

# 数について（美杉セミナー' 91）

蟹江 幸博  
三重大学教育

平成3年8月27日

## 1 セミナーの目的

高校までの数学では、取り扱われている題材が羅列的と言うか、細切れと言うか、体系的であるとは言えません。この点を補完することと、高校数学（受験数学と言う積もりはありません）と大学での数学とのギャップを幾分でも埋めることが、大学教育の側からも高校教育の側からも必要且つ重要だと思われる。

指導要領のあり方や内容に不満を表明し、訂正を主張することも大切でしょうが、一大学教師としての力は大きなものではなく、僕個人にはそういう意味の影響はありません。迂遠と思われても、我々に出来ることしか出来ないのだし、また出来ることをしていかなばならないと考えるようになりました。高校生が将来必ずしも数学者、数学の教育者、数学を利用する研究者にならないとしても、数学の本来の姿を伝えることには意味があると思います。今の社会では、数学それ自体と言うより数学的なものの考え方がますます重要になってきていると思われます。数学に対する正しい認識が、というより（我々を取り巻く）世界に対する正しい数学的な認識と視点が必要となっていると思われます。個々の人がそれを身に付けることばかりでなく、社会全体にそのような理解が浸透して欲しいものだと考えております。そうした努力の第一歩として、今回のセミナーを考えたいと思っています。従って、何より重要なのは、これからこうした催しを続けていくことであり、さらに広く深く発展させていくことだと思います。

終わりに、三重県高等学校数学教育研究会の皆様の多大なお骨折りと熱意に胸打たれる思いがしましたことと同時に、熱心な受講生（高校生）の前で講義の出来る機会を与えて下さったことに感謝したいと思います。

## 2 数とは何か

テーマを何にするか、又どのように進めるかについては、全く成算がありませんでした。少ない予備知識で講義することが出来るトピックスを、集合論、初等整数論、代数学、幾何学、トポロジー、解析学、組合せ論の中から、思い付くまま拾い出してみました。それを松原先生（大谷女子大）、楠井先生（桑名高校）そのほかの高校の先生にお見せして、相談に乗って頂きました。

ご意見を参考にして、数についての基本的な考え方、離散量と連続量の関わりについて話すことにしました。又例として、ピタゴラス数の整数論的な取り扱いと連続量の中での取り扱いを、受講生に心理的余裕があれば、 $n=4$ の時のフェルマ予想の証明、又時間に余裕があれば、有理数の小数展開での循環節と、その長さの問題を扱い、系としてオイラーの定理、フェルマの小定理を導いてみるという案を立てました。

こういう催しですから、進め方は受講生の様子を見ながら適宜、臨機に話すことにし、細かいことは決めないことにしました。高校の先生方のようにどこまでやらねばならないというノルマのない気楽さと言われるかも知れません。ですが、数学を楽しむためには、そして数学を本当に理解するには、自由な雰囲気が必要だと思います。ノルマを決めるとどうしても無理が出てきますし。僕の割り当て時間は一日目の2時間と二日目の2時間の計4時間でした。

さて、うまく行ったでしょうか？

まず最初に、受講生全員と後ろにおいで先生方に、知っている数の例を挙げて貰いました。最初に8が出たせいか、1,2桁の整数が割と人気でした。何とか違う数を挙げようと苦労したようで、大きな桁の整数、 $5!$ (5の階乗)、 $2^5$ 、小数、分数、負の数、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt[3]{10}$ 、 $\pi$ (円周率)、 $e$ (自然対数の底)、 $\log_{10} 2$ 、 $\log_e 5$ など底を色々に取った対数の値、 $e^\pi$ 、 $\sqrt{\pi}$ などが挙りました。0や1が出てきたのはやっと10番目以降だったのは、とても不思議でした。僕の尋ね方が悪かったのか、受講生の(心の)中の数学風景には0や1が際立った位置を占めていなかったのかも知れません。

あまり不思議だったので、挙げられた数の中でどれが一番大切というか、基本的だと思うかという質問をしました。やっと、1と0が出てきました。それは、僕が何と無く落胆してたと言うか、0や1と言って欲しそうな顔をしてたからかも知れません。

0と1以外の意見は出ないだろうと思っていたらそういう誘導はけしからんという意味でか、M先生(津高校)は決然と挙手され $\pi$ こそ一番大事な数だ

と言われました。 $\pi$ がないと円周率は書きようがない(??)というのが論点でした。勿論、それはその通りです。でも何故一番大切と言うことになるのでしょうか？その時点では気付きませんでした。今思えば、この講義の1つのテーマ、離散量と連続量、の2つを結ぶキーとなる数として最も典型的で重要だと言うことも出来ます。そういうことだったのですよね、M先生。

数を挙げろと言うのに、 $x$ と言った人が居ました。その場でコメントするととんでもない方向に話が逸れて行きそうなので、コメントするのを我慢していると、またある $x$ の関数を挙げた人も居ました。あ～あ、数とは何だと思っているのでしょうか。と言うより、 $x$ を何だと思っているのでしょうか。これについては、又日を改めてお話しすることにした方が良いでしょう。中学の3年間の数学は、 $x$ の持つ意味、“変数”、“不定元”を色々な実例の中で体得して貰うためのようなもので、短いコメントは却って誤解を生みそうですから。

さて0や1は何故重要なのでしょうか。最も簡単な答は、“0は加法の単位元で、1は乗法の単位元”というものでしょう。これはこれで正しいのですが、少し舌足らずの感がありますね。数とは何かについて少し考えてみてから、もう一度考えることにしましょう。

数と書いても、“すう”とも“かず”とも読めますね。違うのでしょうか？それとも同じことなのでしょうか？例えば、1, 2, 3, …のような数は、何なら大きな5212367のような数を考えてみても良いですが、これらは“すう”と読んでも“かず”と読んでも別に問題はないようです。でも、 $\sqrt{2}$ や $\pi$ のような数は、“かず”と読むと何だか変な感じがするでしょう。“すう”の方が一般的な言葉のようです。数の働きの中で“かぞえる”という機能が人間の自然な感覚に最も馴染んでいることの為に、数という文字そのものに“かず”という読み方があるのだ言えるのではないのでしょうか。

では、数とは何かという問に答えるため、数には何が出来るか、何が出来るかと期待されているかを考えてみましょう。

1. 数えること。つまり何かの個数を1つ、2つと数えていき、何個あるかを数えること。
2. 計算が出来ること。つまり、加減乗除(のうち少なくとも幾つか)の演算が出来ること。
3. はかる(測る、計る、量る)こと。長さ、面積、体積、時間、重さなど、連続だと思われる量をはかること。

4. 大きさや多さを比べること。また転じて、近さや似通う度合いをくらべること。

実際の講義では2日目の午前中に話したことですが、取り敢えず受講生諸君は、次のような数のクラスを知っていることにして下さい。まず

自然数  $N$ 。これを挙げた時、0 は自然数なのかという質問が出ました。大学でもよくある質問で、この質問にはいつでも Zero is the most natural number! と答えることにしています。それで思わずこの言葉が口から出てしまいましたが、実はどちらでもよいのです。決めてさえあれば。

自然数  $N$  では加法は自由に行えますが、減法は出来ない場合があります。この状況を、 $N$  は加法に関して半群であると言いますが、0 はこの加法半群  $N$  の単位元です。単位元があった方が気持ちいいでしょ、と言うのが数学者の多くが 0 を自然数にする理由です。

でも、単位元のない半群だって、別に群より悪いものというわけじゃなし、1 を最小の自然数と思った方が数え主義には都合が良いというわけで、0 を仲間外れにしても構いません。数学者でも理論によってはこの流儀を採ることがあります。議論に便利な方、都合の良い方でやればいいのです。

種々の（歴史的、政治的）理由から、高校までは 0 は自然数とは言わないそうですので、受講生諸君は、答案を書く際にはそのようにしましょう。ちなみに大学受験の時はどっちでも構いません。但し、その際は 0 を含んでいると思うか、思わないかを答案上に明示しなければいけません。だから、（採点する方も面倒なので）、それが問題になるような問題は出さないようにするし、出さなくてはならなくなったら、出題文の中にはっきり書いておくのが普通です。

整数  $Z$ 。負の整数も含むと云うことです。これで減法は自由に出来るようになりました。 $Z$  は加法に関して群になると云います。乗法に関してはまだ半群のままですよ。

有理数  $Q$ 。整数と整数の比の値として得られる数のことです。加減乗除の演算が自由に出来ます。四則の計算がしたいだけならこれでもう充分ですね。この状況を  $Q$  は体であると言います。自然数から割り算だけは自由にしたいというのなら、正の（または非負の）有理数全体に広げればよい訳ですね。

有理数はいわゆる分数のことです。四則が自由に出来ると言いましたが、例えば、分数を好きなだけ持ってきて、それを好きな（有理数係数の）多項式に入れて、そうしたものを分母・分子に置いてみても、整理してしまえばまた分母、分子が整数であるような分数に出来るという事実も意味しているのです。

又次のように言うことも出来ます。つまり整係数の1次方程式が自由に解けるように $\mathbb{Z}$ に新しい数を付け加えたものが $\mathbb{Q}$ であると言うことが出来ます。つまり、すべての整数 $a(\neq 0), b$ に対する1次方程式 $ax+b=0$ の解 $-\frac{b}{a}$ を付け加えて出来たものということです。

ところで、小数というのもありますね。でも有限の小数は、単に分母が10の巾であるような分数のことです。歴史的な意味もあり、実用上も重要ですが、数学の理論上は大きな意味はありません。無限小数を一般に考え、意味を付けようとすると、次の“実数”の話になります。

**実数 R.** 実数の導入は大学初年度の数学のハイライトです。僕もこれを聞かされた時、大学の数学はちょっと違うぞという気がしたものだし、始めて数学も学問として面白そうだったものです。今も（やっている所では）そういう効果を狙って、講義をしているのです。

しかし、現実にはハイライトだったと言う方が良いかも知れません。数学科以外の学生相手の講義では、殆どなされないか省略されることが多くなってきました。大学の数学教師の側は、高校までの数学教育で培われた数学に対する偏見と悪習を打ち壊し、学生諸君の頭の中をかき混ぜて、正しい認識を各自に持って貰いたいのですが、学生側は大学に入ってまで頭を使いたくないと思っている人が多いのか余り受け付けてはくれないようです。何をしに大学に入ってくるのでしょうかね。大学は元来勉強するために入るところです。僕等が入学した頃はそうでした。今は？… 今もそうでしょう。ね、そうでしょう。

