数学を語るのか、数学で語るのか

-行列から見た複素数 (美杉セミナー'93)-

蟹江　幸博

三重大学教育学部

美杉村で高校生相手の数学に関するセミナーを開くのも、平成５年の夏で３回目である。平成４年の夏は台風の襲来の所為で名松線もその先の道路も冠水して、当日中止することになったので、改めて１２月の末に三重県教育文化会館でセミナーを行った。６年の今年も夏に伊勢の地で日数教の全国大会があるので、また１２月に行うことになるかも知れない。第１回のセミナーは前年（平成２年）の秋に始まった数学コンクールのアフターケア・セミナーと同じ時と場所（美杉ビレッジ）で行ったのだが、その前年にあった数学コンクールの発足準備会議の時に始めて高数研の方々とお目に掛かって以来のお付き合いということになる。

新１年からの新課程では複素数が扱われるようになるから、夏の講演では複素数をテーマにして欲しいとのことだったので、これまでの課程にある２行２列の行列の話しと関連付けてみることにした。そのためのメモが、この文章の元になっている。

また折角の機会だから、算数・数学教育や三重県の高数研に関るようになった経緯を述べさせて頂くことにした。それが第１節である。第２節は夏の講演のメモに少し加筆したものである。

また、第３節では、去年（１９９３年）の総会で紹介したTOSMポスト（算数・数学教育における数学についての質問箱）のその後についての報告を少しさせて頂いた。この節を書くことについての経緯は、最後の節に触れておいた。

1　学生気質から

最近読んだ本岡類の「ガラスの王」(実業の日本社、１９９３年4月３０日刊)の話をしてみたい。大学生の生態にスポットを当て、大学生目当ての詐欺事件に題材を取った推理小説で、現代の学生気質を鋭く言い当てているものと言える。

そこでは、殺された詐欺師の仲間が探偵役の新聞記者に、次のように語っている。今の学生たちは怖いものなしで我が世の春を謳歌しているけど、実体はガラスのように脆く、ガラスの王様だと言うのである。しかも偏差値の高い大学の学生ほど、詐欺にかかりやすい。

小説は、通産省に就職が決まった東大生が、官舎への入居の前日、ある私立大学の建物の屋上から飛び降り自殺をすることから始まる。「検証ーどうした？若者」という特集連載記事を取材することになった若い新聞記者がこの事件に着目する。原因を探るうちに詐欺事件の噂を知るが、被害者の大学生は被害にあったことを隠そうとする。被害者自身が犯罪を隠蔽しようとする、詐欺師にとって安全な詐欺ということになる。

（架空の）脱税事件でのマネーロンダリングに協力したら２割の謝礼を出すと言って学生ローンから金を借りさせ、後で脱税が摘発されたと（偽造の）新聞記事を見せ、自分も危険と思わせ渡した金を諦めさせる。なかなか諦めようとしなかった学生には、さらに卒業間際に、脱税に関っていたことをばらすと恐喝をする。就職に差し支えると、諦めさせるのである。

最初は軽いバイトのつもりである。自殺した東大生は、厳格な父親に二度目の１００万円を頼めず、また生涯強請（ゆす）られながら通産省に勤めることも出来ないと、バイトを誘った学生の大学で自殺をしたのである。

この詐欺を成り立たせているのは、最近の大学生の心の有り様であると思われる。記者の出身大学の教授は学生について次のようにまとめている。

物事を深く考えず、雰囲気みたいなものに身を任せ、何をしても大事にならないだろうと甘え、正義感・潔癖感みたいなものが薄れているのに、自分のこととなると細かいことを異常に気にして、物事を大元から考えていく能力に欠けるのである。

これは小説の中だけのことではない。実際、研究集会やシンポジウムで会う人達と話してみると、日本中の大学で同様の変化が起こっていることが感じられる。そればかりでなく世界的にも、少なくとも先進国の間では似たような事態が進行しているように思われる。

気付くことはまず、何より学生たちの気質が変わったことである。また、共通一次試験の実施以降、大学に入学してくる学生の学力が下がっていることが痛感される。しかし本当の問題は、学力の低下というより、むしろ学習意欲や勉学の目的を喪失していることと、この小説のいうように自分の細かいことばかりを気にして物事を大局的に見ることが出来なくなって来たことであろう。何かの目的を持って大学に入ろうとするのでなく、入れる大学を受験するという風潮のせいだろう。大学に入って真剣に勉強しようとする学生が少なくなっている。

それでも少し前までは、出来の悪い学生の教え方が問題だったが、今はもう、やる気のない学生に如何にやる気を起こさせるかの方法が問題になっている。

堅い本は読まず、読むのは How to ものばかりという学生に、如何に生きるべきか、何のために生きるべきかを説くことは虚しい。心を込めて説けば説くほど学生の気持ちは離れていく。

学生の気持ちが理解出来なくなったのだろうか。僕らが学生だった時、教授の気持ちが分かった訳ではないし、学生の気持ちを分かろうとする教授も多くはなかった。教授が教壇で「数学をしている」あり様を見て学んだ、言わば「親父の背中を見て育った」ような気がする。今、教壇で数学の世界に没入してしまえば、学生は講義の間中騒ぎ立てることもなく、静かに、しかし自分達とは無縁なものとして座っているばかりである。何も伝わっていかない。

視点を変える必要が有るようだ。教育学部に勤めてもう２０年近くになる。始めは数学をすることが目的である世界に、勤めていたつもりだった。しかし近頃では、世界を本当に変えるのは突出した発見だけでなく、人類の持つ常識が変化していくことであるという側面も否定できないと思うようになって来た。社会通念の正しい変革は教育によってなされなければいけないし、それを支えるスタッフの育成を目的とする教育学部の役割りも決して軽視してはならないもののように考えるようになって来た。

今日の学生を前にしてみると、大学教育に対する有効な方法が、一朝一夕に見つかる訳ではないだろう。しかし、大学の中では、少しず

つであっても学生の意見に耳を傾ける方法を構築して行くしかないと考えている。

平成5年度はたまたま大学の学生部委員になった。新聞でも報道されたからご存じかとも思うが、大学の改革のために学生の力を借りたらと提案し、「学生のアイデア募集箱」を設置することになった。思ったよりも真面目な意見が多く寄せられ、学生の中の健全な精神を信じて良いと思うようにもなった。少し勇気づけられてもいる。

その一方で、大学入学以前の教育に関しても、微力ながらも関る必要があろうし、関っていきたいと考えるようになった。数学コンクールに関ることになったのもこういう理由からである。コンクールを通して、三重県の高数研の方々とのお付き合いも生まれ、高校生の為の数学講座（サマースクール）のお手伝いもしている。高校数学に囚われず、数学することの素晴らしさを伝えたいと思った。

初等・中等教育における数学者の役割が有り得る筈だと、教育学部に勤める数学者仲間とグループ TOSM を作って活動もしている。

何が出来るか、何が有効か分からないが、出来ることを一つずつ、人類の環境としての世界を理解する手段としての数学が、人類の文化の中に育ち、正当な位置を占めるための努力をして行きたいと思っている。

2　複素数について

複素数は数学の実体的な対象として非常に重要なものです。高校の教材に取り入れられたことは、それ自体は大変結構なのですが、その取り上げ方に展望が有るようには見えません。ここでは、高校生に対するサマーセミナー用に、通常の教授システムとは少し違う方法で複素数を取り上げてみました。

2行2列の行列なら、高校生の多くは既知のこととして扱えるでしょうし、知らなくても分かるように行列の導入も考えてみました。複素数は代数的に導入してからガウス平面を考えるのが、歴史的にも正しいし殆どのテキストもそうなっていますが、ガウス平面の考案が複素数の認知の為に果たした役割を考えれば、平面の特殊な変換の集まりと見るこの立場も教育的には面白いかもしれません。

講演のメモ程度のものではありますが、何かの参考になればと思っ

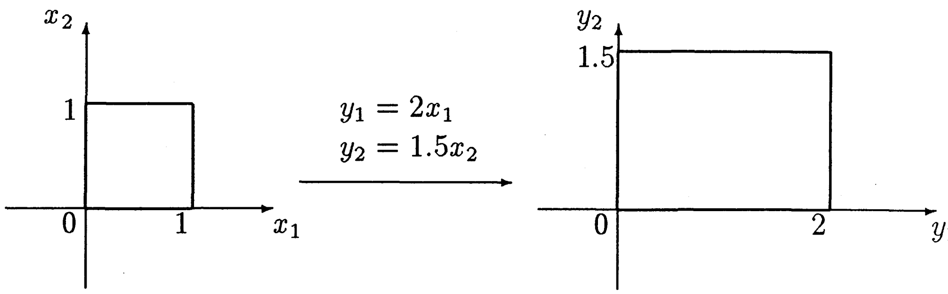
ています。

2.1　2行2列の行列

行列を、数の一般化としても、1次関数の一般化としても考えることが出来ることを解説してみよう。

1次関数 $y = ax$ は2変数 x, y の間の一番簡単な関係だと言うことが出来る。ここで、独立変数も従属変数も2つずつあれば、それぞれ x_1, x_2 と y_1, y_2 と書けば良い。このとき、一番簡単な関係は $y_1 = a_1x_1,\ y_2 = a_2x_2$ になるだろう。平面の点を2つの数の対 (x_1, x_2) で表わすことは知っているだろうから、この関係によって平面の点 (x_1, x_2) を点 (y_1, y_2) に写すと思うことも出来るだろう。普通（独立変数も従属変数も一つである）関数のグラフは2次元平面の中の曲線として表されるので、関数と言えばグラフのことだと言ってもよい位グラフに馴染みが有るだろうが、平面から平面へという「関数」のグラフは4次元の平面の中の2次元の曲面ということになり、3次元空間に住む人間には視覚的に捉えることは難しい。そこで独立変数の棲む (x_1, x_2)–平面の何かしら特徴的な曲線族を描き、それが従属変数の棲む (y_1, y_2)–平面のどんな曲線族に写るかを示すという方法を採ることが多い。

