補正する必要がある。積層角度  $\theta$  の場合の  $z$  軸方向の縦弾性係数  $E_z'$  は、

$$E_z' = \frac{E_L}{(E_L/E_z) - m_1^2 (G_{zx}/E_L)} \quad (3)$$

となる。ここで、 $E_L, E_T$  は、それぞれ繊維方向、繊維直角方向の縦弾性係数を表しており、複合則により次式より求める。

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (4)$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \quad (5)$$

また、せん断変形係数  $m_1$  は、

$$m_1 = - \left[ \sin 2\theta \left( \cos^2 \theta - \frac{E_L}{E_T} \sin^2 \theta \right) - \cos 2\theta \sin \theta \cos \theta \left( \frac{E_L}{G_{LT}} - 2\nu_{TL} \right) \right] \quad (6)$$

として計算される。<sup>(4)</sup> ここで、 $E_m, E_f$  および  $E_z$  は、それぞれマトリックス、強化繊維および修正前の  $z$  軸方向の縦弾性係数を表している。 $G_{zx}, G_{LT}, \nu_{TL}$  は、それぞれ  $zx$  方向、 $LT$  方向のせん断弾性係数、 $TL$  方向のポアソン比を表している。

式 (1) ~ (6) により計算された各方向に対応する剛性、質量マトリックスを組み合わせることにより、局所座標系における各要素の剛性マトリックス  $\mathbf{K}_e$ 、質量マトリックス  $\mathbf{M}_e$  が次式のように得られる。

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_w & & & 0 \\ & \mathbf{K}_u & & \\ & & \mathbf{K}_v & \\ 0 & & & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_w & & & 0 \\ & \mathbf{M}_u & & \\ & & \mathbf{M}_v & \\ 0 & & & \mathbf{M}_s \end{bmatrix} \quad (8)$$

これら各要素の剛性、質量マトリックスを次式のように全体座標系に座標変換し、全要素について足し合

わせることにより、構造物全体の剛性マトリックス  $\mathbf{K}^*$ 、質量マトリックス  $\mathbf{M}^*$  が得られる。

$$\mathbf{K}^* = \sum_{e=1}^{NTE} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_e \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_e \begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_e \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{M}^* = \sum_{e=1}^{NTE} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_e \end{bmatrix}^T \mathbf{M}_e \begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_e \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし、

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ l_{yx} & l_{yy} & l_{yz} \\ l_{zx} & l_{zy} & l_{zz} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 $NTE$  は総要素数を表しており、 $(l_{xx}, l_{xy}, l_{xz})$  は、全体座標系  $(X, Y, Z)$  に対する局所座標系  $x$  軸の方向余弦であり、 $(l_{yx}, l_{yy}, l_{yz}), (l_{zx}, l_{zy}, l_{zz})$  も同様である。このモデル化手法により、複雑な積層角度を有する積層円筒構造物を、単純なビーム要素でモデリングすることができ、計算処理の合理化が可能となる。

式(9)、(10)により得られた  $\mathbf{K}^*, \mathbf{M}^*$  より、不減衰系の運動方程式が次式のように得られる。

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}^* \mathbf{u}^* = \mathbf{f}^* \quad (12)$$

ここで  $\mathbf{u}^*$  は全体座標系における節点変位ベクトルであり、 $\mathbf{f}^*$  は全体座標系における節点力ベクトルを示している。

運動方程式(12)より、固有値問題は次式のように表される。

$$\mathbf{K}^* \boldsymbol{\delta}_n - \lambda_n \mathbf{M}^* \boldsymbol{\delta}_n = \mathbf{0} \quad (13)$$

ここで  $\lambda_n$  は第  $n$  次の固有値、 $\boldsymbol{\delta}_n$  はそれに対応する固有ベクトルである。

固有値解析には、サブスペース法を利用し、連立方程式の解法としてスカイライン法を併用したコレスキー分解法を用いることにより、パーソナルコンピュータを用いても実用的な構造物の解析が可能となっている。

**2.2 伝達関数解析** 比例粘性減衰の仮定および理論的に減衰能を推定する方法<sup>[5]</sup>を用いて、纖維強化形複合材料の伝達関数を求めるプログラムを作成した。

各要素における第  $n$  次の減衰比  $\zeta_n$  は、以下の式によって導かれる。

$$\zeta_n = \frac{\phi_z}{2} \quad (14)$$

ここで、 $\phi_z$  は  $z$  軸方向の減衰能を表しており、次式によって導かれる。

$$\phi_z = E_z' \left[ \frac{\phi_T}{E_T} \sin^4 \theta + \frac{\phi_{LT}}{G_{LT}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \quad (15)$$

