数学教育にできることは

蟹江　幸博
三重大学教育学部

目次

1　はじめに

美杉セミナーのレジメが会誌とは別に刊行されていますので，重複しないようにテーマを分けてあります。昨年，1997年8月の美杉村での高校生向けの講演と11月4日(火)の三重県総合教育センターでの高校の先生向けの講演の数学的部分の内容については，2つ分まとめてレジメ[18]の方に掲載しました。

三重県内でのTOSMの活動は，三重県高数研の活動と不即不離の状況で続いてきています。

昨今の教育改革で，教養審(教育職員養成審議会)や教課審(教育課程審議会)の答申によって，教員免許法や指導要領の大幅な改訂が予定されている内容から，高等学校の数学教育も大きく変わらざるをえない状況にあります。中学や大学での変化によって高校の教育も大きな変化を余儀なくされることになります。

そうしたとき，制度の変化にただ追随するだけでなく，数学を教えることの意味と形を考えていかねばならないと思います。

この会誌には，前回の会誌の記事[18]以降のトスム(TOSM)の活動について述べさせていただきます。直接，TOSM活動に関っていただいた先生方も多いのですが，そうでない方々にも実際を知っていただき，事柄に応じて参加していただきたいと思っています。

なお，本文中の人名についている「*」は、最後の節に人物紹介があることを意味しています。

2　1997年度のTOSM活動

TOSM活動というのは実際の所，福井大学の黒木，岐阜大学の中馬と僕の3人の数学者が，大学での直接の業務以外に行う数学教育に関する活動の総体ということであり，その中で僕が直接に関与している部分をお話するということになります。

1997年8月10日(日)に福井大学教育学部で，**第3回TOSMシンポジウム**が，

第一部　：講演会　１０：３０－１２：００

「今こそ行き届いた教育を！」

講師：黒木哲徳（福井大学教授）

第二部　:「数学離れ・数学嫌い克服への提言」　１３：００－１４：４０

数学嫌いを克服するための実践報告や，一般の方(PTAなど)からの提起(各15-20分)

浅田小夜子　(福井県上文殊小学校)
曽我昇平　(岐阜県坂祝中学校)
佐藤心一　(秋田県角館中学校)
西岡孝昭　(三重県亀山高校)
藤田和美　(福井市東藤島青少年育成会会長)

第三部　:パネル討論　１５：００－１６：３０

「‘数学離れ’をどうする！第３弾」

司会：蟹江幸博（三重大学教授）

パネリスト

中馬悟朗（岐阜大学教授）
曽我昇平（岐阜県坂祝中学校）
水上俊成（福井県勝山北部中学校）
吉田興治（三重県高等学校数学研究会会長）
藤田和美（福井市東藤島青少年育成会会長）

というプログラムで行われました。少しずつ参加者の幅も広がり，内容も深まっていくことを期待しています。第4回は今年の8月に岐阜で，第5回は来年の8月に津で出来ればと思っています。

8月19日(火)－21日(木) に行われた**美杉セミナー**では，

万木　豊（演習林)　　　「美杉村の自然」
黒木哲徳（福井大学)　　「方眼紙で遊ぶ（Pickの定理)」
中馬悟朗（岐阜大学)　　「作図で遊ぼう(定規とコンパスで得られる数)」
蟹江幸博（三重大学)　　「連分数と無理数(πは無理数)」
松原達夫（大谷女子大)「高校生の質問から」

という題目の講演がありました。TOSMメンバー揃い踏みになってしまいましたが，休憩時や夜の時間の三重県高数研の先生方との話し合いも有意義だったと思います。

日本数学会の秋季総合分科会の直後の10月4日－5日に東京大学の駒場校舎にある数理の教室で，**ワークショップ**「高校および大学初年級の数学教育」が行われました。大学に勤務する数学者と高校の数学教

師と予備校教師も含めて，活発な討論がなされました。数学者も数学教育に強い関心を抱いて活動していることを知っていただくこと，現場の現実的な状況を教えていただき，総合的に状況を理解しあおうというワークショップでした。黒木氏と2人で発言した記録に若干の訂正を加えたものが[20]です。

これからは学会のあるごとにこのような会を持とうということになり，この春の学会が名城大学であったことから，名古屋大学の多元数理の教室を借りて，第2回のワークショップが3月30日(月)に開かれました。新旧の年度の引き継ぎなどご用も多かった時期でもありましたが，愛知・岐阜・三重の高校教師の方々にも参加していただきました。次回の数学会以降も継続して開いていく中で，何かしら具体的な作業をすることを明示するような会の名前が欲しいという提案があり,「数学教育ＴＦ (task force)」という名前が採択されました。タスク・フォースを辞書でひけば，特殊任務を持つ機動部隊という意味になります。名前にこだわらず，高校の先生方と数学者が，数学の教育のために出来ることをしようという意気込みを表しているわけです。

このワークショップでは，TOSMは教員養成系学部の教官の立場から参加しているつもりです。時に観念的になりがちな数学者の議論を現実に引き戻すという役割を果たしている(つもりです)。

また，今年の4月号から，数学セミナーで，1年間の連載を始めました。インターネットで「立ち話」という連載です。TOSMの3人で，教育問題について語るというのが，与えられたテーマです。出来るだけ読みやすくして，この難しい教育環境の実質的な問題点を理解してもらおうという趣旨で始めました。テーマが深刻なので，それを読みやすくするのにいつも大変苦労をしています。

これらのことも含め，TOSMの活動はインターネットのTOSMホームページ (URL=http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/) の中で報告していますし，御意見や御要望はその掲示板で受け付けています。数学教育に関する質問箱であるTOSMポストへの質問も，多くはホームページのポストの掲示板に書込まれるようになりました。TOSMポストについては節を改めて述べることにしたいと思います。数学教育の問題，数学ゲームの問題，ちょっとした数学の知識の問題などさまざまですが，出来る限り答えていきたいと思います。現在の所，TOSMポストの回答を掲載する場は，掲示板そのものとこの会誌になっています。高校数学以外の話題も多く，個別には発表できる場もないわけ

ではないのですが，すべてをとなればほかに適当な場もなく，嫌われるまでお願いしようと思っています。

TOSMとしての活動には，ほかにマンスリー研究会，つまり月例会があります。月に一度土曜日に三重大学教育学部数学教室で行っています。具体的な予定はホームページに掲載してあります。参加者の都合にあわせて，日時を若干移動することがあるので。半分は駄弁りの会，残りはテーマを決めて議論することにしています。時には数学の話をすることもあります。ぜひ気楽に参加してください。

3　数学を教えることの難しさ

前の節では，数学教育に関して僕に出来ることは何かを模索しながら，実際に1997年度に行ったことを書きましたが，数学教育とは何をすることなのかを少し考えてみたいと思います。

昨年の会誌では，理科離れを嘆いて，歴史的な叙述によって克服するという講義の工夫をしている，ノーベル賞物理学者のワインバーグ([24])の話をしました。数学離れよりも深刻で，より以前から起こっている理科離れの問題も，世界的で今日的ではありますが，数学が安泰なわけではありません。

初等教育における重要性が暗黙に了解されていることと，大学入試における重要性のおかげで，理科よりも長く抵抗できていたに過ぎません。最近ではその大学入試による歯止めも効かなくなってきています。

大学入試にあるからということを離れて，高等学校で数学を教える意味というものを考えてみる必要があるのではないでしょうか。

初等教育においての算数・数学は，社会生活に欠くことのできない知識であるということが出来ても，高校で教える数学が社会生活に必須であるとはだれも主張できないでしょう。高等学校を後期中等教育と捉えるのか，前期高等教育と捉えるのかで立場は異なるのですが，大学入試のことをひとまず措いてということなら，後期中等教育としてということになります。

大上段に議論するとなれば，文明論を展開しないといけないかもしれません。われわれが享受しているこの文明を肯定的に見るか否定的に見るかの立場はあっても，この文明を成立させている根拠に科学があり，数学があるという認識は間違ってはいません。そして，文明の

負の面の責任を，科学に負わせようとする議論が声高に行われていることも事実です。たとえば，放射能汚染の問題は原子力を開放した科学の所為だというような、本末転倒の議論が横行しています。

今はこれらを議論する余裕はないので，参考となる本をあげておきます。イギリスの心理学者であるダンバーが，人類学を専攻する学生に向けた講義を基にして書いた『科学がきらわれる理由』[2] は、このあたりの事情を公平に的確に描いています。ガリレオ・ガリレイ*が『天文対話』[3] を書いて，人類を特別な存在から追いやって以来の，科学派と非科学派の対立が，物理科学以外の題材も使って展開してあるので，一読をすすめておきます。

数学は科学の言葉であり，数学を愛する心は科学を愛する精神でなければなりません。もちろん，そのさいの科学は必ずしも自然科学に限るものではありませんが，僕自身は，数学とは数学的自然の科学であるという意味で，自然科学だと思ってきました。数学に関わるものが反科学派であることはありえない筈なのです。

『解析教程』[22] の訳業も最後の追い込みの頃，1997年の9月のことでしたが，鳥羽商船高専の佐波氏に訳文と解答のチェックをお願いして，そのとき色々な話をしました。彼は司馬遼太郎に傾倒しているのか,「司馬史観」ということを言いました。数学教育において必要なことは，数学における司馬史観の実現じゃないかというのです。司馬遼太郎の小説はほとんど読んでいますが，特に「史観」というものを感じたことがなく，司馬史観が何か，良く分かりません。『街道を行く』とか『この国のかたち』などを読めば分かることかもしれませんが。

最近，司馬遼太郎の『十六の話』[23] という本を読む機会があり，佐波氏が言っているのとは違う意味でしょうが，日本で数学を教えるということの難しさについて，考えさせられる文章に出会いました。

それは『開高健への弔辞』の中にあります。近代日本の文学者は，西洋の小説を読むことから学び始めたが，西洋の小説家と異なって不利であったことを述べています。それは，日本に「絶対」という思想，慣習，あるいは日常の気分がなかったことだと言っています。

「…… それは，私が精神的軟体動物であるからだ。言葉をささえるものが論理でなく，イメージをささえるものが思想ではなく，何れも感性的な，気分的なものであるからだ。そこに私は絶望的な日本人を感じる。」

これは，開高健が自分を見つめて言う文章(随筆集『言葉の落ち葉』所収)ですが，数学を教育する上で，生徒や・児童の中に見受けられる精神的な障害の本質を述べるために綴られたものと思うことができるほどです。科学離れ・数学離れが日本人の特質から起こることなのか，昭和33年の芥川賞授賞の感想の中でも，東西のあいだに横たわる機微を感じていたらしいと司馬遼太郎は述べています。

和算が今の我々が考えるよりも広く深く江戸時代の民衆(もちろん知的な)の中に浸透してことはあっても，現在問われている数学教育の数学は洋算であり，それが自然科学の伝統の上にあることは，しばしば忘られがちになります。

司馬遼太郎は開高健を論じるために，文学を，日本の文学を論じます。

「近代以後の日本の文学者が，西洋の小説を読み，読み終えてから小説を書きはじめたことは，いうまでもありません。ただ日本には「絶対」という思想，慣習，あるいは日常の気分がなかったということが決定的に不利でありました。日本に存在しつづけてきたのは，すみずみまで相対的世界でした。......山々や谷々の神々が神遊びをするように，神遊びとしての日本独特の私小説がうまれても，絶対という大うそを，つまり，絶対という「神」— これは聖書の「神」のことですが — という思想，又は文学的思想 — 大文字のGod と同じ次元での大文字のFiction — を中心にすえるという習慣は，日本においてはカケラもありませんでした。......むろん，絶対などは，この世にありはしません。宇宙にも，科学の中にも，存在しないのです。

しかしある，と西洋人は，千数百年をかけて自分に言いきかせてつづけました。絶対，大宇宙の神は存在する，うそではない，ということを，哲学として，論理をきわめ，修辞をきわめ，思弁のかぎりをつくして説きに説きつづけてきたのです。......

近代に入って，西洋において神が衰えたときに近代文学が興りますが，絶対という大うそを包みこんで糸巻きに仕上げてゆくという方法においては，文学もまたそれを踏襲しました。神に代わって，大文字のFictionを中心にすえることによって，さらにはそのFictionを，“真実として，ある，アル・ナイという上にある”というために，論理と修辞と人間描写のかぎりをつくして，文学という，新しい神学をはじめたのです。十九世紀のことであります。......

まことに，近代文学は，十九世紀のヨーロッパが世界に贈った大いなる果実でありました。......

その「文明の志」を，開高健は，神の存在がヨーロッパにおいてさえあやふやになった二十世紀の後半において，みずからの作品の中心にすえるべく志したのです。......

しかしながら，...どういう絶対と対決すべきかとなると，古代以来の汎神論的風土 — 日本のことです — にあっては，それにふさわしい土壌がないのです。」

数学自体の普遍性によっても，その突端の所では，作られている地域，時代，民族，個人によって大きな違いが出来ることは避けられません。数学も人間の営為の産物であり，文化なのですから。

それが初等・中等教育の対象になるほどに熟してくれば，普遍性は増していき，世界中の算数の授業は基本的には同じことを教えていると想像されます。

技術としての洋算を消化し発展させてきた明治以来の日本数学は，和算との対立の極としてあったために，和算の持っていたゆとりや遊びの精神が弱かったような気がします。現在，日本の数学界は世界の中でトップクラスの扱いを受けるようになり，数学者の世界のメンタリティは世界と向かい合って違和感を感じることはなくなっています。

しかし、数学教育の場ではどうでしょうか。第２次大戦後のアメリカからの押し付けの民主主義が今なお、この風土に根付いているとは言えないように，一般の日本人の論理処理能力は高まっているとは言えないのかもしれません。結局はそのことが，理科離れや数学離れに向かってしまうのかもしれません。

敗戦からの立ち直りのため，情緒は一先ず措いて，理科系の教育を強化し，高等教育には必須であると，高い水準の初等中等教育を施し，日本の子供の数学の能力は世界一だと言われるようになりました。

そして、繁栄が来て，努力しなくても一定程度の豊かさが保証されるようになって，社会的摩擦の減少の方に関心が向かい，指導要領は水準をどんどん下げていき，ついには初等教育すら戦前の水準より低くなるという改訂が実施される見込みです(今や予定と言っていい)。

生徒は、難しくて嫌なものだが数学の勉強はしなければいけないもの、という偏見から開放されてしまっています。そのことに対処することが数学は楽しいものであることを教えることであるというのでは，現実的な対処法とは言えません。

まずもって、数学を学ぶことによって培われるものは何かを、教師のみなさん自身が考え，自分の言葉で言えるようになっておくことが

重要だと思います。
ユークリッドの『幾何学原論』は，書かれて以来2000年以上もの間，数学を教えること，学ぶことの規範となってきました。十分な能力さえあれば独りで学ぶことができ，最初は難しいが頑張っているうちに突然視界が開けたようにすべてが明らかになる時が来る。そこまで努力続けることができるかどうかが問題である。すべては学ぶものの資質と努力に掛かっていて，教える側には敢えて工夫する必要はない。
2000年以上の間，そう思われていたと言っても過言ではありません。それが，19世紀になって，神がその存在を失うのと同じように，ユークリッド*の絶対も崩れてしまいます。非ユークリッド幾何の誕生は，ほかの自然科学と違って，ユークリッド幾何そのものが間違っていることを意味しているわけではありませんが，教育における『原論』の意義に対する信仰をも失わせてしまいます。
コップとテーブルで幾何を語ることだってできると言い切ったヒルベルト*の公理主義は，すべての価値の相対化を宣言してしまいました。初等教育にとって不幸な時代になったのです。もはや，常に通用する教育原理が存在しなくなったのです。
そういう時代に今はあります。だから、むしろ日本人だから数学を学び難いのだということはないのです。世界中で，理科離れ・数学離れが起こっているのです。いわば、中世の暗黒が訪れようとする前夜なのかもしれません。
しかし，だからこそ，個々の教育現場で，生徒に語る自分の数学観を持たなければいけないではないでしょうか。

