

## 積層複合材料の非定常熱応力解析に関する研究\* (ガラス転移温度を考慮した熱応力解析モデル)

松本金矢\*<sup>1</sup>, 座古 勝\*<sup>2</sup>, 田中 茂\*<sup>3</sup>

### Transient Thermal Stress Analysis for Laminated Composite Materials (Thermal Stress Analysis Model Considering Glass Translation)

Kin'ya MATSUMOTO, Masaru ZAKO and Shigeru TANAKA

Transient heat conduction and thermal stress analysis of hybrid laminated composite materials are very important for composite structure design because they are heated during the manufacturing process. Anisotropy of thermal conductivity must be considered in heat conduction analysis of such composite materials as FRP. Assuming that heat conducts uniformly in the normal direction in thin structures they can be modeled by thin shell elements. In thermal stress analysis of unsymmetrically laminated shells, the coupling effect between plane stress and bending stress must be considered. In this paper, an FEM transient heat conduction and thermal stress analysis system taking glass translation into consideration for hybrid unsymmetrically laminated shell structures are described. As a numerical example, the thermal stress of CFRP laminated plates are investigated. As a result, it is recognized that thermal stress of laminated composite materials is sensitive to glass translation.

**Key Words:** Transient Heat Conduction, Thermal Stress, Unsymmetrically Laminated Composites, FEM, Shell Elements, Coupling Effect, Glass Translation

#### 1. はじめに

ハイブリッド積層複合材料は成形時に加熱処理され、また航空・宇宙分野など温度条件の厳しい分野での需要が多いため、その熱伝導・熱応力問題は重要である。一般に、繊維強化複合材料の熱伝導率は、金属材料に比較して小さく温度差が生じやすいため、過渡的な熱伝導状態を求める非定常解析が必要であり、しかも熱伝導率の異方性を考慮しなければならない。また、線膨張係数や弾性特性の異方性から強い熱応力が発生する可能性があり、特に非対称積層板では面内力と面外力とのカップリングによる面外変形が生じる。さらに、高分子系の複合材料の場合、マトリックス材料のガラス転移点( $T_g$ 点)を越えると剛性が急激に低下するため、加熱成形時の冷却状態の不均一さによって残留応力が発生し、それが原因で強度の低下や成形品の変形等の問題が起こる。したがって、これらを考慮した解析手法を確立することが望まれている。

これまで、熱伝導・熱応力解析については多くの研

究がなされているが、異方性材料を取り扱ったものは少なく<sup>(1)~(4)</sup>、しかもその多くは定常温度場を仮定したものであり非定常熱伝導問題を取り扱ったものは少ない<sup>(5)</sup>。積層板の熱応力解析では谷川ら<sup>(2)</sup>がクロスプライ長方形板の非定常熱伝導・熱応力問題を明らかにしているが、有限要素法を用いた積層複合材料シェルの非定常熱伝導・熱応力問題を統一的に扱えるシステムの開発は遅れていると思われる。

熱伝導・熱応力問題の解析を有限要素法で行う場合、積層複合材料は板厚方向に異なる物性値を有する材料であるため、三次元ソリッド要素を用いる必要があるが、解析の規模が極端に大きくなりアスペクト比による誤差が発生する問題点がある。しかし薄肉構造物の場合は、板厚方向に温度が一様であると仮定すると積層材料をシェル要素によりモデル化することができ、小規模なモデルで精度の高い解析が可能となる。

本研究では、このような仮定から積層複合材料シェルの $T_g$ 点を考慮した非定常熱伝導・熱応力解析プログラムを開発した。熱応力解析では、カップリング剛性を導入することで非対称積層板の解析を可能とした。また、開発したプログラムを用いて、対称および非対称積層複合材料の熱伝導・熱応力解析を行い、 $T_g$ 点が残留応力に及ぼす影響を明らかにした。

\* 平成6年3月29日 第71期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成6年8月8日。

<sup>1</sup> 正員, 三重大学教育学部 (☎514 津市上浜町1515)。

<sup>2</sup> 正員, 大阪大学工学部 (☎565 吹田市山田丘2-1)。

<sup>3</sup> 学生員, 三重大学大学院。

2. 解析手法

2.1 三次元薄肉構造物のモデル化 三次元的な広がりをもつ薄肉構造物を、有限要素法によりモデル化する場合には、板厚方向の変化量を見捨て自由度を低減することにより、二次元構造物として取り扱うことが可能である。すなわち、図1に示すように、三次元空間座標を有する各要素について方向余弦ベクトル  $l_x, l_y, l_z$  を求め、それぞれの成分を要素とする座標変換マトリックスによって次式のように要素座標系  $xy$  に変換することができる。この変換された平面モデルに対して熱伝導解析を行う。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

