

対称積層構造材の振動特性解析法の研究* (CFRP 円筒シェルの加振実験)

松 本 金 矢*¹, 鈴 木 浩 平*², 小 林 朗*³

A Study on Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Shells (A Shaking Test Using CFRP Cylindrical Shells)

Kin'ya MATSUMOTO, Kohei SUZUKI and Akira KOBAYASHI

A method for FEM eigenvalue problems of symmetrically laminated composite shells is developed by formulating a 15 d. o. f. flat triangular shell element under the assumption that the transverse normal strain is linear in a symmetrical lamination. A shaking test using CFRP cylindrical shells is conducted, and experimental results obtained through the test are compared with analytical ones by the proposed method. As a consequence of the experiment, vibration characteristics of symmetrically laminated composite shells are obtained, and the validity of the proposed method for laminated composite shells is proven.

Key Words: Vibration, Finite Element Method, Eigenvalue Problem, Composite Materials, Shell Element, Symmetrical Lamination, Fiber Angle, Modal Analysis, Transfer Function

1. 緒 言

先端材料の一種である繊維強化形の複合材料は、素材の発展とともに材料としての機能性が向上し、成形技術の進歩に伴って、新製品開発に対する要求が増大している。しかしながら、複合材料製品の開発に際して必要となる静的および動的な挙動の解析は、その特殊な力学的特性のために一般には困難である。特に積層構造をもつ繊維強化形の複合材料の場合には、その複雑な異方性を考慮した簡便な解析手法が確立されておらず、汎用の解析手法に頼らざるを得ないため、解析に膨大な時間と経費が必要となり、その結果、新材料の応用範囲が限定されているのが現状である。

このような背景から、著者らは、対称積層構造材を用いた薄肉シェルの振動解析を、パーソナルコンピュータ上においても可能とする簡便な解析手法の提案を行い、それによって有限要素法固有値解析プログラムを開発した⁽¹⁾。そしてそのプログラムを用いて、異方

性の主軸が母線と一致する円筒の固有値解析を行い、微分方程式より得られた異方性薄肉円筒シェルの理論解と比較することにより、提案した手法が、強い異方性を有する薄肉シェル構造物の解析に対して有効であることを明らかにした。

ところで、繊維強化形の複合材料を用いて製品開発を行う場合には、曲げ剛性を高める目的から対称積層されるのが一般的であり、提案した手法がそれら積層構造を有する薄肉シェルの解析に対しても適用可能かどうかを検証する必要がある。しかし、現在のところ任意の積層角度を有する対称積層シェルの振動特性を求める連続体理論が、実用に供せる形では確立されていないため、実験的方法に頼らざるを得ない。また、これまで積層材料のシェル構造物の振動特性が、実験的に明らかにされた例があまりないので、その意味からも積層シェルの構造物の加振実験を行うことは意義のあることである。

これらのことから、本研究では、提案した手法の積層シェル構造物の振動解析に対する有効性を検証するために、次の三点について明らかにすることを目的としている。①四層構造 CFRP 対称積層円筒シェルの加振実験を行い、振動特性を求める。②実験結果を開発した有限要素法プログラムによる解析結果と固有振動

* 原稿受付 平成2年8月6日。

*¹ 正員、三重大学教育学部 (〒514 津市上浜町1515)。

*² 正員、東京都立大学工学部 (〒192-03 八王子南大沢1-1)。

*³ 東燃(株)総合研究所 (〒354 埼玉県入間郡大井町西鶴ヶ岡1-3-1)。

数, 固有振動モードにおいて比較する。③複合材料シェル構造物の伝達関数解析プログラムを新たに開発し, 固有値解析結果から求められる伝達関数と実験結果とを比較する。

2. 解析方法

本研究では, 既に開発されている等方性薄肉シェル要素に対して, 異方性を考慮した応力-ひずみ関係マトリックスを用いて, 対称積層構造を有する異方性薄肉シェル要素のモデル化手法を提案し, その手法を応用して固有値解析プログラムを開発する。ここではそのモデル化手法と新たに開発した伝達関数解析プログラムについて簡単に説明する。

2・1 三角形平面シェル要素のモデル化手法 振動による変形が微小であると仮定すると, シェルに作用する面内力と面外力は独立に扱うことができる。したがって, 平面シェル要素の剛性マトリックス $[k]$ および質量マトリックス $[m]$ は, 面内力と面外力に対するマトリックスの組合せにより次式のように表現することができる。