4　インターネット教育論に向けて

去年，つまり1997年度は，５人の学生の卒業研究を指導しました。卒業研究にも小学校課程用と，中学校課程用があり，後者は多少の現代数学のセミナーをしますが，前者は算数教育をテーマにしています。近年は卒業研究の指導が当たったときは算数教育用のものを担当するようにしています。以前は学生のレベルもそこそこあって，大学での講義も数学的な内容がある程度こなせていたし，学生にも意欲があったから，理学部数学科でのセミナーとそんなに変わらないものをすることが出来たのですが，最近はとても出来ません。中途半端に数学を

やったような錯覚を与えるよりは，持てる数学を磨いて実際に教師になった場合に役立つようなテーマでやった方が，学生も真剣になるし，ちゃんと学生を怒ることができるからと，そう思うようになってきたからです。

今回は，インターネットを算数・数学教育に利用することができるかということをテーマにしました。僕自身，3つのホームページを運営していて(TOSMのページ(http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/)から他の2つのページにはリンクが張ってあります)，インターネットが十分教育に使える，というより，現状の欠陥を補うことに利用できると思うようになっていたからです。

内容はともかく，それぞれの学生は論文を書き始めるために，インターネット教育論をぶちあげねばならなくなりました。もちろん，インターネットの普及が十分でないことを承知してはいるのです。充分普及してしまっていれば，当然に，インターネット教育論を振り回すマスコミ文化人に事欠かなくなるでしょうから，今こそそれを語るべきときなのだということでしょう。

教師の指導上の問題を語り合う場(それぞれが行っている指導上の工夫などのプールを作ることも含めて)，教室の中では展開し得ない題材の提示など一種の教科百科的なもの，ホームページのプレゼンテーションの多彩さ(教師個人が比較的容易に作成できる)を利用した独習用教材など，学生個人の興味に合わせたものを作らせました。教育学部数学教官としてのホームページ(http://math1.edu.mie-u.ac.jp/~kanie/)からリンクしてありますので，試供品サンプルくらいの気持ちでご覧下さい。

その利用方法もこれまでに想定されているもの以外にも，教師の知識的・心理的バックアップ，児童生徒の興味づけ・視野の拡大，登校拒否者のリハビリといった使い方も可能です。

現実的にはそのような利用方法の実際については多くの試行錯誤が必要となるでしょうが，児童・生徒との関わりを単に教室の中だけにとどまらない広く深いものにしていく為の道具になる可能性はあります。

実際にインターネットがあまり普及していない現在においてはこれらは確かに可能性に過ぎないことではありますが，インターネット環境がすべての学校に提供される日はそれほど遠くないと思われます。三重県の場合，総合教育センターにサーバをおき，今年度中に地域の中核となる高等学校と総合教育センターとを専用線で結び，その回線も

商用のプロバイダーと変わらない規模の大きさで，来年度までにはその他の小・中・高校とその高校と電話回線で結ぶことができる体制になっているということです。

数学の教師は，単にインターネットを使うことができるばかりでなく，その目的，応用範囲，思想性などについて指導して行くべき立場になるのではないかと思います。単なる技術としてのインターネットの指導でなく，世界観の構築として捉えることができるのは数学を学んだものにしかできないのだと考えていただきたいと思います。

5 TOSMポスト

TOSMポスト(算数・数学教育の質問箱)も6回目を数え、TOSM三重のホームページに「TOSMポストの掲示板」(http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/keiji03/k_main.htm)を掲げるようになってから、おいおい質問も増えて参りました。郵便物での質問も「TOSMポストの掲示板」に挙げています。

ここでは掲示板に挙げた暫定回答か、それを補足した形で述べることにします。いつかTOSMポストがもっと広まって、きちんとした書物の体裁を取ることができるときには、それ自身独立した読み物の形に整えて書き直すつもりでいます。

これからも奮って、算数・数学教育上の疑問点を、三重大学教育学部数学教室内TOSM三重ポストまで送って下さるか、上記掲示板に書き込んで下さい。

5.1 TOSMポストの質問集（1回から5回まで）

どんな質問を受け付けているかを示すために、ここまでに投函された質問のリストを挙げておきます。

1. 第1回TOSMポストの質問
   (a) 辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？
   (b) 円周上にn点を取り互いに線分で結ぶとき、円内にできる領域は最大幾つか？nだけで簡単に表わされるか？

(c) 正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが360°を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正７角形や正１１角形などを分度器とコンパスで描くことが出来るか？

(d) 直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことが出来るか？

(e) $\sqrt{24x^2+8x+1}$が有理数となる有理数xにはどんなものがあるか？

2. 第２回TOSMポストの質問

(a) 正方形を縦横に並べて大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜて多くの正方形ができる。n倍にしたときにできる正方形の数は分かるが、同じことを正三角形でしたら幾つになるか、公式があるか？

(b) 三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を２等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか？

(c) 1. 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的は何なのか。どう設定するのがいいか。

2. ほとんどの生徒が文科系を志望しているので、１年、２年と学年が進むにつれ実力テストなどで成績が下がる。数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

3. 第３回TOSMポストの質問

(a) 高校数学で、数学的帰納法を$n \geq 0$(nは整数)に対して証明する時、第１段を$n=0$で示して第２段を$n \geq k(k \geq 0)$に対して示して良いでしょうか。それとも、高校では帰納法は自然数であるnに対するものなので、第１段で$n=0,1$に対して示し、第２段を$n \geq k(k \geq 1)$に対して示した方が良いでしょうか。

(b) 長方形の縦と横はどうして決めるのですか。倒せば縦と横が変わりますし、斜めに置いたら、縦と横とをどうして決めたら良いのでしょうか。(円錐の場合などは、倒しても高さは変わらないのですが、長方形だと変わるような気がします。)

(c) 円を投影したら何になるか。楕円になると思うが、元の円が内接する正方形を考えて、その投影が台形になる場合に、相対する接点を結ぶ線分の交点は一体何になるのか。

4. 第4回TOSMポストの質問

(a) ハノイの塔の柱が4本になったらどうなるのか?

(b) 空集合の記号∅はどう読むのですか。ギリシャ語のファイではないということですが。

(c) 対偶が真だということと背理法は違うのだという話がありますが、本当はどういうことなのでしょうか。

5. 第5回TOSMポストの質問

(a) アキレスと亀の話はどうなっているのか?解決されたとも、解決されていないとも聞きますが、どちらが本当でしょう?

(b) $0.99999\ldots = 1$の問題

(c) 数学という教科について、 数学なんて、なんの役に立つかわからないという生徒の質問にどう答えるか?

(d) 一般に角度をどのように定義するのか。

(e) 小町算というのがあるそうですが、どんな本に載っていますか?

(f) ピラミッドの高さを求めるタレスの方法とは?

(g) すうじってなんですか?

(h) 複素数平面と複素平面

(i) 分数のわり算ではどうしてひっくりかえしてかけるのですか?

(j) ピタゴラスの定理はc=a+b?

(k) 頂角が20°の2等辺三角形ABCがある。底辺の頂点から、それぞれ内側から 60°, 50° の線を引き，他の辺との交点を結ぶ時、そのなす角を求めよ。

第1-5回の分についてはこれまでの会誌[5], [6], [12], [19]に解説を述べてあるので、第6回の質問についての解答を次節でする。原則としては、ホームページの掲示板でしておいた暫定解答を補足するだけで許していただきたい。

6　第6回TOSMポストの質問

ホームページの掲示板での質問は割とコンスタントに入るようになってきましたが，それ以外での質問がないのは妙に寂しいものです。しかし，ホームページを開く前からそういう質問の数は少なくなっていたのだから，それも仕方のないことでしょう。

回答は質問者に応じた形でしています。趣旨にそぐわない質問もあるけれど，ともかくすべての質問に答えておきました。あまりその種のものが多くなれば考えなければならないが，当分は多くて困ることもないでしょう。

6.1　円周率 π

「円周率 π の数を教えてください(40桁位までで結構です)。3.141592までは覚えてるんですけど。」

質問者：Honoo Nagaoka

<u>掲示板上の回答</u>

「円周率 π の数」というのは何なのだろうか，という揚げ足取りをする気はないが,「数」という概念がどうもしっかり確立していないようだ。

この種の質問は，自分で少し調べればわかる筈のことという意味で，ポストの趣旨に反しているようなものだが，学生に頼んで,『数学辞典』から転記しおいてもらった。自分で調べれば分かるような質問は避けて欲しいとも思ったが，もちろん人によってはそういう資料にアクセスすることも難しく，これがそういうチャンスだということなら，答える方が良いのだろう。さて，ここではどうしよう。おそらくはどの

数学科の教員室にも常備されている(はずの)『数学辞典』を見れば載っているのだが，見るのが面倒な人のために，やはり再録しおこう。

$\pi = 3.$	14159 26535	89793 23846	26433 83279	50288 41971
	69399 37510	58209 74944	59230 78164	06286 20899
	86280 34825	34211 70679	82148 08651	32823 06647
	09384 46095	50582 23172	53594 08128	48111 74502
	84102 70193	85211 05559	64462 29489	54930 38196
	44288 10975	66593 34461	28475 64823	37867 83165
	27120 19091	45648 56692	34603 48610	45432 66482
	13393 60726	02491 41273	72458 70066	06315 58817
	48815 20920	96282 92540	91715 36436	78925 90360
	01133 05305	48820 46652	13841 46951	94151 16094
	33057 27036	57595 91953	09218 61173	81932 61179
	31051 18548	07446 23799	62749 56735	18857 52724
	89122 79381	83011 94912	98336 73362	44065 66430
	86021 39494	63952 24737	19070 21798	60943 70277
	05392 17176	29317 67523	84674 81846	76694 05132
	00056 81271	45263 56082	77857 71342	75778 96091
	73637 17872	14684 40901	22495 34301	46549 58537
	10507 92279	68925 89235	42019 95611	21290 21960
	86403 44181	59813 62977	47713 09960	51871 72113
	49999 99837	29780 49951	05973 17328	16096 31859
	50244 59455	34690 83026	42522 30825	33446 85035
	26193 11881	71010 00313	78387 52886	58753 32083
	81420 61717	76691 47303	59825 34904	28755 46873
	11595 62863	88235 37875	93751 95778	18577 80532
	17122 68066	13001 92787	66111 95909	21642 01989
	………	………		

6.2 4桁の数字から10を作る

「数学教育に従事している者ではないのですが，長年疑問に思っていたことがありまして，もし良ければお答えいただきたいと思います。

電車などに乗ります時に切符を買いますと，その切符に連番の数が振られていることが，良くあります。

で，その桁数は4桁であることが多いと思うのですが，電車に乗っている間暇なもので，昔からよくこの数字を使い足したり引いたりかけたり割ったりを，順序を並べ替えるのも有りで行い，10を作るということをやることがあります。例えば 5246 という数字がありましたら $(6-5+4)\times 2=10$ といった風にです。

で，何回もこういった事を行っていますとある法則みたいなのがあるような気がします。

というのは4つの数字が，それぞれすべて異なる数字で，且つ0が含まれていないのなら，かならず10が作れるのではないか？ということです。

少なくとも，私は反例を見つけておりません。

で，こういった事は数学的に証明できるのでしょうか？お答えいただけると幸いです。」

質問者：金岩 稔 (三重大学生物資源学研究科)

掲示板上の回答

もちろん，成り立つのなら証明できます。今とても忙しいので，少し暇になったら，考えてみます。それまでに分かった人がいたら，この下のボードに書きこんでください。

少しやってみました。幾つかパターンが見つかりましたがあまり多くのケースに適用できません。ちょっと考えると，$9\times 8\times 7\times 6=3024$ 通りもありそうに思います。それでとても大変な感じがしますが，よく考えれば126通りしかないことが分かります。

126通りしかないのなら，すべてやっても大したことはなく，成り立つことが確かめられます。その結果は手元にありますが，それをそのまま (ズラズラと) 書いても面白くないでしょうから，これをインターネット上のゲームにし立てるように，ある学生さんに話しておきました。最低限の形がここにあります。しかし，信用問題もあるのでズラズラとすべての場合の答えを書いておきました。これは，新しいのを見つけるごとに更新しますので，ここにないものを見つけた人はご一報ください。

うまい形に仕上がれば，彼の卒業研究の一部になるでしょう。部分的には出来たのでリンクします。

126通りのうちどれ位がパターン化出来るか，少し暇なときに考えてみますが，統一的な方法は期待できません。

改めての回答

まず，0を含まない4桁の数字で異なるものの全体は，9個の中から4個を取る組み合わせの数 ${}_9C_4 = (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)/(4!) = 126$ だけある。

しかし，思い込みというのは恐ろしいもので，最初はまともに，1から9までの数の作る長さ4の増大列の数を求めねばならないと思い，そのままの形で個数を求めようとしてしまった。面倒ではあるけれど，やってみればそれはそれで面白く，節を改めて書いてみたい。

ところで，取りあえずの解答は以下に挙げるが，すべての組み合わせに対して答があるので，質問者の問いには肯定的に答えたことになる。

証明は？と言われても，これが証明です。と言うしかない。証明といえば，なんだか抽象的で，面倒臭そうだと思っている人には，これはある種のカルチャーショックかも知れない。普通，数学で何かしら証明をしようとするときは，無限に対するものがほとんどで，それを有限の手続きで証明しようとすれば，数学的帰納法などの作法が必要となるだけである。有限の対象には，有限の手続きで。但し，有限ではあっても，幾つになるか分からないという場合も多く，そうなればまた，数学特有の論理が必要になる。数学が面倒なのではなくて，普通には主張できないようなことをきちんと主張しようとすれば，数学の手続きが必要となるということである。

まず，これまでに手にした答をこの小節の最後に挙げておく。これですべてという保証もないし，もちろんそんな主張をする気もない。以下の表にない解答を，暇なときにでも考えてもらえば，良いリフレッシュになるかも知れない。執筆時現在，1通りしか解法の見つかっていないものは，1467，1469，1678, 1689, 2459, 3478, 3579, 4589, 5679, 5689 だけだが，3478 以外は難しいわけではない。多いものもあって，2348 では15通りもの解法が見つかっている。

まず，当たり前と思われるだろう，原理から述べよう。最終的に10になる直前の式は $a+b, a-b, a*b, a/b$ のどれかである。そして，この a, b を作るのに2つずつの数を使うか，3つと1つの組み合わせかがある。心理的には後者の方が難しいことが多い。

さて，幾つかの解法のパターンについて述べておこう。大抵の場合は以下のように考えれば，解答を見つけられるだろう。

$1 \leq a < b < c < d \leq 9$ が与えられているとする。x, y, z, w は a, b, c, d のどれかを表わすとする。

1. $a+b+c+d \geq 10$ が奇数ならば，加減だけでは10は作れない。

2. $N=a+b+c+d>10$ が偶数のとき，$N-10=2x$ となる x があれば，$y+z+w-x$ とすればよい。

   これの変形として，$N-10=2(x+y)$ となる x,y があれば，$z+w-x-y$ とすればよい。

3. 2×5 に帰着する。

   この $2,5$ の作り方のヴァリエーションは，2 は $x-y$ 型，x/y型が，5 は $x-y$ 型，$x+y$ 型が多い。もちろん，2 や 5 が a,b,c,d の中に含まれている場合には，他の3数を使って相手の数を作る工夫もする。

4. $a=1$ であって，b,c,d から10が作れる場合は，b,c,d のそれぞれ，もしくはその結合した数に 1 を掛けることにより多くの変形が得られる。

5. $x-y=1$ であって，$z\times w=10$ または $z+w=10$ の場合。

6. $d=9$ であって，a,b,c から1が作れる場合。特に $a+b=c$ の場合は $(a+b)/c=c/(a+b)=(c-a)/b=b/(c-a)=(c-b)/a=a/(c-b)=1$ と変形が多い。