2.2 直交異方性材料の熱伝導解析手法 積層材料の各層は、要素座標系において、二次元直交異方性板として取り扱うことができ、その面内非定常熱伝導の支配方程式は次のように表すことができる。

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \right\} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \lambda_s \frac{\partial T}{\partial s} \right\} + Q \quad \dots\dots (2)$$

ここで、 $T$ : 温度、 $\rho$ : 密度、 $C$ : 比熱、 $\lambda_r, \lambda_s$  はそれぞれ材料主方向の熱伝導率、 $Q$ : 内部の発熱、 $r, s$  はそれぞれ材料主方向座標を表す。

形状関数  $N$  を重みとして Galerkin 法を適用すれば、

$$\int N^T \left[ \left\{ \lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lambda_s \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \right\} + Q - \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0 \quad \dots\dots (3)$$

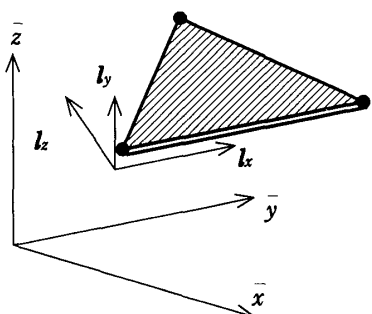


図1 全体座標系と要素の方向余弦ベクトル

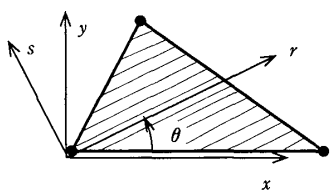


図2 要素座標系と材料主方向

となる。

いま、図2に示すように、材料主方向と要素座標の  $x$  軸とのなす角が  $\theta$  であるとするとき、式(3)の主方向成分は全微分公式により、次式のように  $x, y$  方向成分を用いて書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} m^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} mn + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} mn + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} n^2 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} n^2 - \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} mn - \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} mn + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} m^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

ここで  $m = \cos \theta, n = \sin \theta$  である。これを式(3)に代入し、マトリックス表示すると、各要素の方程式は、

$$c \left\{ \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right\} + a \phi(t) = f(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで  $\phi(t)$  は時刻  $t$  における節点温度ベクトルを表し、 $c, a$  と  $f(t)$  はそれぞれ熱容量、熱伝導マトリックスと熱流束ベクトルである。

薄肉構造物を対象とした場合、板厚方向の温度分布を見捨てることができるものとするとき、それぞれのマトリックスは、各層のマトリックスの和として次式により求められる。

$$c = \sum_{L=1}^{NTL} \left[ \int \rho_L C_L N^T N dV \right] \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$a = \sum_{L=1}^{NTL} \left[ \int \{ B_1^T B_1 (\lambda_{Lr} m^2 + \lambda_{Ls} n^2) + (B_1^T B_2 + B_2^T B_1) (\lambda_{Lr} - \lambda_{Ls}) mn + (B_2^T B_2 + (\lambda_{Lr} n^2 + \lambda_{Ls} m^2)) \} dV \right] \quad \dots\dots (7)$$

$$f(t) = \sum_{L=1}^{NTL} \left\{ \int Q_L(t) N^T dV - \int q_L(t) N^T dS \right\} \quad \dots\dots (8)$$

ここで、 $B_1, B_2$  はそれぞれ  $x, y$  による  $N$  の導関数である。また、 $L$  は各層の番号を表し、 $NTL$  は総積層数、 $q(t)$  は熱伝達ベクトル、 $S$  は要素の表面積、 $V$  は体積である。

したがって、系全体の方程式は、

$$C \left\{ \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \right\} + A \Phi(t) = F(t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。 $C, A$  はそれぞれ系全体の熱容量、熱伝達マトリックスで要素のマトリックスの和として求められる。また、 $\Phi(t), F(t)$  はそれぞれ系全体の節点温度、熱流束ベクトルである。

非定常熱伝導方程式(9)は Crank-Nicolson 法により、解くこととした。

2.3 非対称積層板の剛性のモデル化 非対称積層板では、面外力による応力が積層板の中央面の上下でつり合わないため、面内力と面外力の連成を考慮する必要がある。(6)

