TOSMポスト

蟹江　幸博
三重大学教育

1　TOSMグループの結成とTOSMポスト開設

１９９２年１２月の初めに、色々の経緯はあったが、三重大学の蟹江と岐阜大学の中馬が福井大学の黒木研究室に集まって、数学者として算数・数学教育に対して何が出来るか、という問題を考えていくことに合意し、更には考え付いた方法のうち実行可能なものは一つ一つ実行していくことにした。

蟹江が三重県の教研集会（１９９２年１１月）に助言者として参加した際、多分小学校の先生だと思うのだが、立ち話である問題を尋ねられた。慌ただしい中だったので余りちゃんとした返事が出来なかったことが心残りでもあったし、子供達との勉強の中で数学的な問題で悩み、それに答えられる人が周りにいなかったり忙しかったりして自分で考える時間の取れない現場の教師が可成の数いるのではないかと思った。教育の荒廃が叫ばれるなか、教科の内容についても良心的に振る舞おうとする現場の人びとに接してうれしい気持ちがして、我々が出来ることでお手伝い出来ることはないだろうかと、その時ふと思ったのである。

前記の３人はグループとして互いに不得手なところを補いながら活動していくことにし、取り敢えずグループの名前をTOSMとした。語呂もあったが、Teaching of School Mathematicsの頭文字を取ったものである。

TOSMグループ最初の事業として、上のような埋もれた現場の欲求に応えることから始めることにした。それが、以下に見るTOSMポストの開設の文書である。

この文書は、日本数学教育学会の会誌のニュースや日本教育情報学会のNewsletterにも載せてもらい、また各県内（三重・福井・岐阜）ではチラシの形で知人や卒業生などを通じてとしてクチコミ式に拡げていくことにしたものである。

****

TOSMポスト開設－算数・数学教育に関する相談－のお知らせ

下記三大学教育学部数学教室にTOSMポストを平成5年1月－3月末日まで開設することになりました。TOSMとはTeaching of School Mathematicsの略です。教員養成のための学部におります関係上、算数・数学教育に携わっている方々の数学上の悩みの相談の場が欲しいという要望を耳にすることが多く、多少なりともそれに応えようということで数学者の有志三人でこの様な企画を始めてみることにしました。常時相談室を開設できると良いのですが、まだ有志の数も少ないので実行可能な方法が限られますが、出来ることから始めることになりました。途中で止めることなく継続していきたいと思っています。電話相談的なものではありませんので、短期間に全ての解答がなされるというような過大な期待はしないで頂きたいと思います。

相談方法は、住所氏名を記入した返信用の葉書を同封した封書に限らせて頂きます（これを必須の用件とします。書き忘れた場合には返信用葉書を送り返さないことがありますのでご注意下さい)。下記のどのポストに送っていただいても結構ですが、電話でのお問い合わせには応じかねます。

さて、相談に対する返答の方法ですが、内容によっては即答できることもあり、かなりの期間考えなくてはならないことも、考えても分からないこともあるかも知れません。一言で返答できる場合も、何ページもの論文的な形でないと返答できない場合もあるかと思われます。寄せられる相談内容がどのようなものになるか分かりませんので、具体的にはポストを閉めてから三人で相談して返答の方法を考えさせて頂きたいと思います。その方法についての返答は遅くとも夏頃までに返信用葉書にてお知らせするということにしたいと思います。

とりあえず第一回を開設しましたが、今後二回、三回とポストの開設も行っていく予定です。

また、返答の方法について一応の企画もあります。当面三人の所属する県で年に1回程度ＴＯＳＭ相談室を現地で開設し三人が直接相談に応じることも考えています。その他、パネルディスカッションや模擬授業のようなことも可能かと考えています。

また、論文的なスタイルでしか答えようのない問題については、何らかの公的刊行物に発表することで替えさせて頂きたいと思います。

いずれにしましても、どの様な相談にどの様な方法で答えたかという点に

ついてのデータベースを作る予定でいますし、それをどの様にお知らせするかは今の所、不定期に開く予定の相談室の折りにでも配布することを考えています。

私達は、現在並びに将来の数学教育に関して深い関心を持っており、何等かの形で現場の皆様のお役に立てればと考えています。

現在のＴＯＳＭポスト

蟹江幸博　三重大学教育学部数学教室　ＴＯＳＭ三重ポスト（事務局）
〒５１４　津市上浜町１５１５
黒木哲徳　福井大学教育学部数学教室　ＴＯＳＭ福井ポスト
〒９１０　福井市文京３－９－１
中馬悟朗　岐阜大学教育学部数学教室　ＴＯＳＭ岐阜ポスト
〒５０１－１１　岐阜市柳戸１－１

相談内容	：	算数・数学教育に関わる数学上の問題
ポスト期間	：	平成５年１月～３月末日
相談方法	：	封書 (住所氏名を記入した返信用葉書同封のこと)

****

ポストを開設することを議論をしていたときには、余り沢山の投書や数学上でない投書が殺到したらどう対処したら良いか分からないという不安の方が強かったが、実際に開設してみるとマスコミなどの宣伝をしなかった所為もあるのだろうが、予期していた事態に至っていない。開設の動機になった問題を除けば、三重大学の数学教育の大学院生からの質問と、蟹江の一般数学の講義を聴講している三重県内のある塾の講師からの質問の二つだけであった。公的に公表した二つの雑誌も、日本教育情報学会の Newsletter は２月の中頃、日本数学教育学会の会誌のニュースは３月中頃にしか読者の手元に届かなかったのは、それぞれの雑誌に掲載を依頼したのが１２月の末であったためのことである。各々の雑誌の担当者の御好意によってもこれ以上早くすることは事実上不可能だったのである。その時点でポスト開設の時期を変更しても良かったのであるが、既に少ないとはいえ色々なルートでポスト開設の文書が流布していることから、変更すれば朝令暮改のそしりを免れず、却ってポストに対する信用をなくすようなことになってはいけないという判断で

変更をしなかったのである。

ポストを一旦閉めてからそれに対する対策を考えていくことがグループの方針だった。ポストを開設するときからポストに投函された質問にどのような形で応えていくべきかが課題とされており、適当な雑誌に TOSM のコーナーでも作ってもらうとか、また夏の学校のような形式で各県の現場に近いところでグループのメンバーが直接お答えするということも考えていた。

今回ポストへの投函がこのような結果になった理由は幾つかあるだろう。しかし、ポストに対する需要がないのだとは我々は考えてはいない。ポストへの需要のあるところまでポスト開設の文書が届かなかったこともあるだろうし、届いても期間が短くて問題を整理して投函する余裕がなかったこともあるだろう。また、我々TOSM グループの真意が伝わらなかったとか、投函した後の結果が期待できないと思われた所為ではないだろうか。

前半の問題については、第二回のポスト開設を考えている。雑誌掲載時期を考え、第二回のポスト開設は１９９３年７月～９月にすることにした。一回目の開設文書を掲載してくれた雑誌には、二回目のポスト開設の公示の文書を掲載するようお願いする予定である。しかし、ポストへの需要はそのような雑誌を読む機会もない現場にこそあるのではないかとも考えている。そのようなところへ浸透する良い方法があれば、TOSM の近くのメンバーにでもお知らせいただきたいものと思っている。ポストに投函されてもよい。

後半の問題については今後の我々の活動によって信用を獲得していくことしかないと考えている。そこで、元々この夏に開催するつもりだったポストの返答のための夏の学校を、TOSM グループの活動の原点を見つめるものにしようということになった。

詳細はこれから決めるべき所も多いが、大体の所をお知らせしておこう。組織的なことと財政的なことから今年は1回だけにせざるをえないと思う。場所は福井市のある公共のホールで、8月8日の日曜日にしようと思っている。名前はTOSM シンポジウムと呼ぶことにした。適当な副題も考えるつもりである。

テーマは数学と算数・数学教育との接点についてとし、グループのメンバー一人の講演の後、各県から一人ずつ現場の教師の方三人（小中高それぞれ一人で）とグループの三人との6名くらいをパネラーとして、会場からの質問を受けながらフリー・トーキングをしたらどうかと思っている。

ポストへの質問への解答の機会という元々の動機から、希望があれば会場で直接質問（算数・数学教育上の数学的な質問）を出してもらってもその場

で答えられるものは答え、答えられないものは後の機会に回すことにするというような時間を取ってもよい。我々が立ち往生するようなことも起こるかも知れないが、そのことを通じて却って、算数・数学の勉強が知識をため込むことではないことが伝えられれば、我々は恥を掻いてもよいのではないかと考えている。

第二回目のポスト開設の公示のための文章の案を以下に示してこの節を終えたい。

****

第二回 TOSM ポスト開設のお知らせ

平成5年1月ー3月末日までのTOSMポスト開設に続いて、平成5年7月1日～9月30日の期間下記三大学教育学部数学教室に第2回のTOSMポストを開設いたします。

TOSMとはTeaching of School Mathematicsの略で、下記三大学教育学部数学教室に所属する3人の数学者が算数・数学教育にかかわって数学者がなすべきことまた出来ることは何かを考え実行しようとするグループの名前です。長い間教員養成のための学部におります関係上、算数・数学教育に携わっている方々の数学上の悩みの相談の場が欲しいという要望を耳にすることが多く、多少なりともそれに応えようということで、そのような質問を受ける場所としてのポストを開いてみることにしました。

第一回は開設の公示が遅くなり、開設期間の設定が適切でなかったことも原因となってか、ポストの存在自体も浸透していなかったで、投函された質問は余り多くありませんでした。この夏開く予定のTOSMシンポジウムに於いて、第一回分のポストの質問と返事を印刷したものを配布します。この第二回のポストについても少なくとも質問のリストは配布したいと思っています。

さてポストへの相談方法ですが、当面住所氏名を記入した返信用の葉書を同封した封書に限らせて頂きます（これを必須の用件とします。書き忘れた場合には返信用葉書を送り返さないことがありますのでご注意下さい)。下記のどのポストに送っていただいても結構ですが、電話でのお問い合わせには応じかねます。

さて、相談に対する返答の方法ですが、どのような形が適当かは決めておりません。勿論質問を寄せられた方には個別にお返事できるとよいのですが、

多くの方から同じ質問を寄せられるような場合には、何かしら公共の場に発表しておくことの方が望ましいと考えています。従いまして、返信用の葉書にて、質問に対する答えを掲載した雑誌や書物（TOSM グループが責任のもてるもので）の名前、巻号、ページ数などをお知らせすることになろうかと考えております。

いずれにしましても、質問のリストとそれに対する解答のリストに関するデータベースを作る予定でいますし、そのデータベースを印刷したものをTOSM シンポジウムの折りに配布することを考えています。

なお、TOSM シンポジウムはいまのところ8月8日（日）に福井市で開く予定で準備を進めています。その内容としては、数学と算数・数学教育との接点についてのグループの考え方を説明する講演と、それに関するフリー・ディスカッションを考えています。パネラーとしてはグループの3人以外に、三重・福井・岐阜の三県の小中高の先生三人の計6人ほどを予定し、現在人選中です。シンポジウムに関する御提案もポストで受け付けます。