それはともかく、今は聞いてくれる人がいるのだから、聞いて貰うことにしましょう。実数と言うのは、有理数に極限の概念を付加したものです。

例えば、 $\sqrt{2}$ は知っていますね。 $\sqrt{2}$ が有理数でないことは高校の教科書にも載っていますね。（有理数でない数を無理数と言う。じゃ、数って何？） $\sqrt{2}$ は1.41421356…と習いましたか。これは $\sqrt{2}$ の小数展開です。

つまり、1.41421356...を、小数点以下1桁目まで、2桁目まで、というように考えると小数（これは有理数）の列が得られます。例えば、小数点以下8桁までの小数1.41421356は $\sqrt{2}$ との近さが、 $10^{-8}$ より小さくなっているのです。有理数で無理数 $\sqrt{2}$ に近付いて行く無限列があるのです。有理数の無限列で何かに近付いて行くようなもの（これにはちゃんとした数学的な定義があります）があったら、その候補をそれ自体数だと思ったものが実数なのです。その意味で $\pi$ も立派な実数です。例えば、ウォリスの公式

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

は $\pi$ に近付いて行く有理数（分数）の列を与えています。

大事なことは、実数の無限列でさらに何かに近付こうとしても行き先は実数になってしまうことです。証明するには、巧く有理数の列を探してきて、同じ何かに近付くように出来ることを示すことになります。分かるかな？これが分り難ければ、また別の実数の導入法もあります（勿論同値な導入法ですよ）から、大学で勉強して下さい。

このことを実数の連続性と言います。実数の集合にはもう穴は開いていない。べたーっと実数が、切れ目なく、繋がっているという感じですね。

**複素数  $\mathbf{C}$ .** 実数の中で四則演算が自由に出来るのはいいのだけれど（ $\mathbf{R}$  が体だということ）、 $x^2 + 1 = 0$  という整係数の2次方程式も解けませんね。実数  $\mathbf{R}$  にこの根を付け加えてさらに四則演算の出来るようにしたものが複素数です。

整係数のすべての1次方程式を自由に解けるようにしたかったから有理数を考えたのでしたね。有理数の中で、すべての有理係数の1次方程式が解けたのと同じ様に、複素数の中ですべての複素係数の2次方程式が解けます（2次方程式の根の公式は係数が複素数でも使える形をしています）。さらに重要なことは、複素係数の任意次数の代数方程式（多項式=0の形の方程式）は複素数の中にすべての根を持っていることです。このことを代数学の基本定理と言います。

混乱している人もいるようなので、言葉の定義をしておきましょう。実数でない複素数を虚数、 $\sqrt{-1}$ （虚数単位）の実数倍の形に表わされる複素数を純虚数と言います。

さて話を元に戻しましょう。

数概念に対する要請 1 ～ 4 の中で特に 3 を実現しようと思えば、数の範囲は実数全体にまで広げなければなりません。連続性の実現こそが実数概念の本質と言えるでしょう。でも今日は、これ以上この話に細かく入らないようにしましょう（時間がない、時間がない）。でも一言だけ。連続ということがあって、はじめて極限について考えることが出来、無限の過程を 1 つの実体として認識することが出来るのです。いわば、無限を手づかみにしているわけです。これがあってはじめて、アキレスが亀を追い越すことが出来、必要なら飛んでいる矢も止められるわけです。これはギリシャの天才たちが思いもよらなかった解決です。

4 の前半は、数の間に順序があること（つまり 2 つの数にはどちらが大きいかわかっていること）ですが、そうだとすると数の範囲を複素数まで広げるのは行き過ぎということになります。

複素数にも順序が入ることを知っている人がいるかも知れませんね。でもその順序は、演算と仲良くすることは出来ないのです。しかし、複素数にも演算と仲良くできる近さの概念なら、入れることができます。その意味で、有理数、実数、複素数での四則演算は連続と言うことができます。

2 は算数、数学をやりたいのならどうしても欲しい性質ですね。演算だけは出来るように、出来ればより多くの演算が出来るようにと、数概念は自然数から拡張されてきました。それでは元になる自然数は良く分っていると言えるのでしょうか。

### 3 自然数について (I)

1 が何であるのかという問は、数学的と言うより哲学的な議論を引き起こします。What を問うことよりも、How を問うことの重要性に気付いたのが、近代科学の出発点だったように、我々も 1 が何かを問うよりも、1 が如何に振る舞うかを見ることにしましょう。一言で言えば、公理的に自然数を取り扱うということです。つまり、公理論には意味の無い(?) 哲学的議論を避けるという御利益があるのです。だから時には却って教育的なのです。

さて、1 って何でしょう。自然数には他の数の集合とは異なる際立った特徴があります。それはどんな自然数にも次の数があるということです。1 の次は 2、2 の次は 3、3 の次は 4、 $\dots$ , 12345 の次は 12346,  $\dots$ 。この操作は無限に続くものと考えられます。どんな自然数  $n$  にもその次の数  $n+1$  があるというわけで、 $+1$  という演算が定義されます。だから  $1+1$  が何故 2 になるかというような問には何の意味もありません。1 の次の数を 2 と言い、1 の次の数を演算の形で表わしたものが  $1+1$  なのですから。1 から 9 まではそれぞれ次の数に新しい数字を与えて区別したのですから、ここまでの数に対して  $+1$  でどうなるかは数字の定義そのものです。それ以上は 10 進表記の規則(位取り、繰り上がり等)によって、任意の 10 進整数の次の数はどう表記されるかが定まっているのです。

$+1$  はこれで良いとなると、次は  $+2$  ですね。これは  $+$ (加法) に結合律  $a+(b+c)=(a+b)+c$  が成り立つことを要請するので、

$$a+2=a+(1+1)=(a+1)+1$$

が成り立ちます。つまり  $+2$  は次の次の数を与える演算だということになりますね。同様に  $+3$  は次の次の次の数を与え、 $+4$  は次の次の次の次の数を与え、 $\dots$  となり、どんな自然数  $n$  に対しても  $+(n+1)$  は

$$a+(n+1)=(a+n)+1$$

として、帰納的に定義されることになります。だから例えば  $2+3=5$  などというのも何故成り立つのかという問題ではなくて、そのように定義したから成り立つのだと言うわけです。

でもこれは純粋に数学の内部の問題としては、ということです。1 って何だと言い始めてから、何処かに“数える”ことがあったでしょうか。誤解を恐れずに言ってしまうでしょう。“ $2+3=5$ ”ということと、小学校でやる“2 個



のりんごと3個のりんごがありますね。全部で何個でしょう。はい5個ですね”という問題とは（直接は）何の関係もないのです。りんごは数学では扱いません。それは困ると思うでしょう。でも仕方が無いのです。数学ではりんごは取り扱えないのですから。小学校の算数と中学以降の数学との決定的なこれが差なのです。

誤解を恐れずに言うなら、算数は数学ではありません。算数は数学の応用の一分野で、小学校で習う計算法（筆算、掛け算の九九など）は、この分野に必要な数学の技術を習うことだったと言えます。りんご2個とりんご3個を合すると5個になるというのは、計算したから分るというものではないのです。2個のりんごと3個のりんごを持ってきて、合せて置いてみれば5個になるのは見たら分るのです。合せて置いてあると、どんな順番に数えても1,2,3,4,5で終わること、つまり5個あることは一目見たら分るでしょう。この見たら分ることから、 $2+3=5$ という等式が成り立つことを納得させているのです。そんなこと、どっちでも同じじゃないかと言う人がいるでしょうね。この差が分らない人には、算数は分っても数学はひどく難しいものになるでしょう。くどいかも知れませんが、もう少し説明しましょう。

2個のりんごと3個のりんごなら5個（のりんご）になるのは当たり前でも、2個のりんごと、3個のみかんを合せたら、一体5個の何になるのでしょうか。同じりんごでも、世界一や陸奥の様に大きいりんごもあれば、アルプス乙女のように小さいりんごもあります。陸奥を2個とアルプス乙女3個とで、5個のりんごですと言うのはどこか無理がありますね。

同じ種類の同じ重さのりんごでも、例えばここ（教室）に2個あり、目に見えない所（家でも、市場でも、果樹園でも、どこでもいい）に3個あった時に、足せと言うなら足せはするけれど、足すというのに実際上どれ程の意味があるのでしょうか。足すためには、何等かの仕方、3個のりんごをここに持ってくる必要があります。持ってこれない場合にも、例えば、ある人が家に5個持っていたりんごのうち2個を教室まで持ってきた、とでもいうような別の関係が必要です。

別の例を考えましょう。（黒板の前にいたので、実際に手で持って示しながら）チョークが5本あります。使っていないのも使ったのものもあるし、使ったもののうちでも長さはかなり違います。しかし、5本は5本だとも言えます。そこで、こうしたら（と言いながら、1本のチョークを折って）、6本になりますね。 $5=6$ なのではないでしょうか。チョークの折れ口がくっついていたら5本で、離れていたら6本、何だかいい加減な感じがしませんか。

5や、せめて10程度のものなら見たら幾つあるか分りますね。前にも言った

ように、5個あるのが分るというのは、どんな風に数えていっても、1, 2, 3, 4, 5と数えたらお仕舞になることが分るということです。この“どんな風に”というのが大切なのです。別の人が数えたり明日数えたら、4で終わってしまうということも6迄かかるということはありません。勿論りんごを誰かが食べてしまえばそんなことも起ります。これは状況が変わってしまったからで、4になっても誰も驚きません。数えるとき、前に数えた時と同じ状態であることが必要ですね。

さて何度も数えるとして、いつも同じ状態が保たれていたとしましょう（そんなことはあり得ないと言わないで下さい。貴方の言うのが正しいけれど、又議論が迷路に入っていくことになるから）。それでも、100個のりんごならどうでしょう。何度数えても100になる自信がありますか。OK, OK! 自信家には叶わない。

じゃ、10000個ならどうです。一休頓智話じゃないけれど、10000個のりんごをここに並べてくれたら数えてあげようと言われたら困りますね。10000個のりんごなど、この机の上には載りませんからね。

それでは、節分の時に使う豆を考えて下さい。それを段ボールの箱一杯に入れたものを数えて貰いましょう。隣に同じ大きさの空のりんご箱を置いておけば、数えることは原理的には出来るようになったでしょう。10進法のお蔭で、有限個だと分っていればどんな大きな数でも表わせるのですから。