面内力と面外力との連成を考慮した一般的な意味での応力-ひずみ関係式は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & D_c \\ D_c & D_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $\sigma$ 、 $\epsilon$ はそれぞれ面内応力と面内ひずみを表し、 $M$ 、 $\kappa$ は曲げモーメントと曲率を表す。 $D_p$ 、 $D_c$ 、 $D_b$ はそれぞれ面内、カップリング、および面外に対応する応力-ひずみ関係マトリックスであり、次式で表される。

$$D_p = \sum_{L=1}^{NTL} d_L (h_L - h_{L-1}) \quad (11)$$

$$D_c = \frac{1}{2} \sum_{L=1}^{NTL} d_L (h_L^2 - h_{L-1}^2) \quad (12)$$

$$D_b = \frac{1}{3} \sum_{L=1}^{NTL} d_L (h_L^3 - h_{L-1}^3) \quad (13)$$

ここで、 $d_L$ は第L番目の層のスティフネスマトリックス、 $h_L$ は積層板の中央面から第L番目の層までの距離を表す。

2.4 熱応力問題の解析手法 非定常熱伝導解析により得られた節点温度ベクトルを用いて熱ひずみベクトルを求め、それを節点荷重ベクトルに置き換えることにより熱応力解析を行う。本プログラムのフローチャートを図3に示す。

材料主方向の線膨張係数を $\alpha_r$ 、 $\alpha_s$ とすると、 $x$ 、 $y$ 方向の熱ひずみベクトル $\epsilon_T$ は要素の温度変化が $\Delta T$ である場合、

$$\epsilon_T = \Delta T H^T \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

と表される。ここで、 $H$ は次式で示される図2の繊維配向角 $\theta$ を用いた座標変換マトリックスである。

$$H = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

この熱ひずみベクトルから節点荷重ベクトル $P$ が次式のように求められる。

$$P_b = \int B_b^T D_c \epsilon_T dV \quad (16)$$

$$P_b = \int B_b^T D_c \epsilon_T dV \quad (17)$$

ここで $B_p$ および $B_b$ はそれぞれ面内、面外の節点変位-ひずみ関係マトリックスで、 $D_p$ 、 $D_c$ はそれぞれ式(11)および(12)で示される応力-ひずみ関係マトリックスである。

応力場のつりあい方程式は、

$$K \delta = P \quad (18)$$

となる。ここで $K$ は、系全体の剛性マトリックスであり、各要素の剛性マトリックスの和として求められる。 $\delta$ は節点変位ベクトル、 $P$ は式(16)、(17)より得られる節点荷重ベクトルである。

式(18)を解くことによって得られる節点変位ベクトル $\delta$ より、実ひずみ $\epsilon$ および残留応力 $\sigma$ を次式によって求めることができる。

$$\epsilon = B_p \delta \quad (19)$$

$$\sigma = D_p (\epsilon - \epsilon_T) \quad (20)$$

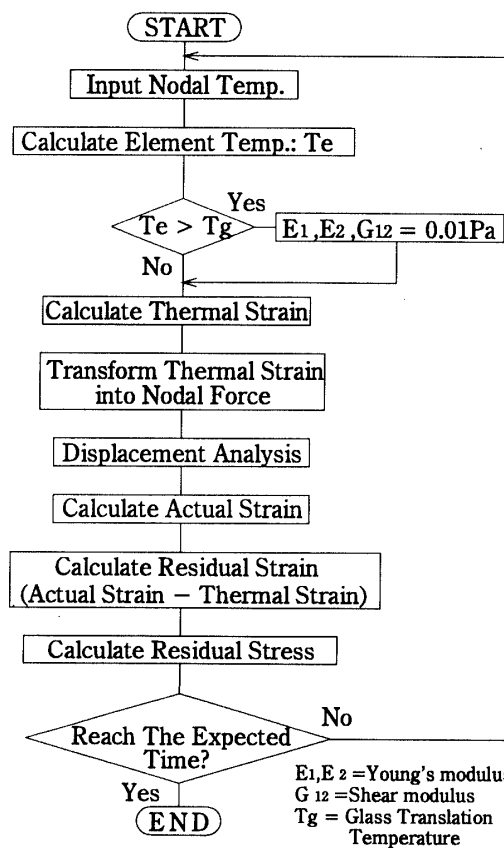


図3 非定常熱応力解析の流れ

ただし、要素温度がガラス転移点( $T_g$ 点)を超えている場合、本プログラムでは剛性が急激に低下すると仮定し、ヤング率 $E_1$ 、 $E_2$ およびせん断弾性係数 $G_{12}$ を0.01Paにして解析を行う。(7)