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_p] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [k_b] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} [m_p] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m_b] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで, $[k_p]$, $[m_p]$ はそれぞれ面内力に対する剛性, 質量マトリックスであり, $[k_b]$, $[m_b]$ はそれぞれ面外力に対する剛性, 質量マトリックスである。以降, 添字 p は面内力に対応するものを, また b は面外力に対応するものをそれぞれ表すものとする。

面内力および面外力に対する剛性マトリックスは, 三角形平面シェル要素の場合,

$$[k_p] = \int [B_p]^T [D_p] [B_p] d\Delta \\ = [B_p]^T [D_p] [B_p] \Delta \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$[k_b] = \int [B_b]^T [D_b] [B_b] d\Delta \quad \dots\dots\dots (4)$$

として計算される。ここで, Δ は三角形要素の面積, $[B]$ は変位-節点変位関係マトリックス, また $[D]$ は

応力-ひずみ関係マトリックスである。

同様に, 面内力および面外力に対する質量マトリックスは, 面密度を ρ , 形状関数を $[N]$ として, 次式のようにして得られる。

$$[m_p] = \rho \int [N_p]^T [N_p] d\Delta \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$[m_b] = \rho \int [N_b]^T [N_b] d\Delta \quad \dots\dots\dots (6)$$

本研究で提案するモデルでは, 図1に示すような直交異方性を有する一方向繊維強化単層材を N 層対称積層した積層材に対して, 式(3), (4)における応力-ひずみ関係マトリックス $[D]$ を, 各単層材におけるひずみが面内力に対しては同一であり, また面外力に対しては線形変化するという仮定を用いて, 次式のように定義する。

$$[D_p] = \sum_{k=1}^N t_k [\bar{D}_k] \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$[D_b] = \sum_{k=1}^N \left(\frac{t_k^3}{12} + l_k^2 t_k \right) [\bar{D}_k] \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで, t_k は第 k 番めの単層材の板厚, l_k は積層材の中立面から第 k 番めの単層材までの距離を表す。また, $[\bar{D}_k]$ は第 k 番めの単層材の局所座標方向の応力-ひずみ関係マトリックスであり, それらは単層材の主方向応力-ひずみ関係マトリックスを, 局所座標に対する単層材の積層角度 θ_k を用いて座標変換することにより得られるものである。

これにより得られた各要素の剛性および質量マトリックスを組合せ, 構造全体の剛性および質量マトリックスを作成し, 固有値解析を行う。

2・2 伝達関数解析 一般に減衰の小さい構造物の固有値解析では不減衰系を仮定し, 剛性マトリックスと質量マトリックスだけから固有振動数および固有ベクトルを求めることが可能であるが, 伝達関数解析においては, なんらかの仮定を設けて減衰マトリックスを導入が必要である。しかしながら, 減衰マトリックスについては, 剛性マトリックスや質量マトリックスのように確立された定式化の理論がないのが現状である。そこで一般に, 金属材料等の比較的減衰の

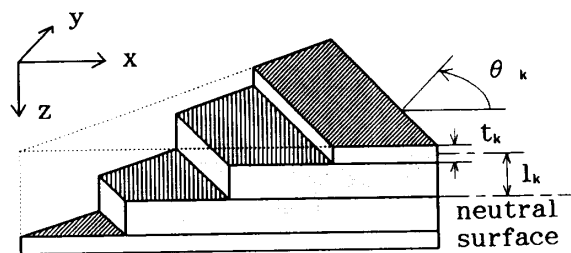


図1 対称積層材の座標系

小さい材料については、減衰マトリックスを剛性マトリックスと質量マトリックスの一次結合として求める、いわゆる比例粘性減衰の仮定が用いられる。

本研究の対象である繊維強化形の複合材料についても、減衰マトリックスを導出する一般的な手法は確立されていない。また、カーボンファイバにより強化されたFRPの場合、金属等と比較しても減衰がさほど大きくないことが知られている⁽²⁾。したがって、ここでも比例粘性減衰の仮定を用いて、繊維強化形複合材料の伝達関数を求めるプログラムを作成した。