今考えている $y_1 = a_1x_1,\ y_2 = a_2x_2$ の場合、横方向を a_1 倍、縦方向を a_2 倍するということに当たっていて、この場合各座標軸に平行な辺を持つ正方形を独立変数の平面に描くと様子が分かるだろう。$a_1 = 2,\ a_2 = 1.5$ の例を図示しておこう。

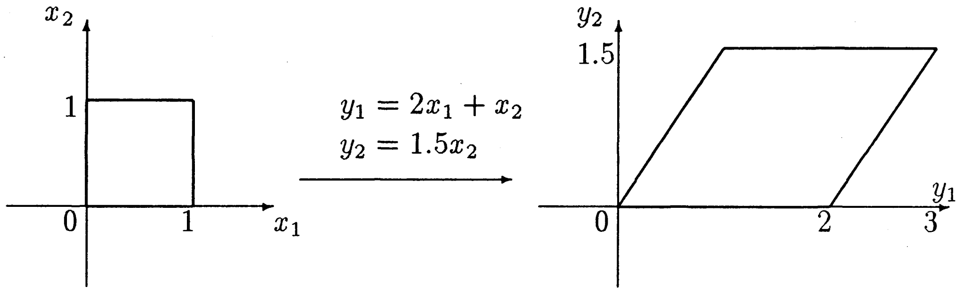


同様な正方形は皆、同じ相似比を持つ長方形に写るので、そうした正方形の代表として左上に図示した正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$[1]を採ることが多

[1] $[0, 1]$ は単位の長さの線分で、座標原点を頂点の一つに持つこの正方形を、ここ

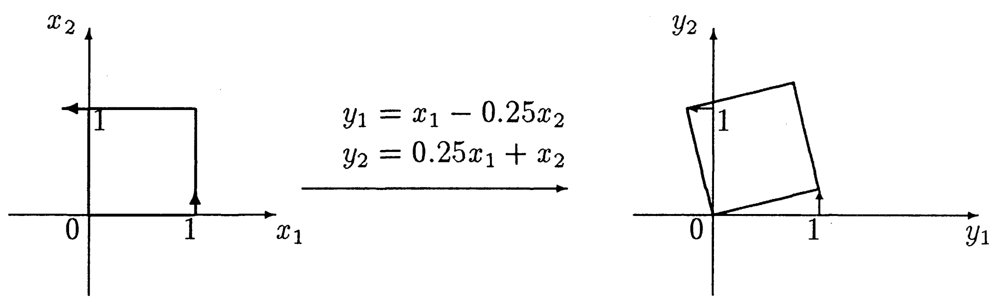
いし、これだけでも良く分かると思う。

しかしこれでは1次関数を別々に扱うのと同じで、折角、変数を2つずつにした甲斐がないというものだ。そこで、1次ではあるが y_1 に x_2 も関係するようにしたらどうなるだろうか、考えてみよう。例えば、$y_1 = a_1x_1 + bx_2,\ y_2 = a_2x_2$ を考えると、



のように横軸の方向に、長方形の背を押してずらすことになる。逆に $y_1 = a_1x_1,\ y_2 = cx_1 + a_2x_2$ なら、長方形を縦軸の方向に押してやることになるだろう。

では、縦横双方にずらせばどうなるだろうか。ずらす部分の効果を見るために、特別な場合にやってみれば、



となる。回転しながら拡大しているように見える。事情を調べる前に、記号を確定しておく。添え数で書くほうが一般化できてよいのだが、今は2次元しか扱わないので、

$$(1) \qquad u = ax + by, \qquad v = cx + dy$$

のように書くことにして、平面の点 (x, y) を点 (u, v) に写すと考える。そして、このことを行列の記号を用いて、

では、単位正方形と呼ぶことにする。

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わすのである。ここでは点 (x,y) は原点 $(0,0)$ を始点とし (x,y) を終点とする矢印ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と考えていることになっている。

つまり、行列とベクトルで表している式 (2) は、式 (1) そのものをシンボル的に言い換えただけのものであり、式 (2) の内容は式 (1) に他ならないことが重要なのである。

これはある意味で、ものに名前を付ける作業に似ている。同じ犬をポチと呼ぼうとコロと呼ぼうと、実体としての犬には何の影響もないのだが、飼い主の家族のそれぞれが違う名前で犬を呼んだとしたら困るだろう。互いに何の話をしているのか分からない。飼主以外にとっても同じ名前で呼んだほうが便利である。つまり、問題は正しさなどではなく、便利さなのである。

図形的に大切な特徴を述べると、(x,y)–平面の直線は特別な場合を除いて直線に写されるということである。どんな場合が特別かをきちんとするのは少し面倒なので、ここでは、(u,v)–平面の直線は (x,y)–平面のある直線を写したものになっていることを示すだけにする。(u,v)–平面の直線は一般に $mu + nv = 0$ と表わすことができるので、

$$(3) \qquad \begin{aligned} 0 &= mu + nv = m(ax + by) + n(cx + dy) \\ &= (am + cn)x + (bm + dn)y \end{aligned}$$

となり、この式 (3) は (x,y)–平面の直線を表わしている[2]。

従って、変換 (2) がどのようなものかは、単位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ がどのような四角形に写るかが分かればよいことになる。

最初の例では $[0,2] \times [0,1.5]$ の長方形に写ったし、二つ目の例ではその長方形の頭を少し押したような平行四辺形に写っている。三つ目の例では、回転しながら拡大したものになっている。

蛇足かもしれないが、一般には、変換 (2) は単位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ を（原点を一つの頂点とする）平行四辺形か、線分か、又は原点だけかに写すことを注意しておく。

[2] $am + cn = 0, bm + dn = 0$ という特別な場合を除いて

2.2 拡大縮小の操作は実数

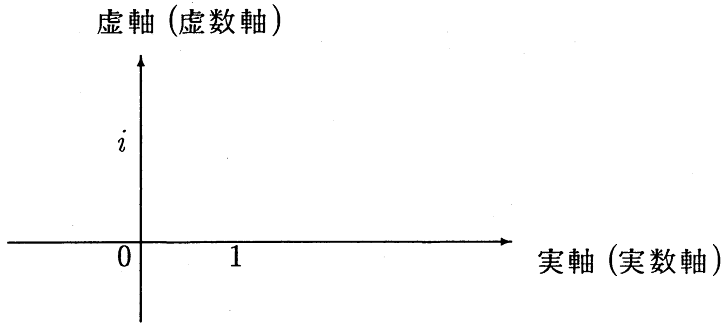
実数とは何だったかを思い出そう。実数の全体は、一言で言えば完備な順序体だということだが、数直線上の点に対応する数だということも出来る。今複素数を平面の点に対応する数だと思おうとしているのだが、点集合の拡大と見るだけでは代数的構造が自然には入らない。

幾何的な観点を強調するほうが直感に訴えやすいだろう。実数体 $\mathcal{R}$ を数直線として見るということは、集合としては直線であって、更にその点の間に代数的構造があるということである。その代数的構造を $\mathcal{R}$ 内部の演算として考えるより、直線 $\mathcal{R}$ の変換と考えてみよう。そのほうが複素数の場合に拡張しやすい。

さて、実数 rは、直線 $\mathcal{R}$の変換だとすると、足し算引き算は $\mathcal{R}$を r だけ右左にずらすことに当たり、掛け算は原点を中心に直線 $\mathcal{R}$を r倍に拡大・縮小することで、rが負の時は更に向きまで変えることを意味している。

複素数を平面の特殊な変換の集まりとみたいという立場に立っている。実数を含んだものとして複素数を考えるのだから、実軸上の上の変換を自然に平面に拡張しておく必要がある。

平面の変換と見ようとすれば、足し算引き算は平面全体の実軸方向の平行移動と考えれば良いが、掛け算に関しては、$r > 0$のときは、平面全体を原点を中心に r倍することで、$r < 0$ の時は$-r$倍した後で原点に関する点対称を施したものと考えることが出来る。



実数 rの掛け算を式で書けば、$u = rx, v = ry$ということになり、(2)の形に表わすことが出来る。つまり、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる。この意味で、$r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$と書いてもいいだろう。左辺のように単独で書くときは実数本来の姿で、右辺のように書くときは平面の変換と見ている。

r倍した後で s 倍するというのは rs 倍することになり、r倍したものと s 倍したものを足す（ベクトルとして）ことは $r+s$ 倍することになり、実数の四則は、平面の変換の操作に対応している。