### 3. 複合材料の熱応力解析

3.1 非対称積層板の熱応力 開発したプログラムを用いて非定常熱伝導・熱応力解析を行った。まず、2層反対称積層板[+45°/-45°]について、初期温度を0℃とし、中央の5×5mmの正方形部分を100℃に加熱した場合の熱伝導状態を調べた。次に、この温度分布状態を用いて熱応力解析を行った。解析対象物はT300/epoxyを想定した。材料の諸元を表1に示す。境界条件は周辺自由とした。

熱伝導解析結果として、図4に時刻 $t = 20.0\text{sec}$ における温度分布状態を示す。これによると熱伝導の異方性が反対称積層することにより緩慢となり、疑似等方性挙動を示すことが分かる。図5には熱変形状態を示す。最大変位は積層板の各頂点で、中央部から $z$ 軸方向に約 $1.03 \times 10^{-3}\text{m}$ 発生している。また、図6、図7に+45°層の $\sigma_x$ 、 $\tau_{xy}$ の分布状態を示す。これによるとカップリング効果の影響で $\sigma_x$ は積層板の中央部において、またせん断応力 $\tau_{xy}$ は積層板の周辺部で最も大きくなっていることが分かる。

これらの結果は、カップリングによるねじれ変形や

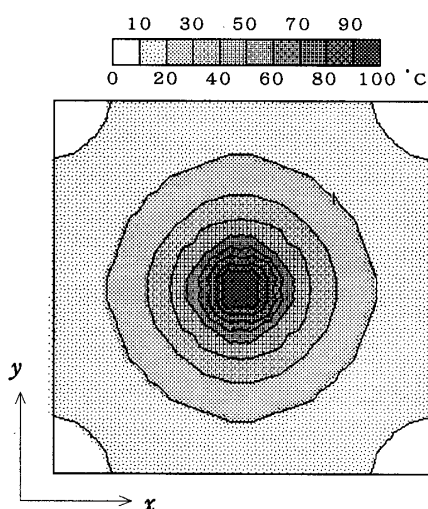


図4 CFRPクロスプライ[+45°/-45°]正方形板の熱伝導状態( $t = 20.0\text{sec}$ )

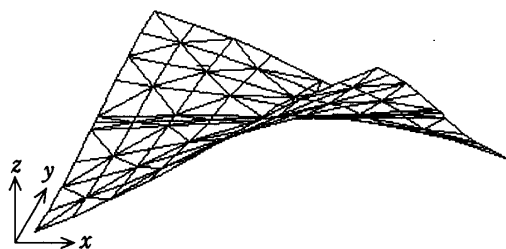


図5 CFRPクロスプライ[+45°/-45°]正方形板の熱変形状態

垂直応力が中央に集中するなど、中央部分が加熱された非対称積層板の特徴を良く表している。

表1 材料の諸元

Heat Conductivity [ $\text{J} \cdot (\text{m} \cdot \text{sec} \cdot \text{K})^{-1}$ ]	$\lambda_1$ $\lambda_2$	42.0 7.0
Specific Heat [ $\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ ]	$C$	500.0
Density [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]	$\rho$	1620.0
Young's Modulus [GPa]	$E_1$ $E_2$	132.0 10.3
Poisson's Ratio	$\nu_{21}$ $\nu_{12}$	0.25 0.02
Shear Modulus [GPa]	$G_{12}$	6.50
Coefficient of Thermal Expansion [ $\text{K}^{-1}$ ]	$\alpha_1$ $\alpha_2$	$1.80 \times 10^{-6}$ $2.07 \times 10^{-5}$