いま、減衰マトリックス $[C]$ を剛性マトリックス $[K]$ と質量マトリックス $[M]$ の一次結合として次式のように定義する。

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad \cdots \cdots (9)$$

ここで、 α 、 β は比例粘性減衰定数である。

この場合のモード減衰比は、

$$\zeta_r = (\alpha/\Omega_r + \beta\Omega_r)/2 \quad \cdots \cdots (10)$$

と表される。ここで Ω_r は第 r 次の固有円振動数である。

第 n 次までの固有値を用いて計算される伝達関数 G (コンプライアンス)は⁽³⁾、

$$G(\omega) = G^{(r)}(\omega) + jG^{(i)}(\omega) \quad \cdots \cdots (11)$$

ここで、

$$G^{(r)}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{(1-\beta_r^2)/K_r}{(1-\beta_r^2)^2 + 4\zeta_r^2\beta_r^2} \quad \cdots \cdots (12)$$

$$G^{(i)}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{-2\zeta_r\beta_r/K_r}{(1-\beta_r^2)^2 + 4\zeta_r^2\beta_r^2} \quad \cdots \cdots (13)$$

(ただし、 $\beta_r = \omega/\Omega_r$) で表される。 K_r は、第 r 次の等価剛性であり、モード剛性 k_r 、および固有ベクトルの加振点 i と応答点 o の成分 ϕ_{ri} 、 ϕ_{ro} を用いて、

$$K_r = k_r/(\phi_{ri}\phi_{ro}) \quad \cdots \cdots (14)$$

として計算される。

伝達関数解析プログラムでは、これらの諸式を用いて、固有値解析の結果を読み込み、加振点および応答点、そして比例粘性減衰定数を与えることにより計算することができるようになっている。

3. 対称積層円筒の振動解析

繊維強化形複合材料を対称積層した薄肉シェル構造物の一例としてCFRP円筒を取り上げ、異なる積層角度を有するものについて加振実験を行った。固有振動数、固有振動モードおよび伝達関数について、開発したプログラムによる解析結果と実験結果を比較し、本手法の有効性を検証した。

3-1 CFRP 積層円筒の加振実験 加振実験供試体として、四層構造のCFRP対称斜交積層円筒を作成した。はりの長さ500 mm、内径98 mmで肉厚は0.5 mmである。積層角度は $\pm 30^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$ 、 $\pm 60^\circ$ の3種

表 1 CFRP 積層板の材料定数

E_1 [GPa]	90.0
E_2 [GPa]	6.0
G_{12} [GPa]	2.7
ν_{12}	0.3
ν_{21}	0.02
ρ [kg·m ⁻³]	1560