話の都合上、10万個だったとしましょう。でも実際に数えて、10万個になるでしょうか。数えてみれば、100003であったり、99995であったりするでしょう。たまには100000個になる時もあるかも知れません。実際には、まあ、10回くらい数えたとして、極端に離れた数は除外して、平均を採るということになるでしょうね。

それでもそのようにしたら100000個となったとしましょう。しかし、この様な状況で外から1個の豆を加えたら100001個になると言っても、説得力はあまり期待できません。数学的帰納法もこの様な場合に適用できると主張しても、余り説得力がありませんね。

この話は数学的帰納法が間違っているということではありません。あくまでも、この様な状況には適用できないというだけです。5個や10個の時の1個の豆と100000個もあった時の1個の豆とは人間にとって、認識の深みが違うのです。

今挙げたような色々な議論は、僕も子供の頃時々考えたものです。誰かが答えてくれるとも思えなかったので、誰にも訊きませんでした。小学校の頃、先生に訊いたら教えて貰えたでしょうか？ 多分無理だったでしょうね。今考

えると、先生に訊いてもいいことと悪いことを自分の中で区別していたようです。訊いてもいいことと言うより、訊いても答えてくれるわけがないというか、この種の疑問は自分で答える以外の方法はないと思っていたようです。

自分では、先生には割と協力的だったと思っていたのですが、こうして見るとどうも嫌な子供だったような気がしてきます。それなのに今は大学の教師として、先生になる人を教える立場にいます。妙なものですね。この種の問題を色々考えるようにと学生達に言ってはみるのですが、中々考えてくれません。また現場で出会う素朴で根本的な疑問をすべて挙げて説明することも出来ません。そういう時、学生たちに次の様に言っています。

“教壇に立って、この種の疑問が子供から出た時、決して無視しないで下さい。君たちの学力で答えられないことも多いでしょう。そんな時、答えられなくてもいい、一緒に考えてやって下さい。しばらく一緒に考えても分らない時は、この次までの宿題（先生の）にして先に進めばよい。テーマによってはクラス全員の宿題にしてもよいし、一週間後、一月後の宿題にしてもよい。大切なことは、この問題を先送りにする時、疑問を出した子供を褒めてやることです。そのことによって、君達はアインシュタインを産むことになるかも知れないのだから。”

中学や高校でも、こういう疑問を考えたかも知れませんが、どうも大切なことだと思わなかったような気がします。新しい知識が一杯押し寄せてきて、それにワクワクし過ぎて、根本的なことを考えるのを忘れていたようです。大学に入って、実数の理論を学び、自然数論を勉強し、集合論を齧ってみると、少しは納得できたかなと思えるようになりました。

さて、問題は一体何なのでしょう？

一言で言うなら、1が担う“等質性”と言うか、“同一性”がキーワードだと思います。りんごとみかんの場合でも、大小のりんごの場合でも、そのどれを取っても同じ1で表わされることの認識です。どれも同じ1で表わしてよいという何等かの保証があれば、問題はないわけです。上で挙げた例では、日常感覚としては同じものと見なすのが難しいようなものだったわけです。豆の場合でも、10個程度の豆を見ている時に感じる1の重みと同一性が、100000個も豆を見た後の1個の豆に感じられるかということです。加法の結合性と交換性から

$$1+100000 = 100+1+99900 = 10000+1+90000 = 50000+1+50000 = 100000+1$$

は数学の世界では（厳密に）成り立っていますが、ここに現れるすべての1は当然同じ1だと考えられているのです。従って、これらの1が同じとは思

えないような状況の元ではこの計算は成り立たないことになります。

1 が担う同一性などと言うと何やら哲学めいて、数学ではないように聞こえ、いかがわしい議論だと感じるかも知れません。その通り、いかがわしくて当たり前。この部分は数学ではないのですから。目の前にある自然の又社会のある現象に数学を適用させようという問題で、適用の仕方が適切かどうかという問題なのですから。小学校でやる算数では数学とその応用というように分けて考えず、現実の色々な問題を考え、それを解くための数学的な理論や技術の必要性や正当性を納得させようとしているのです。この手法は数学の歴史から見て、“個体発生が系統発生を繰り返す”ことに当たり、初学者に有り勝ちな障壁を低める方法として採用されているのです。

## 4 自然数について (II)

さて、もう少し議論を数学の側に引き寄せることにしましょう。第2次世界大戦後ブルバキを名乗るフランスの(当時)若手の数学者のグループが“一つの数学”の為の数学原論を書き出してから、大多数の数学者にとって、“始めに集合ありき”ということになりました。考える対象は常にまず集合であり、その間の写像であります。対象によっては、その集合の上に色々な上部構造、例えば代数構造(集合の元の間には色々な性質を満たす演算がある)、位相構造(集合の元の間には“近さ”を考える)、順序構造(集合の元の間には大小もしくは前後の関係を入れる)を付加して考え、写像もその上部構造を保つものだけ考えることにすると、対象に対してより精密な議論が出来るようになります。

そこで自然数を集合を使って表わしてみましょう。集合とは何かというのは、これまた迷路の様な議論に巻き込まれてしまいますので止めにします(時間ありませんしね)。集合とはものの集まりということで納得しておいて下さい。ただ、集合であるからには次の様になっていないと困ります。 $A$  が集合である為には、元  $a$  が  $A$  に属するか否かが(原理的には)定まっている必要があります。ここでまた“元”というのは何なのかという疑問が生まれます。これに対して、人間に考えられる対象の全てであると答えられたらさぞかし気持ちが良いでしょうね。そうはいかないのです。そういうことにすると矛盾が起るのです。例えばラッセルの逆理と呼ばれるパラドックスがこの事情を説明してくれるのですが、時間が無いので省略。又別の機会に。

そこで数学者はどうするかというと、普遍集合  $\Omega$  と言うものを考えます。そ

して $\Omega$ の部分集合  $A$  だけしか考えないことにするのです。つまり、 $\Omega$ に属する元  $a$  が、 $A$  に属しているかどうかを判定する何かしらの“機構”が与えられている時、 $A$  を集合と言う、ということにするのです。

“ん？…これじゃ定義になっていないよ。集合を定義するのに普遍集合と言う集合を使っているじゃないか。”

誰だ？そんなことを言うのは。だから言ったでしょ、迷路に入り込むって。“集合”も“元”も“属する”ということも無定義術語で、ある一群の公理を満たすものとするのです。これなら文句無いでしょう。しかし文句は無くても何だか頼りなく寂しい感じがしますね。だからむしろ、“集合はものの集りです”、と言い切ってこれ以上議論しないことにした方がお互いに平和だということです。取り敢えずこれでいいことにして下さい。

ものって何だって？だから、それはね、普遍集合 $\Omega$ の元のことなの。

“普遍集合 $\Omega$ ってどうやって決めるの？”

うーむ、困った。“普通の”数学者はね、適当に決めるんです。必要なものを必要な時必要なだけ $\Omega$ に入れることにしています。展開している理論に不都合なものが入ってしまったら、それを取り除くように理論の方を変える方を選ぶことにしています。

“いい加減なんだね。”

そう、そういう意味ではいい加減かも知れませんね。しかし数学者としては、“誠実さ”と言って欲しいんですけど。

もう、いい？ 時間もないし（言い訳）、数学やるよ。

$\varphi: A \rightarrow B$  が集合  $A$  から集合  $B$  への写像であるとは、集合  $A$  の任意の元  $a$  に対して、集合  $B$  の元  $\varphi(a)$  がただ一通り定まる機構がある時に言う。 $\varphi(a)$  を写像  $\varphi$  による元  $a$  の像と言う。 $B$  が数の集合のとき、つまり  $\mathbf{R}$  や  $\mathbf{C}$  の部分集合のときは、写像  $\varphi$  を集合  $A$  上の関数と言うことがある。

どう？数学らしいでしょう。この際ついでだから、数学っぽく必要な定義を述べてしましましょう。

写像  $\varphi: A \rightarrow B$  が 1 対 1 対応であるとは  $\varphi$  が全単射である時に言い、 $\varphi$  が全単射であるとは  $\varphi$  が全射且つ単射の時に言う。 $\varphi$  が全射であるとは、 $B$  の任意の元  $b$  に対して集合  $A$  の元  $a$  が存在して  $b = \varphi(a)$  となる時に言い、 $\varphi$  が単射であるとは、 $A$  の異なる 2 元  $a(\neq)c$  の像  $\varphi(a)$  と  $\varphi(c)$  が常に異なる時に言う。

つまり、1 対 1 対応  $\varphi$  は  $A$  の元と  $B$  の元とを過不足なく 1 つずつ対応させているもののことで、この時、 $A$  と  $B$  とは集合として同じものであると考えることにする。集合  $A$  と  $B$  が数直線の一部、例えば开区間とか閉区間で、関

数 $\varphi$ が連続の時なら、1対1対応は $\varphi$ が狭義の単調関数であるということになりますね。

この“同じと考える”というところが分ったようで分り難いところですね。例えば、

$$A = \{\text{りんご、みかん、なし}\}, \quad B = \{\text{りんご1、りんご2、りんご3}\}$$

だったとしましょう。1対1対応 $\varphi$ を

$$\varphi(\text{りんご}) = \text{りんご1}, \quad \varphi(\text{みかん}) = \text{りんご2}, \quad \varphi(\text{なし}) = \text{りんご3}$$

と採ることも出来るし、

$$\varphi(\text{りんご}) = \text{りんご3}, \quad \varphi(\text{みかん}) = \text{りんご1}, \quad \varphi(\text{なし}) = \text{りんご2}$$

と採ることも出来、1対1対応があるから集合 $A$ と $B$ は(集合として)同じと考えるのです。更に集合 $A$ は

$$C = \{\text{白いチョーク、赤いチョーク、青いチョーク}\}, \quad D = \{1, 2, 3\}$$

との間にも1対1対応が作れるのは見たら分りますね。これらを全部同じだと考えるんですよ。集合の中味の個性、つまり集合に属するメンバー達の特性はすべて無視するというのが、集合としてのアイデンティティなのです。元の個性や相互の組織などを考えたければ、単なる集合としてではなく、集合に内部構造を込めて考えるということになります。しかし集合の元の数、つまり個数というのは個性を無視した時に始めて見えてくるものだと言えます。そして集合として同じと言うことは個数が同じことだと考えるのです。