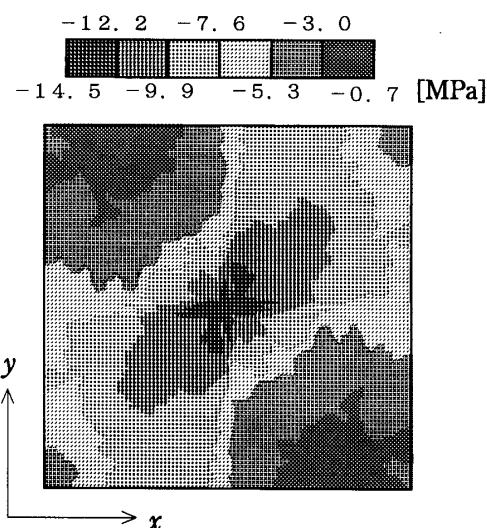


図6 CFRPクロスプライ正方形板[+45°/-45°]の熱応力 $\sigma_x$ 分布

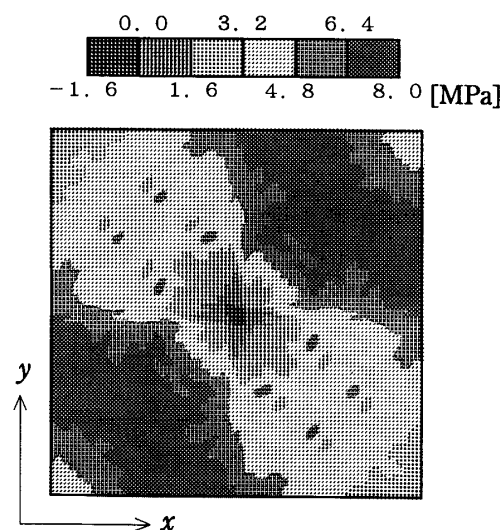


図7 CFRPクロスプライ正方形板[+45°/-45°]の熱応力 $\tau_{xy}$ 分布

3・2  $T_g$ 点による単層板断面の残留応力  $T_g$ 点を考慮した非定常熱伝導・熱応力解析を行った。まず、繊維配向角  $\theta = 0^\circ$  のCFRP正方形板(100×100×20mm)の断面について初期温度を180℃とし、周辺から20℃で冷却した場合の残留応力を求めた。正方形板の対称性から断面の1/4を平面ひずみ問題としてモデル化し、 $T_g = 130^\circ\text{C}$ とした。図8に解析に用いたモデルを示す。材料の諸元は表1と同じである。

解析結果として、図9に時刻  $t = 1.0, 2.0$ および5.0 secの温度分布状態を示す。また、図10には  $t = 14.0$  secにおける残留応力  $\sigma_x$ の分布状態を示す。これによると断面の端部近傍において最も高い応力が発生していることが分かる。

また、図11に点Aにおける  $t = 14.0$  secまでの温度変化と残留応力の変化を示す。これによると平板の温度が  $T_g$ 点以下になるときに急激に応力が高くなり、定常状態に近づくにしたがってわずかに低下するのが分かる。

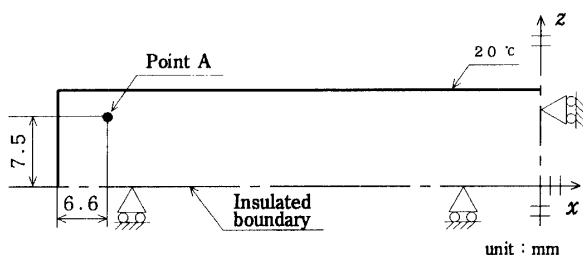


図8 CFRP単層板断面の非定常熱応力解析モデル

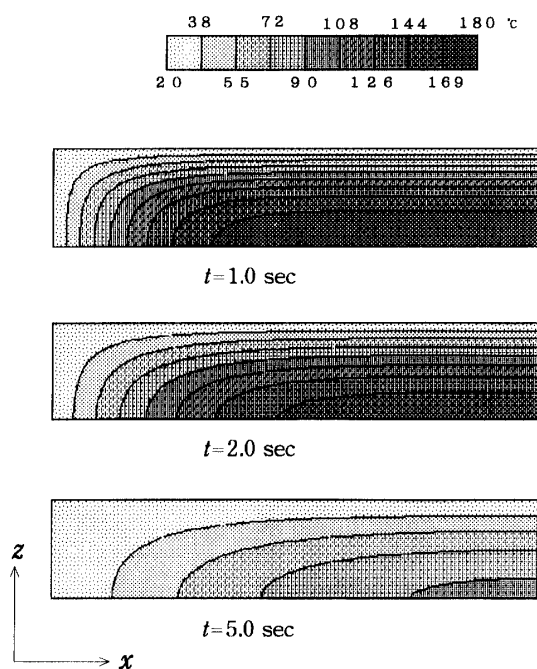


図9 CFRP単層板断面の非定常熱伝導状態

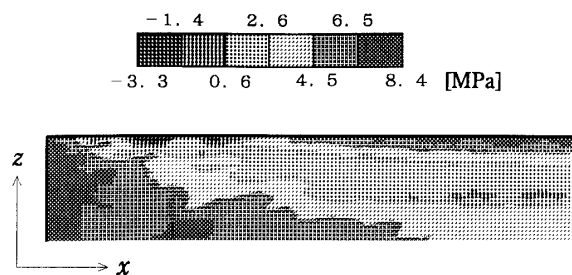


図10 CFRP単層板断面の残留応力  $\sigma_x$ の分布 ( $t = 14.0$  sec)