私達の動機は、現在並びに将来の算数・数学教育に関する関心であり、我々の教室の卒業生やその延長としての現場の教師の皆様のお役に立ちたいということであります。算数・数学に対する社会の態度が変化してきていますが、学問としての性格やまた社会や自然への人間のアプローチの基本的技法としての性格は、時代とともに大きく変わるものではないと考えます。算数・数学を正当に評価し、その楽しみや喜びを伝えていくことが、社会の健全な発展に不可欠であることを信じて、TOSM グループは結成されました。

TOSM グループは“算数・数学をすることは楽しい”と子供達に伝えるためのお手伝いをさせていただきたいと考えています。

奮って質問をお寄せください。

現在のＴＯＳＭポスト

蟹江幸博　三重大学教育学部数学教室　ＴＯＳＭ三重ポスト（事務局）
〒５１４　津市上浜町１５１５
黒木哲徳　福井大学教育学部数学教室　ＴＯＳＭ福井ポスト
〒９１０　福井市文京３－９－１
中馬悟朗　岐阜大学教育学部数学教室　ＴＯＳＭ岐阜ポスト
〒５０１－１１　岐阜市柳戸１－１

相談内容　：	算数・数学教育に関わる数学上の問題
ポスト期間：	平成5年7月1日〜9月30日
相談方法　：	封書(住所氏名を記入した返信用葉書同封のこと)

****

なお、ポスト開設のチラシやこの文章を読んでの感想やTOSMポスト及びTOSMグループの活動に対する意見があれば、TOSMポストに投函されたり直接TOSMメンバーに告知されたい。また、直接間接、有形無形にTOSMグループに協力してもよいという方を募っている。ただ、メンバーが少なく時間が取れなかったり、メンバー相互が離れてもいるので相談に手間取ったりして、反応に時間がかかることがあることはあらかじめ了承しておいて欲しい。

2 質問集

質問の解説は別稿で行うことにする。

1. 長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？

[質問について]　TOSM ポスト開設のきっかけとなった質問である。直接蟹江が質問を受けた。質問者の名前は不祥、三重県の小学校の先生らしい。児童とこの問題を考えたが４０まで数えてこれですべてか分からないということであった。立ち話のその場では、場合を数え尽くすためのツリーが完全であるかに注意し、また得られた場合のすべてが異なるものであるかをきちんと見ればよいというような当たり前のことしか言えなかったが後で気になって仕方がない。質問された人の名前も判らない。その罪滅ぼしに、というのも TOSM ポスト開設の理由の一つである。

[解答]　展開図を平面図と見たとき、合同なものは同じだと考えるのか、裏返しは許さないで回転で重なるものだけ同じだと考えるのかという問題がある。これは展開図として折り目の山折りと谷折りを区別するかどうかという問題であって、どちらでなければならないという訳ではない。答えは次の通り。

裏返しを許さなければ 96 通りで、許せば 54 通りである。ちなみに辺の長さの一組が一致するときは正四角柱の形になるが、52 通りと 29 通りで、立方体の場合は、20 通りと、11 通りである。

2. 円周上に n 点を取り、互いに線分で結ぶとき円内に最大いくつの領域が出来るか？

[質問について]　[記念すべき最初のポスト投書である。残念ながら現場からの投書でなく、修士論文の構成上分かれば嬉しいという三重大学のある大学院生の投書である。]

[解答]　この数を$\gamma(n)$ と表わす。実際に図を描いてみると、$\gamma(1)=1, \gamma(2)=2, \gamma(3)=4, \gamma(4)=8, \gamma(5)=16, \gamma(6)=31$ などとなり、最初のうちの$\gamma(n)=2^{n-1}$という予想は $n=6$ に至って初めてずれてくる。

一般的に求めることが難しいようだが、実は$\gamma(n)$ を具体的に求めることが出来る。

$$\gamma(n)=1+\frac{n(n-1)}{24}\{(n-2)(n-3)+12\}$$

証明は帰納法でやる。$\gamma(n)=\gamma(n-1)+a_n$であるような a_nが求まればよいが、これが

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\{(i-1)(n-i)+1\}=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n}{6}(n^2-3n+8)$$

と求まるのである。

3. 正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが 360°を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正 7 角形や正 9 角形などを分度器とコンパスで描くことが出来るか？

[質問について]　初めて封書で届いたポストへの投書である。何とか答えてあげたいが、このままでは質問が適切でないとしか言いようがない。

適切でないという理由を説明しよう。まず分度器とコンパスだけでは多角形は描けない。定規が必要である。（勿論、鉛筆なりペンなりという道具も必要であるが、描くということからこれは当然のことだから考えなくても良いだろう。）

これは質問を茶化しているのではない。定規を使うのは当たり前すぎて、敢えて質問に入れなかっただけであろう。しかし定規を使うと言っても、その長さの目盛りは使うつもりはないと思う。目盛りを使うとは、個々の線分の長さを測りながら作業することであるが、1 辺の長さが幾つかということは重要ではない。問題となる図形が一つ描ければ、それを相似拡大して任意の長さを辺を持つ正多角形が作れることになるから。

ところで分度器を使うということはその目盛りを使うことであり、それが許されるならどんな正多角形も描けることになる。適当な半径の円を描く。この円周をまっすぐに伸ばして線分にし、それを n 等分する（これはコンパスと定規だけで出来る)。これをまた円周になるように戻すのである。

ここで円周を円に巻き付けたり、伸ばしたりしているのだが、その操作は許されないと考える人もいるかも知れない。しかし分度器を使うことを認めるなら、この操作も認めていることになるのである。分度器を作成する際、その目盛りを入れる作業にはどうしても、どこか本質的なところでこの操作を行っているのである。

また逆に、そういうことが出来ないのでは円周の長さをどのようなものだと考えればよいのかという反論もありそうである。初等教育の範囲内では、許す許さぬという問題にはなりにくいだろう。

従ってこの問題をそのまま素直に受け取るのなら、“どんな n に対しても正 n 角形は作図できる”と言っても良いかも知れない。

しかし上の操作の問題は、円周率の無理数性や超越性の問題や、曲線の長さの定義の問題が関ってきて、初等教育の範囲内では議論しにくい問題でもある。

議論だけなら初等的にできるような類似の問題が古代ギリシャの昔から知られていて、様々な数学者が解決に努力している。若い頃のガウスが正１７角形の作図に成功したことを、少なからず誇りに思っていたということも数学史上のエピソードとして有名である。最終的な解決は、革命にか恋にか破れ、形の上では決闘で死んだフランスの天才児ガロアまで待たねばならない。

その問題は

“定規とコンパスだけで正 n 角形が作図できるか?”

である。元の問題には一応答えたので、これがポストに投函された問題だということにしてもらおう。

[解答]　ガロア理論を使った証明しか知らないので、初等的に解説することが出来るかどうか難しい。しかし、答えは分かっている。

“正 n 角形が定規とコンパスだけで作図できるための必要十分条件は、n が次の形をしていることである。

$$n = 2^N p_1 p_2 \cdots p_k \qquad (p_i = 2^{e_i} + 1 (N, e_i \in \mathbf{Z}_{>0}) \text{ は互いに異なる素数})$$

”

TOSM グループの事業として、初等教育の教員養成課程に対する（大学の）教科書を書く予定があるが、この問題はそこで議論することになっている。

4. 直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことが出来るか？

[質問について]　ポストを締めた後（４月１８日)、皇学館大学の平林一栄教授にポストの話をしたとき、永年暖めていたという問題を頂いたものである。

[解答]　底面の三角形をその辺の長さ $a \le b \le c$ で特徴付け、正三角形の辺の長さ ℓを a, b, c の関数で書けばよい。そしてその長さ（関数）が、作図できるものであればよい。平林教授の質問は “簡単” に描けるかという点に力点があったようで、その意味では解答になっていないかも知れないが、取り敢えず出来ることだけ報告しておこう。

答えは

$$\ell^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2((a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2)}}{3}$$

である。関数の形が四則と自乗と平方根を取ることしか出てこないので、a, b, c からコンパスと定規だけを使って作図できる。作図の仕方は初等的だが、関数の表示通りにやろうとすればかなり面倒である。これまでの分は解答で詳しく述べるが、簡単にやることは今の所出来ていない。

第一回の TOSM ポストの質問は以上である。ぜひとも第二回のポストには多くの質問が寄せられることを希望している。

3　解説 1

問題 1　辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？

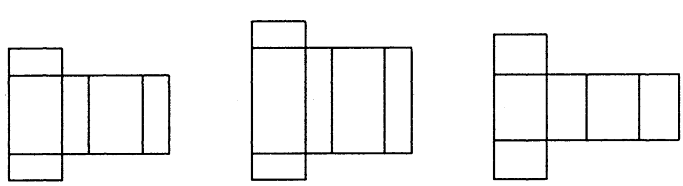
[解説]　すべての辺の長さの長さの違う直方体をその幾つかの辺に沿って切り開き平面図形にすることを展開するというのであった。

何もせずに考えてみても幾つあるのか分かりそうにないので、まずやってみることになる。実際に展開図を描くと言っても描くとなれば、具体的に辺の長さを決めないといけない。一つ一つの展開図を描く際に、一番長い辺、短い辺、中間の長さの辺がどれだか分かっていれば、結果には影響しないのだが、出題者の言うように４０以上もあるとなれば、既に数えたものと数えてないものの区別がし難く、数え尽くすこともそれらが互いに異なっていることも判然としないことになる。

そういう時はまず、多くの場合、具体的に数値を決めて始めてみて、調べていくうちにその数値の適切、不適切が分かってくるようになると、物事を一般化してまたは抽象的に考えられるようになる。

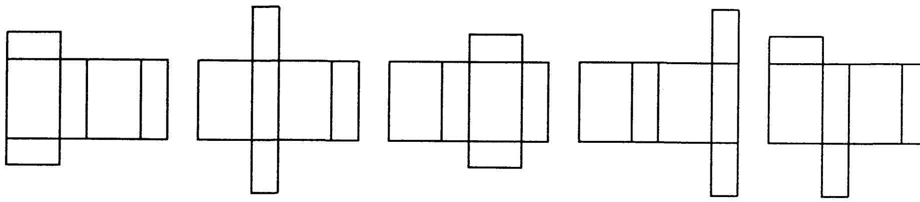
今の場合非常に具体的な問題なので抽象的になど考える必要はないように思われるかも知れないが、これが数学的思考の有効な部分なのである。

少し実験をしてみよう。長さそのものは重要ではないので、辺の長さの比を与えることにしよう。$a > b > c$ を直方体の辺の長さとし、その比 $a:b:c$ を例えば、$a:b:c = 3:2:1, 4:2:1, 5:4:3$ とか与えて同じ展開図を一つ描いてみると次のようになる。