数学はいつでも、考えが煮詰まってくると、論理構成をひっくり返します。その方が簡潔で精確に述べられ、信頼性が上がるからですが、分り難さもその所為だと言えます。だから数学で(特に心情的に)分り難いところに出会ったら、論理構成を逆にして、色んな例を思い浮べてみると理解できることがあります。

さて、“同じ”ということが一番の問題のようです。本当に“同じ”ものだけが同じということなら何も困りはしないのですが、それでは新しいことは何も分らないことになります。本当は違うものだけれど、今(ここで、“何を問題にしているか”が問われているのです)、“同じ”だと思おうとするのです。ですから、“同じ”と思うにも何かしらの制限と言うか、規約が必要になりますね。“同じ”とはどういうことかについての数学者の一つの答をお見せ

しましょう。“同じ”という言葉、日常語でないことをはっきりさせるために“同値”という言葉に換えることにします。(もしかすると、これは日本の数学者の悪い癖かも知れません。)

集合  $S$  を考える。 $S$  中の 2 項関係  $\sim$  ( $S$  の任意の 2 元の間  $\sim$  が成り立つか成り立たないかが定まっていること) が次の 3 つの規則を満たす時、同値関係であると言う。

- |        |  |
|--------|--|
| 1. 反射律 | 任意の元 $a \in S$ に対し、 $a \sim a$                                   |
| 2. 対称律 | 任意の元 $a, b \in S$ に対し、 $a \sim b$ ならば $b \sim a$                 |
| 3. 推移律 | 任意の元 $a, b, c \in S$ に対し、 $a \sim b, b \sim c$ ならば<br>$a \sim c$ |

少し考えてみれば、この同値関係  $\sim$  の満たすべき性質 1 ~ 3 は、算数や数学で扱っている等号  $=$  の持っている性質のすべてだと言っても良いと思いませんか。誰がこの概念を見つけたのか知りませんが、集合を数学を語る根本概念にしようという決意が数学者の社会に生まれた頃自然発生的に言うか、暗黙の了解として生まれたようです。時代がそれを準備していたもののようにも思えます。

じっと考えたら自然に分ると思いますし、本当はそれ以外にこの概念の正当性を理解するのは難しいとは思いますが、この講義の性格上(蛇足とは思いますが)少し解説を付けましょう。

先ず反射律ですが、自分自身とは同じにならなければ“同じ”って一体何だという気もするかも知れませんね。更にはこんな当たり前のこと、わざわざ規則として挙げる必要があるのかと思うかも知れませんね。しかし、この規則は非常に重要なのです。この規則を明示することが、集合を基礎とした議論の成功の秘密なのです。どうしてかって？ 答え難い質問ですね。何故重要なのかは、同値関係を使った議論をある程度展開してからでないと、説明するのは実際上不可能なのです。一言だけ観念的に言っておくなら、兎角に発散しがちな数学者の議論を一定の所に収束させるために必要なのだということです。

分ったかな？…分らない？ 困ったな。無能な数学教師としては、“勉強なさい。そうしたら、自然に分るようになります”、としか言えないのですよ。又いつか、このことだけを理解して貰えるような話をしてもいいけれど、これだけで 2 時間ほど時間を下さい。

さて、対称律ですが、等しいという関係は、右から見ても左から見ても変わらないということですね。視点によって等しかったり等しくなかったりするのでは、“等しい”と言うに値しないということです。見方や考え方で等しかったり等しくなかったりするようなものでも、現実の社会では“等しい”と言うことがあるようですが、そんな時は上の3つの規則を使った議論をしてはいけません。今貴方たちはこのことは当たり前だと思っているでしょうが、政治家の嘘、マスコミの嘘、哲学者の嘘の中で、この“嘘”に気付くことは易しいことではありません。数学の上でこの規則を使うのは、式を見やすくするためだったり、式の意味を考え直すためだったりするときです。式の変形や運用で何だか訳が分らないといった時に、意識的に等号の意味を見直してみると当たり前のことに悩んでいたことに気付くことがあります。

最後に推移律ですが、これが無いと議論を円滑に進めることが出来なくなります。方程式を解くのも、式の展開や因数分解をするのも、式を一步一步変形して行きますが、そうしても良いことを保証しているのです。

同値関係ではない関係の例を挙げて、同値関係の意味を考えてみましょう。例えば友達という関係があります。推移律は全然成り立ちそうにありません。友達の友達は友達だというのが推移律の導くものですが、そんなことは歌の世界でしかありそうにありません、残念なことです。対称律も危ないですね。 $A$ が $B$ を好きで友達だと思っても、 $B$ の方は $A$ を友達と思っていないということもよくあることです。人に依れば反射律も駄目かな。最大の敵は自分自身という人もあるし、誰にでもそんな時がありますね。

友達という関係が特にあやふやな関係だというわけではありません。どんな人間関係も、社会契約上の関係も数学的に見て同値関係になることはまずあり得ません。それどころか理科系の学問でも博物学的段階では難しいことだと言えるでしょう。例えば植物分類学なら、ある植物がどんな科に属するかまたは別に一科を設けるべきか論争に決着が付いていないことも少なくありません。

さて数学に戻りましょう。同値関係があれば集合 $S$ をクラス分けすることが出来ます。つまり、 $S$ を(互いに共通部分のない)部分集合の集りに分け直すわけです。部分集合 $S_a = \{x \in S; x \sim a\}$ は $a$ と同値な元を集めたものとして定め、 $a$ の属する同値類と言います。この部分集合 $S_a$ 達を元だと思ふ集合

$$\bar{S} = S / \sim = \{S_a; a \in S\}$$

を $S$ の同値関係 $\sim$ による商集合と言います。部分集合 $S_a$ に属する任意の元を $S_a$ の代表元と言います。数学は民主主義者の集りで、任意の元がその属する



クラスの代表と考えます。

同値類  $S_a$  は  $S$  の部分集合ですが元  $a$  が違っても全く同じになってしまうことが多く起ります。実際、任意の  $a, b \in S$  に対して

$$S_a = S_b \iff a \sim b$$

が成り立ちます。証明は省略しますが、易しいですから自分でやってみてください。

$S$  の部分集合  $R$  が代表系であるとは、 $R$  の各元は互いに同値でなく、 $S$  の任意の元は  $R$  のどれかの元と同値である時に言う。ここで大事な注意を一つ。出来の悪い大学生はこれが中々分ってくれません。代表系  $R$  は  $S$  の部分集合だけれど、商集合  $\bar{S}$  はもとの集合  $S$  の部分集合ではありません。各  $a \in R$  に対し同値類  $S_a$  は  $S$  の部分集合とも考え、同時に商集合  $\bar{S}$  の元だと考えているのです。混乱の恐れ有りですね。同値類  $S_a$  を商集合  $\bar{S}$  の元と考えている時には  $\bar{a}$  と書くことにしましょう。そしてこの対応は代表系  $R$  と商集合  $\bar{S}$  との 1 対 1 対応を与えており、集合としては同じものだと考えられます。図式的に描けば、

$$R \ni a \mapsto S_a \subset S \iff \bar{a} \in \bar{S}, \quad S = \bigcup_{a \in R} S_a \longrightarrow \bar{S} = \bigcup_{a \in R} \{\bar{a}\}$$

逆にクラス分けがあれば同じクラスに入っているもの同志を同値とすれば同値関係になることを示すことも出来ます。だから、何でもいから考えている全対象をクラス分けしてやれば、同値関係を与えることが出来はします。それが君たちにとって自然な関係かどうかは知りませんが。

同値関係があればクラス分けが出来、同値類を元とする新しい集合が出来る。この商集合が自然なものであるか、又は役に立つものであるかが、元の同値関係の善し悪しを決めてくれるのです。

さて我々の場合ですが、二つの集合  $A, B$  は、その間に 1 対 1 対応がある時同値であるという同値関係  $\sim$  を考えます。

この  $\sim$  は確かに同値関係になります。反射律 ( $A \sim A$ ) は  $\varphi$  を恒等写像  $id$  ( $id(a) = a, a \in A$ ) と取ればよく、対称律 ( $A \sim B \implies B \sim A$ ) は仮定の保証する 1 対 1 対応  $\varphi$  の逆写像  $\varphi^{-1}$  を取ればよく、推移律 ( $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ ) は  $A$  と  $B$  の間の  $\varphi$  と  $B$  と  $C$  との間の  $\psi$  の合成写像  $\psi \circ \varphi$  が  $A$  と  $C$  の間の 1 対 1 対応を与えていることに注意すればよい。

$\Omega$  の同値関係  $\sim$  による商集合の元を濃度と言います。これが“個数”概念の一般化です。何だか難しそうなだけで、数という感じがしないという不平が

出そうですね。でもそれは仕方ないところです。 $\Omega$ の中にはありとあらゆる数学の対象が入っているのですから。それこそ  $\mathbb{Z}$  も  $\mathbb{R}$  も入っているし、 $\mathbb{R}$  上の関数の全体などという非常に大きな集合も入っているのです。こんな集合の個数は？というわけにはいかないでしょう。

個数を扱うためには  $\Omega$  の一部  $\Omega_f$  で考えないといけません。 $\Omega_f$  というのは、有限集合の全体という積もりです。有限を英語で finite と綴るので  $f$  という添字を付けただけです。でも、個数はまだ定義していないのですね。個数という概念を知らずに有限個の元を持つ集合をすべて取り出してこないといけません。心配になりますか？数学者集団 (Mathematician's Community) は内部の相互チェック機能は厳しく働いており、こんなことも考えないで集合を数学の基礎に置いたりしませんので、御心配なく。では定義をしましょう。

集合  $A$  が有限集合であるとは、次の性質を満たすとき言う。

$A$  の任意の真部分集合 ( $A$  自身とは異なる部分集合) は、 $A$  とは 1 対 1 対応にならない。

有限集合でない集合を無限集合と言うのですが、上の定義からすると、無限集合にはそれ自身と 1 対 1 対応があるような真部分集合があるということになりますね。そうです。普通の数学の本はこちらの方を無限集合の定義にしています。今は話の都合上議論を引っ繰り返したのです。

さて個数として自然数を定義する準備が完了致しました。

$\Omega_f$  の同値関係  $\sim$  による商集合の元を自然数と言う。(実に簡潔で素晴らしい。)