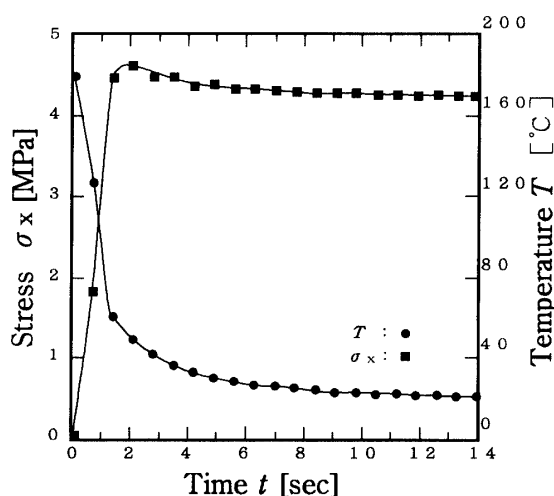


図11 CFRP単層板断面の温度および残留応力  $\sigma_x$ の時間変化

3・3 積層板の繊維配向角と熱応力の関係 次に、対称および非対称積層板について、繊維配向角の変化による各最大応力の変化を求めた。図12に解析モデルを示す。初期温度を180℃とし、積層板の周辺を20℃に固定し、さらに表面から外部温度20℃、熱伝達係数150  $\text{W}\cdot(\text{m}^2\cdot\text{K})^{-1}$ に対応する熱伝達があるものとした。また、 $T_g$ 点は130℃とした。図13に  $\theta = 45^\circ$ のときの  $t = 1.0$  secの熱伝導状態を示す。また、図14は  $\theta = 45^\circ$ の場合の対称積層板の最上部層の残留応力  $\sigma_x$ の分布状態を示す。積層板が一様に冷却される場合、対称積層板ではカップリング効果が抑制されるため応力が発生しないと考えられるが、冷却状態の不均一から積層板の端部において高い応力が発生していることが分かる。同様に  $\theta = 45^\circ$ における非対称積層板の最上部層の残留応力  $\sigma_x$ の分布状態を図15に示す。これも対称積層板の場合と同様に積層板端部に最も高い応力が発生している。また、カップリング効果による影響で応力が対角方向に分布している様子が明らかとなっている。

図16と図17は対称積層板の  $T_g$ 点を考慮した場

合と考慮しない場合の繊維配向角と各最大応力の関係である。対称積層板では、通常 $\tau_{xy}$ 以外は発生しないが、 $T_g$ 点を考慮することにより残留応力として $\sigma_x$ と $\sigma_y$ が発生しているのが分かる。特に、 $\tau_{xy}$ がせん断強度に比べて大きいことから積層配向角によっては層間割れなど発生する恐れがあることが分かる。また、図16において、繊維配向角 $30^\circ$ 近傍で $\tau_{xy}$ に急激な変化が発生しているのは、その前後で最大応力点が変わるためである。

図18と図19には非対称積層板の $T_g$ 点を考慮した場合と考慮しない場合の繊維配向角と各最大応力の関係を示す。図18では非対称積層によるカップリング効果の影響で、各配向角において対称積層板の場合と比べて応力が高い値となっている。また、繊維配向角が大きくなるにつれて、 $\sigma_x$ と $\tau_{xy}$ の影響が大きくなる様子も明らかとなっている。

以上の解析結果より、 $T_g$ 点を考慮することにより、積層板の残留応力の評価に大きな差がでることが明らかとなった。

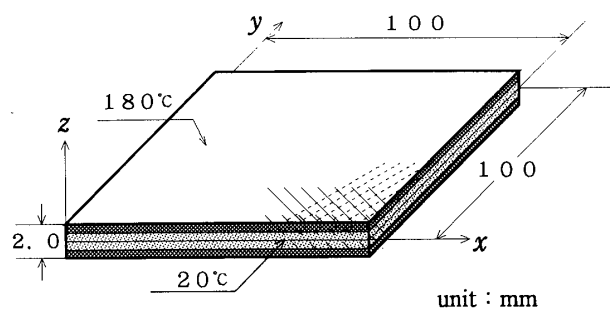
#### 4. まとめ

本研究では、CFRP等強い異方性を有する積層複合材料の熱伝導・熱応力問題をシェル要素によってモデル化する手法を提案し、非定常熱伝導・熱応力解析プログラムを開発した。熱伝導解析では、全微分公式を用いて要素座標系での支配方程式を導出することにより任意の角度に積層された一方向積層材料の熱伝導問題の解析を可能とした。また、熱応力解析では、シェル要素にカップリング剛性の概念を導入することで、非対称積層板の解析を可能とし、 $T_g$ 点を考慮した熱応力解析を行うプログラムとした。