   上の方法がうまくいかない場合に，つぎの方法を試すと上手くいくことがある。

7. $x\times y-z\times w,\ x\times(y-z)\pm w$

8. $(x\times y\pm z)/w, (x\times(y\pm z))/w$ 。もちろん，この場合は $x\times y\pm z$ や $x\times(y\pm z)$ が 10 の倍数である必要がある。

9. $x\times(y\pm z/w),\ x\times(z/w-y)$ 。もちろんこの場合は x は w の倍数である。

2つ目は10の補数を体得させる良い演習問題になる。変形としたものは $z-x$ と $w-y$ を補数にするように工夫することになる。

7つ目は，最終形が $A\pm B$ だが，それぞれの A,B が乗除を含む形になっている。$6*7-4*8=42-32=10$ や $6*(7-4)-8=6*3-8=$

$18-8=10$ のように非常に特別な組み合わせの場合にしか起こらないが，見つかると嬉しいものだ。

最終形が A/B の8つ目も，$(6*8+2)/5=(48+2)/5=50/5=10$ とか $(6*7-2)/4=(42-2)/4=40/4=10$ のように少しだけ九九の慣れが必要になる。

9つ目は最終形が $A*B$ であるが，最も技巧的なもので，理論的に詰めないと見つかりにくい。ここに書いてしまうと，考える楽しみを奪ってしまうので，ポイントになる等式 $10=2*5=4*5/2=6*5/2=8*5/4$ だけを挙げておく。詳細は以下のリストの中から探されたい。

このゲームは，小学校で小さい数の計算の全体練習として用いることもできるが，中学や高校になって数学に馴染まない生徒に，数に馴れさせるリハビリ用の教材として用いることも可能だろう。

1.加減だけで出来る場合，2．乗法が1つだけ入る場合，3．解法の多い組み合わせ，4.技巧的な場合，などと段階を踏んで問題として提示すれば，無味乾燥に見える計算練習がゲーム感覚で取組むこともできて，生徒児童の気を引くように授業が構成することも可能であろう。

では，リストである。ミスプリントやここに無い解法が見つかったら御知らせいただけると有り難い。ホームページには，つねに最新のバージョンをアップしておく。

和の結合法則と，和と積の交換法則は無視している(これらの法則で移り変わる形は同じものと見なして1度しか挙げないということ)。$*1$ と $/1$ は同じとしている。

$1234 \longrightarrow 1+2+3+4=1*2*3+4=1*4+2*3=1*(2*3+4)=2*4+3-1=1*(3*4-2)=1*3*4-2=3*4-1*2=(3-1/2)*4=(1+3/2)*4=2+4*(3-1)$

$1235 \longrightarrow 2*3+5-1=((1+3)*5)/2=5*((1+3)/2)=1*(2+3+5)=1*3+2+5=1*2+3+5=2+3+1*5=1*(2+5)+3=2+1*(3+5)=1*(2+3)+5=3*(5-1)-2=1+3*(5-2)$

$1236 \longrightarrow 2+3+6-1=1+2*6-3=1+3*(6/2)=1+(3*6)/2=6*(1+2/3)=6*(2-1/3)=2*(3-1)+6=(3-1)*6-2$

$1237 \longrightarrow 2*7-1-3=(3*7-1)/2=(2-1)*(3+7)=(2-1)*3+7=3+(2-1)*7$

$1238 \longrightarrow 1+3+8-2=1*2*(8-3)=2*(1*8-3)=2*(8-1*3)=8+(1+3)/2$

$1239 \longrightarrow 2*(9-1-3)=1*(3+9-2)=3+9-1*2=1*3+9-2=$

$3+1*9-2 = 3+9-1*2 = 1*(3+9)-2 = 1*(3-2)+9 = 1*(3+9)-2 = 1*(9-2)+3 = 9+3/(1+2) = 9+(1+2)/3 = 9+2/(3-1) = 9+(3-1)/2$

1245 $\longrightarrow 2+4+5-1 = 1*5*(4/2) = 1*(5*4)/2 = 1*5*(4-2) = 5*(1*4-2) = 5*(4-1*2)$

1246 $\longrightarrow (6-1)*(4-2) = (6-1)*(4/2) = (2-1)*(6+4) = 6+(2-1)*4 = (2-1)*6+4 = 2*(1+6)-4$

1247 $\longrightarrow 1+4+7-2 = 2*7-1*4 = 1*2*7-4 = 1*(2*7-4) = 1+7+4/2 = (7/2-1)*4$

1248 $\longrightarrow (8-4+1)*2 = 1*8+4/2 = 1*(8+4/2) = 8+1*4/2 = 1*(4+8-2) = 1*(4+8-2) = 1*4+8-2 = 4+1*8-2 = 4+8-1*2 = 1*(4+8)-2 = 1*(4-2)+8 = 4+1*(8-2) = 2*(8-1)-4$

1249 $\longrightarrow 4+9-1-2 = 9-1+4/2 = 1*2*(9-4) = 2*(1*9-4) = 2*(9-1*4)$

1256 $\longrightarrow 1+5+6-2 = 5*6/(1+2)$

1257 $\longrightarrow 2*7+1-5 = 1*(5+7-2) = 1*5+7-2 = 5+1*7-2 = 5+7-1*2 = 1*(5+7)-2 = 1*(5-2)+7 = 5+1*(7-2) = 7+(1+5)/2$

1258 $\longrightarrow 5+8-1-2 = 2*8-1-5 = 1+5+8/2 = 8+(5-1)/2$

1259 $\longrightarrow 5+(9+1)/2 = 2*(1+9-5)$

1267 $\longrightarrow 6+7-1-2 = 6+(1+7)/2 = 1*(7+6/2) = 1*7+6/2 = 7+1*6/2 = 7+6/(1*2) = 2*(1+7)-6$

1268 $\longrightarrow 6/2-1+8 = 1*6+8/2 = 1*(6+8/2) = 6+1*8/2 = 6+8/(1*2) = 1*(2*8-6) = 1*2*8-6 = 2*8-1*6 = 1*(2*8-6) = 8+6/(1+2) = (1+2)*6-8$

1269 $\longrightarrow (9-1)/2+6 = 2*(9-1)-6$

1278 $\longrightarrow 2*8+1-7 = 8/2+7-1$

1279 $\longrightarrow 9*2-1-7 = 7+9/(1+2)$

1289 $\longrightarrow 1*(2*9-8) = 1*2*9-8 = 2*9-1*8 = 1*2*9-8 = 1*2*9-8$

1345 $\longrightarrow (4*5)/(3-1) = 5*(4/(3-1)) = 5*(1+4-3) = (1+4)*(5-3) = 3*5-1-4 = 3*(1+4)-5$

1346 $\longrightarrow (6/3)*(1+4) = (6*(1+4))/3 = 4*(1+3)-6$

1347 $\longrightarrow 1+(7-4)*3 = (3-1)*7-4$

1348 $\longrightarrow 1+4+8-3 = 8+4/(3-1)$

1349 $\longrightarrow (3-1)*(9-4) = 1*(4+9-3) = 1*(4+9)-3 = 1*(4-3)+9 = 4+1*(9-3) = 1*4+9-3 = 4+1*9-3 = 4+9-1*3 = 9+4/(1+3) = 9+(1+3)/4 = 9+3/(4-1) = 9+(4-1)/3$

$1356 \longrightarrow 1+3*5-6 = (5-3)*(6-1) = 1*(5*6)/3 = 1*5*(6/3) = 5*(6/(1*3)) = 5*((1*6)/3) = 5*(6-1-3) = 3*(6-1)-5$

$1357 \longrightarrow 1+5+7-3 = (5*(7-1))/3 = 5*((7-1)/3)$

$1358 \longrightarrow 1*(5+8-3) = 1*5+8-3 = 5+1*8-3 = 5+8-1*3 = 1*(5+8)-3 = 5+1*(8-3) = 8+1*(5-3) = 3*(1+5)-8 = 1+3*(8-5) = (5*8)/(1+3) = 5*(8/(1+3)) = 8+(1+5)/3$

$1359 \longrightarrow 5+9-1-3 = 5*(9/3-1)$

$1367 \longrightarrow 1*(6+7-3) = 1*6+7-3 = 6+1*7-3 = 6+7-1*3 = 1*(6+7)-3 = 1*(6-3)+7 = 1*(6+7)-3 = 7+6/(3-1) = 3*6-1-7 = 1+7+6/3$

$1368 \longrightarrow 6+8-1-3 = 1*(3*6-8) = 3*6-1*8 = 1*3*6-8 = 1*(8+6/3) = 1*8+6/3 = 8+1*6/3 = 8+6/(1*3) = 6+8/(3-1) = 6*(8/3-1) = (3-1)*8-6$

$1369 \longrightarrow 3*(9-6)+1 = 3*6+1-9 = 1+6+9/3 = 9-1+6/3$

$1378 \longrightarrow 8+(7-1)/3 = 7+(1+8)/3 = 3*(7-1)-8$

$1379 \longrightarrow 1*(7+9/3) = 1*7+9/3 = 7+1*9/3 = 7+9/(1*3)$

$1389 \longrightarrow 8-1+9/3 = (3-1)*9-8$

$1456 \longrightarrow 4*(5-1)-6 = 1*5*(6-4) = 5*(1*6-4) = 5*(6-1*4)$

$1457 \longrightarrow (1+4)*(7-5) = 5*(7-4-1) = (5*(1+7))/4 = 5*((1+7)/4)$

$1458 \longrightarrow 1+5+8-4 = (1*5*8)/4 = 1*((5*8)/4) = 1*(5*(8/4)) = (5*8)/(1*4) = 5*((1*8)/4) = 5*(8/(1*4))$

$1459 \longrightarrow 4*5-1-9 = 1*(5+9-4) = 1*5+9-4 = 5+1*9-4 = 5+9-1*4 = 1*(5+9)-4 = 5+1*(9-4) = 9+1*(5-4) = ((9-1)*5)/4 = 5*((9-1)/4) = 9+(1+4)/5 = 9+5/(1+4) = 9+(5-1)/4 = 9+4/(5-1)$

$1467 \longrightarrow 1+6+7-4$

$1468 \longrightarrow (8-6)*(1+4) = ((6-1)*8)/4 = (6-1)*(8/4) = 8+6/(4-1) = (4-1)*6-8 = 1*(6+8-4) = 1*6+8-4 = 6+1*8-4 = 6+8-1*4 = 1*(6+8)-4 = 6+1*(8-4) = 1*(6-4)+8$

$1469 \longrightarrow 6+9-1-4$

$1478 \longrightarrow 7+8-1-4 = 1+7+8/4 = 8+(1+7)/4$

$1479 \longrightarrow (9-7)*(4+1) = 7+9/(4-1)$

$1489 \longrightarrow 8/4+9-1 = 8+(9-1)/4 = (9/4-1)*8$

$1567 \longrightarrow (1+7-6)*5 = (6-1)*(7-5)$

$1568 \longrightarrow 1+6+8-5 = 1*5*(8-6) = 5*(8-1*6) = 5*(1*8-6)$

$1569 \longrightarrow 5*(9-6-1) = 1*(6+9-5) = 1*6+9-5 = 6+1*9-5 = 6+9-1*5 = 1*(6+9)-5 = 1*(6-5)+9 = 1*(6+9)-5 = 9+(1+5)/6 = 9+6/(1+5) = 9+(6-1)/5 = 9+5/(6-1)$

$1578 \longrightarrow 5*(8-7+1) = 1*(7+8-5) = 1*7+8-5 = 7+1*8-5 = 7+8-1*5 = 1*(7+8)-5 = 1*(7-5)+8 = 1*(7+8)-5$

$1579 \longrightarrow 1*5*(9-7) = 5*(9-1*7) = 5*(1*9-7) = 7+9-1-5$

$1589 \longrightarrow (1+9-8)*5 = 8+(1+9)/5$

$1678 \longrightarrow 1+7+8-6$

$1679 \longrightarrow 1*(7+9-6) = 7+9-1*6 = 7+1*9-6 = 1*7+9-6 = 1*(7+9)-6 = 7+1*(9-6) = 1*(7-6)+9 = (6-1)*(9-7) = 9+(1+6)/7 = 9+7/(1+6) = 9+(7-1)/6 = 9+6/(7-1)$

$1689 \longrightarrow 8+9-1-6$

$1789 \longrightarrow 1*(8+9-7) = 8+9-1*7 = 8+1*9-7 = 1*8+9-7 = 1*(8+9)-7 = 1*(8-7)+9 = 8+1*(9-7) = (8-7)*(1+9) = 1*(8-7)+9 = 1+(8-7)*9 = 9+(1+7)/8 = 9+8/(1+7) = 9+(8-1)/7 = 9+7/(8-1)$

$2345 \longrightarrow 3+4+5-2 = (4-3)*2*5 = 3+5+4/2 = 2*4+5-3 = ((2+4)*5)/3 = 5*((2+4)/3) = 2+4*(5-3)$

$2346 \longrightarrow 3+4+6/2 = (2+3)*(6-4) = 2+(4*6)/3 = 2+4*(6/3) = (3-2)*(4+6) = (3-2)*4+6 = 4+(3-2)*6 = 4+2*(6-3) = 2*4+6/3 = 4*(2+3/6) = 3*6-2*4 = 2*(3+6-4) = 4*(6-3)-2$

$2347 \longrightarrow 2+4+7-3 = (2+4*7)/3$

$2348 \longrightarrow 2*3+8-4 = (4-2)*(8-3) = 2*(3+8/4) = (4-3)*(2+8) = (4-3)*2+8 = 2+(4-3)*8 = (3*8-4)/2 = (3*4+8)/2 = (4*8-2)/3 = (2+3)*(8/4) = ((2+3)*8)/4 = 3*(2+4)-8 = (2-3/4)*8 = 3*(8-4)-2 = 8+(2+4)/3$

$2349 \longrightarrow 2+3+9-4 = 4+2*(9-3) = 3+9-4/2 = (4*9)/3-2 = 4*(9/3)-2$

$2356 \longrightarrow 2+5+6-3 = 2*6+3-5 = 2*(5-3)+6 = (5-3)*6-2 = 2*(3+5)-6 = 6+(3+5)/2$

$2357 \longrightarrow 3*(7-2)-5 = 5*(7-2-3) = 2*(7+3-5) = (7-5)*(2+3) = (5-3)*(7-2) = 3*5+2-7 = 5+(3+7)/2 = 5*((7-3)/2) = (5*(7-3))/2 = 3*(7-2)-5$

$2358 \longrightarrow (5*(8-2))/3 = 5*((8-2)/3) = 5*(8-2*3) = 8+(5-2)/3$

$2359 \longrightarrow 9/3+5+2 = 2*3+9-5 = 2*9-3-5 = 9+(2+3)/5 =$

$9+5/(2+3) = 9+(5-2)/3 = 9+3/(5-2) = 9+(5-3)/2 = 9+2/(5-3) = 3*(9-5)-2$

2367 $\longrightarrow ((7-2)*6)/3 = (7-2)*(6/3) = (7-6/3)*2$

2368 $\longrightarrow 2*(8+3-6) = (2+3)*(8-6) = 2*(3+6)-8$

2369 $\longrightarrow 6+9-2-3 = 2*((6+9)/3) = (2*(6+9))/3 = 9+(2*3)/6 = 9+6/(2*3) = 9+(6/2)/3 = 9+(6/3)/2$

2378 $\longrightarrow 7+8-2-3 = 3*8-2*7 = 2*((7+8)/3) = (2*(7+8))/3$

2379 $\longrightarrow (2+3)*(9-7) = 2*(3+9-7) = (3*9-7)/2 = 3*7-2-9 = 7+9-2*3$

2389 $\longrightarrow 8/2-3+9 = 2*8+3-9 = 2*(8-9/3)$

2456 $\longrightarrow (4*2-6)*5 = 2*(4+6-5) = 5+(4+6)/2 = (5*(2+6))/4 = 5*((2+6)/4)$