空集合  $\emptyset$  の同値類  $\overline{\emptyset}$  は自然数の慣例的記号で書くと 0 となる。ね、0 は極めて自然な自然数でしょう。

1 はどうかって？

1 を同値類として持つ集合は、“空集合  $\emptyset$  以外に真部分集合を持たない” 集合という特徴付けを持っています。だから代表元として  $\{1\}$  を取ることが出来ます。1 の定義に 0 が出てきたようなものだから、やっぱり 0 の方が 1 より自然ですね。しかし、0 の方もちょっとした弱味があって、0 の代表元として  $\{0\}$  を採ることは出来ません。何故って、 $\{0\}$  の同値類  $\overline{\{0\}}$  は 0 ではなく 1 なのですからね。こうして見ると、1 も中々の者ですね。

2 も 3 も 4 も、そしてどんな大きな自然数も帰納的に  $\Omega_f$  の元 (有限集合) の同値類を指定していくことによって定義されます。すると任意の自然数  $n$  の代表元として  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  という集合 (自然数  $\mathbb{N}$  の  $n$  切片と言うことがある) がとれることになります。そして有限集合はすべてこの形の集合と同値 (1 対 1

対応がある)なのです。これこそ、有限集合の元の個数は  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$  と数えていくことが出来る根拠なのです。

自然数の演算+が集合の和 $\cup$ に対応していることは自然に分りますね。しかし気を付けないといけないことが一つあります。集合の和が対応する自然数(個数)の和に対応しないことがあるのです。例えば、集合  $A, B$  を  $A = \{a, b, c\}, B = \{a, x, y, z\}$  と取れば集合としての和は  $A \cup B = \{a, b, c, x, y, z\}$  となり、その個数6は各々の個数の和  $7 = 3 + 4$  にはなりません。つまり、自然数の和に対応させなければ、共通部分を持たない集合同士の和でないといけません。例を挙げましょう。

$$\begin{aligned} 2 &= \overline{\{1, 2\}} \\ 3 &= \overline{\{1, 2, 3\}} \end{aligned}$$

と対応はしますが、 $2 + 3 = 5$  と  $\{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$  とでは対応が成り立たない。集合  $\{1, 2, 3\}$  は同値な集合  $\{3, 4, 5\}$  に取り替え、集合  $\{1, 2\}$  と共通部分を持たないようにしてから和  $\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  を採らないといけません。

この議論は余りに当たり前に見えると思います。しかしこの教訓を守らないためだけに起る間違いをよく試験の答案で見掛けます。異種の量の混ざった問題や、同種の量でも表現が異なる量を扱う問題では多くの人がこの間違いをします。この間違いをなくすために、“ $1 + 1$  は  $2$  になっているか” という言葉を、時々呪文のように唱えてみるのは面白い方法かも知れません。一度試験の時に騙されたと思ってやってみては如何?

さて自然数の演算+に関して

$$\begin{aligned} a + b &= b + a && \text{(交換法則)} \\ (a + b) + c &= a + (b + c) && \text{(結合法則)} \\ a + 0 &= a && \text{(単位元の存在)} \end{aligned}$$

が成り立つのは、集合の対応する概念から示すことが出来ますね。ある元が和集合に属するかどうかは、和をとる集合をどんな順序に考えていくかには関わりのないことですから。

掛け算をどう考えるかは少し問題です。実は数の積というものには本質的に違う2つの積があって、しかし単なる数としての計算では一致してしまう為に、その差を認識するのが非常に難しいのです。有限集合の同値類として自然数を考える際にはその片方しか自然でなく、もう一方は一レベル高い議

論が必要となります。細かい議論は時間も無いので止めておきますが、名前だけでも言うておくことにしましょうか。

2つの積は日本語では区別し難いので英語で書くと、product と multiplication という2つの積です。productの方は同じ種類のものの積で、集合論での直積集合を作るという操作と対応します。この対応を良く考えることによって、積についても、交換法則、結合法則、単位元の存在は全く同じ様に示せますし、さらに分配法則も示すことが出来ます。これは小学校算数以来の伝統“面積図”を考えるのに似ていますので、productについても和と同様に出来ると言う僕の言葉を信じてくれてもいいし、集合の直積の定義を考えて自分で証明してくれてもいい（勿論この方が良いのだけれど）。

multiplication について議論するのは少し難しいのです。時間の制約の為にというより概念が熟するのに時間が掛かるからと言った方が良いでしょう。 $3+3=6$ を集合算の中で考えることは自然に出来ますが、 $3+3=2\times 3$ という multiplication を集合算の中だけで考えるのは難しいのです。この2は一旦抽象された概念としての自然数であって、 $3+3=6=2\times 3$ と理解したときの濃度（個数）2の集合に対応させた自然数の2とは抽象のレベルが異なっているのです。小学校の算数では応用問題を解く際、掛け算の順序が問題にされていたことを思い出して下さい。あれは実はこの差を問題にしていたとも言えるので、強ち間違った議論だと言うわけでもありません。数だけを扱っている場合には、外算法である multiplication は内算法である product を使って解釈を仕直すことが出来るので、この違いを余り強調しすぎることは却って教育的には害があるかも知れません。

自然数の演算とその性質は集合論的に導くことが出来、その導き方を意識することでより良い認識が得られ、諸問題に数学を応用する際に誤りをし難くなるということだけ納得して頂けば、それで結構です。長々御静聴有難う御座いました。明日は連続量と離散量の関係を、具体的な問題を巡って論じてみたいと思います。

## 5 ピタゴラス数 I

古代ギリシャの時代、人々は世界を美しく整ったものと理解したいと考えていました。美しいもの、特に音楽での音の調和が、多様なものからなる世界を統一的に理解する為の典型として考えられたようです。古来から多くの弦楽器があり、美しい音色で奏でられるのは、きれいなハーモニーを得るための方法が容易に且つ単純な規則で得られるからでしょう。弦の振動によって音が出ますが、2つの音を同時に鳴らしたとき、心地よく感じるのは弾かれる弦の長さの比が（小さい）整数の比であるときです。

整数の比、つまり有理数で分母分子が小さい整数で表わされるものは、世界の何かしら単純な構成要素で、それらの数論的な関わりで世界の構造が理解できるものと信じてた人達がいたようです。大きな数の比には複雑なものや現象が対応するというように考えていました。

数の秘密を知ることが世界の秘密を知ることだと信じて、数の研究をしていた人々がいました。ピタゴラス学派と呼ばれる宗教的集団が南イタリア地方で活躍していましたが、そうした人々の集りだったようです。“万物は数なり”というのがそのスローガンだったといえます。

今日ピタゴラスの定理として知られている定理は、この学派の人が発見したのか、それともそれ以前に知られていたがこの学派によって重要性が認識されたものかは分かりません。しかし少なくとも小さい整数の組で直角三角形の辺の長さの比になるものは、可成り以前からエジプトその他で知られていたようです。例えば(3, 4, 5)や(5, 12, 13)が直角三角形をなし、 $12(= 3 + 4 + 5)$ 個の等間隔の結び目を持つ紐の輪を持っていればいつでも直角が作れることは知っていたようです。

歴史の不思議というか皮肉というか、このピタゴラスの定理が数の調和で世界を理解しようとする試みを失敗させることになったのです。つまり、正方形の対角線という極く自然で単純なものが正方形の一边と整数同志の比にならないのではどう説明をしたらよいか分からなくなってしまったのでしょうか。弦の長さの比が整数比になることが重要だったのだから、線分の比はたとえ複雑でも整数の比つまり有理数になってくれないと困るのです。 $\sqrt{2}$ が無理数だったのがいけないのです。このことの証明は多分知っているでしょうが、その意味する所の重要性の為、ここで証明を試みましょう。

$x$  を自乗したら2になるある正の数とします。[こんな数はあるのでしょうか？ここが数とは何かということに関わってくるのです。どんな線分の長さも表わすことの出来る数（連続量）があるということが正しいとすれば、正しい

ことになります。一辺の長さがある単位で1とする正方形を描けば、その対角線の長さが、 $x$  なのですから。]

この  $x$  が無理数であること、つまり有理数ではないことを示します。背理法でやってみましょう。 $x$  が有理数だとして何かしらの矛盾を出せば良い訳です。

そこで、 $x$  は有理数であるとしします。つまり、正の整数  $a, b$  があって  $x = \frac{a}{b}$  と書けたとします。表示を確定するために、整数  $a, b$  は互いに素である、即ち  $a$  と  $b$  の最大公約数は1であるとしておきます。これは  $\frac{a}{b}$  を既約分数で表わしたということです。 $x^2 = 2$  なのですから、 $a^2 = 2b^2$  となります。

ここで素因数分解の一意性という定理を使います。どんな整数も素数の積に表わした時、現れる素数は順序を除いて一通りだということです。当たり前だと思うかも知れませんが、これはとても大切な定理で、初等整数論はすべてこの定理から出てくると言うことが出来ます。証明は最後の日に広海先生（三重大学）がして下さいたのでここでは省略しますが、証明しようとしてもしっかり考えないと何を証明しているか分らなくなりますよ。

2 は素数ですから、 $a^2$  の素因数分解の中に2が入っていることになりますし、さらに  $a$  自身の素因数分解の中に2が入っていることになります。従って、 $c = \frac{a}{2}$  は整数で、 $a = 2c$  と書けます。上の等式を  $b, c$  で表わせば、 $4c^2 = 2b^2$  つまり  $b^2 = 2c^2$  となります。それゆえ全く同じ事情で  $b$  も偶数だということになり、 $a$  と  $b$  は2を公約数とするので、互いに素であると仮定したことに矛盾します。

ここで証明の本質的な部分は素因数分解の一意性であることが分りますね。証明を見れば、他の数、例えば  $\sqrt{p}$  ( $p$ : 素数) が無理数であること、更に平方数でない  $p$  に対して  $\sqrt{p}$  が無理数であることの証明は簡単に出来るはずです。各自やってみてください。

さてこうして無理数が存在してしまったので、整数の比で世界を説明することを放棄せざるを得なくなったばかりでなく、数の理論にある種の如何わしさを感じるようになったらしく、これ以降厳密な数学理論は幾何学の形を採ることになります。