右の図 $(a:b:c = 5:4:3)$ では色々な位置に置くと紛らわしくなりそうだし、左の図 $(a:b:c = 3:2:1)$ なら十分区別できるし、中の図 $(a:b:c = 4:2:1)$ にするまでのことはないと思われる。

そこで $a:b:c = 3:2:1$ として図を描くことにしよう。さて、幾つか描いてみよう。



これを考え付くだけ描いたとしても、それで全てかどうか、またそこに挙げたものが互いに異なるかどうかをどうやって調べればよいのだろう。展開図を描くと言うことについて少し考えてみよう。

直方体の面の数は６、辺の数は１２、頂点の数は８である。平面図にするとき６つの面は繋がっていること、しかも共有するのが頂点だけということはないとしているので、５つの辺を共有して繋がっていることになり、７つの辺を切り開くことになる。

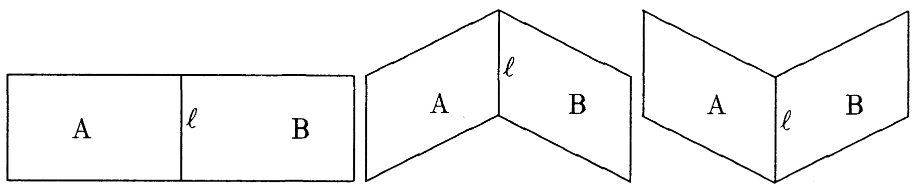
１つの辺を切り開くと展開図には２つの辺になって現れる。展開図から実際に直方体を作るのであれば、糊代が必要となるが、対応する二つの辺のどちらか一方だけにあれば良い。上に描いた展開図には糊代がないが、糊代を描き込むとすれば、７対の辺のどちらに糊代を付けるかで、$2^7 = 128$ 通りの展開図が、上の展開図のそれぞれに付随することになり、展開図の総数は 128 倍されることになる。勿論今は、糊代を描かないで展開図がどれくらいあるか考えることにする。

一つの展開図を描いて、それを色々な人が見ることになれば、図を見る角度が違っている訳で、各自にみえている図そのものは異なっているのだが、それでも同じ一つの展開図を見ていることを疑う人はあるまい。このことはつまり、平面図形を回転させても同じものだと思っているということ、もっと言えば展開図を描いてある台紙の紙を動かしても同じだと考えているということである。これを数学的に言えば、平面の運動は回転と平行移動で生成されるのだから、回転や平行移動で重ね合わすことの出来る二つの図形は同じである（合同ともいう）と言うのである。

ふつう合同というと、裏返し、つまり線対称で重なるものも合同であると考えている。しかし、裏返しは平面の運動では実現できない。例えば上に描いた５つの展開図のうち初めの４つはどんな線対称を施しても変わらないが、最後のものは裏返すと、元の展開図とはどのように回転させても重ならないことが分かる。展開図としてはこのことはどういうことになるのだろうか？

展開図から立体を作ることを考えると、その手続きは図を切り抜き、線分の所で垂直に折り曲げるということになる。下のような二つの面 A, B をその

間の線分ℓで折り曲げるとして、右の二つの折り方をそれぞれ山折り、谷折りという。山折りでは、線分ℓは手前に持ち上がっている感じで、谷折りでは反対に線分ℓが沈みこんでいるようになっている。手前の側から見て、山折りでは面A, Bのなす角は270°で、谷折りでは90°になっている。

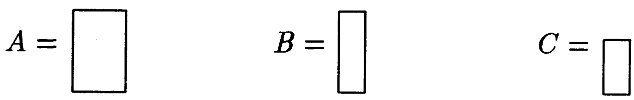


直方体は凸の図形だから、展開図を折り曲げていく際、最初に山折りにしたら最後まで山折りに、最初に谷折りにしたら最後まで谷折りにしないといけない。ある展開図を山折りで折っていって直方体を作れるなら、その展開図を裏返せば、谷折りで同じ折り方の直方体が得られる。山折り谷折りを指定せずどちらでも良いとなれば、展開図も裏返して重なるものは同じだと思ってよいことになる。

従ってどちらでなければならないという訳ではなく、どういう状況かを決めればよいのである。直方体の展開図になりうる平面図で、回転と平行移動で重なるものだけを同じと見て分類する場合が最も展開図の数が多くなる。この場合を三回型の分類といい、裏返しで重なるものも同じだと思う（一つの展開図を山折りでも谷折りでも考えるということに当たる）場合を三合型の分類と言おう。三回型とは辺の長さが3種類で回転と平行移動だけという気持ちで、三合型とは辺の長さが3種類で合同も許すという気持ちを表わした、この文章でだけの呼び方である。

この分類の考え方を用いて、二回型、二合型、一回型、一合型の分類も後で行うことにする。辺の長さが2種類の二回型、二合型の分類は正四角柱の展開図の分類で、辺の長さが1種類の一回型、一合型の分類は立方体の展開図の分類ということになる。

これらを出来るだけ統一的に取り扱いたい。実際幾つか図を描いてみると、面と面の繋がり具合だけが問題になることが分かる。そこで面に名前を付けて、$A = a \times b, B = a \times c, C = b \times c$と面積の大きい順に$A, B, C$と呼ぶことにしよう。前の図でなら



となる。だから上に5つ描いた展開図はこの記号で書けば、

$$\overset{C}{\underset{C}{A}}BAB \quad A\overset{C}{\underset{C}{B}}AB \quad AB\overset{C}{\underset{C}{A}}B \quad ABA\overset{C}{\underset{C}{B}} \quad \overset{C}{A}\underset{C}{B}AB$$

という図式（ダイヤグラム）で表わされることになる。

しかし、ダイヤグラムで書くと言っても、どんなダイヤグラムが直方体の展開図に対応するのかを定める必要がある。すると、直方体の展開図になることが出来るダイヤグラムを特徴付けるという話になって、この問題は難しいかも知れない。

それでもこのまま悩んでいても始まらない。まず直方体のダイヤグラムになるための必要条件を挙げていって、それに基づいてすべてのダイヤグラムを書き尽くして、幸いにしてダイヤグラムの数が有限個ならいつかこの作業も終わって、その後でそのダイヤグラムが実際に直方体の展開図になることを確かめればよい。その方針に従って、直方体のダイヤグラムになるための必要条件を挙げてみよう。ダイヤグラム自体も回転して重なるものは同じと考えることにする。一番個数の多くなる三回型だと思って、三回型のダイヤグラムのためのルールを作ることにする。多少の試行錯誤の後に次のようにまとめてみた。

ルール（三回型のダイヤグラム）

1. A,B,C がそれぞれ2つずつで全部で6つ
2. $\begin{array}{ll} X & Y \\ U & V \end{array}$ は起こらない
3. $\begin{array}{lll} X & Y & Z \\ U & & V \end{array}$ は起こらない
4. $\begin{array}{llll} X & Y & Z & W \\ U & & & V \end{array}$ は起こらない
5. XYZUV は起こらない
6. XY なら X≠Y
7. $\overset{Z}{X}Y$ なら X≠Y≠Z≠X

8. XYZ なら X=Z≠Y

ルールの説明をしよう。

ルール1は説明するまでもない大前提である。勿論二型や一型の時は変わってくる。ルール6－7も三型の時だけ成り立つことで、一、二型では成り立たないルールであり、ルール8は二型では“XYZ なら X=Z”という形になる(Y が他のものと同じでないと主張しないということである)。

ルール2－5の“起こらない”というのは、出来上がったダイヤグラムのどんな部分にもこのようなものがあってはならないということである。少し数学的な言い方をすれば、“部分ダイヤグラムとしてルール2－5に挙げたものは含まない”ということになる。

ルール2は XYUV のどこかの面の間は切り開かないといけないが例えば U と V の間を切り開けば面 U と V が重なってしまうからであり、ルール3、4は面 U と V が重なってしまうからであり、ルール5は垂直に折り曲げていくことから面 X と V が重なるからである。

これらのルールが直方体の展開図になるために必要なことは説明から明らかだろうが、これらが十分になることはこれから実際に作ったものが全て実際に直方体の展開図になることが分かるので（読者自身で確かめてください）、これが必要十分のルールだということも（その時には）分かるのである。

さて、全てを尽くすことに注意しつつ、更に重複して数えず他の型の時にも応用が利くことにも注意を払って、ダイヤグラムを書き上げていくことにしよう。

一列に並んでいるのを連と呼ぶことにして、最大の長さの連によってダイヤグラムを分類しよう。上に挙げた展開図と対応するダイヤグラムには ABAB や CAC,CBC などの連があった。

ルール5により連の長さは4以下だから、長さ最大の連の長さが幾つであるかによって IV, III, II 型に分けよう。

まず IV 型である。ルール8により長さ4の連は ABAB という連の形のものと思ってよく、連 ABAB を含むものを全て考えることにする。もう一つの面 C はこの連の長さを増やす方向にはつかないので、上か下かに付くことになるが、ルール3、4があるので C は連 ABAB の上下に分かれて付くことになる。全てを尽くせば、

$IV_0(A,B)$ 型 $\quad \overset{C}{\underset{C}{A}}BAB \quad A\overset{C}{\underset{C}{B}}AB \quad AB\overset{C}{\underset{C}{A}}B \quad ABA\overset{C}{\underset{C}{B}}$

$IV_1(A,B)$ 型　$\overset{C}{A}\underset{C}{B}AB$　$\overset{C}{A}B\underset{C}{A}B$　$\overset{C}{A}BA\underset{C}{B}$　$A\overset{C}{B}\underset{C}{A}B$　$A\overset{C}{B}A\underset{C}{B}$　$AB\overset{C}{A}\underset{C}{B}$

$\underset{C}{A}\overset{C}{B}AB$　$\underset{C}{A}B\overset{C}{A}B$　$\underset{C}{A}BA\overset{C}{B}$　$A\underset{C}{B}\overset{C}{A}B$　$A\underset{C}{B}A\overset{C}{B}$　$AB\underset{C}{A}\overset{C}{B}$

となる。連の中身が ABAB なので、分類の名前に (A,B) が付けてある。IV_0 と IV_1 の違いは IV_0 が連の軸を対称軸にして線対称であるものを集め、IV_1 は線対称にならないものを集めてあることにある。従って、三合型の時には IV_0 型のダイヤグラムの数は減らないが、IV_1 型のものは半分になる。上の表示で、$IV_1(A,B)$ 型のダイヤグラムは二列に書いてあるが、上下のものが線対称で写り合うように並べてあるので、三合型の時はその片方（上の列）だけを選べばよいからである。

$IV_i(A,B)(i=0,1)$ と書いたら $IV_i(A,B)$ 型のダイヤグラム全体の作る集合を表わすこともあるということにしていただくと有り難い。そうすると、$IV_i(A,B)=IV_i(B,A)$ であることが分かり、これは $\{A,B\}$ という組み合わせだけで定まり、他の組み合わせ $\{A,C\},\{B,C\}$ の場合も同等に起こりうるのでダイヤグラムの数は IV_0 型は $4\times 3=12$ で IV_1 型は $12\times 3=36$ となる。（三合型の時は IV_0 型は相変わらず 12 で、IV_1 型は半分の 18 となる。）