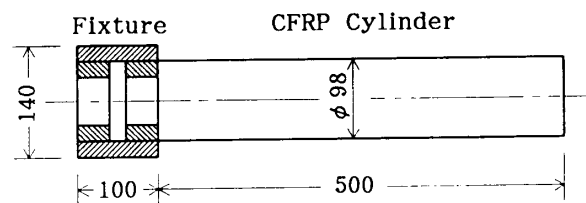


図 2 CFRP 円筒供試体

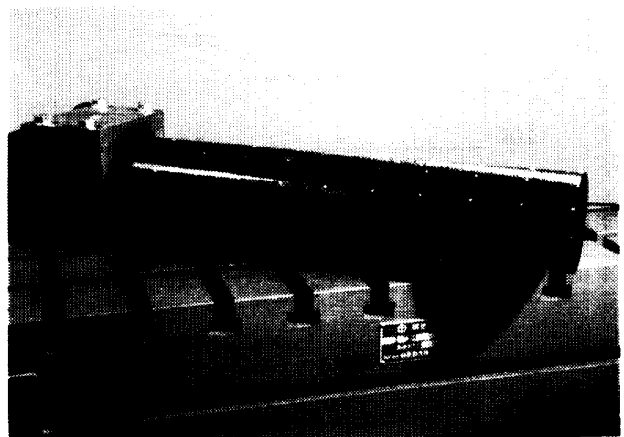


図 3 供試体および支持装置

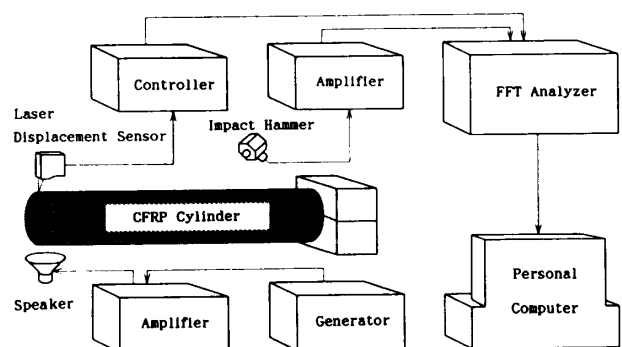


図 4 実験装置

類で各2本ずつ、計6本について実験を行った。なお、 0° および 90° の供試体は、繊維直角方向の強度が著しく低下するため製作不可能であった。境界条件は一端固定一端自由であり、固定部には鋳鉄製の外周固定チャックとスリット付円環状の中子を用いて、中子のスリットにくさびを押付けることにより中子の外径を変化させ、供試体と支持装置を密着させて固定条件を実現した。供試体の形状を図2に示す。また、供試体の支持状態の写真を図3に示す。

表1に材料定数を示す。ここで縦弾性係数 E の値は、供試体と同じ材料の試験片を作成し、たわみ試験により求めたものである。

表2 実験と解析による固有振動数の比較

Fiber Angle	Modal Number	Experiment [Hz]	Analysis [Hz]	Error [%]
30°	1st	148.0	150.2	1.5
	2nd	240.7	212.9	-11.5
	3rd	354.9	348.5	-1.8
45°	1st	145.6	151.6	4.1
	2nd	340.5	302.8	-11.1
	3rd	231.6	240.9	4.0
60°	1st	179.2	177.3	-1.0
	2nd	461.3	408.6	-11.4
	3rd	183.2	205.1	12.0

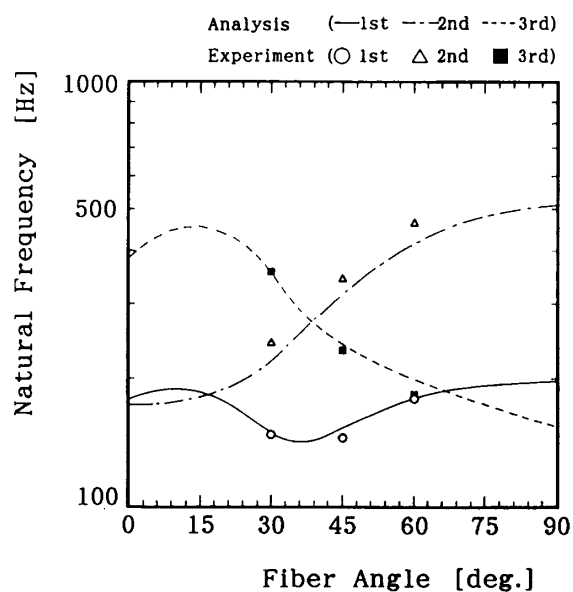
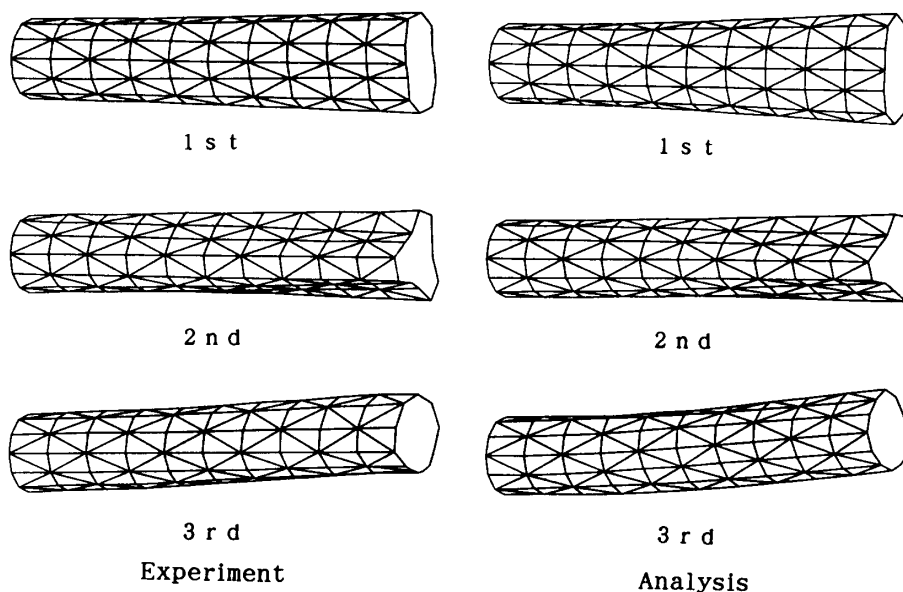