こうした意味で、$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$は足し算の単位元に当たり（左右に0だけ動かすのだから）、$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$は掛け算の単位元に当たる（座標の各々を 1倍するのだから）。

-1という実数は平面の変換としては$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$であるが、これは原点に関する点対称に他ならないことが分かるだろう。しかし、同時にこの変換は原点に関する 180°回転とも考えることが出来、こう思えば、変換としての平方根に開くことができる。つまり、右にしろ左にしろ、原点に関して 90°回転する変換は 2度施せば、点対称と同じになるのだから、90°回転を-1の平方根だと思っても良いではないだろうか。

2.3 回転とは

それでは一般に回転はどうなるのだろうか？ 3番目の例から（原点中心の）回転もまた、行列を掛けるという (2) の形に書けることが想像できる。(2) の変換では、単位正方形の頂点 $(1,0)$ は (a,c) に写り、$(0,1)$ は (b,d) に写っている。原点の周りの回転をするのだから、原点からの距離は変わらない。だから、原点と (a,c) の距離も、(b,d) との距離も $1 =$ (正方形の一辺の長さ) である。また回転しているのだから、原点とこの二つの点を結ぶ 2 本の直線が直交していたことも変わらない。このことを式で表わすと、

$$a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2, \qquad ab = -cd$$

である。前の式を移項して a^2を掛けると、

$$
\begin{aligned}
0 &= a^4 + a^2c^2 - a^2b^2 - a^2d^2 = a^4 + a^2c^2 - c^2d^2 - a^2d^2 \\
&= (a^2 + c^2)(a^2 - d^2) = a^2 - d^2
\end{aligned}
$$

つまり、$a^2 = d^2$となり、上の式に代入すると、$b^2 = c^2$ともなる。

ここで回転であるということを考えに入れると、点 $(1,0)$ の行き先である点 (a,c) が第１、４象限にあれば $(a > 0)$、点 $(0,1)$ の行き先である点 (b,d) が第２、１象限にあること $(d > 0)$ が分かるので、a と d は同じ符号であることが分かるだろう ($a < 0$ と $d < 0$ が対応することも単位正方形の回転を考えれば分かる)。同様にして、b と c が異符号であることも分かるだろう。

従って、$a = d, b = -c$ であることが分かる。つまり回転は $a^2 + b^2 = 1$ であるような点 (a,b) (つまり単位円周[3]上の点) に対して、

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}
$$

と表わされることになる。

2.4 拡大・縮小と回転の組み合わせが複素数である

実数に当たる全平面の拡大縮小 (4) と、原点に関する回転 (5) はそれぞれもまた互いにも可換な変換で、これらの変換全体は拡大縮小を伴う回転の全体ということになる。(2) の形に表わせば、

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}
$$

と表わされる。

行列の集合 $\mathcal{C}_M = \left\{ \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix} \middle| r > 0, a^2 + b^2 = 1 \right\}$ を考えると[4]、0で割ることを除いた加減乗除が自由に出来て、$\mathcal{C}_M$を数の集合と考えることもできる。これが普通に複素数として知られているものと一致することを確かめてみよう。

---

[3]原点を中心とし、半径１の円のこと。

[4]行列を英語で Matrix と言い、行列で書かれた複素数 Complex Number という意味での、ここだけの記号である。

拡大縮小部分は実数部分と呼ばれ、回転部分は虚数部分と呼ばれる[5]。虚数単位 i は、正の向きの 90°回転[6]

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のことと考えることにする。

数と思うことができるためには、加減乗除の四則が変換の合成とちゃんと対応していないといけない。変換 (2) で単位正方形の頂点 $(1,0)$ は点 (a,c) に写り、点 $(0,1)$ は点 (b,d) に写ることから、変換の合成を行列の積と考えたいので、行列の積は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

の形にするのが自然である (点 (a',c') は点 $(aa'+bc', ca'+dc')$ に写り、点 (b',d') は点 $(ab'+bd', cb'+dd')$ に写るから)。すると、

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

であり、これをまた

$$r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とも表わすことにして、このことで行列の実数 r倍を定義することにしよう。平面を全体として拡大縮小するということは、われわれが平面を見ていたとして、眼の位置が平面からどれだけ離れているかということに対応している。それゆえ、式 (7) の可換性は、眼の位置の遠近によって、見える一次変換(行列による変換 (2))が本質的には変わらないということを意味している。

すると、実数 $s = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ への積は

$$rs = r\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs & 0 \\ 0 & rs \end{pmatrix}$$

---

[5] 積の構造に関してのことで、和の構造に関しては通常のものである。

[6] 単位正方形の行き先を考えれば、この行列がこの回転を与えていることが分かるだろう。

となり、回転$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$への積は

$$r\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix}$$

となる。回転同志の積はまた、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

となり、これもまた回転である ($a'' = aa' - bb'$, $b'' = ba' + ab'$とおけば、$a''^2 + b''^2 = 1 = c''^2 + d''^2$, $a''b'' + c''d'' = 0$であることが確かめられる)。

また行列の和と差は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm a' & b \pm b' \\ c \pm c' & d \pm d' \end{pmatrix}$$

の形にするのが自然であるから、実数同志、回転同志の和差はそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \pm s & 0 \\ 0 & r \pm s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm a' & -b \mp b' \\ b \pm b' & a \mp a' \end{pmatrix}$$

で、それぞれ実数、回転になるが、実数と回転との和差も

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \pm a & \mp b \\ \pm b & r \pm a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

となって、実数と回転との積に書かれることになる。ここで、
$t = \sqrt{(r \pm a)^2 + b^2} > 0$, $c = \dfrac{r \pm a}{t}$, $d = \pm\dfrac{b}{t}$である。

こうして、行列の集合 $\mathcal{C}_M$は加減乗まではその中で出来ることになった。結合・交換・分配などの計算規則が成り立つことは明らかである。

単位円周上の点 (a, b) は xー軸からの角θを指定する[7]。この時 $a = \cos\theta, b = \sin\theta$と置いて三角関数を定義する。この角$\theta$を回転角という。

[7]正の向きに測っている。もちろん、2πの整数倍を除いて定まる。

つまり、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$を掛けることが角$\theta$の回転を施すことになる。

回転の合成と角の和と行列の積とから、三角関数の加法公式

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta,$$
$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

が得られる。

また $\mathcal{C}_M$の任意の元 $z = \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix}$は、$x = ra, y = rb$ とおけば、

$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = ra\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + rb\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= ra1 + rbi = r(a+bi) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy \end{aligned}$$

と書かれる。このとき、xを zの実部（実数部分）、yを zの虚部（虚数部分）という。また、rを zの絶対値と言い、θを zの偏角という[8]。

集合としては、$\mathcal{C}_M$は

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_M &= \left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}; x, y\text{は実数}\right\} \\ &= \{x1 + yi; x, y\text{は実数}\} = \{x + iy; x, y\text{は実数}\} = \mathcal{C} \end{aligned}$$

と書くことも出来、$\mathcal{C}$では複素数の普通の表わし方になっていることが分かるだろう。

複素数を実部と虚部で表す、つまり、$z = x + iy, z' = x' + iy'$と書くときは、複素数の和差と積は、良く知られた式

(8) $z \pm z' = (x \pm x') + i(y \pm y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

で表されることになる。積の式を行列の計算でも確かめることが出来る。

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -xy' - yx' \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}$$

---

[8] x, yは加法に関する実部、虚部であり、r, θは乗法に関する実部、虚部であるが、より感覚に馴染みやすい加法に関する方に名前の先取権が与えられているということである。複素数 zを絶対値と偏角の対 (r, θ) で表わすことを極座標表示という。$r = |z|, \theta = \arg z$という記号を使うこともあるし、$x = Rez, y = Imz$という記号を使うこともあるが、これらはただ一々言葉でいうと煩雑だからという意味しかないと思ったら良い。

また、$0 = 0\cdot 1 = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 & 0 \\ 0 & 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$以外の $\mathcal{C}_M$の元は掛け算に関する逆元を持つ。なぜなら、実数部分は $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$を取れば良いし、回転部分の逆元は

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

と置けばよい。つまり

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix}^{-1} = r^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{9}$$

であり[9]、これもまた集合 $\mathcal{C}_M$の元だから、$\mathcal{C}_M$では 0で割る以外の加減乗除が出来ることになる。

$\mathcal{C}$の形で複素数を書けば、$z = x+iy$の共役複素数$\bar{z} = x-iy$を取ることは実軸に対する対称変換だが、行列で表してみれば、$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = re^{i\theta}$に対して、

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = re^{-i\theta}$$

となり、回転部分だけの向きを逆にすることに当たっている。従って、$z\bar{z}$を掛ければ、回転部分の効果は相殺し、拡大縮小の効果は自乗されることになる、つまり、

$$z\bar{z} = r^2 = |z|^2$$

となる。勿論これは積の公式 (8) に代入しても得られるものである。この式からも逆元 z^{-1}は $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$であることが分かるが、変換と見ても式 (9) から、

$$z^{-1} = r^{-2}\begin{pmatrix} ra & rb \\ -rb & ra \end{pmatrix} = |z|^{-2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