連の長さの最大が 3 の III 型を考える。まず、ルール 8 により、その連が ABA であるとしてもよい。次の面を何処に付けることが出来るかを考えよう。連の長さを増やす方向にとれば IV 型になってしまうので上下に付けねばならない。ルール 6 、7 により、この連に直接付く面は A,B ではいけないので、C であることになる。その付き方の全てを挙げると

$\overset{C}{\underset{C}{A}}BA$　$A\overset{C}{\underset{C}{B}}A$　$\overset{C}{A}\underset{C}{B}A$　$\overset{C}{A}B\underset{C}{A}$　$\underset{C}{A}\overset{C}{B}A$　$\underset{C}{A}B\overset{C}{A}$　$\overset{C}{A}BA$　$\underset{C}{A}BA$　$A\overset{C}{B}A$

となる。勿論回転で重なるものは省いてある。初めの二つは線対称であり、最後の三つは面 C が連 ABA に関して一方の側だけにある場合を表わしており、ルール 2 、3 により連に直接付く面 C は一つだけとなる。

今度はこの面 C に面 B を付けていくことになるが、ルールのおかげで付き方は可成制限される。連の長さが 4 になる場合（二つ目と最後のもの）を省き、回転で重なるものを除けば次のようになる。

```
                                 C                                    B
BC       C         BC           ABA    BC           C          C           C  CBC
 ABA   ABA       ABA             C       ABA     ABA        ABA      ABA          ABA         ABA
 C     BC          C             B             CBC          C      BC                      CBC
```

この10個のダイヤグラムの中には線対称なものは一つもなく、互いに線対称で写り合うものが5対である。それでもIII型をもう一度分けて、長さ3の連を一つしか含まないものをIII_1型、長さ3の連を二つ含むものをIII_2型と呼ぶことにすれば、次のようになる。(印刷の都合上、4番目のダイヤグラムは回転させてある。)

```
                     BC        BC             C         C
                      ABA       ABA         ABA       ABA
III1(A,B) 型           C           C      BC        BC

                                         B        B
                     BC        C         C        C      CBC
                      ABA     ABA      ABA      ABA         ABA           ABA
III2(A,B) 型           C     BC           C      C                    CBC
```

$III_1(A,B)$ 型は A と Bの順序対 (A,B) が異なれば異なっており、順序対は $(A,B),(A,C),(B,A),(B,C),(C,A),(C,B)$ の6種類あり、$4 \times 6 = 24$ 種の異なるダイヤグラムがある。$III_2(A,B)$ 型の場合は、IV型の場合のように (A,B) を取り替えても、$III_2(A,B)$ と $III_2(B,A)$ は同じではないが、順序対を6種類すべて替えて調べてみると、同じダイヤグラムが丁度二つずつ出てくるので、$6 \times 6/2 = 18$ 種類異なっている。(3合型の時は丁度この半分の $12+9=21$ 種類となる。)

最後にII型である。これはどの連も長さが2である場合ということになる。最初に考える連をABとし、連の長さが増えないようにしようと思えば、ルール7によりこの連に直接付く面の付き方は、両側に付く2通りと片側にしか付かない4通りの6通りである。

```
 C     C      C              C
AB    AB     AB     AB     AB     AB
  C   C             C              C
```

それぞれの場合、ルールに従えば、残りの面の付き方は一通りに定まり、

```
         BC          CA   CA          AB       BC   AB
          AB       AB      BC       BC       CA       CA
II型       CA    BC          AB   CA       AB           BC
```

となる。最初に考える連を他の5通りのどの連としても、延長して得られる

ダイヤグラムはまったく同じだけ得られることは容易に確かめられる。従って三回型なら6通りで、三合型なら半分の3通りということになる。

まとめると、三回型は$IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$で$12+36+24+18+6=96$通りで、三合型なら$IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$で$12+18+12+9+3=54$通りである。

同様の考え方で1対の面が正方形の場合、つまり正四角柱の場合を考えることにしよう。上のようにダイヤグラムを使って考えていく場合、等しくなれる辺（稜）は$a=b$であるか$b=c$であり、面の言葉で言えば$A=B$であるか$B=C$である。しかし$B=C$であったとしても、辺の長さa,cの大小そのものが問題になっている訳ではないので、$a<c$と考えればダイヤグラムの上では$A=B$の場合だと考えてもよい。数学者はこういう時、“一般性を失うことなく”$A=B$と仮定できる、という言い方をするのだが。とにかく、A=B と仮定しよう。

IV型で (A,A) という組み合わせの時は、長さ4の連は AAAA となって回転対称になる。従って二つの面 C の付き方が回転で不変なものはそのまま残るが、回転で変わってしまうものは写った先のダイヤグラムと同じダイヤグラムだということになり、数は半分に減ってしまう。つまり、$IV_1(A,A)$を回転対称なもの$IV_{10}(A,A)$と対称でないもの$IV_{11}(A,A)$に分けると、$IV_{10}(A,A)$の分は減らないが、$IV_0(A,A)$と$IV_{11}(A,A)$の分は半分に減ってしまう。

勿論(A,C)型はそのまま残るので、次のようになる。

$IV_0(A,A)$型　$\overset{C}{\underset{C}{A}}AAA$　$A\overset{C}{\underset{C}{A}}AA$

$IV_0(A,C)$型　$\overset{A}{\underset{A}{A}}CAC$　$A\overset{A}{\underset{A}{C}}AC$　$AC\overset{A}{\underset{A}{A}}C$　$ACA\overset{A}{\underset{A}{C}}$

$IV_{10}(A,A)$型　$\overset{C}{A}AA\underset{C}{A}$　$\underset{C}{A}AA\overset{C}{A}$　$A\overset{C}{A}\underset{C}{A}A$　$A\underset{C}{A}\overset{C}{A}A$

$IV_{11}(A,A)$型　$\overset{C}{A}\underset{C}{A}AA$　$\underset{C}{A}\overset{C}{A}AA$　$\overset{C}{A}A\underset{C}{A}A$　$\underset{C}{A}A\overset{C}{A}A$

$IV_1(A,C)$型　$\overset{A}{A}\underset{A}{C}AC$　$\overset{A}{A}C\underset{A}{A}C$　$\overset{A}{A}CA\underset{A}{C}$　$A\overset{A}{C}\underset{A}{A}C$　$A\overset{A}{C}A\underset{A}{C}$　$AC\overset{A}{A}\underset{A}{C}$

$\underset{A}{A}\overset{A}{C}AC$　$\underset{A}{A}C\overset{A}{A}C$　$\underset{A}{A}CA\overset{A}{C}$　$A\underset{A}{C}\overset{A}{A}C$　$A\underset{A}{C}A\overset{A}{C}$　$AC\underset{A}{A}\overset{A}{C}$

III_1型は順序対が異なれば異なるので、$(A,A),(A,C),(C,A)$の三通りに

出てくるダイヤグラムはすべて異なる。

```
              AC          C    AC          C
               AAA     AAA      AAA     AAA
III1(A,A)型     C     AC         C     AC

              CA          A    CA          A
               ACA     ACA      ACA     ACA
III1(A,C)型     A     CA         A     CA

              AA          A    AA          A
               CAC     CAC      CAC     CAC
III1(C,A)型     A     AA         A    AA
```

だが III_2型は $(A,A),(A,C),(C,A)$ を書き上げると、

```
                                      A
              AC      C     C         C      CAC
               AAA    AAA  AAA      AAA         AAA         AAA
III2(A,A)型     C   AC      C       C                    CAC
                            A

                                      C
              CA      A     A         A      ACA
               ACA    ACA  ACA      ACA         ACA         ACA
III2(A,C)型     A   CA      A       A                    ACA
                            C

                                      A
              AA      A     A         A      AAA
               CAC    CAC  CAC      CAC         CAC         CAC
III2(C,A)型     A   AA      A       A                    AAA
                            A
```

となるが、このうち八対が回転で同じダイヤグラムになることが分かる。同じものを減らさないといけない。

もう少し詳しく言うと、$III_2(A,C) \cup III_2(C,A)$ のダイヤグラムのうち AAA という連を持つものは $III_2(A,A)$ 型のどれかと同じであり、ACA と CAC という二つの連を持つダイヤグラムは $III_2(A,C)$ と $III_2(C,A)$ に同じものが2対ある。

従って III_2型は $6 \times 3 - 8 = 10$ であって、まとめると次のようになる。

```
           AC        C      CAC
            AAA      AAA       AAA        AAA
III2型      C      AC                  CAC

            CA        A     ACA                        AA        A
             ACA      ACA      ACA        ACA           CAC      CAC
             A      CA                 ACA              A      AA
```

II型は A=B と置くと同じになるダイヤグラムが2対あるので、

```
          AC        CA  CA        AA
II型       AA      AA    AC      AC
            CA   AC       AA   CA
```

まとめると、IV_0のみが線対称なダイヤグラムなので、二回型は$IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$で$(2+4)+(4+4+12)+(4\times 3)+10+4=52$通りで、二合型なら$IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$で$6+10+6+5+2=29$通りである。

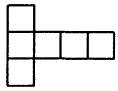
最後に立方体の場合だが、勿論 A=B=C と置けばよい。元の分類から回転で同じになるものが増えたことを考慮に入れると、

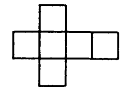
```
         A         A
         AAAA     AAAA
IV0型    A         A
         A           A    A         A
         AAAA     AAAA    AAAA    AAAA
IV10型      A     A         A      A
         A         A      A         A
         AAAA     AAAA    AAAA    AAAA
IV11型    A       A         A     A
         AA         A     AAA
          AAA       AAA     AAA        AAA
III1型    A        AA              AAA
         AA          A    AA            A
          AAA       AAA    AAA       AAA
III2型     A       AA         A    AA
         AA           AA
          AA         AA
II型       AA      AA
```

となる。まとめれば、一回型は$IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$で$2+(4+4)+4+4+2=20$通りで、一合型なら$IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$で$2+4+2+2+1=11$通りである。

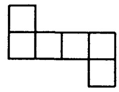
立方体の展開図が１１通りであるという記述があるのはこの一合型の分類のことである。ここまで読んできて展開図の話であることを忘れてしまった人のために、一合型の 11 個のダイヤグラムと対応する展開図を描いてみると、

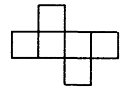
```
         A                  A
         AAAA              AAAA
IV0型    A                  A
```



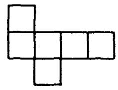


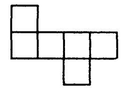
```
         A                  A
         AAAA              AAAA
IV10型      A                A
```