ここで  $\phi_T$  は纖維直角方向の減衰能を表しており、 $\phi_{LT}$  はせん断に対する減衰能を表している。式(15)において、 $\theta, E_z', E_T, G_{LT}$  は入力データおよび内部計算によって明らかであるので、未知数は  $\phi_z, \phi_T, \phi_{LT}$  となる。式(15)において纖維配向角  $\theta$  を  $90^\circ$  とすると、 $\phi_z = \phi_T$  となることから、文献(5)に示された纖維配向角と減衰能との関係より  $\phi_T$  を 0.07 とした。同様に、文献(5)に示された纖維含有率によるマトリックスおよび纖維直角方向の減衰能の関係より、

$$\phi_m = \frac{\phi_T}{0.75} \quad (16)$$

とした。これより  $\phi_{LT}$  は、 $G = G_f/G_m$  として、

$$\phi_{LT} = \frac{\phi_m (1 - V_f) \{(G+1)^2 + V_f(G-1)^2\}}{\{G(1-V_f) + 1 - V_f\} \{G(1-V_f) + 1 + V_f\}} \quad (17)$$

となる。ここで  $V_f$  は纖維含有率を表している。上記の式(16)、(17)より  $\phi_T, \phi_{LT}$  を式(15)に代入することにより  $\phi_z$  が導かれ、減衰比  $\zeta_n$  を求めることができる。

第  $P$  次までの固有値を用いて計算される伝達関数アクセラランスのゲイン  $A$  と位相  $a$  は、モード解析法<sup>[6]</sup>により次式で求めることができる。

$$A(\omega) = A^{(r)}(\omega) + jA^{(i)}(\omega) \quad (18)$$

$$\tan a = \frac{2\zeta_n \beta_n}{1 - \beta_n^2} \quad (19)$$

ここで、 $\beta_n = \frac{\omega}{\Omega_n}$  である。また、

$$\left. \begin{aligned} A^{(r)}(\omega) &= \sum_{n=1}^P \frac{-\Omega_n^2 \beta_n^2 (1 - \beta_n^2)/k_n}{(1 - \beta_n^2)^2 + 4\zeta_n^2 \beta_n^2} \\ A^{(i)}(\omega) &= \sum_{n=1}^P \frac{-2\zeta_n^2 \beta_n^3/k_n}{(1 - \beta_n^2)^2 + 4\zeta_n^2 \beta_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

である。ここで、(r), (i) は実部、虚部を、 $\omega$  は周波数、 $\Omega_n$  は第  $n$  次の固有角振動数を表している。また  $kn$  は等価剛性であり、モード剛性  $\kappa_n$  および固有ベクトルの加振点  $h$  と応答点  $o$  の成分  $\psi_{nh}$ ,  $\psi_{no}$  を用いて、

$$k_n = \kappa_n / \psi_{nh} \psi_{no} \quad (21)$$

として計算される。

この伝達関数解析では、固有値解析の結果を読み込み、加振点および応答点を与えることにより、計算することが可能である。

### 3. 加振実験

開発した解析プログラムの有効性を検証するために、CFRP 製ゴルフクラブシャフトの加振実験を行い、解析結果と比較した。

試験体は図 2 に示すような長さ 1150mm、内径 4.0 ~ 13.5mm、板厚 1.15 ~ 2.25mm で断面形状が連続的に変化するテーパ状の 2 層積層構成であり、高強度炭素繊維 (T-300) および超高弾性炭素繊維 (M-40) と Epoxy を用いた CFRP 製ゴルフクラブシャフトである。フィラメントワインディング製法により製作された積層構成の異なる 2 種類の試験体を用いて加振実験を行った。試験体に用いた材料を表 1 に、材料定数を表 2 に示す。

試験体を 2 本の糸で水平に吊ることにより、完全自由の境界条件で加振実験を行った。加振は小型インパ

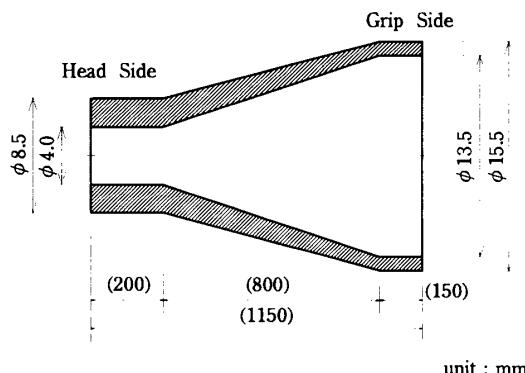


図 2 CFRP ゴルフクラブシャフトモデル

表 1 試験体の材料構成

Model	Inner layer	Outer layer
No.1	Epoxy+T-300	
No.2	Epoxy+M-40	Epoxy+T-300

表 2 試験体材料の弾性パラメータ

Elastic parameters	Epoxy+	Epoxy+
	T-300	M-40
Fiber volume fraction	$V_f$	0.55
Tensile modulus GPa	$E_f$	235
	$E_m$	2.4
	$E_L$	130
	$E_T$	5.3
Shear modulus GPa	$G_{LT}$	11.0
Poisson's ratio	$\nu_{LT}$	0.3
		0.3

ルスハンマを用いて行い、試験体の先端に取り付けた加速度ピックアップにより応答加速度を測定した。入力および応答を FFT アナライザに取り込み、伝達関数を求め、1 次から 3 次までの固有振動数を同定した。