図5 積層角度による固有振動数の変化

表3 固有振動モードの相関度

Fiber Angle	Analysis Modal Number	Experiment		
		1st	2nd	3rd
30°	1st	913	002	005
	2nd	008	829	153
	3rd	012	003	967
45°	1st	993	007	005
	2nd	018	653	028
	3rd	021	167	939
60°	1st	991	017	000
	2nd	007	672	013
	3rd	007	050	973

図6 固有振動モード(積層角度 30°)

供試体が固定部に対して非常に軽量で、しかも構造上剛性が高いため、支持部からの加振やロードを用いた加振などの通常の加振方法が利用できない。したがって、小形ロードセルを用いて固定端近傍に設置した加振点に対してインパクト加振を行い、供試体上に設定した9点の応答をレーザ変位計で測定した。得られたデータをFFTアナライザに取り込んで伝達関数を求め、多点参照曲線適合法⁽⁴⁾を用いて、500 Hzまでに存在する三つのモードに着目し、固有振動数とモード減衰比を同定した。図4に実験装置の概要を示す。

次に、着目した500 Hzまでに存在する1次から3次までの固有振動モードを求めるために、小形スピーカによる正弦波加振を行った。正弦波発生装置により曲線適合から同定された固有振動数に対応する正弦波を発生させ、供試体先端部分に設置したアンプ内蔵形のスピーカに入力し、音圧による加振を行った。供試体表面に有限要素法解析モデルの節点に対応する60点の測定点を設定し、その位置における変位をレーザ変位計により測定した。同時に、振動モードをストロボスコープを用いて確認した。

3・2 固有値解析 開発したプログラムにより固有値解析を行った。長手方向10分割、同周方向12分割の132節点240要素にモデル化し、境界条件は一端固定とした。

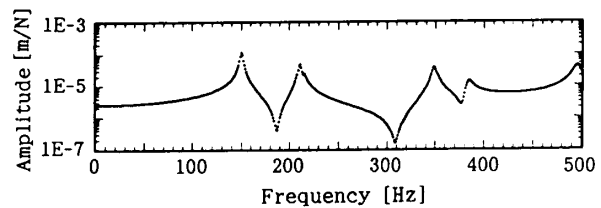
各積層角度について、1次から10次までの固有振動数および固有振動モードを求めた。また、実験から同定されたモード減衰比を用いて、最小二乗法により比例粘性減衰係数 α と β を推定し、実験で設定した固定端近傍の加振点と供試体先端の応答点との伝達関数を計算した。

3・3 解析結果と実験結果との比較 固有振動数の解析値と2回の実験によって得られたその平均値との比較を、表2および図5に示す。図5は横軸に積層角度、縦軸に固有振動数を取り、1次から3次のモードについてプロットしたものである。図6には積層角度30°の場合の1次から3次までの振動モードの比較を示す。

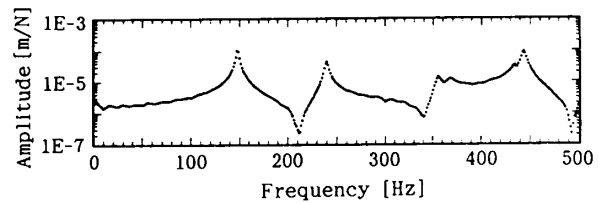
実験と解析から求めた1次から3次までの各モードについて、固有振動モードの相関度(MAC, Modal Assurance Criterion)⁽⁵⁾を計算した。その結果を表3に示す。

また、固定端近傍の加振点と先端部分の応答点との間の伝達関数(コンプライアンス)を図7に示す。

図5では、積層角度の変化に伴って固有振動数が複雑に変化する状況が、解析結果から明らかになり、実験結果とも比較的良好に一致していることがわかる。特

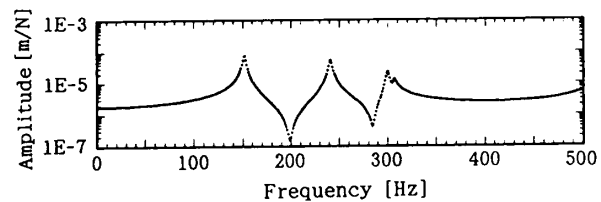


Analysis

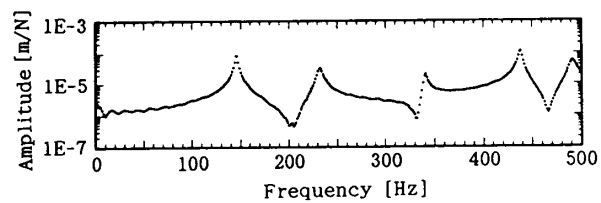


Experiment

(積層角度 30°)