であることが分かる。

[9] $zz^{-1} = 1$ であることは掛けてみればすぐ分かる。

2.5 オイラーの公式

極座標の回転部分が複素数の積の構造に則した座標を与えていることは前に述べたが、角θの回転は絶対値 1 の複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$を掛けることで表されてる。回転の合成は角の和に対応しており、変換と見たときは行列の積に対応している。

つまり、この部分で和を積に変える機構が働いていることになる。

和を積に変える関数と言えば、指数関数 e^xを思い出すだろう。

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

を指数法則と呼ぶほどである。

もしも指数関数が複素数の領域まで拡張できたとすれば、この回転部分を含んでいるのではないかと思うのもそう荒唐無稽なことではない。

実は、指数関数 e^xは複素領域上の指数関数 e^zと拡張され、純虚数に対応する部分が回転に対応するのである[10]。つまり、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

と置けば、指数法則は三角関数の加法公式に他ならないことが分かる。

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\phi)} &= \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= e^{i\theta}e^{i\phi}. \end{aligned}$$

更に、ここで$\theta = \pi$(円周率)での値を見ると、有名なオイラーの公式

$$e^{i\pi} = -1$$

が得られている。数学史を彩る三つの数、自然対数の底 e、円周率π、虚数単位 iが渾然と一体化している簡潔で美しい式だということになっている。美しいと感じるかどうかは、人それぞれの感受性の問題だから強要はしないが、簡潔で単純であることは異論がないだろう。

指数法則の深い理解、複素関数論への展望、円周率の解析的な意味付け … この公式を眺めることで、数学者は多くの夢を育んで来た。その歴史に対する尊敬と郷愁、もしかするとこれからも新しい夢の源泉

[10] この理由を説明する方法は何種類もあるのだが、どれも大学に入ってからでないと説明する訳にはいかない。ちょっとだけ、高校数学以上の微積分が必要なのです。

になるかもしれないという期待、それがこの公式を美しいと呼びたくなる数学者の気持ちなのである。

ついでだから、三角関数を指数関数で表しておこう。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

この式からも色んなことが読み取れるが、それは読者の楽しみにとっておくことにしよう。

2.6 巾根の存在

小学校の時に自然数 $\mathcal{N}$を習い始めて、次いで正の有理数 $\mathcal{Q}_+$を学び、中学に入って負の数を学んだので、整数 $\mathcal{Z}$と有理数 $\mathcal{Q}$も学んだことになる。それがいつの間にか、関数のグラフと関数の間を行ったり来たりしているうちに、無理数があることも知るようになり、いつしか数直線と対応する数として実数 $\mathcal{R}$を学んだことになっている。更には2次方程式の一般解（根の公式）で、判別式の符号が負になる場合として複素数が導入されて来た。

数学的な言葉でスローガン的にまとめてみると、加法に関しても乗法に関しても半群である自然数の集合 $\mathcal{N}$を、乗法に関して群にするため正の有理数 $\mathcal{Q}_+$を導入し、加法に関して群にするため整数環 $\mathcal{Z}$を導入した。加法と乗法に関しても共に群にし、分配法則で互いの整合性を保証する、つまり体にするために有理数体 $\mathcal{Q}$を導入した。さらに例えば$\sqrt{2}$のような無理数を丸ごと抱え込んでしまうために、数直線に対応するものとして有理数体 $\mathcal{Q}$の完備化として実数体 $\mathcal{R}$が導入される。最後のこの部分は大学初年度の数学教育のハイライトだったのだが、近年は幾つかの学部・学科を除いては講義されないことが多い。

方程式を解くという立場から言えば、自然数係数の1次方程式 $ax \pm b = 0$ (a, bは自然数) の解をすべて含んでしまうようにするために有理数体 $\mathcal{Q}$が、つまり正負の分数が導入された。それを言うなら無理数$\sqrt{2}$は $x^2 - 2 = 0$を解くために導入されたのだし、その他多くの無理数も高次の方程式の根として導入されたと言って良い。しかし実数にはそれら、（代数）方程式の根として得られる数以外にも、例えば e やπなどを含めた、非常に多くの数があることが知られている。

しかしそれでも有理係数の2次方程式がすべて解ける訳ではない。簡単な $x^2 + 1 = 0$すら解けないのである。2次方程式だから二つある

筈のこの根の一方を i と書き、これもこれまでの数と同様に扱うことにすれば、それだけで複素数 $\mathcal{C}$が得られる。

実係数の2次方程式がこれだけあれば解けるのは、根の公式からすぐに分かる。しかし複素係数の2次方程式でもその根は複素数の中にあることが分かる。

問題をきちんと述べて見よう。a,b,cを複素数として、2次方程式

$$ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)$$

の根は、根の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられる。平方根を開く所以外では複素数のままであることは明らかである。ところで、任意の複素数の平方根というものがあるだろうか？あるのなら、この公式が根のすべてを与えているのだから問題はない。

実はもっと一般に、「任意の複素数に対する任意の巾根の存在」が言えるのである。極座標表示を知っていればこれはもう何でもないことになってしまう。

任意の複素数 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対して

$$w=\sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta}{n}}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n})$$

を考えれば、$w^n=z$であることを確かめるのは難しいことではない。絶対値は正の実数で、正の実数の中で n 乗根を取ることが出来るのは、x^nという関数が $x>0$ の範囲で単調増加であることを確かめれば良い。

勿論、n 乗根がいつでもとれるからといって、一般の n 次方程式が解けるようになったのではない。5次以上の方程式には一般解が存在しないことが知られており、更には四則演算と巾根を取ることで解けるかどうかを判定することができ、この判定のメカニズムは、悲劇の天才ガロアの名を冠して、ガロア理論と呼ばれている。

ここではルネッサンスの数学史を飾った、3次、4次方程式の一般解について簡単に述べておくに留めよう。

2.7　3次方程式の解法

x に関する3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$ を、まず実係数で考えよう。

a で割れるから、最初から $a=1$ として良い。さらに、$y=x+t$ を代入すれば、

$$\begin{aligned}&x^3+bx^2+cx+d\\ =\ &(y-t)^3+b(y-t)^2+c(y-t)+d\\ =\ &y^3+(b-3t)y^2+(c-2bt+3t^2)y+d-ct+bt^2-t^3=0\end{aligned}$$

となり、ここで $t=\dfrac{b}{3}$とおけば、

$$y^3=3py+2q,$$

となる。ここで、$p=\dfrac{1}{3}(\dfrac{b^2}{3}-c),\ q=\dfrac{1}{2}(\dfrac{bc}{3}-\dfrac{2b^3}{27}-d)$ である。

そこで、方程式 $x^3=3px+2q$を解くという問題を考えることにする。

少し試行錯誤でやってみよう。$x=y+z$とし、y,zを適当に置いたら解ける形にならないかと考える。すると、

$$x^3=(y+z)^3=y^3+3yz(y+z)+z^3=3yzx+y^3+z^3$$

となる。$yz=p, y^3+z^3=2q$となるように、y,zが選べれば、それが解 $x=y+z$を与えている。

y,zに関する関係式を $u=y^3, v=z^3$に関する式だと思えば、$u+v=2q, uv=p^3$となる。これはまた2次方程式の根と係数の関係と見ることが出来、根の公式から $u,v=q\pm\sqrt{q^2-p^3}$であることが分かる。任意の巾根を取れるのだから、3乗根もとれ、$y,z=\sqrt[3]{q\pm\sqrt{q^2-p^3}}$となり、方程式の根は

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$$

となる。

p,qが実数で q^2-p^3が非負なら、$q\pm\sqrt{q^2-p^3}$も実数で、3乗根も実数として確定した意味を持ち、その積も実数 p となる。しかし、3乗根は3つあるわけで、$y_0=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}, z_0=\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$とおくとき、それぞれ $\{y_0,\omega y_0,\omega^2 y_0\}, \{z_0,\omega z_0,\omega^2 z_0\}$ であり、組み合わせは9

通りある[11]。このうち、$(y_0, z_0), (\omega y_0, \omega^2 z_0), (\omega^2 y_0, \omega z_0)$ の 3 通りだけが、$yz = p$を満たすことが分かるのである。

従って 3 次方程式の解は、上の $x = y_0 + z_0$ばかりでなく、$x = \omega y_0 + \omega^2 z_0, = \omega^2 y_0 + \omega z_0$も解である。

これはこれで良いのだが、この一般解には実用上の難点がある。$q^2 - p^3$が負なら、虚数がそこで出てきてしまう。実係数の 3 次方程式は、(中間値の定理から)、必ず一つは実根を持つのだが、上の一般解を実行していくと途中の $q^2 - p^3$が負になってしまうことが起こりうる。こういう場合に、どれが実根に対応しているのかが容易に判定できないのである。

a, b, c が複素係数なら、複素数として平方根や、3 乗根を取ればよく、結果として複素数の中で 3 つの根が得られたことになる。

2.8 4 次方程式の解法

x に関する 4 次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\,(a \neq 0)$ も、3 次方程式の場合と同様に、$y = x + \dfrac{b}{4a}$とおけば、3 次の項が落ちて、$y^4 + py^2 + qy + r = 0$ となる。