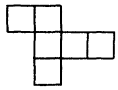


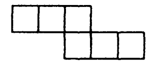
IV_{11}型

A
AAAA
 A


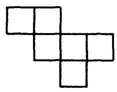
A
AAAA
  A


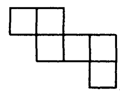
III_1型

AA
 AAA
 A


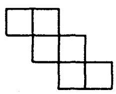
AAA
  AAA


III_2型

AA
 AAA
  A


AA
 AAA
   A


II型

AA
 AA
  AA


となる。

三回型から一合型までの 6 種類の場合に、上に述べたものが展開図のすべてであり、また同じものを重複していないことは納得されたと思うが、重複していないことの説明が統一的でなく、場合によって×3 であったり×6 であったりしていたり、退化した場合（二回型の時）など互いに異なるものの数を導くのが統一的ではなかったようだ。上での議論は、すべての展開図を求めたいということに議論の力点があったのでこのような欠点が出てしまったが、重複を許さないようにすることに力点を置こうとするならばそのようにも出来る。

そのために、蛇足かとも思うが、並べ直してみよう。つまり場合分けをすっきりさせて、指標となる面が一つだけで、数え上げたらその数を×3 すれば良いようにしたい。

まず IV 型は、長さ 4 の連 ABAB よりもこの連につく面 C で名前を付けたら良いだろう。線対称なのが IV_0型で、線対称でないのが IV_1型とするのは前と同じとする。

そこで

$IV_0(C)$ 型

```
C       C       C       C
ABAB   ABAB   ABAB   ABAB
C       C       C       C
```

$IV_1(C)$ 型

```
C       C       C       C       C       C
ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB
 C       C       C       C       C       C

 C       C       C       C       C       C
ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB
C       C       C       C       C       C
```

とすることになる。

連の長さの最大が3であるというIII型については、場合によって様子が異なる。長さ3の連が1つしかないというIII_1型はIV型と同様に、連ABAに直接付く面Cの名前を取ることにすると、元の(A,B)型と(B,A)型の両方の分を挙げておく必要があるので、

$III_1(C)$型

```
BC        C  BC          C AC        C  AC          C
 ABA   ABA    ABA    ABA    BAB    BAB   BAB    BAB
  C   BC        C  BC         C  AC        C  AC
```

とすることにしよう。

長さ3の連が二つある場合であるIII_2型については、同じ様にすると退化した場合にまた混乱が残る。一つの面の名前だけで特徴づけ、更に退化した場合にも同等の扱いをするためにはIII_2型は更に二つの場合に分けねばならない。III_2型は長さ3の連が二つある場合であったが、この二つの連が直交する場合III_2と平行な場合III_3に分ける。

III_2型の場合は二つの連が交叉する場所にある面の名前を付けることにし、III_3型の場合は二つの連の中央にある面の名前を付けることにした。

$III_2(C)$型

```
AB      B      BA      A
 CAC    CAC     CBC    CBC
 B    AB        A    BA
```

$III_3(C)$型

```
ACA          ACA
  BCB     BCB
```

連の長さがすべて2であるII型の場合は、くねくね曲がっていく連が外から見て最初に曲がるところにある面の名前にした。

$II(C)$型

```
AC          CB
 BA       BA
  CB    AC
```

こうすれば、面Cの代わりにA,Bが入ったときに異なったダイヤグラムが出来ることはすぐに分かるだろう。まとめれば、三回型は$IV_0(C) \cup IV_1(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$は$4+12+8+4+2+2=32$通りで、Cの替わりにA、Bを取ることが出来るので、全部で$32 \times 3 = 96$となるのである。

三合型では、線対称なダイヤグラムはIV_0型だけなので$IV_0(C) \cup IV_1(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$は$4 + (12+8+4+2+2)/2 = 4 +$

$(32-4)/2=4+14=18$ 通りで、ここでもCの替わりにA、Bを取ることが出来るので、全部で $18\times 3=54$ となるのである。

次に、三型から一段階退化した場合である正四角柱の場合（A=Bとしている）、$X(C)$ と $X(A)(X=IV_0\sim II)$ をすべて考えれば良い。$X(A)$ には退化が起こらず、三型の時と同じだが、$X(C)$ では退化が起きるときがある。$X(C)$ の時は連にAAAAやAAAが現れたり (IV_0,IV_1,III_1)、A=Bの重なりが起きたり (III_2) して、異なるダイアグラムの数が半分になることがある。

またIV₁(C)だけは回転対称になる $IV_{10}(C)$ と回転対称でない（ので数が半分に減る）$IV_{11}(C)$ とに分けるのは前の分類の仕方の時と同じ事情である。

これらをまとめて書き上げると次のようになる。

$IV_0(C)$ 型

```
C         C
AAAA    AAAA
C         C
```

$IV_0(A)$ 型

```
A       A        A        A
ACAC   ACAC   ACAC   ACAC
A       A        A        A
```

$IV_{10}(C)$ 型

```
C          C    C        C
AAAA   AAAA   AAAA   AAAA
   C   C         C     C
```

$IV_{11}(C)$ 型

```
C        C     C          C
AAAA   AAAA   AAAA   AAAA
 C     C         C    C
```

$IV_1(A)$ 型

```
A      A      A       A       A        A
ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC
 A        A      A     A         A      A

 A        A        A     A        A       A
ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC
A      A      A       A       A        A
```

$III_1(C)$ 型

```
AC          C    AC          C
 AAA     AAA      AAA     AAA
  C     AC          C    AC
```

$III_1(A)$ 型

```
CA        A   CA          A  AA         A  AA         A
 ACA    ACA    ACA     ACA    CAC     CAC    CAC    CAC
  A   CA        A   CA         A   AA         A  AA
```

$III_2(C)$ 型

```
AA       A
 CAC    CAC
 A     AA
```

$III_2(A)$ 型

```
AC        C      CA
 AAA     AAA      ACA
 C     AC         A

 A
 ACA
CA
```

$III_3(C)$ 型

```
ACA             ACA
  ACA   ACA
```

$III_3(A)$ 型

```
CAC             AAA
  AAA    CAC
```

$II(A)$ 型

```
CA            AA
 AC         AC
  AA      CA
```

$II(C)$ 型

```
AC            CA
 AA         AA
  CA      AC
```

まとめれば、二回型は $IV_0(A) \cup IV_1(A) \cup III_1(A) \cup III_2(A) \cup III_3(A) \cup II(A)$ と $IV_0(C) \cup IV_{10}(C) \cup IV_{11}(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$ となり、$(4+12+8+4+2+2)+(2+4+4+4+2+2+2)=32+20=52$ 通りとなるのである。

二合型では、線対称なダイヤグラムは IV_0型だけなので、$IV_0(A) \cup IV_1(A) \cup III_1(A) \cup III_2(A) \cup III_3(A) \cup II(A)$ と $IV_0(C) \cup IV_{10}(C) \cup IV_{11}(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$ とを足したものとなり、その数は $(4+(12+8+4+2+2)/2)+(2+(4+4+4+2+2+2)/2)=18+11=29$ 通りとなるのである。

最後に立方体の場合だが、正四角柱の場合の $X(C)$ 型で $A=C$ としたものと一致する。書き上げてみると次のようになる。

IV_0型

```
A          A
AAAA     AAAA
A          A
```

IV_{10}型

```
A            A   A         A
AAAA  AAAA  AAAA  AAAA
   A  A       A    A
```

```
 A
AAAA
A
```

IV_{11}型

```
A      A    A
AAAA  AAAA  AAAA
 A    A       A
```

III_1型

```
AA      A   AA      A
 AAA   AAA   AAA  AAA
  A   AA       A  AA
```

III_2型

```
AA       A
 AAA    AAA
 A     AA
```

III_3型

```
AAA           AAA
  AAA      AAA
```

II型

```
AA          AA
 AA       AA
  AA    AA
```

まとめれば、一回型は $IV_0 \cup IV_{10} \cup IV_{11} \cup III_1 \cup III_2 \cup III_3 \cup II$ となり、$2+4+4+4+2+2+2=20$ 通りとなり、二合型では、線対称なダイヤグラムは IV_0型だけなので、$IV_0 \cup IV_{10} \cup IV_{11} \cup III_1 \cup III_2 \cup III_3 \cup II$ となり、$2+(4+4+4+2+2+2)/2=11$ 通りとなるのである。

最後にこれを表にしておこう。

型	IV_0	IV_1	III	II	計
三回型	$4 \times 3 = 12$	$12 \times 3 = 36$	$14 \times 3 = 42$	$2 \times 3 = 6$	96
三合型	$4 \times 3 = 12$	$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$	$1 \times 3 = 3$	54
二回型	6	20	22	4	52
二合型	6	10	11	2	29
一回型	2	8	8	2	20
一合型	2	4	4	1	11

4 解説 2

問題 2　円周上に n 点を取り、互いに線分で結ぶとき円内に最大いくつの領域が出来るか？

[解説]　円周の上に n 個の点がある。その点を互いに結べば、その線分と円弧とにより円内は幾つかの領域に分かれる。点相互の位置によっては領域の数も変わるだろうが、無限の領域に分かれるはずもなく、その最大値は定まっているだろう。それを$\gamma(n)$ と表わすことにしたのだった。

点の数が少ないときは、どんな風に取っても領域の数は決まっていて、$\gamma(1)=1, \gamma(2)=2, \gamma(3)=4=2^2, \gamma(4)=8=2^3, \gamma(5)=16=2^4$ となる。値は倍々になっているのだが、何故倍々になっているのかは理由が思い付かない。

理由はあるが思い付かないだけなのか、元々理由がないのか、問題を考えているときには中々分からないものだ。

更に点を増やして $n=6$ の時の図を描けば$\gamma(6)=31$ になるようで、どのように線を動かしてみても領域の数は 32 にならない。しかもこの時は 6 番目の点の取り方によっては更に領域の数が 1 減ることがある。

n が増えていくとき領域の数がどう変化するかは分かりにくいが、はっきり分かるものもある。それは線分の数である。n 個の点の中から 2 点を選べば線分が一通りに定まるのだから、${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$本の線分がある。しかしその交わり方によって領域の数が変わるのだから、一目で分かるというのは難しいのである。

一般の n に対して$\gamma(n)$ が求まるような気がしないかも知れないが、実は求まるのである。求まるという信念さえ持てば、求めるのはさして難しいことではない。一般の n に対して直接$\gamma(n)$ を求めようとしても、交わり方の複雑さに方針も立たない。こういう時は帰納法である。

$\gamma(n)$ の公式が求まっているとすると、帰納法で証明するためには n から $n+1$ に移るとき領域の数がどう変化するかをきちんと見ることが大切である。それはつまり階差数列 $a_n=\gamma(n+1)-\gamma(n)$ が具体的に求まればよいことになる。

それを考えてみよう。n 個の点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$が円周上にあって互いに結んだ線分によって円内に$\gamma(n)$ の領域が出来ているとする。新しく点 Pを付け加えて、Pと $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$とをそれぞれ結んでやると幾つ領域が増えるだろうか？こんな風にしても何か分かりやすくなったようには見えないかも知れない。確かにこれでは何ともならない、もう少し頑張らないと。

n 本の線分を一度に引こうとするからどうにもならない。1本ずつ引いてみよう。Pからある Q_iへ線を引く。却って難しくなったようだ。他の Q_jとの線がどう引かれているか分からないと、どうなるか分からないような気がする。でも本当にそうだろうか？