2457 $\longrightarrow 2+5+7-4 = 4*2+7-5 = 2+4*(7-5) = 5+7+4/2$

2458 $\longrightarrow 2*(5+4)-8 = 5*((8-4)/2) = (5*(8-4))/2 = 4*5-2-8 = 4*(8-5)-2 = 4+2*(8-5) = 2*(5-4)+8 = 8+(2+6)/4$

2459 $\longrightarrow 2+4+9-5$

2467 $\longrightarrow (7-2)*(6-4) = 7+6/(4-2) = 2*(4+7-6) = 4*6-2*7 = (6*7-2)/4 = (6-7/2)*4$

2468 $\longrightarrow 2*4+8-6 = 2+6+8/4 = (6*8)/4-2 = 6*(8/4)-2 = 4*(8/2)-6 = (4-2)*8-6 = (4*8)/2-6 = (4/2)*8-6 = 2*6-8/4 = 8/(4-2)+6 = 2+4*(8-6)$

2469 $\longrightarrow 9+(6-4)/2 = 9+(6-2)/4 = 9+(2+4)/6 = 9+2/(6-4) = 9+4/(6-2) = 9+6/(2+4) = 4+2*(9-6) = 4+9-6/2 = 4*(9-6)-2$

2478 $\longrightarrow 2*(8-7+4) = 2*7+4-8 = (4*7-8)/2$

2479 $\longrightarrow 9-4+7-2 = 4*7-2*9 = 2*4+9-7 = 2+4*(9-7) = (4+7+9)/2 = (7-9/2)*4 = 2*(9-7)+4$

2489 $\longrightarrow 9+(2*4)/8 = 9+8/(2*4) = 9+(8/2)/4 = 9+(8/4)/2 = 2*(4+9-8) = (4*9)/2-8 = (4/2)*9-8 = (4-2)*9-8$

2567 $\longrightarrow 2+6+7-5 = 2*5*(7-6) = 5+2*6-7 = 2*(7-5)+6 = (7-5)*6-2$

2568 $\longrightarrow (5-2)*6-8 = (5*8)/(6-2) = 5*(8/(6-2)) = (2+6*8)/5 = 5+8-6/2 = 8+6/(5-2) = 8+2*(6-5) = (8+2)*(6-5) = 2+8*(6-5)$

2569 $\longrightarrow 2+5+9-6 = (5+6+9)/2$

2578 $\longrightarrow 2*5*(8-7) = (5+7+8)/2$

$2579 \longrightarrow 2*7+5-9 = 9+(2+5)/7 = 9+(7-2)/5 = 9+(7-5)/2 = 9+7/(2+5) = 9+5/(7-2) = 9+2/(7-5)$

$2589 \longrightarrow 2*5*(9-8) = 8+(9-5)/2 = 8+9-2-5 = 5+9-8/2$

$2678 \longrightarrow (7-2)*(8-6) = 2*(6+7-8) = (2+8)*(7-6) = 2+8*(7-6) = 2*(7-6)+8$

$2679 \longrightarrow 2+6+9-7 = 7+2*9/6 = 2*6+7-9 = 2*(9-7)+6 = (9-7)*6-2$

$2689 \longrightarrow (6+8-9)*2 = (8*9)/6-2 = 9+(2+6)/8 = 9+(8-6)/2 = 9+(8-2)/6 = 9+8/(2+6) = 9+2/(8-6) = 9+6/(8-2)$

$2789 \longrightarrow 2+7+9-8 = (8*9-2)/7$

$3456 \longrightarrow 3+5+6-4 = (3*4*5)/6 = 5*((3*4)/6) = 5*(4/(6/3)) = (4*5)/(6/3) = (4-6/3)*5$

$3457 \longrightarrow 3*4+5-7 = 4*5-3-7 = (3+7)*(5-4) = 3+7*(5-4) = 3*(5-4)+7 = 4+3*(7-5) = (5-3)*7-4 = (4+5)/3+7$

$3458 \longrightarrow 3+4+8-5 = 3+5+8/4$

$3459 \longrightarrow 3*5+4-9 = (5-3)*(9-4) = 5*(9-3-4) = 3*(9-4)-5$

$3467 \longrightarrow 4*7-3*6 = 4*(7-3)-6 = (6*7)/3-4 = (6/3)*7-4 = 6*(4-7/3)$

$3468 \longrightarrow (6-4)*(8-3) = 4+8-6/3 = (4+8)/3+6 = 3*4+6-8 = 8+(3*4)/6 = 3*(8-6)+4$

$3469 \longrightarrow 3+4+9-6 = (4*9-6)/3 = (9-4)*(6/3) = ((9-4)*6)/3$

$3478 \longrightarrow (3-7/4)*8$

$3479 \longrightarrow 3*4+7-9 = 9+(3+4)/7 = 9+(7-3)/4 = 9+(7-4)/3 = 9+7/(3+4) = 9+4/(7-3) = 9+3/(7-4) = 7+(3+9)/4$

$3489 \longrightarrow 8+9-3-4 = 3+9-8/4$

$3567 \longrightarrow 3*7-5-6 = 5+7-6/3 = (5+7)/3+6 = (3+7)*(6-5) = 3+7*(6-5) = 7+3*(6-5) = 7+6/(5-3)$

$3568 \longrightarrow 3+5+8-6 = 6+8/(5-3) = (5-3)*8-6 = 5*(3+6-7)$

$3569 \longrightarrow (6+9)/3+5 = (3*5*6)/9 = 5*((3*6)/9)$

$3578 \longrightarrow (8-3)*(7-5) = 5+(7+8)/3 = 8+(3+7)/5$

$3579 \longrightarrow 3+5+9-7$

$3589 \longrightarrow (3+8-9)*5 = 3*8-5-9 = 9+(3+5)/8 = 9+(8-5)/3 = 9+(8-3)/5 = 9+8/(3+5) = 9+3/(8-5) = 9+5/(8-3) = 5+8-9/3 = (5-3)*9-8 = 5*((3+9)/6)$

$3678 \longrightarrow 3+6+8-7 = (6*(7+8))/3 = (6/3)*(7+8) = 6*((7+8)/3)$

3679 $\longrightarrow 6+7-(9/3)=(7*9-3)/6=3*(9-7)+6$

3689 $\longrightarrow 3+6+9-8=8+(3*6)/9=8+(3+9)/6=(6*9)/3-8=(6/3)*9-8=6*(9/3)-8$

3789 $\longrightarrow (9-8)*(3+7)=(9-8)*3+7=3+(9-8)*7=(9-7)*(8-3)$

4567 $\longrightarrow 4+5+7-6=(5*6)/(7-4)=5*(6/(7-4))$

4568 $\longrightarrow (4+6)/5+8=(4*5)/(8-6)=(4/(8-6))*5=(5*(8+4))/6=5*((4+8)/6)=5*(4/(8-6))=(5*4)/(8-6)$

4569 $\longrightarrow 4*6-5-9=(6*9-4)/5=4*(9-5)-6$

4578 $\longrightarrow 8-7+4+5=8+4/(7-5)=5+7-8/4$

4579 $\longrightarrow 4*5/(9-7)=(9-4)*(7-5)=5*(4+7-9)$

4589 $\longrightarrow 4+5+9-8$

4678 $\longrightarrow (8-7)*(4+6)=(7*8+4)/6=6*7-4*8=8+6/(7-4)=(8-6)*7-4=6*(7-4)-8=(4*(7+8))/6$

4679 $\longrightarrow (7+9)/4+6$

4689 $\longrightarrow (4+6)*(9-8)=(9*8)/6-4=(8-6)*(9-4)=(6-4)*9-8$

4789 $\longrightarrow 4+7+8-9=8+4/(9-7)$

5678 $\longrightarrow 5+6+7-8=(6*7+8)/5=(7*8-6)/5=6+8/(7-5)=(7-5)*8-6=5*((6+8)/7)=8+(5+7)/6$

5679 $\longrightarrow (9+6)/5+7$

5689 $\longrightarrow 5+6+8-9$

5789 $\longrightarrow 9/(8-5)+7=(7-5)*9-8=5*((7+9)/8)=(5*(7+9))/8=8+(5+9)/7$

6789 $\longrightarrow 8/(9-7)+6=(6*(7+8))/9=(9-7)*8-6$

6.3 面積の"S"の語源

「面積の"S"の語源を教えて下さい。」
質問者：J.Saitoh

掲示板上の回答を少し修正

面積の「S」と言われても，よく分かりません。多分，面積の「S」ではないのだと思います。もしかすると，曲面(Surface)を表わすのに使うことから来たのかもしれませんが，恐らくは違うでしょう。

「積分」という言葉と記号 $\int$ は，ライプニッツ*とベルヌーイ*によって作られたのです(『解析教程　上』[22]を見てください)。

そのとき，積分の記号は「和 (Sum または Summation)」の「S」をもじったものにしたのです。
面積は積分で計算されることが多く，積分は「S」と書くことが多い。
ということから，面積を表すのに「S」と書くことが多くなったのではないでしょうか。
ちなみに，面積は「S」と書くのだという規則はありません。

6.4　0の0乗は？

「0の0乗はやはり，1なのでしょうか。
もしそうでなければ理由は何でしょうか。
私は，$y = x^x$ の $x \longrightarrow 0$ の極限において $y = 1$ という結論に達したのですが。専門外なので詳しいことは分かりません。是非，ご教示下さい。」
質問者：草薙 (京都大学工学部)

<u>掲示板上の回答</u>
あらゆる四則演算の規則や指数法則を保つようには定義できません。形式的には $0^{-n} = 1/0^n$ となりますが，1を0で割ることは許されていません。強引に，$0^0 = 0^{1-1} = 0^1/0^1 = 0/0$ としても，不定だということになります。
後は，何かの意味を持ってこの不定なるものの一つを特定できるかということが考えられるのですが，その意味では答えは1とするのが自然だということは言えます。
それ自体の定義が分からなくなれば，極限として意味を持つかどうかを考えます。極限としての意味の持たせ方に色々あるような場合は問題が複雑になりますが，質問のような場合は1として矛盾を起こさないと思います。
$y = x^x$ の $x \longrightarrow 0$ の極限をどう計算するかも色々あるとは思いますが，対数をとって，$\log y = x \log x$ として，$x \longrightarrow 0$ の極限をとれば0になり，その指数関数の値という辺りが一番落ち着いた気分ではないかと思います。
実は，対数を取るところで暗黙のうちに，$x > 0$ で実数ということが仮定されていて，その意味での極限を取っているのです。そうでないと，この極限は存在しなくなります。

また，そういうことなら，$x>0$ に対して，$x^0=1$ であるので，その極限としたのだといっても良いでしょう。ただ，$0^x=0$ だから，その極限なら 0 ではないかという議論も出来ます。

結局，知っている規則のすべてを満たすようにはできないのだから，矛盾を導くことも容易で，「一般には 0^0 を定義することはできないが，極限として，$0^0=1$ を正当化する話しもある」というあたりになるのでしょうか。

6.5　古典力学の数学的方法を理解するに必要な数学分野の推薦図書

「初めまして，機械メーカに勤める４０代の者です。専攻は機械工学です。再び数学の勉強したくなりました。当面の目標は２年間でアーノルド* 「古典力学の数学的方法」を理解できる学力に達することです。現在，やっかいな大学入試問題はのぞき高校数学の基礎はほぼ理解できます。ただし大学時代はあまり勉強しませんでしたので大学課程の数学を勉強し直する必要があります。目標に達するのに必要な数学分野の推薦図書を紹介ください。微積分用としては「解析教程・上下」は購入しました。」

質問者：新居啓二

<u>掲示板上の回答</u>

アーノルドの本はあまり予備知識を必要としないように書いてありますが，それでも以前教養で教えていた程度の数学は分かっているほうがいいでしょう。

『解析教程』を買っていただいたようで，微積分はほとんどそれで十分ですが，多変数の変数が大きくなったときの扱いが少し足らないかもしれません。それとも関連するのですが，線形代数の初歩的な部分も知っているとよいでしょう。線形代数の本も色々ありますが，どれでも良いとしか言い難いですね。目安としては，http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/agora/mathtext.htm に私が講義で使ったことのある教科書を挙げてありますので，その中から選ばれたら如何でしょうか。また,「ほんの本のリスト」(http://math1.edu.mie-u.ac.jp/~kanie/book.htm) にある本も参考にしてください。

あと知っていれば，知らないよりも良いという知識には,「多様体論」

「常微分方程式論」がありますが，アーノルドの本の中で学ばれればよいかと思います。アーノルドかポントリャーギンの『常微分方程式』は横目に見ながらというのもよいでしょう。

なお，アーノルドの『古典力学の数学的方法』の本文は不滅の輝きで，内容が古びることもなく，予備知識もほとんど要りませんが，附録部分は当時の最先端の結果ですので，現在となってはいささか古くなった部分もありますし，少なからぬ予備知識が必要な部分もあります。

取り敢えず，本文を読まれたらよいと思います。そして必要なだけ，微積分と線形代数の教科書を見られたら如何でしょう。準備のための勉強をするより，学びながら必要な知識・技術を補充するという方が勉強に対する気持ちが持続しやすいと思います。日暮れて途遠く，脚支度よりまず歩きはじめることだ，と思います。

楽しみながら，頑張ってください。

6.6 ラテン語入門はどうしたら

「はじめまして。解析教程読ませていただいています。素晴らしい本をありがとうございます。さて，本文に紹介されていたオイラー*「入門」のラテン語を読もうとしています。

読むのに必要なラテン語の辞書などご存知でしたら，ご紹介してください。お手数かけます。「入門」の英語，仏語は第１巻は品切れでした。」

質問者：網 信基

掲示板上の回答

これは直接e-メールで送られてきたものですが，内容的に秘密にするようなものでないし，関心のある人もあると思って，ここで返事を書かせてもらいます。

さて，歴史的興味でオイラーのラテン語原本が読みたいのならお止めしませんが，オイラーの数学に興味があるのでしたら，英訳で十分だと思います。Springerから出ていますので，数学書取り次ぎの本屋さんか，シュプリンガー・フェアラーク東京に聞けば手に入ると思います。僕も機会があれば訳してもよいとは思うのですが，さて，需要が見込めるかどうかですね。

ところで，どうしてもラテン語で読みたいと思うのでしたら，と言っても，ラテン語の日本語の辞書は１冊しかありません。研究社から出て

います。しかし，決して読みやすいとは言えません。ラテン語の文法の基礎をある程度以上勉強してからでないと単語を引くことも出来ませんし，正解の単語に出会っていても，そこにある訳語は適切なものとは言いがたいのです。それで，どうしてもOxford Latin Dictionary などの辞書を引くことになりますが，これがまた大変です。ラテン語は使用されている時期も長く地域も分野も多岐にわたっているので，言葉が非常に多義的で，変化形が多く，品詞すら変わっていきます。したがって，どの時代のどの地域での，というより誰のラテン語かが分かってはじめて意味が確定するということすらあるようです。つまり，ヨーロッパではラテン語の学習の歴史が長く，辞書は大変に詳しく，何処を見たらよいか分からない状態です。

多分，僕がこの翻訳のためにラテン語の勉強をしてから翻訳したと，志賀さんがある書評でばらしてしまったので，僕に出来るのなら，何とかなるかと思われたのかもしれませんが，実はそんな簡単なものではありません。勉強しはじめたころに，さまよえるオランダ人のダイクハウゼンという数学者にシンポジウムで会う機会があり，彼にかなりの部分を，逐語的に英訳してもらいました。勿論それでは意味の通る文章になりませんので，文章上，数学上の意味から，ああでもないこうでもないと，議論していったのです。それでもかなりな部分は未解決で，彼もあとで調べてくれたり，僕も考えたりで，そんな機会が2度ほどありました。