近世になってデカルトが座標を導入して幾何の問題を代数の問題に帰着して50年経っても、尚ニュートンは主張も証明もすべて幾何的に表現しているのです。自然哲学の数学的原理というニュートンの主著では微分方程式を解いているにも拘らずですよ。更に言うなら、ニュートンが人類に与えた最も重要な貢献は、あらゆる現象の法則性を微分方程式で表わし、それを解く

ことによって世界のすべての変化を予知することが出来るという思想だったにも拘らずなのです。幾何の言葉で表わさないと、この思想の厳密性、ひいては重要性も疑われる恐れがまだあったのです。

実際、実数の概念が確立する19世紀後半になるまで微積分学は厳密な基礎付けを持っていなかったのです。だから厳密性を重視するならニュートンがやったように幾何的にやらなくてははいけなかったのです。有理数しか知らなかったニュートンが微分を厳密に定義できるはずがないなどという謂われのない非難をしてはいけません。

殆ど同時に微積分法を発見したヨーロッパ大陸のライプニッツは記号計算を重視していたので、大陸の彼の継承者の方では極限の考え方の甘いことが露呈してしまいます。お蔭で微積分の真の基礎付けの必要性が強く求められ、長い努力(200年程の)の末に集合論、実数論、級数論、関数の理論の整備が進んでやっと微積分学の真の基礎付けが得られたのです。

逆にイギリスのニュートンの後継者には当然厳密に作られた微積分法に更に厳密な基礎付けが必要だと思われず、その為の努力がなされなかったのです。これも歴史の皮肉でしょうか。人間は真っ直ぐには歩けない。敵対者こそ最大の友だと言うことかも知れません。似合わない教訓を言っていないで数学をしましょう。

ピタゴラス学派にとっては憎っくきピタゴラスの定理ですが、命題の形で述べてみましょう。

定理 5.1 (ピタゴラス) 直角三角形の三辺の長さを  $a, b, c$  とし、特に  $a, b$  を直角を挟む2辺とし  $c$  を斜辺の長さとする。その時次の等式が成り立つ。

$$(1) \quad a^2 + b^2 = c^2$$

証明はしません。ここまでの話を聞いてくれた人には、ここでは証明は出来ない、むしろ出来る筈がないというのが正しいと思って貰えるでしょう。議論のカテゴリーが違っているのですから。

さてピタゴラス学派にとっては残念なことにすべての数が有理数ではないのですが、有理数  $a, b, c$  で式(1)を満たすものがどれ位あるかを考えてみましょう。

何の為に？ん…そんなことは訊くもんじゃありません。しかし、…そう、“彼等の魂を鎮めるために”考えることにしましょう。何しろ無理数の存在は、ピタゴラス学派にとっては教団の存続に関わる大事な秘密で、この秘密

を洩らした人が祟りに会って海難事故で死んだとか暗殺されたとかいう噂があるくらいですから。

$a, b, c$  を正の有理数とします。 $a = \frac{a_2}{a_1}, b = \frac{b_2}{b_1}, c = \frac{c_2}{c_1}$  と分数 (整数の比) で表わし、分母  $a_1, b_1, c_1$  の最小公倍数を  $\ell$  として通分すれば、 $a = \frac{a'}{\ell}, b = \frac{b'}{\ell}, c = \frac{c'}{\ell}$  という形になります。これを式 (1) に代入すると

$$(2) \quad (a'\ell)^2 + (b'\ell)^2 = (c'\ell)^2$$

となるので、式 (1) を整数  $a, b, c$  に対して解くという問題になります。つまり式 (1) の任意の有理数解はある整数解  $a, b, c$  を適当な整数で割って得られることになります。

式 (1) の整数解  $a, b, c$  をピタゴラス数と言います。だからこれは (3, 4, 5) や (5, 12, 13) などという組に付いた名前前で個々の数に付いた名前ではありません。

また整数解  $a, b, c$  に公約数  $d$  があれば、 $d$  で割った  $a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}, c' = \frac{c}{d}$  も式 (1) の解になります。そこで最大公約数が 1 であるような正整数解  $a, b, c$  を式 (1) の既約な解と呼ぶことにして、以降まず既約な解を求めることにしましょう。

何故って? これには答えられます。既約な解が求まれば、すべての整数解、すべての有理数解がそれから得られるからです。こういうサクラのような質問ばかりなら教師も楽なんです。

さて  $a, b, c$  を式 (1) の既約な解としましょう。

まず  $a, b$  の偶奇が揃うことは有りえないことに注意しましょう。 $a, b$  共に奇数だったとしますと式 (1) から  $c^2$  は偶数になり、従って  $c$  自身も偶数でないといけなから、 $c^2$  は 4 の倍数になります。ところが左辺は 4 で割ると 2 余ることになります。何故なら、 $a = 2m + 1, b = 2n + 1$  とおけば

$$a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2$$

となりますから。これは矛盾ですね。今度は  $a, b$  が共に偶数だったとすれば  $c^2$ 、従って  $c$  自身も偶数になりますが、これは既約としたことに反します。

$a, b$  の偶奇が異なることが分ったから  $a$  の方を奇数、 $b$  を偶数としても構いませんね。すると式 (1) から  $c$  も奇数になります。勿論  $c > a$  は当たり前ですから、 $c + a, c - a$  は共に正の偶数で、更にこの 2 数の最大公約数は 2 になります。



何故なら、最大公約数が2より大きいと仮定しましょう。つまり、ある1より大きい数 $k$ と整数 $m, n$ があって、 $c+a=2km, c-a=2kn$ と書けたとしましょう。すると $c=k(m+n), a=k(m-n)$ となり、更に式(1)から $b^2$ は $k^2$ で、従って $b$ は $k$ で割れることになります。従って $k$ は $a, b, c$ の公約数ということになり、既約性に反することになります。

式(1)を移項して4で割ると、

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2} \times \frac{c-a}{2}$$

となりますが、この右辺の2項は互いに素だから、それぞれが平方数でないといけません。ここでも素因数分解の一意性が本質的です。

従って、ある互いに素な整数 $u > v$ が存在して

$$\frac{c+a}{2} = u^2, \quad \frac{c-a}{2} = v^2$$

となります。この $u, v$ を使って $a, b, c$ を表わすと、

$$(3) \quad a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2$$

となります。また $a, c$ が奇数であることから、 $u, v$ の偶奇は異なっていないてはならないことが分ります。

逆に偶奇が異なり互いに素な $u > v$ に対して、 $a, b, c$ を式(3)で定義すれば式(1)の整数解になることは代入すればすぐに分るでしょう。問題は既約性ですが、これも証明できます。

$u, v$ の偶奇が違うので、 $a, c$ は奇数になります。従って、 $a, b, c$ の公約数を $d$ とすると $d$ は奇数になります。 $a, c$ を $a = da', c = dc'$ と表わせば、式(3)から

$$2u^2 = c + a = d(c' + a'), \quad 2v^2 = c - a = d(c' - a')$$

となります。 $d$ は奇数だから、 $u^2, v^2$ を割ることになりますが、これは $u, v$ が互いに素であることに反しますね。

これで式(1)の既約な解は完全に特徴付けられました。偶奇が異なり互いに素な一組の $u > v$ と、式(1)の既約な解 $a, b, c$ が式(3)によって1対1に対応しているわけです。

式(1)の一般の整数解はある既約な解 $a, b, c$ に適当な整数を掛けて得られるし、そのようなものしかありませんし、また式(1)の有理数解は既約な解に適当な有理数を掛けて得られるし、そのようなものしかないことが示されたこととなります。

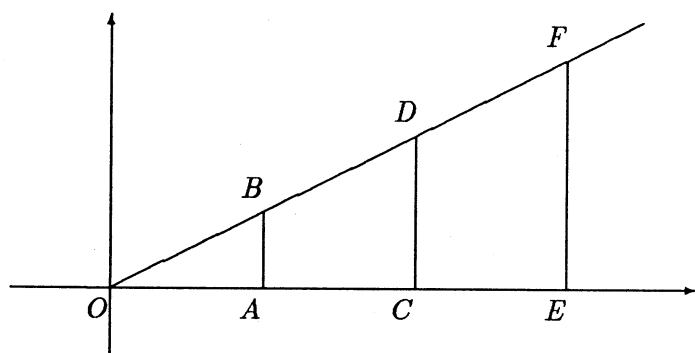
少し例を見ておきましょう。最も小さな組合わせ  $u = 2, v = 1$  に対しては  $a = 3, b = 4, c = 5$  となります。次の  $u = 3, v = 1$  に対しては  $a = 8, b = 6, c = 10$  となり、既約ではないピタゴラス数が得られます。 $u, v$  は共に奇数で偶奇が揃っているので、当然ですね。 $u = 4, v = 1$  に対しては  $a = 15, b = 8, c = 17$  となり、 $u = 3, v = 2$  に対しては  $a = 5, b = 12, c = 13$  となります。 $u = 2n, v = 1$  に対しては  $a = 4n^2 - 1, b = 4n, c = 4n^2 + 1$ 、 $u = n+1, v = n$  に対しては  $a = 2n+1, b = 2(n^2+n), c = 2n^2+2n+1$  という系列も得られます。 $n = 1$  の時は両系列とも  $3, 4, 5$  になりますね。2つ目の系列の時  $b$  と  $c$  の差は  $1$  ですが、 $a$  と  $b$  の差が  $1$  であるのはいつかという問題も解けますね。 $2v^2 \pm 1$  が平方数になるときに限り、その時  $u = v + \sqrt{2v^2 \pm 1}$  となります。 $v = 1$  の時は  $2v^2 - 1 = 1$ 、 $v = 2$  の時は  $2v^2 + 1 = 9$  が平方数になりますし、他にもこれらが平方数になる  $v$  を見つけることが出来ますね。

$u, v$  に色々な数を入れて、ピタゴラス数を楽しんで下さい。

## 6 ピタゴラス数 II

式(1)の整数解を求めることは本質的には有理数解を求めることと同じだったのですが、有理数解を求めるという気持ちを強く持てば違う求め方が考えられます。

前節での有理解の求め方は古代ギリシャと同じ精神構造で行われていました。古代ギリシャが有理数を知っていたと言っても、それは本質的には有理数を知っていたと言えるだけで、実体としての有理数を知っていたとは言えないのです。つまり、彼等の認識の中ではあくまでも自然数の比であって、連続体としての実数の中に埋め込まれたものは考えていなかったのです。本質的には有理数である比の値を考えた時に彼等の念頭にあったのは例えば相似三角形の対応する辺の比が一定になることを表わしていたと思われます。例えば  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$  という等式は、1つの量としての  $\frac{1}{2}$  があってその異なる表示に過ぎないと考えるのではなく、次の様な相似の位置にある三角形の辺の比が  $AB : OA = CD : OC = EF : OE = 1 : 2 = 2 : 4 = 3 : 6 = \frac{1}{2}$  となっているということ、つまり実体としての数と見做すというよりも関係概念であると考えていたように思われるのです。