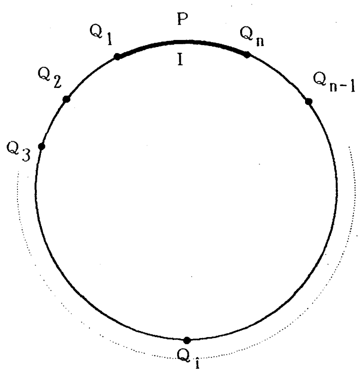
線分を一気に引いたのがいけなかったようだ。Pから Q_iへ線を引く時、だんだんに伸ばしていくことにして、どんなときに領域の数が増えるのかを考えてみる。すると、Pから出発して既に引かれている線分か円周に行き当たるときにだけ領域の数が増えることが分かる。

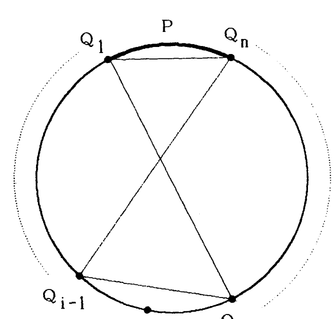
この考察だけで、領域の数が一通りでないことに理由も分かった。つまり、Pから出て Q_iに向かう線分が、既に引かれている線分達の交点を通るとき、本来二つ増えていてもよい領域が一つしか増えないのである。それまでの線分の交点に交わらぬようにさえすれば、その時に出来る以上の領域は出来ない。

様子が分かってきたので、厳密に述べられるように記号を用意することにしよう。n 個の点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$の名前の付け方を決めておこう。最初の点 Q_1は勝手に選べば良い。次の Q_2からは円周上を正の方向に進むように取っていく。

つまり Q_iと Q_{i+1}の間（の円弧上）には他の点 Q_jはなく、円弧上をこの順に進んでいくとき、円の内部を左手に見ているというようになっているとするのである。実際には順に並んでいればよく、向きはどちらでも良いのだが、イメージを確定しておいた方が何かと都合がよい。少なくとも思考の節約になる。

さて新しい点 Pを何処に取るかだが、Q_nと Q_1の間の他の点 Q_jが乗っていない方の円弧を取ることにしよう。そして、この円弧を Iと呼ぶことにしよう。他の場所でもよいのだが、その時は Q_iの番号をずらしてやればこの状況になるのだから、“一般性を失うことなく”上のように仮定できるのである。





更に、PとQ_iを結ぶ線分がそれまでに引かれている線分の交点を通らない様にすることが出来る。点Pを少し動かせば、交点からはずすことが出来るということである。

これを示すために明らかなことを一つ注意しておこう。Pを円弧Iの何処にとっても、PとQ_iとを結ぶ線分$\overline{PQ_i}$同志は円の内部では交わらない。これは明らかである。これらn本の直線はまさに円周上の点Pで交わっているのだから、更に円の内部で交わるわけにはいかないのである。

この注意によって、線分$\overline{PQ_i}$を引くことによって増える領域の個数は、他の線分$\overline{PQ_j}$を引いた前か後かには無関係であることも分かる。だから$\overline{PQ_i}$を引くことで領域がどれだけ増えるかがきちんと分かればよいことになる。

どの$\overline{PQ_i}$もそれまでの線分の交点を通らないように出来るということも難しくはない。それまでの線分とは$N = {}_n C_2$本の線分$\overline{Q_iQ_j}$のことであるが、これらの交点は多くとも${}_N C_2$しかないし、円の内部にある交点はそれよりずっと少ない。点Q_kからこれらの交点に引く直線の数は$n \times {}_N C_2$よりも小さいことになるので、その延長上に円弧Iと交わる可能性も$n \times {}_N C_2$よりも小さいことになる。つまり円の内部にあるすべての$\overline{Q_iQ_j}$の交点と、周上の点Q_kを結んだ直線と円弧Iとの交点$\{R_\alpha\}$の個数は有限である。従って、円弧Iからこれらの点R_α以外の点を取ってPとすれば良い。

領域の個数が最大になるようにしようとしているのだから、これまでの状況は“一般性を失うことなく”仮定してもよいのである。

さて、$\overline{PQ_i}$を引くことで領域の数がどれだけ増えるかを考えてみよう。線分$\overline{PQ_i}$はそれまでの何本の線分及び円弧と交わるかということである。交わる瞬間にだけ領域の数が一つ増えるのだから。

円弧と交わるときというのは線分がQ_iに到着するときだから、あとは線分$\overline{PQ_i}$が横切る線分$\overline{Q_jQ_k}$の数を求めればよい。この数を求めるには逆に考えるとよい。円周上の点$P, Q_1, \cdots, Q_n$はそのままに、中の線分を消してしまい、$\overline{PQ_i}$だけを引くことにする。その時何本の線分$\overline{Q_jQ_k}$が$\overline{PQ_i}$と交わるかと考えてみよう。線分$\overline{PQ_i}$は円を二つの領域に分けているから、$\overline{PQ_i}$と交わる線分$\overline{Q_jQ_k}$の端点Q_jとQ_kはその別々の領域に入っていることになる。この二つの領域の点は正の向きに弧PQ_iと弧Q_iPの上の点というように分けられ、弧PQ_iの上には$i-1$個の点$\{Q_1, \cdots, Q_{i-1}\}$、弧Q_iPの上には$n-i$個の点$\{Q_{i+1}, \cdots, Q_n\}$がある。従って、交わる線分の個数は$(i-1)(n-i)$であり、点Q_iに突き当たったときにも1増えて$(i-1)(n-i)+1 = 1-n+i(1+n)-i^2$となる。

かくて階差の一般項a_nは次のようになる。

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n}\{(i-1)(n-i)+1\} = n(1-n)+(n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \\ &= \frac{1}{6}(n^3-3n^2+8n) = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{aligned}$$

後はこれを足せばよい。

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \gamma(1)+\sum_{i=1}^{n-1} a_n = 1+\frac{1}{6}\{\frac{(n-1)^2n^2}{4} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{2} + 4(n-1)n\} \\ &= 1+\frac{n(n-1)}{24}\{n(n-1)-2(2n-1)+16\} = 1+\frac{n(n-1)}{24}\{n^2-5n+18\} \\ &= 1+\frac{n(n-1)}{24}\{(n-2)(n-3)+12\} \end{aligned}$$

これが答えである。これに値を入れてみると、(計算が間違っていなければ)
$\gamma(1) = 1, \gamma(2) = 2, \gamma(3) = 4 = 2^2, \gamma(4) = 8 = 2^3, \gamma(5) = 16 = 2^4$
$\gamma(6) = 31, \gamma(7) = 59, \gamma(8) = 99, \gamma(9) = 163, \gamma(10) = 256 = 2^8$, $\gamma(11) = 385$
などとなる。

勿論ここで次の公式を使っている。

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$$

注意　この問題はよく知られている次の問題とはかなり違うものである。

> 円周に交わるように n 本の直線を引くとき、円内に最大いくつの領域が出来るか？

この問題の解答も問題2と同じ様にやれば良い。n 本の直線を引くときに円内にできる領域の最大数を$\epsilon(n)$ と書くことにすると、$\gamma(n)$ の同じ様に階差$b_n = \epsilon(n+1) - \epsilon(n)$ を考えればよい。

しかしこの階差 b_n は簡単に求まってしまうのである。最大数の領域を作るような配置に n 本の直線を引いてあるとき、更にもう 1 本引いたときにも最大を与えるような配置を選ぶことが出来る。このことを保証するには、厳密には一般の位置の議論が必要で現代数学の言葉で言えばサード (Sard) の定理

が必要なのだが（問題2の時にも実は必要だった）、そこまで言わなくとも正しいことは納得してもらえると思うので省略した。

問題2の時と同様、$n+1$ 本目の直線を引いていくとき、最初に円周と交わった後、既に引いてある直線のどれかか円周と交差するときに領域が一つ増える訳で、領域の増え方は最大 $n+1$ となる。つまり、$b_n = n+1$ である。a_nを求めるときは、これ自身帰納法が必要だったので、その分問題2は難しかったのである。

したがって、

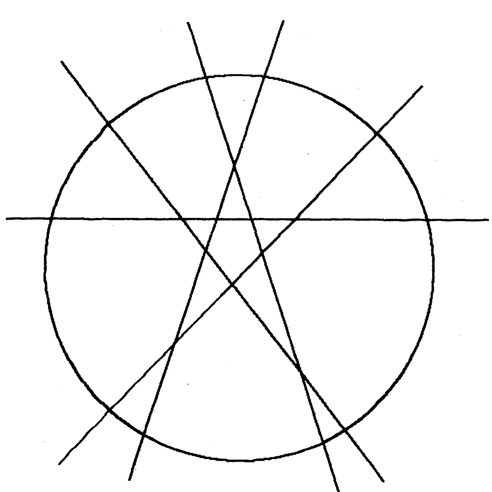
$$\epsilon(n) = \epsilon(0) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i = \epsilon(0) + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

となり、かなり簡単である。

$\gamma(n)$ は4次なのに、$\epsilon(n)$ は2次なのが変だなと思うセンスは大事である。しかし考えてみれば当然で、$\gamma(n)$ の時は最初に n 個の点を取って結ぶのだから、線分の数は${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$であり、これだけの直線を結ぶときの最大数

$$\epsilon(\frac{n(n-1)}{2}) = 1 + \frac{n(n-1)\{(n(n-1)+2\}}{8}$$

と同じ次数だが、4次の項の係数も小さく、全体としてもだいぶ小さくなっていることが分かる。



TOSM 推薦図書案

TOSM グループとしては、数学上の疑問は現場で解決されるのがもっとも望ましいと考えており、そういう機会のない現場の要望に答えるためにというのがポストを始めた最大の動機である。各学校の図書館（室）に、数学や数学に関する図書がある程度常備されていれば、教師もまた児童・生徒も自分で解決できる部分が多くなるのではないだろうか。TOSM 推薦図書のリストを作るべきだと考える理由である。

しかし、そのためには書籍それぞれに大体の指導の目安なり、内容についてのコメントを付けたものが望ましいと思うが、時間の制約もあり、取り合えず仮のリストを挙げておくことにする。

選んだ基準といったものは余りない。一種の責任の取り方として、蟹江が読んだことがあったり、少なくとも手に取ったことのある書籍の中から、思い出すまま挙げることにした。だから、重要なもの、必要なものがすべて網羅されているわけではない。

面白かったものもそれほどでなかったものもあるが、その評価をしている暇がないし、人によっては違う評価を持つこともあるので出来るだけ多くリストに載せることにした。初等教育に携わる人の面白い授業のための種本になるものや、より高度の自己教育（児童・生徒にとっても教師にとっても）の指針となるものや、辞書代りに使えるものやなど、玉石混淆ではあるが、学校に常備する図書の一応の目安にはなると思う。