ライプニッツのラテン語は特にひどく，意味が取りにくくて困りましたが，後になって，対応する部分のフランス語訳が出ていることを知り，それも参考にしました。そのころには文法的なこともある程度分かるようになっていたので，同じ学部の哲学の人に文法的な解析をしてもらい，それを数学的に補うという形で訳したものです。

このさいラテン語の勉強がしたい，という希望なら別ですが，Blanton の英訳を，そしてもしそんなことがあればですが，いつか出るかもしれない日本語訳をお読みなることをお薦めします。数学部分だけで，十分オイラーは面白いです。

これで，お返事になっているでしょうか。

6.7 比例の記号の歴史:「$\propto$」の読み方と出典

「「家庭電器」に関する通信教育を長年事業として進めております。下記の記号のことでお教えいただけば幸いであります。

1.「$\propto$」の正式の用語名称をお教えください。

2. この記号の出典は，何でしょうか？」

質問者：大野　泰雄(電子文化研究所)

回答

これは電話による質問である。まず，TeX での回答を書いてしまった。掲示板に載せるのには少し苦労するかもしれない。

用語の正式名称というものがあるかどうかは分かりませんが,「比例記号」ということでいいと思います。

英語で考えてみても，数学史で有名なF. カジョリ*が，A History of Mathematical Notations という本[1]の中で，この記号について書いていますが，その節の見出しは Signs of Proportion となっています。

ちなみに $A \propto B$ という式は A is proportional to B (AはBに比例する) という文章を表現したものです。

さて,「比例」することを表現する記号が確立していくのにも長い歴史があったようです。カジョリの本を参考にして少し述べてみましょう。

記号による式の表示が確立する以前にも，比例を文章で表現することからの脱皮を試みた長い歴史がありますが，印刷以前の歴史は煩雑で今は手におえません。

印刷されたものの最初のものはルドルフ*の教科書のようで，シュティーフェル*(1553) による再版には,

$$100 \mid \frac{1}{6}z \mid 100z \mid \mathrm{Facit}\ \frac{1}{6}zz$$

というように，垂直の線で区切って，現在の記号での $100 : \frac{1}{6}z = 100z : \frac{1}{6}z^2$ を表わしているのが見つかります。しかし，例えば，タルターリア*は数を扱った本[1]中で

$$\text{Se } \mathcal{L}\ 3\ //\ \text{val } \beta\ 4\ //\ \text{che valeranno } \mathcal{L}\ 28$$

と書いているように，文章の多い表現も混在します。

[1]N.Tartaglia, *La prima parte del General Tratato di Numeri, etc* (ヴェネツィア,1556) のフォリオ129B。

その後，クラヴィウス*が『実用算術』[2]の中で

$$9\ .\ 126\ .\ 5\ .\ ?\ fiunt\ 70\ .$$

と，$9:126=5:70$ のことを書いています。

1699年にコラチャンが算術の教科書の中で，比例式を

$$\begin{array}{ccccccccc} A & . & B & . & C & . & D & . \\ 5 & . & 7 & . & 15 & . & 21 & . \end{array}$$

と，$5:7=15:21$ のことを2段に書いています。そのほか，シュヴェンター(1623)は 68 — 51 — 85 と書いて，$(51\times 85)/68$，つまり，比例式の第4項を求めよという問題を提示していたり，ガリレオ*(1635)も同様の問題を同じように表示し，具体的に積み上げ式に計算してみせています。ガリレオはまた別の本で，数を区分けするのに横線 — でなく，点 . や空白を用いたりしています。

これとは少し別の流れとして，例えば，オランダのヨハン・シュタンピオーエンは記号を使って，

$$a\ ,,\ b\ \text{gel}\ :\ b\ ,,\ c$$

と書いています[3]。今の記号では $a:b=b:c$ のことです。1601年にランスベルギウス*が

ut 5 ad 10; ita 10 ad 20

と書いたのも，$5:10=10:20$ のことを意味しています。これらは等比数列の一部という意識か，比例中項を求めるという意識かだろうと思われますが，前後の記述がないので分かりません。また，イタリヤ人のミケランジェロ・リッチ*が，幾何の演習書[4]の中で

esto AC ad CB, ut 9 ad 6

と書いてもいます。第4項が欠けていたり，第2項と第3項が同じであったりはしますが，式としてのちゃんとした表示まで後一歩です。

[2] Chr. Clavius, *Epitome arithmeticae practicae* (ローマ, 1583) の137ページ。
[3] Johan Stampioen, *Algebra ofte nieuwe Stel-Regel* (ハーグ, 1639)
[4] Michelangelo Ricci, *Exercitatio geometrica* , 1668.

17世紀前半に活躍したイギリスのオートレッド*は，数式の表示や記号について大きな貢献をした人ですが,『数学の鍵』[5]で，5.10 :: 6.12(現在の記号では$5:10=6:12$)という書き方を導入し，これ以降の著書でもこの記法を採用していて，以降イギリスではこの記法が広く使われるようになります。

しかし，点「.」は色々な意味を持つことがあり，これはこれで不便なこともあります。例えば，小数点に「.」を使うことができません。

そのためイギリスでもこれを少し修正した記法が提案されます。すでに1651年にヴィンセント・ウィングが『天界の調和』[6]という天文書で $A.B :: C.D$ という記法とともに $A:B::C:D$ という記法も使っています。この本ではもしかすると，タイプするときの間違いであった可能性があるというのですが，これ以降の著書でははっきりと $A:B::C:D$ という記法に統一しています。

これ以降，オートレッドの記法とウィングの記法が優劣を競うことになり，少しずつウィングの記法が優位に立つようになります。中にはスイス人のジョン・アレキサンダーの『代数』[7]のようにオートレッド式の $a.b :: c.X$ を使ったり，$a \mathbin{\overline{..}} b : c \mathbin{\overline{..}} X$ を使ったりしている例もあります。またこの本には，$b \mathbin{\overline{..}} a : d|\frac{ad}{b}$ という書き方もあります。

例えばニュートン*ですら，1676年の手紙ではオートレッドの記法，後の論文ではウィングの記法を用いたりしています。

一方ヨーロッパ大陸では，縦線を使ったものやタルターリア風の書き方に似たものが使われていましたが，一般的になりませんでした。

ルネ・デカルト*は，1619-21年には $a|b||c|d$ という書き方をしており，1638年の手紙では $a|b|c|d$ と書いています。縦線で等比級数の各項を区分していく例は，スルジウス*のホイヘンスへの手紙(1668-69)とか，ジャック・ド・ビリー*の幾何の本(1643)に見受けられます。18世紀の初めの頃のデカルト主義者たちは $a|b||c|d$ の形を採用しており，ディドロ*の百科全書(1754)でも採られています。1701年にラ・イール*が $aa||xx||ab$ と書いているのは，$a^2:x^2=x^2:ab$ の意味で，等比数列の3項を区切っている例と見ることも出来ます。

変わった書き方もいろいろあって，ピエール・エリゴーン*は「$hg\ \pi$

[5]William Oughtred, *Clavis mathematicae* (ロンドン，1631)

[6]Vincent Wing, *Harmonicon Coeleste* (ロンドン, 1651), 5ページ。

[7]John Alexander, *A Synopsis of Algebra* (ロンドン,1709)，英語版。1693年にラテン語版がある。

ga 2|2 hb π bd は，HG が GA に対するのは HB が BD に対するのと同じであることを意味する」と書いています[8]。今の記号では $hg : ga = hb : bd$ となり，相似比が等しいことを表しているようです。2|2 が「等しい」ことを，π が「比」を表しているのも面白いですね。

また，1659年のボローニャのピエトロ・メンゴーリ*は，$a : r = a^2 : ar$ のことを「$a; r : a2; ar$」という書き方をしています。

ルーアンのA. ド・メルカテルの『算術』[9]では，2,,3;;8,,12 とあり，スペインのザラゴザの『算術』[10]では 4.3 : 12.9 とあり，ハンガリーのクレサの『球面三角法』[11]では $x ... r :: r ... \frac{rr}{x}$ や $AE..EF :: AD..DG$ という記号も見受けられます。

オランダのド・グラーフの本[12]では，$2 - 4 = 6 - 12$ と比例式を表し，ヨークは『算術』[13]では $125 - 429 - 10 -?$ と書いているが，後の本では 33600　7 :: 153600　32 と書いていて，オートレッドとウィングの記号の争点である「.」と「:」を使わず，空白に代えている。

また，比と商とを区別する目的で，ジークは『算術』[14]の中で，$3 - 2$ と書く代わりに $\frac{3}{\because 2}$ と表しています。

オートレッドの . :: . という記法は大陸でもゆっくりと広まっていき，17世紀後半以降多くの人に用いられるようになります。

1762年にド・ラ・カイユが，『基礎数学講義』のラテン語版[15]で，3.12 :: 2.8 と 3 : 12 :: 2 : 8 と 3 : 12 = 2 : 8 と 3|12||2|8 という4つの記法が一般に使われているが，3 : 12 :: 2 : 8 を用いると述べています。以降，イギリスとアメリカでは : :: : が20世紀の始め頃まで一般に用いられ，今でも使われることがあるようです。なお，19世紀末までは，スペイン，ポルトガル，南米などでは，この記法が一般的でした。

ライプニッツですらオートレッドの記法を用いていたのですが，彼はじっくりと記号について考えることになります。その前駆として，シュ

---

[8]Pierre Herigone, *Cvrsvs mathematici* (パリ，1644)

[9]Jean Baptiste Adrien de Mercastel, *Arithmétique démontrée* (ルーアン，1733)

[10]Joseph Zaragoza, *Arithmetica vniversal* (ヴァレンシア，1669)

[11]Jacob Kresa, *Analysis speciosa trigonometriae sphericae* (プラハ，1720)

[12]Abraham de Graaf, *De Geheele mathesis of wiskonst* (アムステルダム，1694), 16ページ。

[13]Thomas York, *Practical Treatise of Arithmetik* (ロンドン，1687)

[14]Samuel Jeak, ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΛΟΓΙΑ, or *Arithmetick* (ロンドン，1696)

[15]N.L. de la Caille, *Lectiones elementares mathematicae ...* (ヴェニス，1762)

タンピオーエンの『代数学』[16]では，$A,, B = C,, D$ という記号も用いられていました。問題は $=$ を等号として用いるということ，比として等しいということに $=$ を使うということですが，普及はしませんでした。イギリスでも，1668年にジェームズ・グレゴリー*がパドゥアで出した幾何の本[17]では比が等しいことに $=$ を使っていますが，それに続く人はありませんでした。

1693年にライプニッツは比や比例に特別な記号を使うのはおかしいと述べています。比には商の記号で十分だし，比例に対しても比の等しさを表わすのなら，(漸く認められるようになってきた) 等号「$=$」を用いない理由はない。比と商は同じ意味を持っているのだから同じ記号を用い，それが等しいという意味で，$a : b = c : d$ とか $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ と書くべきだ，というのがライプニッツの主張です。1708年の『学術論叢』[18]は，$a : b = c : d$ というライプニッツの記号が用いられた最初の印刷物ですが，その号に，それ以降の『学術論叢』の編集方針として，代数的な記号はライプニッツのものを使うと明言してあります。

ドイツのクリスチャン・ウルフはこれを採用し，1710年の教科書[19]ではまだオートレッドの記号と併用していますが，1713年以降は一貫してライプニッツの記号を用いています。フランスではクレローの『代数学』[20]，サブリアンの『数物辞書』[21]，また1765年のパリ・アカデミーの出版物にも見受けられます。1727年の早さでオイラーがペトログラード・アカデミーの雑誌でも用いています。

1743年にはスイスで，1763年と1775年にオランダでこの記号を含む教科書が出版されています。もちろん，折衷の記号もあって，1768年のオランダの代数の教科書には $. = .$ という記号の出てくる例もありますが，消えてしまいます。

---

[16] Johan Stampioen d'Jonghe, *Algebra ofte Nieuwe Stel-Regel*('s Graven-Haye, 1639)

[17] James Gregory, *Geometriae Pars Vniversalis*(パドゥア,1668); p.101

[18] Acta Eruditorum Lipsiensium「ライプツィッヒ学術論叢」ないし「ライプツィッヒ学報」と訳すべきもの。1409年に設立されたライプツィッヒ大学 (ラテン名ウニヴェルシタース・リプシエンシウム) のオットー・メンケが，1681年の春ライプニッツに学術研究雑誌の創刊を相談し，翌1682年に創刊されたもの。第1号にライプニッツの論文が掲載されている。

[19] Christian Wolf, *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* (マルデブルグ, 1710)

[20] A.C.Clairaut, *Elements d'algebre* (パリ, 1746)

[21] A.Saverien, *Dictionnaires universel de mathematique et physique* (パリ, 1753)

1751年創刊の数物雑誌『スイス論集』[22]の最初の巻にライプニッツの記号が使われています。アイルランドでは1770年，イギリスではやっと1812年にジョン・コールの『立体測角術』[23]に採用されていますが，一般に普及するにはさらに1世紀の時が掛かります。

ヨーロッパ大陸では19世紀には一般に採用されていますが，アメリカの19世紀は : :: : が主流で，ライプニッツの記号が一般に普及するのは20世紀に入ってからのことです。

日本の場合，明治時代，主にドイツから学問を輸入したので，最初からライプニッツの記号を用いていたようです。

比例式の記法にこんなにも長い歴史があったのですが，イギリスやアメリカで，変量の比例について使われることもあった記号が $\propto$ だったのです。最初に用いられたのは18世紀末のことで，W. エマーソン『流率論』[24]によるものです。彼は「既にある共通の代数記号に，私は一般的な比例を表わすこの $\propto$ という記号を付け加えたい。つまり，$A \propto \dfrac{BC}{D}$ は A が $\dfrac{BC}{D}$ と定数の比を持つことを意味する」と書いています。比例式の第4項が変量になっているという感じでしょうか。変量の間の比例関係を表わすときに，固定した数量間の等式というイメージを避けるために作ったのでしょうか。この後イギリスで少しずつ普及していき，20世紀以降広く認知されるようになったようです。

ところで，$\propto$ の左右を反対にした形の記号 $\supset\!\!\!\!\bigcirc$[25]がデカルト『幾何学』[26]の中に見ることができます。デカルトの

$$z \supset\!\!\!\!\bigcirc b, \quad z^2 \supset\!\!\!\!\bigcirc az + bb, \quad z^3 \supset\!\!\!\!\bigcirc az^2 + bbz - c^3$$

などは方程式を表わしており，従って等式を表わしています。大陸では広く用いられたようで，ヤコブ・ベルヌーイ*も『推測術』[27]で等式にこの記号を使っていることは，ハイラー*–ワナー*[22]の第I章第1

---

[22]Acta Helvetia, バーゼル。

[23]Jon Cole, *Stereogoniometry* (ロンドン，1812)

[24]W. Emerson, *Doctorine of Fluxions* (ロンドン，1768)

[25]LaTeXで無理に(しかも簡便に)作ったので形は良くないが，感じは分かると思う。これを$\propto$ の左右を反対にした形と想像して下さい。

[26]René Descartes, *La Geometrie*, 『方法序説』(*Discours de la methode*, パリ, 1637)の付録。 D.E.スミスとM.L.ラタンによる英訳が1925年にThe Open Court出版社から発行され，1954年にDover出版社からリプリントが出ている。日本語訳には，デカルト著作集1『幾何学，方法序説の試論』(原亨吉訳，白水社)がある。

[27]Jakob Bernolli, *Ars conjectandi* (死後出版，バーゼル，1713).