有理数が実数の中に埋め込まれているということを強く認識すると、それではどんな証明が出来ると言うのでしょうか？有理数の組  $a, b, c$  が式(1)を満たしているというなら、更に両辺を  $c^2$  で割れば、即ち  $a' = \frac{a}{c}, b' = \frac{b}{c}$  と置けば、式(1)は

$$(4) \quad a'^2 + b'^2 = 1$$

となり、この式を満たす正の有理数の組  $a', b'$  を求めれば良いのですが、これを更に実数  $x, y$  の間の方程式

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 1$$

と考えるのです。この式 (5) は何処かで見た記憶が有るでしょう。そう、平面上の単位円の方程式ですね。  $P = (x, y)$  を単位円周上の点だと考えれば、自然に 1 パラメーターで表わすことが出来ますね。つまり三角関数を使って、ある実数  $\theta$  に対して、

$$(6) \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

と書き表わすことが出来ます。ここで問題は、いつ (どんな  $\theta$  に対して) 三角関数  $\sin \theta, \cos \theta$  が同時に有理数になるかという問題に変わったと言えます。これだけ見ればとても難しそうに見える問題ですが、日本の高校生には難しくはありません。と言うのも、受験でよく使うある技法と言うか公式が自然に頭に思い浮かんでくるだろうからです。三角関数を含んだ微積分の問題に嫌と言うほどで出てくるあの公式です。

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ と置けば}$$

$$(7) \quad x = \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

となる。

思い出しましたか。  $t$  が有理数なら明らかに、  $x, y$  も有理数になりますね。

逆はどうでしょう。実は  $t$  が  $x, y$  で表わしてしまうのです。実際、  $1+x = \frac{2}{1+t^2}$  だから、

$$(8) \quad t = \frac{y}{1+x}$$

となり、  $x, y$  が有理数なら  $t$  も有理数ということになります。こうして、  $x, y$  が有理数であることと  $t$  が有理数であることは同値になりますね。かくて、  $t$  を  $0 < t = \frac{v}{u} < 1$  と整数  $0 < v < u$  の比で表わし、式 (7) 代入すれば、

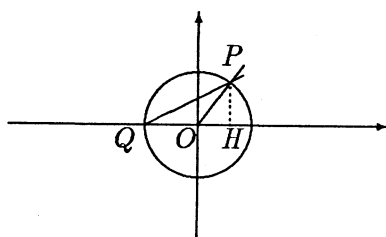
$$(9) \quad \frac{a}{c} = x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, \quad \frac{b}{c} = y = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2uv}{u^2+v^2}$$

となりますね。これはピタゴラス数の解の公式 (3) の再発見になっています。馬鹿に簡単に出来てしまって拍子抜けするくらいでしょう。日本の高校生は

優秀で式(7),(8)は簡単に思いつくでしょうが、知らなかったらどうしたら良いでしょうか。

先ず図を描きましょうか。

点  $P = (x, y)$  を取りそれを三角関数で表わすということは、対応する  $\theta$  は点  $P$  と原点  $O$  を結んだ直線が  $x$  軸と成す角  $\angle POH$  だから、点  $P$  と原点  $O$  は直線で結ぶのは自然ですね。何と無く図を見ていると、点  $Q = (-1, 0)$  が特別らしく見えてきませんか。見えて来ない人には別のことを考えることにして、そう見えてきたら、点  $P$  と点  $Q$  を結んでも良いでしょう。



じっと見ていると、三角形  $OPQ$  が浮び上がって見えてくるでしょう。そうしたら占めたもの、 $\angle PQO$  が  $\frac{\theta}{2}$  になるのはすぐ分りますね。 $\triangle OPQ$  は二等辺三角形で、等しい2つの内角に対する外角が  $\angle POH = \theta$  なのですから。点  $P$  から  $x$  軸に下ろした垂線の足  $H$  の座標は  $H = (x, 0)$  ですから

$$t = \tan \frac{\theta}{2} = \tan \angle PQO = \frac{PH}{QH} = \frac{y}{1+x}$$

となります。すると

$$t^2 = \frac{y^2}{(1+x)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{1+x}$$

となり、これは  $x$  に関して解け、

$$x = \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

となりますし、更に

$$y = \sin \theta = t(1+x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

となります。

図から発見できない人は仕方が無いから、元の式(5)をじっと見て、そして色々と変形してみることにしましょう。そして式(5)から  $y^2 = 1 - x^2 = (1+x)(1-x)$  とし、更に次の式

$$(10) \quad \frac{y}{1+x} = \frac{1-x}{y}$$

にまで変形できたら、この式をじっと見てみる。 $x, y$ が有理数ならこの数も有理数だし、一つの数が2種類の表示を持つということは重要である証拠と思うことにして、これに名前  $t$  を付ければ、もう後は図の下からの議論と同じです。ちょっと考えてみれば、三角関数の加法定理を知らなくても  $\sin \theta, \cos \theta$  を  $\tan \frac{\theta}{2}$  で表わす公式が得られたことになっていますね。

数学は誰にでも分るものとは言えないかも知れません。少なくとも少しも努力しないで分ることは難しいでしょう。この節の話でも  $x, y$  の巧い有理式  $t$  を見つけてきてそれで逆に  $x, y$  を有理的に表わすということをしています。 $x, y$  を  $\sin \theta, \cos \theta$  で表わして、 $t = \tan \frac{\theta}{2}$  と置くのに気付くか、図を見ながら点  $Q$  に着目できるか、式(5)を式(10)まで変形して更にその重要性に気付くかしなければ成りません。

確かに知識も必要です。しかし知識だけではいけません。問題を解決するために、問題が要求する世界の物語の筋の様なもの、たとえ小さくともその世界での根本原理を構築しなければいけません。その世界の中で最も重要な量(今の場合は  $t$ )を発見出来るかどうかの問題解決のキーなのです。

これは突き詰めて言えばセンスの問題です。しかし、持っているセンスも磨かなければ光りませんし、少しくらいなら(立場上余り言いたくは有りませんが、大学受験に必要な位は)誰でも持っているセンスを努力と適切な教育によって磨くことが出来ます。ノーベル賞でさえセンスよりは努力によって得たという人もあるのです。人間の能力にはさして差があるわけではありません。有るとすれば、それは努力を持続できるかどうかの差のような気がします。この差は確かにあるようですし、この差の方がより本質的だと思います。

どんなに勉強が出来ないと言われた人でも、死物狂いで努力をすれば東大にも京大にも入学することは出来ます。何人かの実例を見ているのだから信じて下さい。勿論、さしたる努力もせずに入学する人もいますよ。でもそんなことが何でしょう。入学すること自体が目的なら、誰にでもその意思とそれに見合う努力さえすれば可能だと言っているだけです。大学は入学するの

を目的とするところではありません。大学へは、何かを学び、社会に出てから、生活するためにかよりよく生きるために、役に立たせるために入学すべきです。血を見ると卒倒する様な人が医学部に入って何になります。油まみれになったり、薬品で手の荒れるのが嫌な人が工学部に入っても役に立たないでしょう。子供の嫌いな人が教育学部に入ってきたとしたら、救いようがありません。

受講生の皆さんは、目的を持って勉強して下さい。そして目標を持って大学を選んで下さい。軽々しくブランド名だけで大学を選ばないようにして下さい。大学が大学であるのは、そこに居るスタッフと学生の、人間たちの社会であるからなのです。自分でその社会を、よりよい社会を作る努力をしてみして下さい。

## 7 ピタゴラス数 III

この節では、高次のピタゴラス数があるのかという問題を少し考えてみましょう。2より大きな $n$ に対しては

$$(11) \quad a^n + b^n = c^n$$

を満たす整数の組 $a, b, c$ があるのかという問題です。

17世紀のフランスにフェルマという数学者がいました。当時は数学者という職業が確立していなかったので、彼は弁護士であり、ツールズの地方議会の議員でした。ギリシャは幾何に逃げたと言いましたが、それでも当然数の理論を研究する人もいたわけで、ユークリッドから500年ほど後に、ディオファントスという人がギリシャ数学の整数の理論の集大成であり、特に不定方程式に詳しいアリスメティカ（算術）という本を出しました。フェルマはそのラテン語の翻訳を発行したのですが、自分用の本の余白にフェルマ自身が発見した多くの定理を書込みました。殆どはその後の数学者の努力によって証明が知られるようになりましたが、唯一つ証明が現在も知られていないものがあります。そして更に、“私はこの主張の驚くべき証明を得たが、それを記すにはこの本の欄外は余りにも狭い。”と書き残したのです(1637年頃)。その主張こそそれ以来数学者ばかりでなく多くの数学愛好家をも悩ませ楽しませ続けてきた、フェルマ予想なのです。予想そのものは簡単です。

“ $n > 2$  に対する式(11)は整数解を持たない。”

数学史家が言うところによると、フェルマの持っていた方法は彼の得意な証明法、“無限降下法”だろうと思われます。現在でも一般の $n$ に対する証明は得られていませんが、数学者を馬鹿にしてはいけません。 $n = 3$ の時はオイラー(1770年)が、 $n = 4$ の時はフェルマ自身の証明が有り、オイラーの証明も有り、 $n = 5$ の時はルジャンドル(1825年)、 $n = 7$ の時はラメ(1839年)が証明を与えています。更に1850年頃からクンマーが理想数の概念を導入し、 $n$ が4と奇素数の時に証明すればすべての $n$ に対して証明できること、正則と呼ばれるかなり一般的な条件を持つ素数 $n$ に対する証明を与えました。しかし1915年にはイェンセンが正則でない素数が無限個あることを示してしまいました。1929年には正則という条件を少し広げた一般的な条件で証明を与えたヴァンディバーが、その前後に、頑張って計算で $n < 619$ に対しては証明をしました。またヴァンディバーは1954年には二人のレーマーに助けられ、計算機を使って $n \leq 4001$ に対して証明しました。またこの方法を使