開発したプログラムにより、加振実験に用いた試験体をモデル化し固有値解析および伝達関数解析を行った。解析モデルは軸方向に 39 節点 38 要素に分割し、境界条件は完全自由として解析した。軸対称構造であるため各モードについて重根が存在し、完全自由境界の場合には剛体モードも含まれることから、1 次から 15 次までの固有値を求め、実験結果と対応するモードについて調べた。

実験結果と解析結果との比較として、1 次から 3 次の曲げ振動の固有振動数を表 3 および表 4 に、また伝達関数を図 3 および図 4 にそれぞれ示す。

表 3 および表 4 によると、いずれのシャフトにおいても固有振動数の誤差は 5% 以下であり、精度良く解析されていることがわかる。また、図 3 および図 4 をみると、加振実験においては指標関数ウインドウを用いたことにより、ゲインが小さくなっているが、その点を考慮すると、実験結果と解析結果は比較的良い一

表 3 CFRP シャフトの固有振動数の比較 (No.1)

Mode	Natural frequency [Hz]		Error (%)
	Experiment	Analysis	
1st	60.0	61.8	3.0
2nd	168.8	170.1	0.8
3rd	340.0	340.9	0.3

表 4 CFRP シャフトの固有振動数の比較 (No.2)

Mode	Natural frequency [Hz]		Error (%)
	Experiment	Analysis	
1st	60.0	63.1	5.2
2nd	178.8	179.4	0.3
3rd	360.0	361.6	0.4

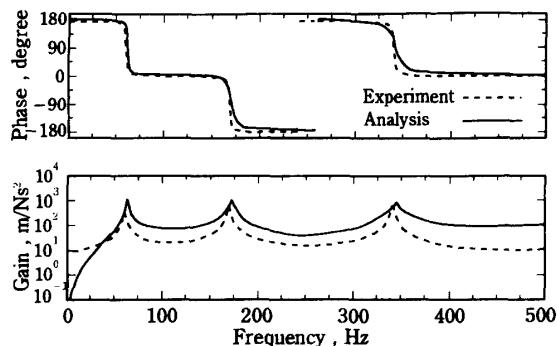


図3 CFRP シャフトの伝達関数の比較 (No.1)

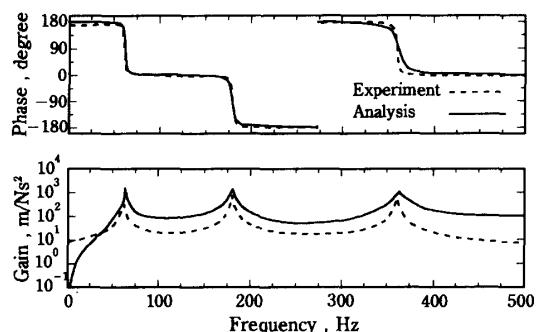


図4 CFRP シャフトの伝達関数の比較 (No.2)

致を示しているといえる。また、解析結果において、25Hz 以下のゲインが極端に低くなっているのは、剛体モードにおける変位成分を除去しているためである。

これらの事から、比較的強い異方性を有する複合材料構造物を対象とした解析結果と実験結果の比較としては、いずれの結果も良い一致を示しており、本解析手法の有効性を証明するものと考えられる。

#### 4. 結 言

異種積層複合材料円筒のための有限要素法固有値解析プログラム、および伝達関数解析プログラムを開発した。本来、複雑な三次元構造物であるハイブリッド円筒材をビーム要素でモデル化することにより、大幅な自由度の低減を行い、パソコンコンピュータでの実用的な固有値解析が行えるようになった。また、伝達関数を求めることにより、さらに詳しく振動特性を評価することが可能となった。開発したプログラムの有効性を検証するために、直徑および板厚が連続的に変化する CFRP 製ゴルフクラブシャフトの加振実験を行い、本プログラムによる解析と結果を比較したところ、固有振動数および伝達関数が良く一致することから、強い異方性を有する複合材料円筒の振動解析に対して、本プログラムが有効であることが明らかとなった。

なお本研究を進めるに当たり、日東電工株式会社より、試験体の製作など多くの御協力をいただいたことをここに記し、感謝の意を表する。

#### 参考文献

- (1) 芦田他 3 名、ゴルフクラブのスイング中の動的挙動、日本機械学会 [ No.940-59(5) ] シンポジウム講演会論文集, p.86-90, (1994)
- (2) 松本、座古、非対称積層構造材の振動特性解析法の研究、機論, 58-550, C, (1992).
- (3) 鶩津他 4 名、有限要素法ハンドブック I 基礎編、培風館, p.206-220, (1989).
- (4) 藤井、座古、複合材料の破壊と力学、実教出版, p.29, (1988).
- (5) D. A. Robert, Damping Properties Analysis of Composites, Composites, Vol.1, p.206.
- (6) 長松、モード解析、培風館, p.71, (1985).