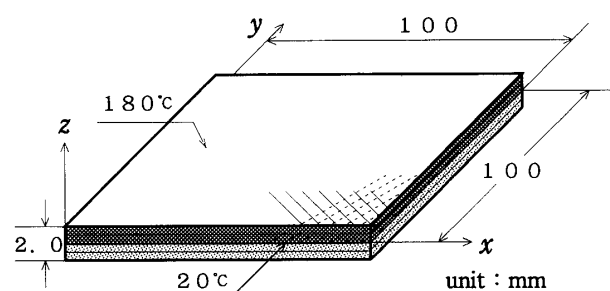
開発したプログラムにより積層複合材料の非定常熱伝導・熱応力解析を行った。特に $T_g$ 点を考慮した解析では冷却状態が不均一であると残留応力の分布が $T_g$ 点を考慮しない場合に比較して大きく異なることから、積層複合材料の非定常熱応力解析においては $T_g$ 点を考慮した解析が必要であることが明らかとなった。

#### 参考文献

- (1) J.N., Reddy, *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics*, **51**, (1984), 745.
- (2) 谷川・大多尾・高原, 機論, **58**-549, A(1992), 712.
- (3) 落合・石田・関谷, 機論, **58**-552, A(1992), 1390.
- (4) 石黒・田中, 機論, **60**-569, A(1994), 205.
- (5) 田中・松本・楊, 機論, **59**-559, A(1993), 856.
- (6) J.R.Vinson, R.L.Sierakowski, (福田・野村・武田訳), 複合材料の構造力学, 日刊工業, (1987), 47.
- (7) B.D.Agarwal, L.j.Broutman, *Analysis and Performance of Fiber Composites*, A Wiley-Interscience Publication, (1990), 28



(a) 対称積層材料 $[+\theta/-\theta]$ .



(b) 非対称積層材料 $[+\theta/-\theta]$

図12 CFRP積層正方形板の非定常熱応力解析モデル

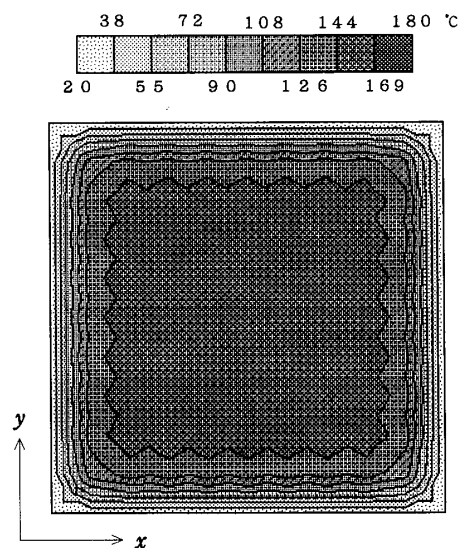


図13 CFRP積層板 $[+45/-45]$ の熱伝導状態 ( $t = 1.0 \text{ sec}$ )

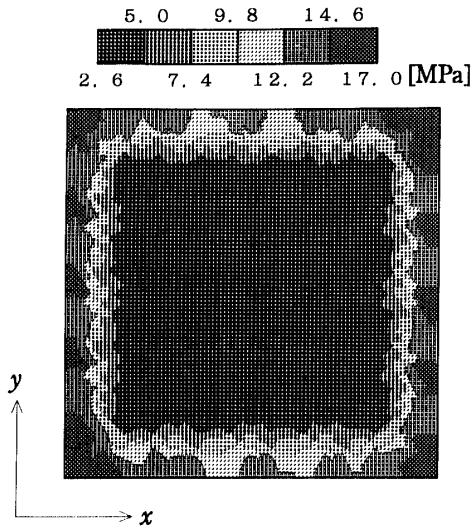


図 14 CFRP 積層板[+45/-45]<sub>s</sub>の残留応力  $\sigma_x$  分布( $t=14.0\text{sec}$ )