節最後の図版でも確認できます。

元々は，等式は等しいという意味の言葉

$$aequales,\ aequantur,\ esgale,\ faciunt,\ ghelijck,\ gleich$$

やその略語を用いており，多くの場合 *aeq* または *ae* という略号が使われていました。2重母音 *ae* は æ と書かれることも多く，これを図案化したものではないかと思われます。

エマーソンの頃，既に等式にはリコード* の記号「=」[28]が使われることが確定しており（イギリスでもあったからか），デカルトの記号 ∝ は使われておらず，廃物利用したいと思ったが，そのまま使うのではさすがに問題なので，左右をひっくり返したのだったのかもしれません。最後の部分は個人的な思い付きなので，あまり人には言わないで下さい。

この等号についても，また，最初質問を受けたときに僕が勘違いした相似の記号 ～ についても面白い歴史がありますが，今回はこれくらいにしておきます。

6.8 負の数×負の数=正の数

「負の数×負の数=正の数を証明できるものですか。
中学生に分かるような程度で証明してくれると助かるのですが」
質問者：屋敷 真毅（南牟婁郡紀和町立入鹿中学校）

<u>掲示板上の回答</u>

小屋敷君は出来の良い方の学生だったので，この質問をあるパーティーで聞いたとき，冗談なのだと思っていた。今年の卒業研究のセミナーの学生の練習のため，ホームページのある場所に「算数・豆事典」というのを作ってあって，ある学生が数学的に証明できると書いてあるのを見たらしい。セミナーの学生のページの入り口には内容については信用せず，読者も教師になって彼らを鍛えるために質問なり投書なりをしてくれるように書いてあるのです。それで，小屋敷君は彼を鍛えるために言ってくれているのだとばかり思っていました。

さて，数学的証明ということですね。数学をちゃんとやれば分かると思うけど，「負の数」の定義がないと証明できません。中学生にとっ

[28] Robert Recorde『才知の砥石』(*Whetstone of Witte*, ロンドン, 1557) において最初に印刷されている。

ての障害は，何より「負の数」の存在であり，実存性，また実用性なのです。今の場合，定義してしまえばほとんど明らかになってしまいます。

今，大学入試の二次試験の採点を少し休憩して研究室に帰ってきたところなので，これ以上は暇がありません。採点の主任の恐ろしい顔が浮かんできます。

来週まで待ってください。それまでに，出来れば，中学生でも，どんな中学生，またどのような知識を持った中学生に，というデータがあれば入れておいてください。それによって少し答え方が変わりますので。

再度の質問

「負の数×負の数=正の数を説明してください(先日は数学的に証明と書きましたが)。

中学校１年生の教科書に出てくるのですが，具体例を伴うやつ(２分前には東に何メートルのところにいたから…）は難しいと思います。

かといって，

$$
\begin{array}{rcll}
(-2)\times 2 & = & -4 & \\
 & & & 2\text{増える} \\
(-2)\times 1 & = & -2 & \\
 & & & 2\text{増える} \\
(-2)\times 0 & = & 0 & \\
 & & & 2\text{増える} \\
(-2)\times(-1) & = & 2 &
\end{array}
$$

というのも証明とも言えないし…

ということで，中学１年生の正の数負の数の掛け算を教えれるような形で示していただけると完璧です。よろしくお願いします」

掲示板上の回答

困りましたね。実はこれは証明そのものなのですよ。ただ，表現方法として少し荒っぽいけれど。だから，どのように言い換えても，本質的にはこうやるしかないのです。

０以上の整数の全体 N は，加法半群を作り，１以上の整数の全体 N_+ は乗法半群を作ります。加法に関して群になるような最小の拡張が整

数全体 $\mathbf{Z}$ でしたね。ここにも乗法を拡張したいわけです。

このとき，$\mathbf{N}$ で成り立っていた乗法に関わる法則を保ったまま拡張したいというわけです。すでに，

$$a \times 0 = 0$$

であることは分かっていますね。(証明したければ，下にやるのと類似にすればよい。)

しかし，乗法について群にしようというのではないのだから，結局本質的に問題になるのは，分配法則

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

です。そこで，c として $-b$ を取るのです。すると，

$$0 = a \times 0 = a \times (b + c) = a \times b + a \times c = a \times b + a \times (-b)$$

となるので，

$$a \times (-b) = -(a \times b)$$

となります。同様にやってもいいし，交換法則が成り立つようにするからといってもいいのですが，

$$(-a) \times b = -(a \times b)$$

も成り立ちます。さて，上の分配法則で a に $-a$ を代入してみましょう (嫌なら，$a = -d$ としてもよい)。すると，

$$\begin{aligned}(-a) \times (b + c) &= (-a) \times b + (-a) \times c = -(a \times b) + (-(a \times c)) \\ &= -(a \times b) - (a \times c)\end{aligned}$$

となります。ここでまた，c として $-b$ を取るのです。すると，

$$\begin{aligned}0 &= (-a) \times 0 = (-a) \times (b + c) \\ &= (-a) \times b + (-a) \times c = -(a \times b) + (-a) \times (-b)\end{aligned}$$

となるので，

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

となるのです。分かりますね。

そして，この証明が，君が上で書いている教科書の証明と本質的にはまったく同じであることが，分かりますね。

本質的には，正と負だけしかない世界で掛け算を定義するのなら，正×負　を正にしたっていいのですが，正と負をつなぐものとして 0 があることから，これは負にしないわけに行かなくなるのです。同じ事情で，　負×負　を正にしなくてはいけないことになるのです。

一体，負×負　を正にしないとすれば，どうすればいいのでしょう。負にするのですか？正と負とそして 0 しかない世界の中で，足し算と引き算と掛け算を，知っている計算規則を守るようにしたければ，正にしないと具合が悪いのだということです。

それでも，どうしても嫌だというなら，負×負　の結果を正でも負でも(0でも)ない別の数の世界に持っていくということならできないことではありません。しかし，そうなると，負が幾つ掛かったかをいつも覚えておくような数の世界が出来てしまいます。これじゃあ，とても大変なのです。

つまり，計算に便利なようにしたら，うまく小さくまとまったきれいな(？)世界ができるので，それで計算しようじゃないか，現実に適用してみてうまくいかないこと，不都合なことが起きたなら，ま，そのとき考えよう。そういう，御都合主義の姿勢なのだといったら，生徒は却って混乱するでしょうか？

そこは，小屋敷君の腕で，何とかすることができるでしょう。ね。

まあ，上では一般に a,b,c でやりましたが，これに数字を入れる，$1, -1, 2, -2$ くらいで例示すれば，十分生徒には分かるだろうと思いますよ。

それでも駄目なら，もう一度，書き込んでみてください。

7　単調列の個数

各桁の数が異なる4桁の数を，しかも，10を作るのだから順序を変えて取ってもよいとなれば，単調増大な列を標準形としてとれる。つまり，集合

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 9\}$$

の元の個数を数えればよいことになる。

帰納法で求めるために，3つの整数 $1 \leq k, m \leq n$ に対して，一般に集合

$$X_k(m,n) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid m \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n\}$$

を考え，その個数 $N_k(m,n) = \# X_k(m,n)$ を求めることにしよう。

$k=1$ のときは容易で，

$$X_1(m,n) = \{(a_1) | m \leq a_1 \leq n\}$$

であるから，$N_1(m,n) = n - m + 1$ となる。

さて，帰納法のステップをどうとるかである。最初の項か，最後の項をはずすことにするのが自然だと思えるので，ここでは最初の項をはずすことにする。$k \geq 2$ として，

$$\begin{array}{rccl} \Phi_k : X_k(m,n) & \longrightarrow & \displaystyle\coprod_{\ell=m}^{n-k+1} X_{k-1}(\ell+1, n) \\ (a_1, a_2, \ldots, a_k) & \mapsto & (a_2, \ldots, a_k) \in X_{k-1}(a_1+1, n) \end{array}$$

という写像を考える。ここで，$\coprod$ は離散和で，共通の元を含まないものと考えて形式的な和を取ったもの。たとえば，$\Phi_4(1,5,6,8) = (5,6,8)$ で，$\Phi_4(2,5,6,8) = (5,6,8)$ となって同じ元のように見えるが，入っている集合が，$X_3(2,9)$ と $X_3(3,9)$ というように異なっていて，違うものだと考えるということである。

ℓ の範囲の端に $n-k+1$ が来ることを注意しておく。$X_k(m,n)$ の元はk 個の数の列なのだから，a_1 が最も大きくなれるのは，$(n-k+1, n-k+2, \ldots, n)$ であるということである。だから，たとえば，$N_k(n-k+1, n) = 1$ また $N_k(m, m+k-1) = 1$ となる。

後で必要だから，ついでに考えておくと，k, m を固定して，n の関数と見たとき，$n \geq m+k-1$ のとき $N_k(m,n) > 0$ で，n に関して単調増大である。しかし，n は本来，$m \leq n$ の変域を持っており，$m \leq n \leq m+k-2$ のとき 0 になっている。

さて，離散和の意味を考えれば，Φ_k は全単射になるので，元の個数が等しくなり，

$$N_k(m,n) = \sum_{\ell=m}^{n-k+1} N_{k-1}(\ell+1, n)$$

という漸化式が得られる。

後は，段々と計算して，$N_4(1,9)$ を求めればよいことになった。

$$\begin{aligned}N_2(m,n) &= \sum_{\ell=m}^{n-1} N_1(\ell+1,n) = \sum_{\ell=m}^{n-1}(n-\ell-1+1) = \sum_{\ell=m}^{n-1}(n-\ell)\\ &= n(n-1-m+1)-\frac{1}{2}(m+n-1)(n-1-m+1)\\ &= \frac{(n-m)(2n-m-n+1)}{2} = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\end{aligned}$$

しかしこれをもう2度計算して，$N_4(m,n)$ を求めるのはちょっと勘弁して欲しいような気がする。得られた答を見ていると，m,n は差の形でしか入っていないことに気づく。少し考えれば当たり前だったのだ。増大列自身は，切り取っていけば，値があちこちの値になるけれど，個数だけなら，もともと $n-m$ にしか依らないことに気がつく。

シフト写像

$$\begin{aligned}T_m : X_k(m,n) &\longrightarrow X_k(0,n-m)\\ (a_1,a_2,\ldots,a_k) &\mapsto (a_1-m,a_2-m,\ldots,a_k-m)\end{aligned}$$

が全単射であることから，

$$N_k(m,n) = N_k(0,n-m)$$

となり，$N_k(0,p)$ の形のものだけ求めればよい。面倒だから，$M_k(p) = N_k(0,p)$ と置くことにする。すると，

$$M_1(p) = N_1(0,p) = p-0+1 = p+1$$

となり，漸化式も，

$$\begin{aligned}M_k(p) &= N_k(0,p) = \sum_{\ell=0}^{p-k+1} N_{k-1}(\ell+1,p) = \sum_{\ell=0}^{p-k+1} N_{k-1}(0,p-\ell-1)\\ &= \sum_{\ell=0}^{p-k+1} M_{k-1}(p-\ell-1)\end{aligned}$$

となる。今度は，

$$M_2(p) = \sum_{\ell=0}^{p-1} M_1(p-\ell-1) = \sum_{\ell=0}^{p-1}(p-\ell) = \sum_{q=1}^{p} q = \frac{p(p+1)}{2}$$

となり，

$$M_3(p) \;=\; \sum_{\ell=0}^{p-2} M_2(p-\ell-1) = \sum_{\ell=0}^{p-2} \frac{(p-\ell-1)(p-\ell)}{2}$$

となる。少しは見易いが，まだ結構大変である。しかしこれが p に関して3次式になることはわかる。

最初の注意により，p の関数として見るとき，$p \geq 2$ で正の値を持ち，$p = 1, 0, -1$ では零点になっていると思ってよい。$M_1(p)$ は $p = -1$，$M_2(p)$ は $p = 0, -1$ を零点として持っていたことに注意する。従って，

$$M_3(p) = \alpha(p+1)p(p-1)$$

であって，

$$1 = M_3(2) = \alpha \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

となり，

$$M_3(p) = \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}$$

であることがわかる。この理屈が正しければ，もう一般に，

$$M_k(p) = \alpha(p+1)p(p-1)\cdots(p-k+2)$$

であり，

$$1 = M_k(k-1) = \alpha \cdot k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1 = \alpha \cdot k!$$

となって，

$$M_k(p) = \frac{(p+1)p(p-1)\cdots(p-k+2)}{k!} = \begin{pmatrix} \mathrm{p{+}1} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix}$$

が得られる。これが欲しかったことで，

$$N_4(1,9) = N_4(0,8) = M_4(8) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が得られる。

しかし，多項式と見ての零点の議論はあれでよいのだろうか，$p = -2$ が入れられるのなら，そこでの値は0であるべきなのだろうか？次数

が k なのだから，k個以上の零点を考えても仕様がないと言っても，多項式としては $(-\infty, \infty)$ が定義域になるのであって，k次式なら，零点はあっても k 個しかないのである。

議論に不安が残る。

しかし，答が2項係数になるのなら，証明も最初からそれを目指せばよい。2項係数に則した漸化式を作ればよいのだ。そこで，

$$\begin{array}{rcl} \Psi_k : X_k(m,n) & \longrightarrow & X_{k-1}(m+1,n) \coprod X_k(m+1,n) \\ (a_1, a_2, \ldots, a_k) & \mapsto & \begin{cases} (a_2, \ldots, a_k) & \text{もし } a_1 = m \text{ なら} \\ (a_1, \ldots, a_k) & \text{もし } a_1 > m \text{ なら} \end{cases} \end{array}$$

を考えれば，これも全単射になるので，

$$N_k(m,n) = N_{k-1}(m+1,n) + N_k(m+1,n)$$

が得られ，

$$M_k(p) = N_k(0,p) = N_{k-1}(1,p) + N_k(1,p) = M_{k-1}(p-1) + M_k(p-1)$$

という漸化式が得られる。

ここで大切なことは，初期条件 $M_1(p) = p+1$ とこの漸化式からすべての $M_k(p)$ が決定されるということである。

2項係数 $\begin{pmatrix} \mathrm{p+1} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix}$ もまったく同じ初期条件と漸化式を持つので，一致しないといけないことになる。

こうして，

$$N_k(m,n) = N_k(0, n-m) = M_k(n-m) = \begin{pmatrix} \text{n-m+1} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix}$$

であることがわかった。

答えを知ったあとでは，この節の議論の面倒さは耐えられないかも知れないが，たとえ知ったあとでも，このような事柄にこれ程の構造が隠れていることに，興味を覚えるかどうかである。高校生に話してみたとして，興味を感じる生徒が一人もいないかどうかかは，高校の数学教育のある種の試薬になるかも知れない。

月例会でこの話をしたときも，最初のうちは，何でこんな面倒なことをするのかという反応であった。答えよりも，答えに到るプロセス

に興味を持つ生徒を一人でも多く作って欲しい。それこそが数学を「教育」する最大の理由の一つなのだから。そのためには，教師自身も興味を持てるかどうかが，最初のそしてもしかすると最大の障害なのかも知れない。

8 数学者豆事典と参考文献

本文中に出てきた数学者の略歴を挙げておく。

アーノルド、ヴラディーミル・イーゴレヴィッチ

Vladimir Igorevich Arnold, 1937.12.6-.

旧ソ連、オデッサの生まれ。コルモゴロフの弟子。20才前のモスクワ大学の学生がヒルベルトの第13問題を(否定的に)解決したというニュースが世界を駆け巡り、彗星のように若き天才が登場する(1957)。28才でモスクワ大学教授に(1965)。モスクワ数学会副会長(1985)

三体問題の安定性、特異点問題など多彩。訳者がモスクワにいた頃、すでに頭髪が薄くなり掛けていたが、同僚からディーマと愛称で呼ばれて親しまれていた。黒板の前で話の合間にふと見せるはにかんだような微笑みに、彼の瑞々しい感性を感じたものだ。

主な著書は翻訳されていて,『古典力学の数学的方法』(安藤・蟹江・丹羽訳) 岩波書店、『常微分方程式』(足立・今西訳) 現代数学社、『カタストロフ理論』(蟹江訳) 現代数学社、A. アヴェとの共著『古典力学のエルゴード問題』(吉田耕作訳) 吉岡書店など。

エリゴーン，ピエール Pierre Hérigone, 1580-1643.