この式が平方式＝平方式の形になることを目指して、パラメーター tを入れて、

$$(y^2 + \frac{t}{2})^2 = (t - p)y^2 - qy + \frac{t^2}{4} - r$$

と変形する。右辺が平方式になるための条件は判別式を計算して、

$$-D = 4(t - p)(\frac{t^2}{4} - r) - q^2 = t^3 - pt^2 - 4rt + 4pr - q^2 = 0$$

となるが、これは t に関する 3 次方程式と考えることができ、これを満たす t をひとつ取ってきて t_0と置けば[12]、2 つの 2 次方程式

$$y^2 + \frac{t_0}{2} = \pm\sqrt{t_0 - p}(y - \frac{q}{2(t_0 - p)})$$

を解けばよいことになる。

---

[11] ωは 1 の原始 3 乗根で、$x^2 + x + 1 = 0$ の根のうち、$\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$とする。つまり、$\omega^3 = 1, \bar{\omega} = \omega^2$である。

[12] 3 次方程式は一般に解けているから

3次方程式の解法をベースにすれば4次方程式の解法が簡単であることは歴史の皮肉を生んだ。ルネッサンス期の数学史のハイライトはタッターリアとカルダノとの対決だが、カルダノの弟子フェラーリに4次方程式が解けていたことが、正義が必ずしも勝つものでないことを数学の場でも示すことになった[13]。

2.9 初等幾何への応用

平成6年の1年生からの新課程では、初等幾何も複素数も入って来るとのことで、双方の関連に付いても述べておくのが親切かと思って項目を起こしてみたが、時間の関係上セミナーの時には触れることも出来なかったし、ここで詳しく述べる余裕もない。基本的な考え方だけを述べておこう。

初等幾何を複素数で解くといっても、所詮複素数は2次元の代数だから、3次元の幾何に於いてはあまり有効ではない。

初等幾何を代数を使って（解析幾何で）解くことも出来るが、問題によって有効な場合と余り役に立たない場合とがあることは良く知られている。

ここでは初等幾何の問題が、問題によっては、複素数を用いると簡単に証明出来る場合が有ることだけコメントしておくだけにしたい。

直線は平面の実1次元部分集合だが、絶対値をうまく使うなり共役複素数を使うなりして簡潔に表現出来る場合が有るし、非調和比を使えば共円性なども簡潔に表現出来、例えばトレミーの定理なども簡単な計算で導かれる。

初等幾何の技法でも、することは、2点を結ぶ、2直線の交点を取る、直線と円との交点、円と円との交点を求めることが多い。複素数の世界でやるとなれば対応する方程式を解くことになるのだけれど、1次分数変換という道具があって、複素数平面に無限遠点を付け加えた複素射影直線（図形としては球面にほかならない）上の変換に持ち上がり、複素平面上の円と直線をまったく同じものと取り扱えるのである（直線とは単に無限遠点を通る円のことと考えられる）。

そのことによって、初等幾何的には別々に見える定理が同じものの

[13]数学史の本なら何にでもというほどポピュラーなエピソードである。これを機会に数学史の本も読んで見て欲しい。例えば、昔の本だが、E.T. ベルの「数学を作った人々」（東京図書）を薦めておく。

違った側面にすぎないというような形で統一的に処理出来る場合があるということなどである。

3 TOSMポストのその後

去年のこの会誌にTOSMグループの活動のことと、第1回のTOSMポストの質問とその解説を書かせて頂いた。その後、TOSMの活動は、8月に福井でTOSMシンポジウムを行い、そこでのアンケートの結果をまとめて岐阜大学の紀要に載せたことと、TOSMポストを続けていることだけである。形に現れていないものもあるのだが、出来ていないことを印刷にすることもはばかられる。ここではTOSMポストのその後についてだけ述べさせて頂こう。まず、質問のリストを挙げる。

1. 第1回TOSMポストの質問

   (a) 辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか?

   (b) 円周上に n 点を取り互いに線分で結ぶとき、円内にできる領域は最大幾つか?n だけで簡単に表わされるか?

   (c) 正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが360°を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正7角形や正11角形などを分度器とコンパスで描くことが出来るか?

   (d) 直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことが出来るか?

   (e) $\sqrt{24x^2+8x+1}$が有理数となる有理数 x にはどんなものがあるか?

2. 第2回TOSMポストの質問

   (a) 正方形を縦横に並べて大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜて多くの正方形ができる。n倍にしたときにできる正方

形の数は分かるが、同じことを正三角形でしたら幾つになるか、公式があるか？

(b) 三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を2等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか？

(c) 1. 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的は何なのか。どう設定するのがいいか。

2. ほとんどの生徒が文科系を志望しているので、1年、2年と学年が進むにつれ実力テストなどで成績が下がる。数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

3. 第3回 TOSM ポストの質問

(a) 高校数学で、数学的帰納法を $n \geq 0$(n は整数)に対して証明する時、第1段を $n = 0$ で示して第2段を $n \geq k (k \geq 0)$ に対して示して良いでしょうか。それとも、高校では帰納法は自然数である n に対するものなので、第1段で $n = 0, 1$ に対して示し、第2段を $n \geq k (k \geq 1)$ に対して示した方が良いでしょうか。

(b) 長方形の縦と横はどうして決めるのですか。倒せば縦と横が変わりますし、斜めに置いたら、縦と横とをどうして決めたら良いのでしょうか。(円錐の場合などは、倒しても高さは変わらないのですが、長方形だと変わるような気がします。)

(c) 円を投影したら何になるか。楕円になると思うが、元の円が内接する正方形を考えて、その投影が台形になる場合に、相対する接点を結ぶ線分の交点は一体何になるのか。

第1回の分については去年の会誌 [5] に解説を述べたので、その後の分について、コメントと解答を簡単に付しておこう。

3.1 正方形を縦横に付けていって大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜてできる正方形の数は分かるが、正三角形で同様にしたら幾つになるか、公式があるか？

三重県の中学の中村先生からの質問である。今年度の県教研の助言者の依頼に来られたおり、TOSM ポストの話もしたし、他の TOSM のプロジェクトの話も聞いていただいた。その後何かの話のついでだったか、気になっている問題としてこの問題をあげられた。どこかに書いてあるかも知れないが、本を調べるより事情を調べる方が面白そうで、やってみることにした。

正方形の場合は辺の長さが k の正方形は $(n-k)^2$ 個あるので、$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であることは容易に分かる。

正三角形の場合、と言っても、別に正三角形でなくても一般の三角形でも同じことであるが、その個数 $S(n)$ は実際に絵を描いて数えてみると、

$$S(1) = 1,\ S(2) = 5,\ S(3) = 13,\ S(4) = 27,\ S(5) = 48$$

となる。n が奇数か偶数かで $S(n)$ に対する式は異なり、

$$S(2m+1) = \frac{(m+1)(4m^2+7m+2)}{2}$$

$$S(2m) = \frac{m(m+1)(4m+1)}{2}$$

となる。

[解説]　$n = 5$ で、正方形の格子と正三角形の格子を描いて、少し調べてみよう。

正方形の場合は、一番大きい正方形の辺の中に長さが k の辺は $n-k+1$ 種類あり、従って 1 辺の長さが k の正方形は $(n-k+1)^2$ 個あるから、全部で $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であることは容易に分かる。この数の議論は正方形が長方形でも平行四辺形になっても、同様である。

だから、正三角形の場合と言っても、一般の三角形でも同じことになるのであるが、見たところ数えやすいので、正三角形に近い三角形で図を描けばよい。答えを $S(n)$ とすると、絵で数えてみると、

$$S(1) = 1,\ S(2) = 5,\ S(3) = 13,\ S(4) = 27,\ S(5) = 48$$

などとなっている。

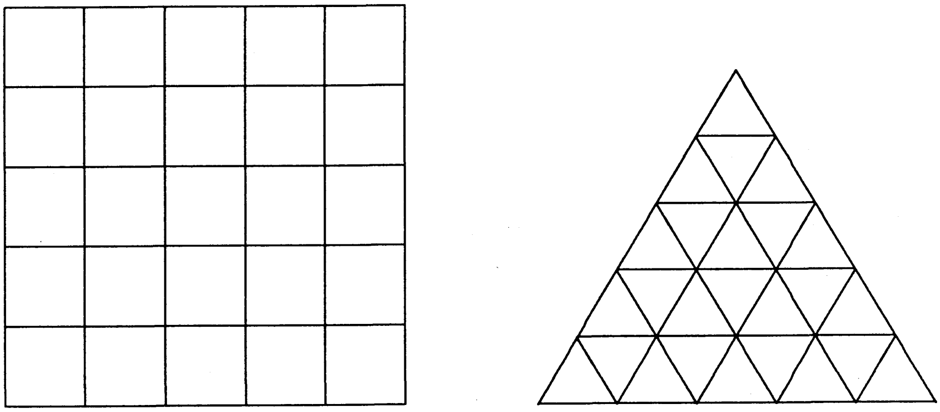


図 1: 正方形と正三角形の格子

例えば $S(n)$ が n の多項式で次数も分かっているとすれば、次数+1個のデータがあれば未定係数法を使って強引にでも求めてしまうことができるのだが、多項式になること自体が分かっていない。