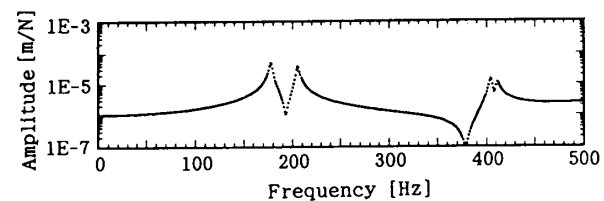


Analysis

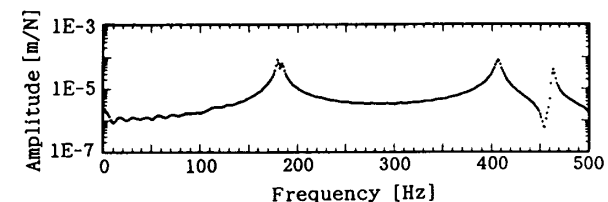


Experiment

(積層角度 45°)



Analysis



Experiment

(積層角度 60°)

図7 固定端近傍と先端部の伝達関数

に、積層角度の増大に伴って、曲げモードの固有振動数が低下し、膜振動と入れ替わる状況や、1次と3次の固有振動数が積層角度 15° 付近で極値を有することなどが興味深い。

表2によると実験結果と解析結果との誤差は最大で12%程度あるが、この原因として、横弾性係数などが実測されておらず実際の値が未知であることや、実験では、一端固定の境界条件を完全には実現することができないことなどが考えられる。

また図6によると、解析により得られた固有振動モードが実験結果と非常によく対応を示しており、表3においては、解析による固有ベクトルと実験による固有ベクトルの相関度は、対角成分において1に近く、非対角成分では零に近い値を示しており、固有値解析によって固有モードが精度よく求められていることを示している。しかしながら、 45° と 60° の2次モードにおいて、相関度は0.6程度に留まっている。この原因は、実験では2次モードにおいて曲げとねじりの連成振動が発生し、先端部に対して固定部近傍のモードの腹と節の位置が回転したためであると考えられる。解析においてもその傾向が表れてはいるものの、分割が十分でなかったために回転の影響割合が小さくなり、結果的に相関が低下したものと思われる。

図7より、伝達関数の比較の結果は、固有振動数の誤差による周波数方向のずれがみられるが、振幅を推定するために重要となる各モードのピークにおけるゲインはほぼ一致しており、適切な減衰係数を与えることができれば、正確な伝達関数を求められることがわかる。

4. 結 言

対称積層シェル構造物の振動解析のための簡便なモデル化手法を提案し、それを用いて固有値解析および伝達関数解析プログラムを作成した。その手法の有効性を検証するために、CFRP円筒シェルを例にとって加振実験を行い、解析結果と比較した。

その結果、音圧による加振など新たな方法を用いた加振実験を行うことにより、これまであまり明らかにされていなかった積層角度による固有振動数の変化や曲げとねじりの連成振動などの積層シェル構造物に特有な振動特性を求めることができた。また解析結果が、固有振動数、固有振動モードおよび伝達関数において実験結果とよく一致していることから、本研究で提案している手法が、対称積層されたシェル構造物の振動解析に対しても有効であることが明らかとなった。

最後に、本研究を行うにあたり、貴重なご助言をいただいた、三重大学教育学部・座古勝先生に感謝の意を表す。また、実験のご指導をいただいた東京都立大学の三森友彦、吉村卓也両助手ならびに同大学大学院生・徳永裕之君、工学部実験工場の方々に感謝する。

文 献

- (1) 松本・鈴木, 対称積層構造材の振動特性解析法の研究, 機論, 56-532, C (1990), 3167.
- (2) Kobayashi, S., Iwata, Y. and Koyama, K., Damping Property of Graphite-Epoxy Laminates, *Proc. of 16th ISTS*, (1988), 515.
- (3) 長松, モード解析, (1985), 70, 培風館.
- (4) 吉村・長松, モード解析に関する研究, 機論, 56-523, C (1990), 527.
- (5) Allemang, R. J., *Ph. D. dissertation*, Univ. of Cincinnati, (1980), 158.