フランスに生まれ，パリに死す。元バスクの人で，パリで教師をしていたこと以外ほとんど分かっていない。

業績としてはフランス語とラテン語で書いた6巻本の初等数学の概説書『数学教程』(*Cursus mathematicus*) があり，数学記号や論理記号を一通り考案したのだが，現在はどれも使われていない。しかし，記号表現を貫徹したことで種々の定理を簡潔に表現できることを示した功績は大きい。タルターリアとは独立に，組み合わせの数(2項係数)を正確に与えた。1642年の上記書の『補

足』では，フェルマーの最大最小値を求める方法の普及に貢献した。

当時重要な問題であった経度決定の方法について，懸賞に応募したJ.B.モラン(1583.2.23-1656.11.6)の月の運動から経度を決定する方法が実用的かどうかを判定する委員会に，エチエンヌ・パスカル(1588.5.2-1651.9.24)，ミドルジュ(1585-1647.7)らとともに参加し，モランとの論争に巻き込まれる。

オイラー，レオンハルト Leonhard Euler, 1707.4.15-1783.9.18.

スイス，バーゼルに生まれ，ロシア，サンクト・ペテルブルグに死す。ヨハン・ベルヌーイの弟子。ペテルブルグ(27-41)，ベルリン(41-66)，ペテルブルグ(66-83)のアカデミーに。66年に全盲となるも，死ぬまで活発な研究を続ける。朴訥な人柄で，子供は13人。赤ん坊を抱え，子供を足元で遊ばせながら数学をしたと言われている。また，お茶をすすりながら孫と話をしているとき，突然に死んだという。

数学史上最大の多作家。ケーニヒスベルクの橋を一筆書きする問題や多面体の面・辺・頂点の数の関係式(オイラー標数)で，グラフ理論とトポロジーの祖となる。フランスの物理学者アラゴー(1786.2.26-1853.10.2)は，オイラーを「解析学の化身」と称え,「人が息をするように，鷲が空を舞うように，オイラーは計算をした」と言っている。

オートレッド，ウィリアム William Oughtred, 1574.3.5-1660.6.30.

イギリス，バッキンガムシャー，イートンに生まれ，サレイ，アルバニーに死す。

イートン校からケンブリッジのキングズ・カレッジに(1592)，3年後フェローになり，3年後B.A.を，4年後(1600)M.A.を取得する。1603年以降監督教会の牧師となり，1610年以降アルバニーの教区牧師となる。当時イートンやケンブリッジでも数学を教えることが少なく，独学で勉強する。

計算尺の発明(1630,1632)で有名(現在の形の計算尺は1850年，フランスの陸軍士官アメデー・マンハイムの設計による)。現在の加減乗の記号，小数，比例の記号，不等号などの工夫，特に掛け算の × は現在でもそのまま用いられている。円周率ではなく円周そのものにだが，π を使用する。弟子に，ジョン・ウォリス，

クリストファー・レン，リチャード・デラメインなど。

カジョリ，フロリアン Florian Cajori, 1859.2.28-1930.8.14.

スイス，サン・エグナムに生まれ，アメリカ，カリフォーニア，バークレイに死す。

1875年にアメリカ合衆国に移民，チュレーン大学応用数学教授となる。各地の大学を経て，1918年バークレイの数学史教授になる。

主な著書に『数学史』(第2版，1919),『数学記号の歴史』(1928-29),『ウィリアム・オートレッド–17世紀の偉大な数学教師』(1916), 死後出版の『ニュートンのプリンキピア』(1934) がある。

ガリレイ，ガリレオ Galileo Galilei, 1564.2.18(15)-1642.1.8.

イタリア，ピサに生まれ，イタリア，アルチェトリ（フィレンツェの近く）に死す。

この名前は，聖書に出てくる「ガラリア人」の子孫であることを示すガリレオ家の長男という意味のものである。当時トスカナ地方では長男は家の名を洗礼名として重ねる習慣があった。

天文学・物理学・数学・哲学者。迫害を受け各地を転々とする。ピサ大学教授('89)，パドヴァ大学教授('92)，1609年以降フィレンツェでトスカナ大公の後援を受ける。2度の宗教裁判。1637年失明。

ピサの斜塔での物体の落下の実験など，望遠鏡での観測など実験による検証の意義を確立した。宗教裁判に屈服した時にもらした,「それでも地球は回っている」という呟きは余りにも有名だが，その小さな声を誰が聞いたのだろう？

クラヴィウス Chiristopher Clavius, 1538.3.25-1612.2.2.

ドイツ，バンベルグに生まれ，ローマに死す。ローマのイエズス会に入会(1555)。天文学・数学者。コレッジョ・ロマーノ(=ローマ学院) 数学教授。ヨーロッパ全体に大きな影響力を持っていた。小数点を最初に使う。

グレゴリウスXIII世の改暦に指導的役割。ユリウス暦の1582年10月4日の翌日をグレゴリオ暦の1582年10月15日と提案。ヨーロッパ各地で失われた11日を返せという暴動が起こり，普及するのに時間がかかった国もある(例えばイギリスは1752年)。

グレゴリー，ジェームズ James Gregory, 1638.11-1675.10.

スコットランド，アバディーンに生まれ，エディンバラに死す。

パドゥア大学に行き，収束無限級数を用いて円や双曲線の面積を求める。エディンバラの聖アンドリューズ大学教授(1668)。反射望遠鏡の発明(1663)。グレゴリーの級数。級数の「収束」という用語の使い始め。

クレロー Alexis Claude Clairaut, 1713.5.7-1765.5.17.

フランス，パリに生まれ，パリに死す。

数学者を父(ジャン・バチスト・クレロー)とする早熟の天才。10才でロピタルの微積分の本を読み，13才で4次の代数曲線に関する論文を科学アカデミーで読み上げ，特別に年齢制限を免除されて18才でパリ科学アカデミーの会員となる。ニュートンの自然哲学を支援するモーペルテュイのグループに属する。

1736,37年に，地球の子午線を測る科学アカデミーのラップランド遠征隊に参加する。1743年には流体静力学に基づいて，地球の形状(極の方が平らになった球)であることを示しており，その中でポテンシャル論を用いている。

シャトレ侯爵夫人のプリンキピアのフランス語訳の手助けをし，月の運動について数学的な解明をする(1752)。1759年のハレー彗星の接近のときには近日点を計算した。

三体問題を始め，数学の広い分野の業績がある。空間の解析幾何学の確立(1731)，クレローの微分方程式。多変数関数の全微分の概念を作り，微分方程式の一般解と特異解の考え方を導入，線形微分方程式の可積分条件を定め，任意の偶関数のフーリエ展開を与えた。オイラーに先駆したものも多い。¡BR¿ また，数学教育の改善運動の一環として書かれた，代数学(1746)や初等幾何学(1741)のすぐれた教科書は版を重ねた。

シュタンピオーエン Jan Jansz de Jonge Stampioen, 1610-1690.

オランダ，ロッテルダムに生まれ，ハーグに死す。

ロッテルダムで数学を教えていたが，1638年にハーグに移り，ウィリアム王子の家庭教師となる。2年後王子は父の王位を継承しオランダを議会制国家にする。ハーグにいる間印刷屋を開業し，自分の数学的著述を印刷する。

ヴァン・スホーテンのサインの表に自身の球面三角法を付加し

た。1633年デカルトを公開の試合で退け，さらに3次式の解について2度の試合をする。1644年，ホイヘンスとその弟の家庭教師となる。

シュティーフェル Michael Stifel(=Styfil,Stieffel), 1487-1567.4.19.

ドイツ，エスリンゲンに生まれ，ドイツ，イェーナに死す。イェーナ大学教授(1559)。アウグスティヌス派の司祭を罷め，ルターの宗教改革運動に参加。ヨーロッパで最初に負の数を使い始めた一人。ベキの分数指数，ゼロ指数，また「指数exponent」という用語の導入。『算術全書』(1544)で，分数の割り算を分数の掛け算の逆演算として定式化。イタリア式のp(プラス)，m(マイナス)の記号でなく，+, − の記号の普及に尽力。

『算術全書』(1544)で，分数の割り算を分数の掛け算の逆演算として定式化，また，2次方程式の多様な数値例を見掛け上1つの形式に統一する。パスカルの三角形もこの本に載っている。この時期ドイツで代数学の教科書が何冊か書かれるが，アピアヌスの教科書(Rechnung, 1527)にもパスカルの三角形は印刷されている。

スルジウス(=ルネ・フランソア・ド・スリューズ) Slusius = René Francois Walter de Sluze, 1622.7.2-1685.3.19.

リエージュ公国，ヴィゼー(現ベルギー領)に生まれ，リエージュ公国，リエージュに死す。

ルーヴァン大学(1638-1642)に学んだ後，ローマ大学サピエンツァ校で法律の学位を得る(1634)。ローマでは，数学，天文学，多数の言語などを学び，数学ではカヴァリエーリやトリチェリの影響を受ける。

1650年に聖職につき，リエージュに帰る。法律の知識のお陰で急速に出世し，1616年にはアメの僧院長になる。僧職のため数学者達と交流するのは文通に限られる。パスカル，ホイヘンス，ウォリス，リッチ(1619-1682)などと頻繁に文通する。

数学的には，デカルトやフェルマの方法を拡張し，代数曲線に接線を引く方法を発見したことが重要で，微積分学の先駆者の一人と考えられている。ローマ時代にサイクロイドを研究したことから始めて，平面曲線についての研究があり，パスカルがス

リューズの真珠曲線と呼んだ曲線族

$$y^m = kx^n(a-x)^b$$

は1657-58年の間にしたホイヘンスやパスカルとの文通の中で公表されている。ただ，$y = x^2(a-x)$ の形の曲線も真珠の形になると思い込んでいたのは，負の座標の概念が確立されていなかったためで，後にホイヘンスは極大・極小典や変曲点を見つけて正しく図を描いている。1674年にはロンドン王立協会会員になっている。

数学以外にも，天文学，物理学，自然哲学，歴史，神学などの本を書いているが，1659年の『方法について』(*Mesolabum*) という一般向けの本では方程式の根を幾何的に作図すること，中でも一般の4次方程式も円錐曲線と円との交点で作図できることを示している。

タルターリア，ニッコロ Nicolò Tartaglia = Nicolò Fontana,

1499(1500)-1557.12.15. ヴェニス共和国，ロンバルディア，ブレーシャに生まれ，ヴェニスに死す。

数学・機械学・軍事技術者。砲弾が45°のとき最も遠くまで飛ぶことを主張(後，ガリレイが証明した)。パスカルの三角形もその著書に載っている。エウクレイデスのイタリア語訳は『原論』の初めてのヨーロッパ語訳(1543)。アルキメデスのイタリア語訳も。業績は多彩。ルネサンス人の典型とも言える。

3次方程式の一般解を発見した人。ダル・フェロによる3次方程式の代数解の発見を伝え聞き，独力で3次方程式の一般解を発見した。ダル・フェロの弟子フィオルは師から伝えられた場合以外の3次方程式は解けなかった。I.1節の2次方程式の場合でもわかるように中間次の係数の符号が変わると，図形で解く場合の解答の質まで変わることがある。

フランス軍のブレーシャ略奪のとき剣で切られ口に傷を負い言語障害になる(12歳のとき)。どもりという意味のタルターリアが通称になった。本名はニッコロ・フォンタナ。また生涯，ロンバルディア訛りがとれなかったといい，カルダノらとの論争の際には不利になったようだ。

ディドロ Denis Didrot, 1713.10.5-1784.7.31.

フランス，シャンパーニュ州，ラングルに生まれ，パリに死す。職人の子として生まれ。神学(イエズス会)で身を立てようとしてパリに行くも，科学思想に触れ，哲学・物理学・数学を学び，啓蒙思想家となる。ダランベールとともに百科全書を創始する。

デカルト，ルネ René Descartes, 1596.3.31-1650.2.11.

フランス，トゥレーヌ州，ラ・エー(現在ではデカルトと呼ばれている)に生まれ，スウェーデン，ストックホルムに死す。哲学・数学・物理学者。ブルターニュ公国の首都レンヌの議会の顧問であったジョアシャン・デカルトの3男として生まれる。若いときから体が弱く，朝は11時までベッドに居る習慣があったが，スウェーデン女王の命令で朝の5時から寒い宮廷に出仕し，風邪をひき，こじらせて死ぬ。デカルト的二元論は強い影響力を持ち，後のライプニッツの単子論と対立。ヨーロッパ思想界を二分。オランダに長く住んだため，デカルト主義者のオランダ人が多い。

8才のときから8年間，アンジューのイエズス会の王立学院で，古典，論理学，アリストテレスを学んだが分かったことは自分がいかに何も知らないかであり，ただクラヴィウスの書で学んだ数学だけには納得していたという。この学院の寄宿生活の中で11時までベッドにいることを許されていたのが習慣になったらしい。

ポアチエ大学で法律の学位を得てのち(1616)，ヨーロッパを遍歴し，いくつかの軍にも属し，オランダではI.ベークマンと出会い，本格的に数学と力学を学ぶ。1623年一旦パリに戻りメルセンヌとの交流が始まる。イタリアから帰って(1625)からも落ち着き先を探していたが，1628年からはオランダに定住し，ホイヘンス，ミドルジュ，メルセンヌ，ファン・スホーテンらと交流。1649年，スウェーデン女王の招きに応じてストックホルムに行く。死を招くほどの生活環境の変化を受け入れた理由はよく分からない。公然と表明していないがガリレオの見解と同じであることが知られて，プロテスタントの神学者からの迫害があり，それを避けるためとも言われる。死後16年を経て，フランス政府の要請により，遺骨はパリに運ばれサン・ジュヌヴィエーヴ教会(現

在はパンテオン)に埋葬された。[1]

ニュートン，アイザック Isaac Newton, 1642.12.25-1727.3.20(ユリウス暦).

イギリス，リンカーンシャー，ウールスソープに生まれ，ロンドンに死す。ガリレイの死んだ年に生まれる。生まれる前に父が死に，母は再婚し，祖母に育てられる。グランサムのグラマースクールでの評価は「怠け者で，注意力散漫」というものだった。義父が死に農夫にしようと呼び戻したアイザックに才能を見つけた叔父が，その母校のケンブリッジ・トリニティカレッジに入学させる(1661.6)。2年まではアリストテレス哲学に拘束されたが，3年次からは自由ができ，デカルト，ガッセンディ，ボイル，ヴィエート，ウォリスを読み，ついにバローに出会うことによって才能が開花する。1665年の夏ペストで大学が閉鎖，2年弱故郷で研究にいそしむ(驚異の年)。

ケンブリッジ大学2代目ルーカス教授(1669-1701)，国会議員(1689-1705)，造幣局監督官(1696)長官(1699)， 王立協会会員(1672) 会長(1703-死)。数学以外にも『光学』(1704)，反射望遠鏡(1668)。「巨人たちの肩に乗っているだけ」という謙虚さとライプニッツとの論争で見せる傲慢さと！　人というものは…

ハイラー Ernst Hairer, 1949-. オーストリア，チロル，Naudersに生まれる。インスブルック大学に学び，G. ワナーのもとで学位(1972)。現在，スイス，ジュネーブ大学教授。

ビリー，ジャック・ド Jacques de Billy, 1602.3.18-1679.1.14.