元の正三角形の拡大と平行移動で重なるもの（仮に、上三角と呼ぼう）と、180°回転をしないと重ならないもの（下三角と呼ぼう）とは、数え方に違いがあるので、上三角の部分だけの和を $U(n)$ 、下三角だけの和を $L(n)$ と書くことにすると、

$$S(n) = U(n) + L(n),\ U(1) = 1,\ L(1) = 0$$

となっている。図を見て、一番下の辺に辺や頂点を持つ三角形の数が、階差 $S(n) - S(n-1)$ を表わしており、これを $U(n)$ と $L(n)$ とに分けて考えてみる。$U(n)$ については、底辺を共有し、サイズが i の三角形は丁度 $n-i+1$ 個あるのだから、

$$U(n) - U(n-1) = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

となり、従って、

$$\begin{aligned} U(n) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{4} \end{aligned}$$

である。

$L(n)$ については、n の偶奇によって違うので、$m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ とおき、m で表わすことにしよう。サイズ i の下三角で頂点が底辺上にあるものの個数は、両側から i ずつの辺の上には頂点が来れないことから、$n+1-2i\,(>0)$ 個ということになるので、

$$L(n)-L(n-1) = \sum_{i=1}^{m}(n+1-2i) = m(n+1) - m(m+1) = m(n-m)$$

となる。m だけで表わそうと思えば、

$$L(2m) - L(2m-1) = m^2$$

$$L(2m+1) - L(2m) = m(2m+1-m) = m^2 + m$$

となる。したがって、それぞれ

$$\begin{aligned}L(2m) &= \sum_{j=1}^{m}(L(2j) - L(2j-1)) + \sum_{j=1}^{m-1}(L(2j+1) - L(2j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} j^2 + \sum_{j=1}^{m-1}(j^2 + j) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - m^2 + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)(4m-1)}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(2m+1) &= \sum_{j=1}^{m}(L(2j) - L(2j-1)) + \sum_{j=1}^{m}(L(2j+1) - L(2j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} j^2 + \sum_{j=1}^{m}(j^2 + j) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(4m+5)}{6}\end{aligned}$$

となる。それゆえ、

$$\begin{aligned}S(2m) &= \frac{2m(2m+1)(2m+2)}{6} + \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(4m+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(2m+1) &= \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)}{6} + \frac{m(m+1)(4m+5)}{6} \\ &= \frac{(m+1)(4m^2+7m+2)}{2}\end{aligned}$$

となる。n で書けば、

$$S(n)=\frac{n(n+2)(2n+1)}{8} \qquad (n:\text{偶数})$$

$$S(n)=\frac{(n+1)(2n^2+3n-1)}{8} \qquad (n:\text{奇数})$$

である。

3.2 三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を2等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか?

辺の上の時は簡単で、$\triangle ABC$の辺 BC上に点 Pが与えられたとする。BCの中点 Mを取れば、$\triangle ABM$は $\triangle ABC$の面積の半分である。Mから、APの平行線を引き ABか ACかとの交点を Q とすれば、直線 PQ は $\triangle ABC$を2等分する。

ここで BCの中点 Mの代わりに BCを $m:n$ に内分する点から出発すれば、PQ は $\triangle ABC$を $m:n$ に内分することになる。

最初に与える点 Pが何処にあっても、$m:n$ の場合に一般化した問題の解答を得ることが出来る。まず次の問題に帰着する。

「ある角と点 Pを与えて、点 Pを通る直線で角から切り取る三角形の面積を与えられた値に出来る。」

そしてこの問題は相似と円を使って解決される、割と良く知られた問題である。“線分の代数”という観点で教科書の中で論ずるが、それとは別にこの問題に直接かかわる所だけの「解説」を書いたほうがよいか、少し迷っている。

この方針での解法は、例えば岩田至康 [2]p.331 にある。点 Pが角の内部にある場合とか、与える面積の値によってはそこにあるままの証明は通用しないが、補助的な角を取る方向を変えるとか、角の辺に関する対称点を取るなどの若干の修正をすれば良い。

また、与えた点 Pが辺上にある時のアイデアは、平行線間で面積を保ちながら三角形の形を変えるというものだが、比例を使わずこのアイデアだけで押し通した証明が秋山武太郎 [1]p.130 にある[14]。マニアックなまでに技巧的である。それはそれとして面白いと思う感性もあっ

[14]勿論一般の $m:n$ に分割するものは比例を使わずに出来る訳はないが、半分になら出来る。比例を使わない証明であることにこだわる著者は $m:n$ で出来ることもコメントしたくなかったのかも知れない。

た方が良いかも知れない。上のアイデアを使って $\triangle ABC$の半分 (一般には $\frac{m}{m+n}$) の面積の多角形を次々と作っていくのだが、点 Pの役割を三角形の頂点に移動する中間的な三角形を作るのがキー・アイデアである。最後の所では、ある線分上を動かしていく点につれて出来る四角形がいつ平行四辺形になるかという、作図題でよく現れそうな技法が使ってある。この部分は最初の点 Pが $\triangle ABC$に対してどんな位置にあるかによってかなり証明の表情が違う（本質的には同じだが）。自分でやるときは悩むかも知れない。

ところで、点 Pが何処にあろうと任意の三角形 $\triangle ABC$を 2 等分する直線が存在すること自体は中間値の定理と呼ばれる解析の定理を使えば簡単に判る。点 Pを通る直線 ℓに対して、直線 ℓで $\triangle ABC$を分割した左の領域の面積から右の領域の面積を引いた関数 $f(\ell)$ を考える。そして ℓをある基準線からの角度θで表わすことにすれば (角度を確定するためには直線に向きがついていると思えばよい)、Pが $\triangle ABC$の内部にあるときはθは 0°から 360°まで動き、$f(0^\circ)$ の値と $f(180^\circ)$ の値は、$f(0^\circ)+f(180^\circ)=0$ だから、正負が異なり、従って何処かで fの値が 0 になるところがあり（中間値の定理)、そこで直線 ℓは $\triangle ABC$を 2 等分することになる。点 Pは辺上または $\triangle ABC$の外部にあるときは、直線 ℓが $\triangle ABC$に交わる角の所だけを fの定義域とすれば、fの値は Sから$-S$まで変ることになり (Sは $\triangle ABC$の面積)、内部にあるときと同様である。

与えられた問題はこのように存在が保証されている直線を定規とコンパスだけで作図できるかという問題である。この種の問題が、現在、教育的意味以外にどんな意味を持ち得るかは議論の余地があるが、そういったことは言わずに問題はゲームとして楽しめばよいと思う。

しかしながら、「解はあれば良いのだ、作図するといってもどうせ厳密には描けないのだからある程度正確ならよいじゃないか、鉛筆の線の幅より誤差が小さければ何の問題もない筈」、という立場もないではない。

その意味では存在が保証されている以上、解の直線にいくらでも近付くプロセスが得られればよいとも言える。例えば、頂点から点 Pを通る直線が辺と交わる点を P'とすると、P'を通る 2 等分線は、点 Pは通らないが、求める直線の近似と考えられる。得られた四角形に等しい面積を得るため、頂点を取り替えて同様の操作を行うと、更に解の

直線に近付く。これを繰り返せばよい[15]。

3.3 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的をどう設定すべきか。 数学の成績が下がる文科系志望の生徒に対し、数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

教育における数学の目的は何かというような問題は一言では言いにくい。恐らく、どのように言ったとしても一面的にならざるを得ず、不適切な場面が起こりうるだろう。

常に正しい主張ができたとすれば、それは多分普遍的一般的な言明になり、それゆえ、現場では役に立たず質問に答えていることにはならないだろう。

それでも敢えて答えるとなれば、"新しいカリキュラム"になど向かわなくても良いのではと、言いたくなる。そして、数学が好きになるような興味付けは出来るかどうかを考えるより先に、教師自身が数学を好きになることだと言いたくなる。

指導要領が変わろうと、数学自体が変わる訳ではない。何かが好きになるかどうかは個人の好みなのだから、むやみに干渉すべきでない。

色々な外圧が強くなればなるほど、教師個人の内なる数学が問われる。何より数学を愛することだと思う。しかし、自分が愛しているからといって、それだけで君達も好きになれと生徒に強要は出来ない。「出来れば好きになって欲しい」程度のことは言ってもよいだろうが、すべきなのは教師自身が本当に数学を愛していることを数学を通して伝えることである。

教育技術的には、数学的な技術を余り必要としないトピックスで、面白かったり、思いがけない応用があったりするものの中で、教える教材に関連したものを選んで、導入部分に使うことであろう。もしかすると、こうした質問はその様なトピックスとしてどんなものがあるかという質問なのかも知れない。しかし前にも述べたように、それは個々

[15]実は、秋山氏の解答を示した後で点が$\triangle ABC$の内部にある場合にやってみるように浪人中の息子に言ったところ、難しかったとみえて苦し紛れに、直線の近似列を作ってきた。問題が違うと叱りはしたが、分かってしたのならそれはそれで見識かとも思う。実際にこの問題を教室で行う場合には、考慮しなければいけないかも知れない。

のケースで何が適切かは変ってくる。素材としては色々なものが有りえ、それを集めた本を書く予定もあるが、成書もないではない。

具体的に状況を判った上なら考えることも出来るが、やはりこの種のことは教師自身の数学が問われているというべきであろう。あまり安直な種本探しや、ネタ探しは勧められない。