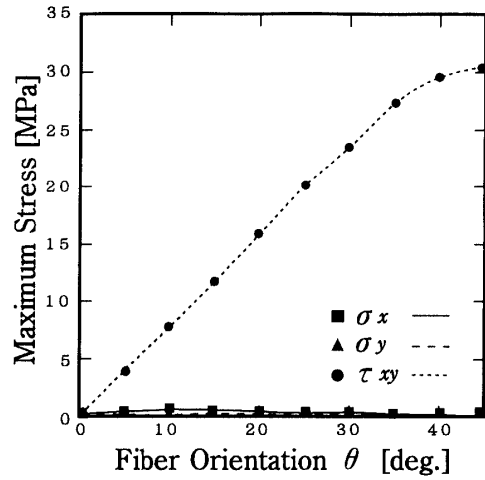


図 17 CFRP 積層板[+ $\theta$ /- $\theta$ ]<sub>s</sub>の繊維配向角と各最大応力の関係( $T_g$ を考慮しない場合)

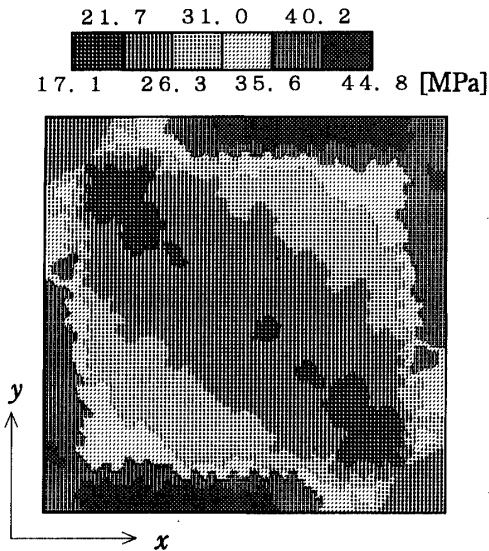


図 15 CFRP 積層板[+45/-45]の残留応力  $\sigma_x$  分布( $t=14.0\text{sec}$ )

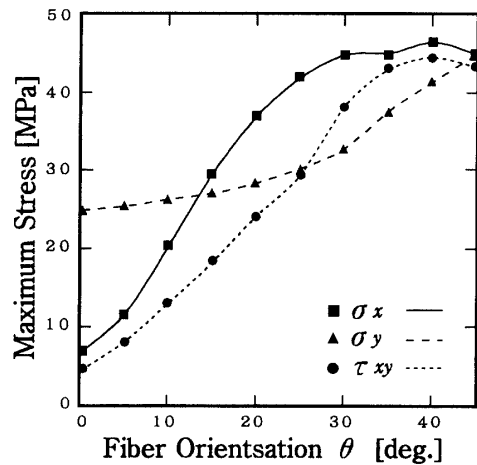


図 18 CFRP 積層板[+ $\theta$ /- $\theta$ ]の繊維配向角と各最大応力の関係( $T_g=130^\circ\text{C}$ を考慮した場合)

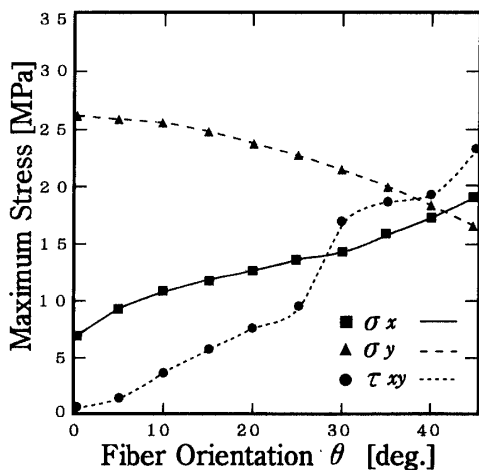


図 16 CFRP 積層板[+ $\theta$ /- $\theta$ ]<sub>s</sub>の繊維配向角と各最大応力の関係( $T_g=130^\circ\text{C}$ を考慮した場合)

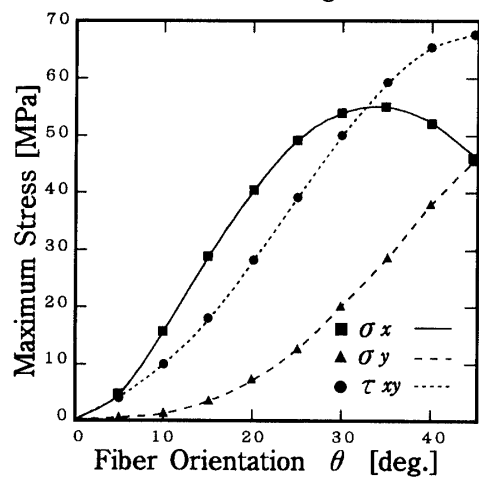


図 19 CFRP 積層板[+ $\theta$ /- $\theta$ ]の繊維配向角と各最大応力の関係( $T_g$ を考慮しない場合)