フランス，コンピエーニュに生まれ，ディジョンに死す。

イエズス会に入り，イエズス会学院で神学を学ぶ。生涯，フランス各地のイエズス会学院で数学と神学を教える。ディジョンでの弟子にオザナムがいる。フェルマーと文通し整数論を研究，彼の名を持つ結果もある。天文表も出版する。

---

[1] 日本語では白水社の『デカルト著作集』，中央公論社の『デカルト』(世界の名著22)があり，科学論文を含め，ほとんどの著述が翻訳されている。また『方法序説』『精神指導の規則』『哲学の原理』など種々の文庫本が出版されていて，簡単に手に入る。

ヒルベルト David Hilbert, 1862.1.23-1943.2.14.

プロシャ、ケーニヒスベルク(現在ロシア領、カリーニングラード)に生まれ、ドイツ、ゲッティンゲンに死す。ケーニヒスベルク大学教授('90)、ゲッティンゲン大学教授('95)。A. フルヴィッツ、H. ミンコフスキーと親交。1900年パリの国際数学者会議での23の問題は、20世紀も終わりに近づいて、ほとんど解決され、更なる発展を遂げている。ちょうど1世紀ほどで解けてしまうというのは程がよい。彼が解くことを選ばなかったフェルマー予想も解けてしまい、数学者以外に説明できる問題が少なくなった。また、基底定理は当時の不変式論の大家ゴルドンに「これは数学ではない。神学だ。」と言わせている。現代数学への一つの里程標である[2]。

ベルヌーイ，ヤコブI Jakob Bernoulli I, 1654.12.27-1705.8.16.

スイス，バーゼルに生まれ，バーゼルに死す。父の意志に反して神学から数学に。フランス，オランダ，イギリスを歴訪，ボイルやフックに会う。バーゼル大学教授(1687)。パリ，ベルリン学士院会員。微積分以外では，確率論の大数の法則。ベルヌーイ分布，ベルヌーイの微分方程式，ベルヌーイ数。

ポントリャーギン Lev Semyonovich Pontryagin, 1908.9.3-1988.5.3.

モスクワに生まれる。14才で失明するも母の助けを借りて勉学を続ける。モスクワ大学を卒業(1929)，1935年モスクワ大学教授。1931年以降ソ連科学アカデミーの研究所にも所属。

学生のとき，師のP.S. アレキサンドルフの双対定理の一般化の証明(1932)，位相群論の研究。位相幾何学，特にホモトピー論で活躍。ポントリャーギン類・指標・空間など。
彼の仕事を読んでいたとき，彼の数学の特異な感性を、「目明きに見えない障壁の向こう側が，彼には見えるようだ」と友達と話し合ったことを思い出す。

[2] 日本語に訳されているものも多く、S. コーン-フォッセンと共著『直観幾何学』(芹沢正三訳)みすず書房、『数学の問題－ヒルベルトの問題』(一松信訳・解説)現代数学の系譜4共立出版、『幾何学の基礎』(寺阪英孝＋大西正男訳・解説)現代数学の系譜7共立出版(1970)、P. ベルナイスと共著『数学の基礎』(吉田夏彦＋渕野昌訳)シュプリンガーフェアラーク東京、アッケルマンと共著『記号論理学の基礎』(伊藤誠訳)大阪教育図書(1954)、R. クーラントと共著『数理物理学の方法　全4巻』(齋藤利弥監訳、丸山滋弥訳)東京図書(1959-62)などがある。

A.A. アンドローノフと，振動論や制御理論に関る常微分方程式の研究をする。最適制御過程の理論を確立。あるとき，ヨーロッパの学会に出てきて，ミサイルが目標に到達できるかどうかというテーマの講演をしたことがある。そのとき聴衆だった A. グロタンディエクが，彼の軍事協力の姿勢を強く非難したが,「ああ，でも役には立たんのですよ」と答えて，論争にならなかったというエピソードがある[3]。

メンゴーリ，ピエトロ Pietro Mengoli, 1626-1686.

イタリア，ボローニャに生まれ，ボローニャに死す。

ボローニャ大学でカヴァリエーリに数学を学び，1650年には哲学の学位を，1653年には法律の学位を得る。カヴァリエーリの死後，ボローニャ大学教授，算術 (1648-1649)，力学 (1649-1668)，数学 (1668-1686) の教授。更に，1660年以降，ボローニャの教区司祭。調和級数が収束せず，符号を交互に変えれば log 2 に収束し，三角数の逆数の和が収束することなどを示すが，これらはそれぞれ後の人の業績として知られている。また，無限級数に関する本 (1650)，無限に関する本 (1659)，$\pi/2$ の無限積展開を含む円についての本 (1672) を出版。また，天文学，大気の屈折，音楽理論 (1670) についても本を出版。

ユークリッド＝エウクレイデス、アレキサンドリアの

Eucleides = Euclid of Alexandria = $EYK\Lambda EI\Delta OY$

紀元前 330?-275?(365?-300?). エジプト、アレキサンドリアの生まれ。

プラトンのアカデミアに学ぶ。幾何学以外にも著作は多い。アレキサンドリアでプトレマイオスI世に「幾何学に王道はない」と言った言葉は数学者にとっては誇りであるが。

ラ・イール，フィリップ・ド Philippe de La Hire, 1640.3.18-1718.4.21.

フランス，パリに生まれ，パリに死す。

画家としての教育を受け，ローマでの修行で，画業と遠近画法の為に幾何学を学ぶ。王立科学アカデミー会員 (1678)，コレージュ・ロワイヤル数学教授 (1683)，更に建築学教授 (1687)。立体解析幾

[3] 日本語訳には『連続群論』(岩波書店),『常微分方程式』(共立出版) のほか，中等教育用の教科書のシリーズ (森北出版) もある。

何学，総合幾何学の先駆者。円錐曲線についての研究(1673,1679)ではデカルトの手法が用いられる。体系的に座標の方法を用い，「座標原点」の用語は現在も使われている。広く受け入れられた『円錐曲線論』(Sectiones conicae, 1685)では，G.デザルグの射影幾何の方法が用いられている。デザルグの『草稿』は彼の筆写したものが1847年にパリの図書館で発見されるまで失われていた。またカージオイドの長さを計算する(1708)。

天文学，物理学，測地学にも重要な寄与。パリ天文台に最初の経緯儀を設置。太陽，月，惑星の運動の表を作り，フランスの地図，特に海岸線の確定に尽力。彼の世界地図は北極ではなく，北極と地球の中心との中点を中心として射影したものである。
また，魔法陣についての著作もある。

ライプニッツ Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646.7.1-1716.11.14.

ドイツ，ライプツィヒに生まれ，ハノーバーに死す。哲学・数学・法学・経済学者・政治家・外交官。父はライプツィヒ大学道徳哲学教授。早熟の天才。ライプツィヒ大学で法律を学ぶも若すぎると学位を拒まれ(1666)，ニュルンベルグのアルトドルフ大学で法律の学位を得る(1667)。教授になるよう望まれるが辞退し，ヨーロッパを遍歴，マインツ選帝侯の外交官となる(1666)。ルイXIV世に会見のためパリを訪問するが会えないまま3年を過ごす。その際ホイヘンスに数学と物理学を学ぶ。マインツ選帝侯の死後(1673)，ロンドンに滞在し，ニュートンとバローの研究に接する。1676年以降ハノーバーのブラウンシュヴァイク家の図書館長。1700年ベルリン選帝侯の招きで，ベルリンを訪れた際，ベルリン科学アカデミーを創設し，初代総裁となる。

微積分学の発見。数学記号の整備。「モナド論」「普遍言語」。

ランスベルギウス Lansbergius=Philip van Lansberge, 1561.8.25-1632.12.8. ベルギー，ゲントに生まれ，オランダ，ミドルブルグに死す。

プロテスタントの牧師。天文学・数学者。πを28桁計算(1616)。コペルニクスを支持したが，ケプラーの楕円理論は拒絶する。

リコード Robert Recorde(=Ricorde), 1510-1558.

ウェールズ，テンビィに生まれ，イギリス，ロンドンに死す。

数学のイギリス学派を確立し，イギリスに代数を最初に導入した人といってよく，ドイツでシュティーフェルが行った役割をイギリスで果たした人と言うことができる。『才知の砥石』(1557)に初出の等号「=」を発明したことは不朽である。

オックスフォードとケンブリッジで数学を学びかつ教え，1545年にケンブリッジで医学の学位を得，エドワードVI世とメアリ女王の侍医となる。1551年以来アイルランドの鉱山と通貨の監督官を勤める。サウスウォークのキングズベンチ牢で獄死した理由は，そこでの不正なのか，宗教的理由なのか，女王の死の直前でもあることから政治的理由なのか明らかではない。

多くのテキストを書いたが,『諸術の基礎』(1540)は算術と商業への応用を扱っており，アラビア数字と筆算，算盤での計算などを紹介したもので24版以上を重ねている。後のガリレイのように，平易な言葉での対話形式のものが多く，イギリスでは大変普及したが，大陸での影響力は大きくなれなかったのかも知れない。

『知識の城』はコペルニクスの体系を認めている天文学書であり，『知識への小道』(1551)はユークリッドの『原論』の抄訳である。

等号を公表した『才知の砥石』の砥石のラテン語がcosであって，未知量cossとの地口のしゃれである。この本から引用する。

> わたし自身がすでに用いているように，実際の計算では一組の平行線，つまり同じ長さの2本の線 == を使うことを提案する。2つのものが等しいことを表わすのにこれ以上の表現方法はないからである。

しかし，等号「=」はすぐには普及せず，後にトーマス・ハリオットが不等号を発明したときにこの等号を再評価したことから認知されるようになっていく。

リッチ，ミケランジェロ Michelangelo Ricci, 1619.1.30-1682.5.12.

イタリア，ローマに生まれ，ローマに死す。

トリチェリの親友で，共にベネデット・カステルリ(Benedetto Castelli, 1578-1643.4.19)の弟子。ローマで神学と法律を学ぶ。この時期，ド・スリューズとも友人となり，この3者は数学を学ぶ上で影響を及ぼしあった。

1650年以降教会から給付を受け，1681年教皇イノセント11世

により枢機卿に任ぜられる。

『幾何の演習書』,『最大値と最小値』(1666) が主な業績。後者はニコラウス・メルカトールの『対数術』(1668.9) の付録として再録され，19ページのその付録のお陰で有名になる。そこでは，$x^m(a-x)^n$の極大値と $y^m = kx^n$ への接線を与えている。方法は，帰納法の初期の例となっている。螺線 (1644)，一般サイクロイド (1674) を研究したり，接線を求めることと面積を求めることが逆演算であることを述べる (1668)。

彼の名声は出版物よりも，クラヴィウス，ヴィヴィアーニ，ド・スリューズなど多くの数学者との文通によるものである。

ルドルフ，クリストッフ Christoff Rudolff, 1500頃-1545.

シレジア，ヤウエル (現在ポーランド領ヤボール) に生まれ，オーストリア，ウィーンに死す。

ウィーン大学で代数学を学び (1517-1521)，ウィーンで数学の個人教授として生活。1525年ストラスブールで出版した (ドイツ初の) 代数学の教科書 Coss が重要で，算術，等比級数，代数計算，無理量，さらに1次および2次方程式に及んでいる。1530年にはこの本のための問題集も出版されている。現代の数学記号の原型がここにある。Coss とは未知量のことで，長い間，代数学は未知量の技法 (Cossic Art) と呼ばれていた。また，平方根に対して $\sqrt{\ }$ を用いたのも，$x^0 = 1$ とするアイデアも彼のものである。

1552年から1615年まで，M. シュティーフェルの再版による教科書の出版が続けられ，大きな影響を及ぼしている。中でも，L. オイラーがこの本で数学を学んだことが伝えられている。

ワナー Gerhard Wanner, 1942-. インスブルック大学に学ぶ。グレブナーとロクスの弟子。現在，スイス，ジュネーブ大学教授。

参考文献

[1] Florian Cajori: A History of Mathematical Notations, Dover (1993). Originally published by Open Court Publ., La Salle, Illinois, in 1928 and 1929.

[2] ロビン・ダンバー『科学がきらわれる理由』(松浦俊輔訳) 青土社 (1997), The Trouble with Science, by Robin Dunbar(1995).

[3] ガリレオ・ガリレイ『天文対話 上下 (=二大世界体系についての対話)』(青木靖三訳) 岩波文庫, Galileo Galilei(1632)

[4] 蟹江幸博 『数について (美杉セミナー'91)』'92 年度数学研究会誌 36 号, 三重県高等数学教育研究会 (1992),3-41.

[5] 蟹江幸博 『TOSM ポスト』'93 年度数学研究会誌 37 号, 三重県高等数学教育研究会 (1993),2-44.

[6] 蟹江幸博 『数学を語るのか, 数学で語るのか―行列から見た複素数 (美杉セミナー'93)』'94 年度数学研究会誌 38 号, 三重県高等数学教育研究会 (1994),2-39.

[7] 蟹江幸博 『数学的知識の欠如に関する自己認識の調査』三重大学教育学部紀要, 第 45 巻, 教育科学 (1993),1-13.

[8] 蟹江幸博, 黒木哲徳, 中馬悟朗 『数学教育における教師の授業観と意識に関する調査研究』岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学), 第 18-2 巻 (1993),75-97.

[9] 蟹江幸博 『算数綴り方教室の試み』三重大学教育学部紀要, 第 46 巻, 教育科学 (1994),41-49.

[10] 蟹江幸博 『三角定規の組み合わせ図形の考察』三重大学教育学部紀要, 第 46 巻, 教育科学 (1994),41-49.

[11] 蟹江幸博, 黒木哲徳, 中馬悟朗 『小学校教師の数学的常識 (仮題)』(未完)

[12] 蟹江幸博 『数学の危機なのか, 数学教育の危機なのか (美杉セミナー'94)』'95 年度数学研究会誌 39 号, 三重県高等数学教育研究会 (1995),10-61.

[13] 蟹江幸博 『美杉セミナーについて – 特に'94 と'95 のまとめ – 』「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」(94 年度, 95 年度) のまとめ, 三重県高等学校数学教育研究会 (1996),8-33.

[14] 蟹江幸博『複素数を巡って(美杉セミナー'95)』'96年度数学研究会誌40号，三重県高等数学教育研究会(1996),2-55.

[15] 蟹江幸博，黒木哲徳，中馬悟朗『数学的概念に対する教師と学生の自己認識について』日本教育工学会・第12回全国大会，金沢大学，1996/Nov.3-4, p.165-166.

[16] 蟹江幸博，黒木哲徳，中馬悟朗『数学的基礎概念の自己認識に関する調査研究』岐阜大学教育学部研究報告(自然科学),1997.

[17] 蟹江幸博，丸林哲也『教師における数学的基礎概念の自己認識の在り方について–三重県の場合–』三重大学教育実践センター紀要17(1997,Mar.).

[18] 蟹江幸博『ニュートン以前 –美杉セミナー'96– 』第6回('96年度)「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」三重県高等学校数学教育研究会(1997),16-49.

[19] 蟹江幸博『初等・中等教育に数学を取り戻す』'97年度数学研究会誌41号，三重県高等数学教育研究会(1997),2-37.

[20] 蟹江幸博，黒木哲徳『大学教育を見通した高校数学教育の問題点 – 数学離れと高校数学カリキュラム–』三重大学教育実践センター紀要18(1998,Mar.),1-11.

[21] 蟹江幸博『有理数と無理数のはざま，連分数について—美杉セミナー'97— 』第7回('97年度)「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」三重県高等学校数学教育研究会(1998).

[22] E.ハイラー，G.ワナー『解析教程　上下』(蟹江幸博訳)シュプリンガー・フェアラーク東京(1997年)，Analysis by Its History, Springer Verlag(1996), by E.Hairer & G.Wanner.

[23] 司馬遼太郎『十六の話』中央公論社(1993年10月).

[24] スティーブン・ワインバーグ『電子と原子核の発見』(本間三郎訳)日経サイエンス社(1986年)，The Discovery of Subatomic Particles(1983), by Steven Weinberg.