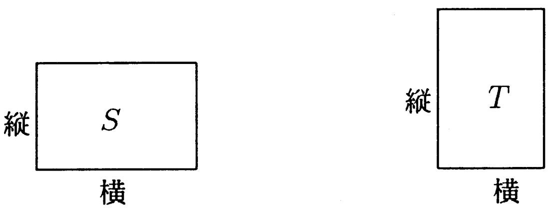
3.4 高校数学で、数学的帰納法を $n \geq 0$(n は整数)に対して証明する時、第1段を $n = 0$ で示して第2段を $n \geq k(k \geq 0)$ に対して示して良いか。それとも、高校では帰納法は自然数である n に対するものなので、第1段で $n = 0, 1$ に対して示し、第2段を $n \geq k(k \geq 1)$ に対して示した方が良いか。

答えに窮してしまう。数学者として答えるなら、当然「どちらでも構いません。なんなら $n \geq -10$ に対してだって同じ様に証明しても良いのですから」というしかない。大学入試でなら間違いなくどんな大学でも、どちらでも良いという扱いになる。

しかし、高校の実態では?、と言われると分かりませんとしか答えようがない。それは一種の踏み絵として扱われている場合があるようだから。

数学でなら、「命題 $P(n)$ を $n \geq n_0$に対して証明せよ」という問題を、$n_0 = 1$ の場合に帰着することは何でもない。$m = m(n) = n - n_0 + 1$ と置き、命題 $Q(m)$ を $P(m + n_0 - 1)$ のこととすれば、「命題 $Q(m)$ を $m \geq 1$ に対して証明せよ」という問題になる。これを示せば、元の命題も示せたことになる。

3.5 **長方形の縦と横はどうして決めるのか。倒せば縦と横が変わるし、斜めに置いたら、縦と横とをどうして決めたら良いか。**



最初この問題を読んだ時、縦と横の名前の問題と思わず、面積の公式の問題と誤解してしまった。

小学校のある時期には、長方形の面積は「縦×横」と教えることがある。

上の図を2辺が $2cm, 3cm$ の長方形としよう。Sの位置に置いてある長方形の面積は $S = 2 \times 3 = 6(cm^2)$ で、Tの位置に置いてある長方形の面積は $T = 3 \times 2 = 6(cm^2)$ である。

Sと Tは違う長方形なのだがたまたま等しくなった（勿論等しくなる理由があって）のか、それとも Sと Tは元々同じ長方形なのだから面積が等しいのは当たり前だと思うのかは実は立場の違いにすぎない。

長方形が倒れて位置を変えただけだとも思えるし、例えば机の上にある同じ長方形の見ている人の（机に対する）位置による違いだと考えることも出来る。後者だと思えば、これは一種の相対性理論で、長方形という概念が見る人の位置に依存しないものであることの要請からの必然だと言えないこともない。

動いたという立場でも、「長方形」が動くことによって変わってしまう概念では困るだろう。だから、視線の移動や、物自体の運動によっては変わらない何物かとして、「長方形」という概念は作られている筈である。

これを数学的に厳密に述べることは出来るし、それはそれなりに面白いとは思うが、長く煩雑な議論が必要になる。ここでは、ただ長方形という言葉が長い歴史の試練に耐えていることがその保証をしてくれているということで許して欲しい。

何にしても、Sと Tは「同じ」長方形なのだから、同じ面積になるの

は当たり前だから、$2 \times 3 = 6 = 3 \times 2$のどちらかの計算しか許さないというわけにはいかないだろう。

しかし、小学校の低学年で掛け算を教える際には、例えば「1本10円の鉛筆が5本あります。全部でいくらでしょう。」という問題が与えられ、「10円×5＝50円」と計算せよと教えており、このとき5×10という計算を許していない。

「掛け算の順序を変えることを許さないことは、縦と横の何かしらの規準がないと困るのではないか？」という趣旨の質問だろうと思ってしまったのである。

問題は、掛け算の順序の問題と、縦横の命名の問題であり、順序の方が難しい問題だと思ったのが、勘違いの元である。この解説を書こうと思うまでそう思い込んでいた。まず掛け算の問題を、少しコメントしておこう。

面積の計算の時は「縦×横」と教えるにしても、「横×縦」としてはいけないという意識はあまり強くないのではないだろうか。整数辺の場合に1×1の正方形のタイルを埋めていくというようにして教えることが多く、本質的に視線の変更や長方形の運動によって変るものでないように教えているからだろう。

この問題で議論が錯綜するのは、算数と数学が違うことの認識がない所為である。数学の理論では、自然数、整数、有理数、実数、複素数と数の範囲を広げていく際、常に掛け算の可換性は保証されている。更に数の範囲を広げようとすれば、積の可換性は成り立たなくなる。しかし、算数で利用される数の範囲では積は可換である。だから、掛け算の順序はどっちでも良い、という訳にはいかないのである。

それは、算数が数学ではないからである。算数は数学の応用技術なのである。子供の成長過程において出合う諸問題のうち、数学を用いて解決できる問題に対して、数学の理論・技法を如何に適用することが出来るかという、いわば料理のレシピを教えているのである。

だから、上の鉛筆の問題でも、問題から出来るだけ自然に（本当の自然ではなく人間にとって抵抗感が少なくというくらいの意味）、計算式を導けるかということに主眼がある。「10円の鉛筆が5本」だから、10と5をこの順に置いて、「10円×5＝50円」と計算すれば出来るのだから、まずこの技法を覚えて欲しいというのがこの段階での教え方なのである。自然数の乗法という数学的技術が、この問題を解くのに応用出来るが、その適用のさせ方を一つ覚えさせようとしてい

るだけなのである。

小学校のこの段階では、掛け算という数学的技術を習得した上で、問題を解こうというのではなく、問題を解くことを通して数学的技術の存在と有効性を納得させようとしているのである。

だから、5×10という計算をしてはいけないと強調し過ぎるのには問題がある。最初の段階から、5×10という計算も許容すると子供は却って混乱するだろうという点を考慮した、教育的配慮にすぎない。精神年齢の低い段階では、極端な自由よりも、一定程度の制約の元に技法の習熟を主眼にするという教育的措置は認められて良い。

名数、無名数という言葉を使って正当化することも行われているようだが、そういうことを言い出せば、算数で扱う数はすべて名数であると思ったほうが良い。上の例でも「10円×5＝50円」で10は名数だが、5は無名数というのには無理がある。5は鉛筆の本数で、5本なのである。10円も純粋に10円なのではなく、1本当り10円なのであって、言うなら10円/本と言うのが正しい。したがって、単位の方も割り算が出来て、「10円/本×5本＝50円」とやれば、整合的で、こうしてしまえば、順序などというものは何程の意味もない。「5本×10円/本＝50円」として、より分かり難いということはある筈もない。

しかし、掛け算を教え始めている小学校低学年の児童に、単位の掛け算・割り算を同時に理解させようとするのは無謀であり、不自然であり、意味がないということになる。

したがって、「10円の鉛筆が5本」という言葉の順序に従って、「10円×5＝50円」と計算することを教えるのである。だから、この方が子供にとって理解しやすいとか、こうする必然性があるなどと議論しないほうがいい。現に、英語圏では「5×10円＝50円」と教えている。これを知って、スカラーは前に書くべきものだからという議論もしない方がいい、単に英語では「five pencils of ten yens」と言うからに過ぎないのだから。

最後に、「縦横」の命名の問題についてコメントしておこう。

これまでの議論でも分かるように、縦横は個々の長方形にとって固有なものではない。長方形という概念が、視線の位置や運動によって変化しないものである以上、そうしたことで変わってしまう縦横は、数学的な概念ではないのである。では、縦横とは何だろうか。

長方形の辺は4つだが、その2つずつは長さも方向も同じ線分の組

になっている。しかも、異なる組の辺は直交していて、各々の組の線分の長さの積が面積を与えている。その時意味のあるのは辺の長さの組（非順序対）であり、順序対（対）ではないのだが、人間の感覚として、組を考えるより対を考える方が扱い易いのである。対では、要素は二つあるといっても一つずつ考えれば良く、考え方としては一度に一つのものを順に考えれば良いのだが、組では二つ同時に考えることを余儀なくされる。

数学的には二つの辺の組にだけ意味があるのだが、つまり、どちらかの辺を優先する理由はないのだが、具体的に長方形を取り扱って例えば辺の長さが知りたいとき、どちらかを先に測る必要がある[16]。そこで現実的に、長方形の二つの組のどちらかを特定する機構が欲しいのである。人間は長く「長方形」に関って来たので、そのような機構を体現する概念と言葉が存在するのである。

さて、では「縦と横」とは何だろう。

長方形を眼の前に置くとき、人は自然に一つの辺を水平に置く。その方が安定して見えるから。安定していないと何かしら不安に感じるから。水平を感じるのは人間の眼が横（水平）に付いているからであろう。二つの眼を結ぶ直線の方向が水平（横）という訳である。

不幸にして眼が一つしかなければ水平は感じられないかと言えば、耳が水平に付いている。耳が一つしかなくても、腕が水平に付いている。例外がないとは言わないが、水平を感じることは誰にも出来るといって良いだろう。