並べ方は著者のあいうえお順になっている。翻訳の場合、訳し方の違いで同じ著者が違う場所に並んでいることもあるが、日本語の本を日本で買うときの利便のために敢えてこの並べ方にした。

リストにないが是非挙げておくべきだと考えられる書籍があれば、三重ポストに投函していただけば次回の発表の際には考慮したいと考えている。

参考文献

[1] 青本和彦＋志賀浩二「解析の表現したもの 対話・２０世紀数学の飛翔１」日本評論社、１９９２年

[2] アイザック・アシモフ「宇宙の測り方　アシモフのＳＩ単位系ガイド（上下）」（金子務＋古川博訳）河出書房新社、１９９１年 The Measure of the Universe, by Isaac Asimov(1983)

[3] F. ガレス・アシャースト「１０人の大数学者　現代数学を築いた人々」（好田順治訳

[4] 足立恒雄「フェルマーを読む」日本評論社、１９８６年

[5] J. アダマール「数学における発見の心理」（伏見康治＋尾崎辰之助＋大塚益日古訳）みすず書房

[6] V.I. アーノルド「カタストロフ理論」(蟹江幸博訳) 現代数学社

[7] A. アボット「多次元★平面国」（石崎阿砂子訳）東京図書、１９９２年

[8] ジョルジュ・イフラー「数字の歴史ー人は数をどのように数えてきたか」（松原秀一＋彌永昌吉監修・彌永みち代＋丸山正義＋後平隆訳）平凡社、１９８８年 Histoire universelle des chiffres, by Georges Ifrah(1981)

[9] L. インフェルト「ガロアの生涯ー神々の愛でし人」（市井三郎訳）日本評論社、１９６９年 Whom the Gods love, by Leopold Infeld(1948)

[10] ヴァン・デル・ウァルデン「数学の黎明」（村田全＋佐藤勝造訳）みすず書房、１９８４年 Scicence Awakening, by B.L.van der Waerden(1954)

[11] ウェン・A・ウィケルグレン「問題をどう解くかー問題解決の理論」（矢野健太郎訳）秀潤社、１９８０年 How to solve Problems:Elements of a Theory of Problems and Problem Solving, by Wayne A. Wickelgren(1974)

[12] ウィラディング「算数から数学へー集合を基礎においた構造ー１，２」（斎藤正彦監訳・坂元宗和訳）東京図書、１９７３年 ElementaryMathematics: Its Structure and Concepts, by Margaret F. Willerding(1970)

[13] マグナス J. ウェニンガー「多面体の模型　その作り方と鑑賞」（茂木勇＋横手一郎訳）教育出版、１９７９年 Polyhedron MOdels, by Magnus J. Wenninger(1975)

[14] 上野健爾＋志賀浩二「数学を育てる土壌 対話・２０世紀数学の飛翔２」日本評論社、１９９２年

[15] D. ウェルズ「見つけよう！数学！」（大橋義房訳）岩波書店、１９８９年 Hidden Connections Double Meanings, by David Wells(1988)

[16] D. ウェルズ「数の事典」（芦ケ原伸之＋滝沢清訳）東京図書

[17] S. エインリ「エインリの数学パズル」（高木茂男訳）培風館

[18] H.D. エビングハウス他「数　上下」（成木勇夫訳）シュプリンガー東京

[19] O. オア「アーベルの生涯ー数学に燃える青春の彷徨」（辻雄一訳）東京図書、１９７４年 Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary, by Oystein Ore(1957)

[20] O. オア「カルダノの生涯ー悪徳数学者の栄光と悲惨」（安藤洋美訳）東京図書、１９７８年 Cardano:The Gambling Scholar, by Oystein Ore(1953)

[21] フロリアン・カジョリ「初等数学史　上下」（小倉金之助補訳）共立全書５３７，５３８、１９７０年 A History of Elementary Mathematics, by Florian Cajori(1896)

[22] M. ガードナー「おもしろい数学パズル (1,2) 」現代教養文庫, 社会思想社

[23] M. ガードナー「数学ゲーム I,II 」(高木茂男訳) ブルーバックス 248,249, 講談社

[24] M. ガードナー「奇妙な論理」(市場泰男訳)

[25] M. ガードナー「ガードナー数学ギャラリー　ペンローズ・タイルと数学パズル」(一松信訳) 丸善、１９９２年

[26] M. ガードナー「ガードナー数学ギャラリー　落し戸暗号の謎解き」(一松信訳) 丸善、１９９２年

[27] M. ガードナー「ガードナー数学ギャラリー　メイトリックス博士の生還」(一松信訳) 丸善、１９９２年

[28] カーニハン＋プローガー「ソフトウェア作法」（木村泉訳）共立出版、１９８１年 Software Tools, by Brian W.Kernighan　P.J.Plauger(1976)

[29] G. カルダーノ「カルダーノ自伝」（清瀬卓＋澤井茂男訳）海鳴社，１９８０年 De propria vita, by Gerolamo Cardano

[30] 紀華彦「計算機科学の発想」日本評論社、１９８１年

[31] マイケル・ギレン「現代数学が見えてくるーゲーデルからフラクタルまで」白揚社（吉永良正訳）、１９８９年 Bridges to Infinity, by Michael Guillen(1983)

[32] 久賀道郎「ガロアの夢ー群論と微分方程式ー」日本評論社

[33] 久賀道郎「ドクトル・クーガーの数学講座１」日本評論社、１９９２年

[34] 草場公邦「行列特論」裳華房

[35] 草場公邦「数の不思議」講談社現代新書

[36] 草場公邦「数学の考え方いろいろ　類推と比例式…」遊星社、１９８６年

[37] 草場公邦「数理と発想」創拓社

[38] D.E. クヌース「超現実数」（好田順治訳）海鳴社

[39] M. クライン「数学文化史」現代教養文庫, 社会思想社

[40] モーリス・クライン「不確実性の数学ー数学の世界の夢と現実　上下」（三村護＋入江晴栄訳）紀伊國屋書店、１９８４年 Mathematics:The Loss of Certainty, by Morris Kline(1980)

[41] R. クーラント＋H. ロビンズ「数学とは何か」（森口繁一監訳）岩波書店、１９６６年 What is Mathematics?–an elementary approach to ideas and methods–, by R.Courant and H.Robbins(1941)

[42] ジェイムズ・グリック「カオス -新しい科学を作る」（上田□亮監修＋大貫昌子訳）新潮文庫、１９９１年 Chaos-Making a New Science, by James Gleick(1987)

[43] I. グロスマン＋W. マグナス「SMSG 新数学双書４　群とグラフ」（浅野啓三訳）河出書房新社、１９７０年 Groups and their Graphs, by I.Grossman+W.Magnus(1964)

[44] 小針日見宏「確率・統計入門」岩波書店、１９７３年

[45] コールマン＋ユシケービッチ「数学史１，２」（山内一次＋井関清志訳）東京図書、１９７０年

[46] 近藤基吉＋井関清志「現代数学の黎明期　近代数学　上下」日本評論社、１９８６年

[47] 斎藤恭司＋志賀浩二「数学のおもしろさ 対話・２０世紀数学の飛翔４」日本評論社、１９９２年

[48] A.K. サボー「数学のあけぼのーギリシャの数学の哲学の源流を探る」（伊東俊太郎＋中村幸四郎＋村田全訳）東京図書、１９７６年

[49] I.J. シェーンベルグ「数学点描」（三村護訳）近代科学社、１９８９年
Mathematical Time Exposures, by I.J.Schoenberg(1982)

[50] H. スタインハウス「数学スナップショットー生活と数学ー」（遠山啓訳）紀伊國屋書店、１９５７年 Mathematical Snapshots, by H.Steinhaus(1938)

[51] R.G. スタントン＋ K.D. フライアー共編「現代数学のトピックス」（矢野健太郎訳）日本評論社、１９７０年 Topics in Modern Mathematics, by Ralph G.Stanton+Kenneth D.Fryer(1964)

[52] イアン・スチュアート「数学の冒険」（雨宮一郎訳）紀伊國屋書店、１９９０年 The Problems of Mathematics, by Ian Stewart(1987)

[53] スーチン「ニュートンの生涯」（渡辺正雄監訳・田村保子訳）東京図書、１９７７年 Isaac Newton, by Harry Sootin(1955)

[54] ミッチ・ストラブル「トポロジー遊び　位相空間の発想（杉元賢治訳）講談社ブルーバックス B587、１９８４年 Stretching a Point, by Mitch Struble(1971)」

[55] レイモンド・M・スマリヤン「この本の名は？1,2」(岸田孝一監訳・沖記久子訳)TBS 出版会, １９８２年 What is the Name of this Book? by Raymond Smullyan(1978)

[56] レイモンド・M・スマリヤン「パズルランドのアリスー－８０才以下の子供達のためのキャロル的おはなし」（市場泰男訳）社会思想社、１

９８５年 Alice in Puzzle-Land: A Carrolian Tale for Children under eighty, by Raymond Smullyan(1982)

[57] レイモンド・M・スマリヤン「決定不能の論理パズル　ゲーデルの定理と様相論理」(長尾確＋田中朋之訳) 白揚社、１９９０年 Forever Undecided, by Raymond Smullyan(1987)

[58] C. ゼーリッヒ「アインシュタインの生涯」(広重徹訳) 東京図書、１９５７年 Albert Einstein:Eine Dokumentarische Biographie, by Carl Seelig(1954)

[59] W.W. ソーヤー「数学へのプレリュード」(宮本敏雄＋田中勇訳) 岩波書店

[60] W.W. ソーヤー「代数の再発見 I, II 」(芹沢正三訳) 講談社ブルーバックス B191,B194 、１９７２年 The Search for Pattern, by W.W.Sawyer(1970)

[61] 高木貞治「数学小景」岩波書店、１９４３年

[62] 高木貞治「近世数学史談」共立全書１８３、１９３３年：第3版、１９７０年

[63] 高木貞治「数学雑談」共立全書１８４

[64] 高木貞治「初等整数論講義　第２版」共立出版、１９７１年

[65] 高木貞治「改訂第３版　解析概論」岩波書店、１９６１年

[66] 高橋秀俊「数理の散策」日本評論社、１９７４年

[67] 高橋陽一郎＋志賀浩二「確率論をめぐって 対話・２０世紀数学の飛翔３」日本評論社、１９９２年

[68] 竹内外史「集合とはなにか　はじめて学ぶ人のために」講談社ブルーバックス B298 、１９７６年

[69] ダニングトン「ガウスの生涯」(銀林浩＋小島穀男＋田中勇訳) 東京図書、１９７６年 Carl Friedrich Gauss:Titan of Science, by G.Waldo Dunnington(1955)

[70] C.V. ダレル「四次元の国のアリス」現代教養文庫, 社会思想社

[71] W. チン+N. スチーンロッド「初歩のトポロジー」(野口広訳) SMSG 新数学双書 1, 河出書房新社

[72] リュディガー・ティーレ「証明のすすめ－数学の証明」(金井省二訳) 森北出版、１９９０年 Mathematische Beweise, by Rudiger Thiele(1983)