眼で見るとき、第一には正対した平面上の図形だと思う。机の上など水平な所に描かれている図形は、その投射（射影）だと感じている。だから、机の上に描かれた正方形は、多くの場合縦の方が長く感じられる。感覚でも、天の邪鬼の人がいるから、反対に感じる人もあるかもしれないが。

正対した面の上の正方形を水平面上に投射すれば、横の長さは変らないが縦は短くなる。この分を自動的に補正するから、却って長く感じるのだと思う。この補正が自動的に起こらない人（ある意味で訓練が出来ていない人）は、当然（？）縦の方が短く感じるだろう。

[16]そうしないと、どちらのバナナが大きいかと考えながら、目の前にバナナがありながら餓死してしまう、寓話の猿になってしまう。勿論現実の猿はそんなことはなく、利き手に近い方からとか、大きい方からとか、色の派手な方からとか、匂いの強い方からとか、何かしらの不確定な動機によってまず一つを選んで食べてしまうだろう。

この感覚の議論はこの際どうでも良い。要するに水平は人間の感覚機関のあり方から理解され、縦はそれに垂直な方向として理解されているということである。垂直は本来、地平面に垂直ということで、眼前に正対した平面上の水平線に直交する線の方向だが、机の上などではそれを射影した方向が縦となる、つまり、自分から遠ざかる方向である。

結局、縦とか横とかいうのは長方形の辺本来の性質ではなく、それが（観察者に対して）どのように置かれているかを示しているものなのである。

斜めに置かれている長方形の場合どうするかと言えば、どうしようもないというのが答えだが、それでは愛想がないので、水平面上に置かれたとして重心の位置によって右か左かに倒れるだろう。その倒れて水平になるだろうと思われる方向を横とすれば如何であろうか。

重心が丁度頂点の上に落ちているときはどうするのかと言われても、風でも吹けばどっちかに決まるでしょうと言ってもいいし、縦も横もないと言ってもいい。

縦とか横とかは所詮、視点の違いで、気持ちが落ち着けばそれで良いのである。

円錐の場合に問題が起こらないと質問者が考えているのは、円錐を安定に置く置き方が一通り（高さを決める意味では）であるから、他に考える気持ちが働かないからだと言ってもよいと思う。

3.6 円を投影したら何になるか。楕円になると思うが、元の円が内接する正方形を考えて、その投影が台形になる場合に、相対する接点を結ぶ線分の交点はその楕円にとって一体何になるのか。

世間話のように質問されたので、くどいことは言わず、世間話のように答えて見よう。

「楕円になります。正方形の投影が台形になることもあるけれど、問題の交点は内接円の中心の写った先というだけのことで、楕円にとっての特徴的な点ではありません。」

これでは余りに愛想がないので、少しだけ解説を加えよう。

この質問を受けた時、「楕円になるのは当たり前です、円錐曲線ですから」と言ってしまったが、間違っている訳じゃないが、少し説明不足だったようだ。質問されたI先生はもしかすると不満だったかもしれない。

そのためには「投影する」とは、何をすることかを確定しておかねばならない。「投影」と言う言葉を聞いた時、「1点」を光源とする投影を思い浮かべてしまったのだ。そうだとすれば、その点から出て円上の点を通る直線の全体は円錐を倒したもの、楕円錐になる[17]。投影するとは、その光の楕円錐をある平面（大抵は水平面）で切取ることに当たる。

円錐の切り口で閉じたものが楕円に他ならないことはアポロニウスの昔から分かっている。楕円は、形としては、円をある方向に一定の割合で拡大したもので、その楕円をもう一度別の方向に拡大してもまた楕円であることから、切り口が楕円になることは当たり前と思ってしまった。

しかし、高校の問題だと思えば、普通このような問題の時は投影というより、射影なのではないかと後になって思った。それでも、強弁する訳ではないが、この議論は間違っている訳ではない。この場合は、一定方向の射影、つまり、無限遠に光源が有ると思えば良く、楕円錐の代わりに楕円柱を考えるだけのことで、議論としてはまったく同様に進む。

交点の問題だが、射影でも投影でも直線は直線に写ること、交点は交点に写ることを考えれば、元の円の中心の写った点であることはすぐに分かるだろう。円に外接する正方形を考えると、円の中心は正方形との接点で相対するものを結ぶ直線の交点であり、正方形がどんな四角形に写ろうと楕円とその四角形との接点で相対するものを結ぶ直線の交点に写ることになる。

ただ、正方形が台形に写る際にはその直線の一方は内接する楕円の軸の一つと一致し、もう一方の直線と直交するような気がする。それで、その交点が楕円にとって何か特徴的な点になっているような気がしただけの、一種の錯覚が起きたのだろう。

射影かもしれないと思ったのは僕の勘違いだったようだ。射影ならば、平行線は平行なままだから、正方形は平行四辺形にしか写らない。

[17]勿論、光源と円との位置関係によっては円錐になる

平行四辺形に内接する楕円を描いてみれば分かるが、接点は楕円にとってどんな特別な意味も持たない。楕円の軸は接点とは何の関係もない位置にある。

射影を投影に変えると、光源を無限遠から近付けて来ることになり、元の円を含む平面と投影される平面との交線に近いほど小さく遠いほど大きく写ることになる。そのため、平行四辺形になるべきものが台形になったり、一般の四辺形になったりして、円はその内接楕円に写るのである。

平行四辺形の時ですら特別な点でないのだから、もっと一般になれば、「一般には」特別な点になれる筈がない。

4　終わりに

原稿を依頼された西岡先生に、内容の構成に付いて相談したことがあります。TOSMポストのその後を書かせてもらっても良いかということと、ポストの宣伝媒体を広げたにも拘らず質問が量的にも質的にも落ちているということを話しました。

僕の方では何らかの別の努力が必要ではないかという含みで質問したのですが、西岡先生は、「もっとポストに質問するように言って下さい」などと、却って現場の側の不勉強を恥じるという趣旨のことを言われ、とても励まされた思いがしました。それで、第三回目のポストの質問にも思ったよりも饒舌に答えてしまうことになりました。落語でも聞くように気楽に読んで頂いて構いません。

ところでその際、西岡先生の言われたことで心に残ることがありました。西岡先生は津高校の前はある定時制高校に長く居られ、またこの4月からは亀山高校に転出されました。

「先生、あのね、僕は定時制に居たときが一番数学を教えていたような気がします。」

教科書や参考書に書かれてある数学でなく、自分の裡（うち）なる数学が問われていたと言われたかったのではないのでしょうか。技術的に高度な事柄を教える際には、そのことだけに教える側も教わる側も気がとられ、現象や構造を理解し処理するために働く筈の数学的精神が失われているのではないかと、西岡先生は言われたかったのではないでしょうか。

TOSM グループとしては、何らかの意味で協力してもよいという人を募る方が良いかもしれないと思っている所です。これまでは教育「運動」のような形にはあまりしない方が良いと思っていました。運動となれば、何かしらの非教育的な運動との関りが問題になることもあるかも知れないし、個々の微妙なニュアンスよりも強く押し立てるスローガンが必要となったりして、初期の志が失われてしまうことを恐れたのです。

しかし、事が教育や文化に関ることなのですから、孤高を保っていても仕方がありません。世界に対して何かしらの影響力を持たない訳にはいかないし、目指す必要もあると思うようになって来ました。人の広がりを少し拡げて、どうしたら人の心の中に浸み込んで行けるのかを考えてみたいと思っています。

それらを含めて TOSM グループへの提案や意見は、是非 TOSM ポスト宛にお送り下さい。

全面的に協力するのは難しいと思われる方でも、プロジェクトごとになら参加して頂けるのではとも思っています。

また個人的には、[6] を手始めとして児童・生徒の本当の数学的能力を測る調査の有り方を模索し、その調査をもとに今後の算数・数学教育の有り方について考えていきたいと思っています。TOSM の調査 [7] のような教師サイドの調査と関連を持たせることが出来れば、更に面白い示唆が得られるかもしれませんが、直接双方に同種の調査をすることには抵抗があるかも知れません。具体的には今後の課題です。

調査の結果、現在の指導内容では足りないところがあれば、それを補うような書物を書いていきたいと思っています。例えば [3] は、幾何的直観を通して直観力の養成について考察したもので、具体的に三角定規を利用した教材の展開についても述べています。

参考文献

[1] 秋山武太郎「新版　幾何学つれづれ草」サイエンス社 (1993)

[2] 岩田至康編「幾何学大辞典 1 基本定理と問題－平面－」槙書店 (1971)

[3] 蟹江幸博「幾何的直観と対称性」プレプリント

[4] 蟹江幸博「数について（美杉セミナー’９１）」’92年度数学研究会誌、三重県高等数学教育研究会 (1992),3-41.

[5] 蟹江幸博「 TOSM ポスト」’93年度数学研究会誌、三重県高等数学教育研究会 (1993),2-44.

[6] 蟹江幸博「数学的知識の欠如に関する自己認識の調査」三重大学教育学部紀要、第 45 巻、教育科学 (1993)

[7] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗「数学教育における教師の授業観と意識に関する調査研究」岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学)、第 18-2 巻 (1993)