[73] R. デーデキント「数について」(河野伊三郎訳) 岩波文庫

アシャーストモートン・D. デービス「ゲームの理論入門　チェスから核戦略まで」(桐谷維＋森克美訳) 講談社ブルーバックス B217 、１９７３年 Game Theory, by Morton D.Davis(1970)

[74] J. デュドネ編「数学史 1700-1900　I,II,III 」(上野健爾＋金子晃＋浪川幸彦＋森田康夫＋山下純一訳) 岩波書店、１９８５年 Abrégé d'Histoire des Mathematiques, edited by Jean Dieudonné(1978)

[75] 遠山啓「無限と連続」岩波新書、岩波書店、１９５２年

[76] アンドレ・ドラシエ「現代の幾何学」(村上信吾訳) 文庫クセジュ４０１、白水社、１９７４年

[77] 長野正「曲面の数学－現代数学入門」培風館、１９６８年

[78] 日本数学会編集「岩波　数学辞典　第３版」岩波書店、１９８５年

[79] D.J. ニューマン「数学問題ゼミナール」(一松信訳) シュプリンガー東京

[80] 根上生也「グラフ理論３段階」アウト・オブ・コース２、遊星社

[81] 野崎昭弘「逆説論理学」中公新書５９３、１９８０年。

[82] 野崎昭弘「詭弁論理学」中公新書４４８、１９７６年。

[83] ダレル・ハフ「統計でウソをつく法」(高木秀玄訳) ブルーバックス B120, 講談社

[84] ダレル・ハフ「確率の世界」(国沢清典訳) ブルーバックス B109, 講談社 How to take a Chance, by Darrel Huff(1959)

[85] C. バートウィスル「パズルで語る新しい数学」(三橋重男訳) 東京図書、1972年 Mathematical Puzzles and Perplexities-How to Make the Most of Them, by Claude Birtwistle(1971)

[86] T.L. ヒース「ギリシャ数学史 I,II 」(平田寛訳) 共立全書518，521、1959年 A Manual of Greek Mathematics, by Sir Thomas L.Heath(1931)

[87] 一松信「暗号の数理」ブルーバックス 421, 講談社

[88] 一松信「教室に電卓を！(I),(II),(III) 」海鳴社、1980年、1981年

[89] 一松信「四色問題」ブルーバックス 351, 講談社

[90] 一松信「正多面体を解く」東海科学選書、東海大学出版会

[91] 一松信「石とりゲームの数理」数学ライブラリー (教養篇)2 森北出版、1968 年

[92] C.A. ビエルクネス「わが数学者アーベル　その生涯と発見」(辻雄一訳) 現代数学社、1991年 Niels-Henrik Abel Tableau de sa vie et son Action Scientifique(1885)

[93] I. ピーターソン「コンピューター・グラフィックスがひらく　現代数学ワンダーランド」(奥田晃訳) 新曜社

[94] D. ヒルベルト「数学の問題——ヒルベルトの問題」(一松信訳解説) 現代数学の系譜4、共立出版、1969年

[95] 深川英俊＋ダン・ペドー「日本の幾何——何題解けますか？」森北出版、1991年

[96] アラン・ブーヴィエ「集合論」(川尻信夫訳) 文庫クセジュ1363、白水社、1971年

[97] ブラジス他「き弁的推論」(筒井高胤＋千田健吾訳) 数学新書 (東京図書)、1965年

[98] Peter Frankl+前原濶「やさしい幾何学問題ゼミナール」共立出版、1992年

[99] K.O. フリードリックス「ピタゴラスからアインシュタインまで」(秋月康夫訳) SMSG 新数学双書 3, 河出書房新社,1970 年 From Pythagoras to Einstein, by K.O.Friedrichs(1965)

[100] D. ブルガー「多次元★球面国」(石崎阿砂子訳) 東京図書

[101] ブルバキ「数学史」(村田全＋清水達雄訳) 東京図書、１９７０年 Elements d'Histoire des Mathematiques, by Nicolas Bourbaki(1969)

[102] ペアノ「数の概念について」(小野勝次＋梅沢敏郎訳解説) 現代数学の系譜２、共立出版、１９６９年

[103] P. ベックマン「π(パイ) の歴史」(田尾陽一＋清水韶光訳) 蒼樹書房

[104] E.T. ベル「数学を作った人びと (上下)」(田中勇＋銀林浩訳) 東京図書

[105] M. ベルジェ他「幾何問題ゼミ１、２」(山崎直美訳) シュプリンガー東京、１９８７年

[106] ペレリマン「遊びの数学」(藤川健治訳) 現代教養文庫 958, 社会思想社、１９７８年

[107] J.M. ヘンレ「集合論問題ゼミ」(一松信訳) シュプリンガー東京、１９８７年

[108] H. ポアンカレ「科学と仮説」(河野伊三郎訳) 岩波文庫、１９３８年 La Science et l'Hypothese, by Henri Poincaré(1902)

[109] H. ポアンカレ「科学と方法」(吉田洋一訳) 岩波文庫、１９５３年 Science et Methode, by Henri Poincaré(1908)

[110] H. ポアンカレ「科学の価値」(吉田洋一訳) 岩波文庫、１９７７年 La Valeur de la Science, by Henri Poincaré(1905)

[111] ボイヤー「数学の歴史」(加賀美鉄雄＋浦野由有訳) 朝倉書店 A History of Mathematics, by Carl B. Boyer(1968)

[112] ボホナー「科学史における数学」(村田全訳) みすず書房、１９７０年 The Role of Mathematics in the Rise of Science, by Salomon Bochner(1966)

[113] G. ポリア「いかにして問題をとくか」(柿内賢信訳) 丸善

[114] G. ポリア「数学の発見はいかになされるか１　機能と類比」(芝垣和三雄訳) 丸善

[115] G. ポリア「数学の発見はいかになされるか２　発見的推論（そのパターン)」(芝垣和三雄訳) 丸善

[116] マルセル　ボル「改訳　数学の歩み」(村田全訳) 文庫クセジュ１３５、白水社

[117] エミール　ボレル「素数」(芹沢正三訳) 文庫クセジュ２７２、白水社

[118] エミール　ボレル「改訳　確率と生活」(平野次郎訳) 文庫クセジュ９１、白水社、１９６７年

[119] 本間龍雄「グラフ理論入門　点と線の数学」講談社ブルーバックス B255, １９７５年

[120] S. マックレーン「数学－その形式と機能」(彌永昌吉監修、赤尾和男＋岡本周一訳) 森北出版

[121] 村上斉「結び目のはなし」アウト・オブ・コース１、遊星社、１９９０年

[122] 村杉邦男「組み紐の幾何学」ブルーバックス 500, 講談社

[123] 村田全「日本の数学　西洋の数学　比較数学史の試み」中公新書６１１, 中央公論社、１９８１年

[124] 森毅「gay math 1 現代の古典解析－微積分基礎課程－」日本評論社

[125] 森毅「gay math 2 位相のこころ」日本評論社

[126] 森毅「異説数学者列伝」蒼樹社

[127] 森毅「指数・対数のはなし」東京図書、１９８９年

[128] 森毅「数学の歴史」講談社学術文庫

[129] 森毅「魔術から数学へ」講談社学術文庫、１９９１年

[130] 森口繁一＋宇田川金圭久＋一松信「数学公式 I,II,III」岩波全書２２１、２２９、２４４、１９５６年、１９５７年、１９６０年

[131] 森田茂之＋志賀浩二「トポロジーの展開 対話・２０世紀数学の飛翔５」日本評論社、１９９２年

[132] 山田浩「代数曲線の話－現代数学への一つのアプローチ」日本評論社

[133] 吉田光由「塵劫記」(大矢真一校注) 岩波文庫、１９７７年 (寛永２０年)

[134] 吉田洋一「零の発見」岩波新書

[135] L.C. ラーソン「数学発想ゼミナール１、２」(秋山仁＋飯田博和訳) シュプリンガー東京、１９８６年

[136] H. ラーデマッヘル＋ O. テープリッツ「数と図形」(山崎三郎＋鹿野健訳) 日本評論社、１９８９年 Von Zahlen und Figuren, by Hans Rademacher and Otto Toeplitz(1930).

[137] M. ラインズ「数、数、…－不思議なふるまい－」(片山孝次訳) 岩波書店、１９８９年 Numbers at work and at play, by Malcolm E Lines(1987)

[138] M. ラインズ「数－その意外な表情－」(片山孝次訳) 岩波書店

[139] S. ラング「さあ数学しよう！－ハイスクールでの対話－」(松阪和男＋大橋義房訳) 岩波書店

[140] S. ラング「数学の美しさを体験しよう−三つの公開講座」(宮本俊雄訳) 森北出版、１９８９年 The Beauty of Mathematics, by Serge Lang(1984)

[141] J.E. リトルウッド「リトルウッドの数学スクランブル」(金光滋訳) 近代科学社

[142] C. リード「クーラント－数学界の不死鳥　ゲッチンゲン－ニューヨーク」(加藤瑞枝訳) 岩波書店、１９７８年 Courant in Göttingen and New York:The Story of an Improbable Mathematician, by Constance Reid(1976)

[143] F. リヨネ「何だ　この数は？」(滝沢清訳) 東京図書、１９８９年 Les nombres remarquables, by Francois Le Lionnais(1983)

[144] F. リヨネ編「数学思想の流れ」(村田全監訳) 東京図書

[145] リワノワ「ロバチェフスキーの世界」(松野武訳) 東京図書、１９７５年

[146] リワノワ「リーマンとアインシュタインの世界」（松野武＋山崎昇訳）東京図書、１９７４年

[147] G.I. ルザービン「数学論ー数学的認識の本性」（山崎三郎＋柴岡泰光訳）岩波書店、１９７７年

[148] ルイブニコフ「数学史 I,II,III,IV 」（井関清志＋山内一次訳）東京図書、１９６３年

[149] コンスタンス・レイド「ゼロから無限へ　数論の世界を訪ねて」（芹沢正三訳）講談社ブルーバックス B177 、１９７１年 From Zero to Infinity, by Constance Reid

[150] ヘンリ・レッドガード他「シャーロック・ホームズのコンピュータ入門」（石田俊広他訳）自然社、１９８４年

[151] A. レニイ「数学についての三つの対話」(好田順治訳) ブルーバックス 272, 講談社

[152] J. ローゼン「シンメトリーを求めて」（永田雅宜監訳・吉沢保枝訳）紀伊國屋書店、１９７７年 Symmetry Discovered, by Joe Rosen(1975)

[153] ヘルマン・ワイル「数学と自然科学の哲学」（菅原正夫＋下村寅太郎＋森繁雄）岩波書店、１９５９年 Philosophy of Mathematica and Natural Science, by Hermann Weyl(1949)

[154] ワロンツォーワ「コワレフスカヤの生涯ー孤独な愛に生きる女流数学者」（三橋重男訳）東京図書、１９７５年