い、1978年にはワグスタッフは $n \leq 12500$ 迄計算機で確かめました。今後計算機の性能が上がればどんどん限界も上がって行くでしょう。

一方1934年にクラスナー、1935年には森島太郎によって充分大きな $n$ に対しては成り立つことが知られ、1983年ファルティングスのモデル予想の解決によりすべての $n$ に対して式(11)の整数解が有限個しかないことが知られるようになりました。有限個といってもフェルマ予想の解決には0個であることが必要で、1万でも1億でも有限だと知っていると、解決まではまだ遠いと思ってしまいますね。

しかし何年か前、突然当時ドイツにいた日本人数学者がフェルマ予想を解いたという新聞記事に皆びっくりしたものです。現在東工大にいる宮岡洋一氏は代数曲面のチャーン数と呼ばれる量に対する不等式を証明して有名だったのですが、更にフェルマ予想の解決に必要な程の強さで不等式が証明できるのではないかということを当時留学中の研究所の同僚に話を聞いて貰って確かめようとしたのだそうです。ところが、その研究所には非常に有能なというか気の廻りすぎるスポークスマンが居て、新聞記者にフェルマ予想が解けたと話してしまった。新聞記者はニュースの裏も取らずに、本社に記事を廻し、本社は通信社に流し、アッという間に世界中をニュースが駆け巡ってしまったのだそうです。勿論宮岡氏の考えていたことがそのまま成り立てばよかったのですが、残念ながらその証明は間違っていたのです。

数学者が間違いをしないということはありません。むしろ普通の人よりたくさん間違いをしているだろうと思います。でも、その間違いは同僚や学生に話しているうちに、時には話そうと思った瞬間に気が付きます。重要な定理の証明や新しい理論の展開があれば、出来たと思ってからも色々なところで話をして、論理構成や、考え方に間違いがないかを確かめます。そうした後で論文を書いて世界中の人に知らせる訳です。宮岡氏の場合、まだ楽屋話の段階のものが、舞台に乗せられてしまったわけで気の毒な結果になりましたが、数学者の間で宮岡氏を責める人は一人もいません。その研究所のスポークスマンに対しても怒っている人を知りません。あわて者だなと言ってニヤッとするくらいです。

数学者は間違いに寛大なのです。でも嘘には厳しいのですよ。何かの問題にアタックして、頑張っても頑張っても出来ないことが多いものです。出来ないからといって馬鹿にする人はいません。しかし出来ていないのに出来た振りをすると強烈に怒ります。村八分になってしまいます。Mathematician's Communityに対する帰属意識の強い数学者はそんな目に会うことに耐えられるはずがありません。だから嘘はつかないようにしましょう。また妙な説

教になってしまいました。数学に戻りましょう。

$n = 4$  の時の証明をやってみましょう。無限降下法の良い例になっています。無限降下法というのが、数学的帰納法のしゃれた変形になっているのが分るでしょう。

$n = 4$  のとき、式 (11) が整数解を持たないことを示すために、

$$(12) \quad x^4 + y^4 = z^2$$

が整数解を持たないことを示せばよいのは分りますね。4 乗数は平方数ですから、 $n = 4$  の式 (11) が整数解を持てば、当然式 (12) も整数解を持つことになりますから。

さて  $x, y, z$  が式 (12) の整数解であったとしましょう。すると、 $a = x^2, b = y^2, c = z$  とおけば  $a, b, c$  は式 (1) を満たし、ピタゴラス数ということになります。この  $a, b, c$  に公約数  $k$  があれば当然  $k$  は平方数で、 $k = h^2$  と書いて  $\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, \frac{z}{h^2}$  を改めて  $x, y, z$  とすればこれも式 (12) の整数解だから、ピタゴラス数  $a, b, c$  は既約であるとしても良いですね。

5節の議論から、 $a$  は奇数で  $b$  は偶数としてよく、またある偶奇が異なり互いに素な一組の  $u > v$  があって、解  $a, b, c$  は式 (3) で表わされるので、

$$(13) \quad x^2 = u^2 - v^2, \quad y^2 = 2uv, \quad z = u^2 + v^2$$

と書けることになります。この最初の式は

$$(14) \quad x^2 + v^2 = u^2$$

と出来ますが、 $u, v$  が互いに素なことから  $x, v, u$  は既約なピタゴラス数であり、更に  $x, u$  が奇数で、 $v$  が偶数であることが分りますね。

だから又ある偶奇が異なり互いに素な一組の  $u_1 > v_1$  があって、

$$(15) \quad x = u_1^2 - v_1^2, \quad v = 2u_1v_1, \quad u = u_1^2 + v_1^2$$

と書けることになります。

ところで  $u, v$  の偶奇と互いに素なことと、(13) の 2 番目の式から平方数  $y^2$  が互いに素な  $u$  と  $2v$  の積に分解していることとにより、この各々が平方数となります (ここでも素因数分解の一意性が本質的です)。そこで

$$(16) \quad u = z_1^2, \quad 2v = 4t_1^2$$

という形に書けることになるから、式(15)の2つの式に代入すれば

$$(17) \quad t_1^2 = u_1 v_1, \quad z_1^2 = u_1^2 + v_1^2$$

となります。この前半の式から互いに素な  $u_1, v_1$  はまた平方数ということになり、

$$(18) \quad u_1 = x_1^2, \quad v_1 = y_1^2$$

となる  $x_1, y_1$  があることになりますが、(17)の後半の式に代入すれば

$$(19) \quad x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$$

となって、式(12)の新しい解  $x_1, y_1, z_1$  が得られた事になりました。

ところ新しい解のうちで整数  $z_1$  は、式(13)と(16)から、

$$(20) \quad z = u^2 + v^2 > u^2 = z_1^4 > z_1$$

が分るので、元の解  $z$  より小さくなります。

これで無限降下法は完成です。見事なものですね。…分らない人がいるみたいですね。失礼。分る人には分るけれど、分らない人には分らないというのではこういう話をしている甲斐がありませんね。又しても教訓を思いつきましたが、先ず証明を済ましてからにしましょう。

さて  $x, y, z$  が式(12)の整数解であったとしましょう。すると、新しい解  $x_1, y_1, z_1$  が得られたのでしたね。しかもこの  $z_1$  は元の  $z$  より小さいのです。だから又同じ議論で、新しい解  $x_2, y_2, z_2$  が得られ、この  $z_2$  は  $z_1$  より小さくなります。何度でも出来ますね。だから式(12)の整数解  $x, y, z$  のうち  $z$  は幾らでも小さく出来ますね。しかし、小さく出来るといっても、 $z$  は自然数、つまり、1より小さくはなれません。これは矛盾です。

この矛盾は式(12)に1つでも整数解があると仮定したことから起った事です。この仮定が間違っていた事になります。つまり、式(12)には整数解が存在しないことが証明できたのです。ひいては  $n=4$  のフェルマ予想の証明になっているのでした。

この証明は整数のことしか使わないで出来ました。しかし、一般の  $n$  に対してはこの様な方法でやり抜くことは絶望的になります。そこで、6節のように、連続体の中に埋め込んでやることになります。

$$(21) \quad x^n + y^n = 1$$

を、平面のある図形を表わす方程式だと考え、その図形の中に有理点  $(x, y)$ 、つまり  $x, y$  の両方が有理数であるような点があるかという問題に変えてしまいます。勿論変えたからといって、それだけで解けるようになる訳ではありません。フェルマ予想については (21) の形の図形しか考える必要がありませんが、この図形だけを考えると分らないことでも、もっと一般に、 $f(x, y)$  を多項式として、 $f(x, y) = 0$  という形の図形を考えた方が良いことがあります。実は、多項式  $f(x, y)$  に対する図形  $f(x, y) = 0$  を研究する学問を代数幾何学と言います。数学のノーベル賞と言われるフィールズ賞という賞があるのを知っていますか。日本人の授賞者は 3 人とも代数幾何の研究をしているほど、日本では盛んに研究されていますし、世界的にも優秀な数学者が沢山研究している分野です。ですから理論も豊かで、多くの視点、多くの技法、多くの概念が開発されています。前に述べたファルティングスはフィールズ賞を貰いましたし、宮岡さんも必要な不等式が証明できていたらフィールズ賞を貰えるかも知れません。

易しく見える問題でも難しい問題はありますし、易しく見える形のままで問題を解くより問題を一般化したほうが解けるチャンスが増えることがあるのです（人によっては難しくして、と思うかも知れませんが）。

さて、さっき教訓を思いついたと言いましたが、その話をしましょう。もう 10 年ほどになる友人がいます。今は数学の先生をしています、大学院の学生の頃ある受験校と言われる高校で非常勤講師をしていたそうです。最初は授業をする時、どう話したら生徒が理解できるかということを考えながらやっていたのだが、半年もして彼の教え方のリズムが生徒に伝わったのか、彼が問題をやって見せる時でも、自分がその問題を考えるそのままの形で話すことが出来るようになったということです。

受験校の生徒だから出来るのだと考えても構いません。しかし考えたら救われるのでしょうか？彼が優秀な教師だから出来るのだと考えても構いません。しかし、優秀でない先生に習ったら数学は出来なくなるのでは困りますね。

この話の場合、どちらかだけが優秀なだけではこうはいかなかったでしょう。時間をかけて、彼の数学するリズム、考え方、取り組み方が生徒に浸透して行ったのでしょうか。そして、自然に生徒の中に数学する姿勢が生まれていったのでしょうか。最初は単に受験の為だったかも知れません。しかし、そのことによって生徒が彼の数学する姿勢を学んでいけたとしたら、それはとても素晴らしいことだと思います。

この場でもそんな風に皆さんになって貰いたいとは思いますが、全部で 4 時間では中々そうはいきません。それなのに、さっきの瞬間、僕は自分のリ

ズムだけで“フェルマは偉い”と感心してしまったのです。例えば優れた演劇は筋が分っていても観る度感激することが出来るように、素晴らしい数学には何度でも感動することが出来ます。さっき“失礼”と言ったのは、分らない人がいるかも知れないのに“分るのが当たり前だ”という振舞をしてしまったことに対して“失礼”と言ったので、あの時点で分った人に対しては却って“失礼”だったかも知れません。

分った人と分らなかった人の差は何処にあるのでしょうか。多分分らなかった人は、あの時展開されていた数学の世界に入っていなかった人だと思います。入っていた人は分っていただろうと思います。一言で言うと集中力の差ですね。もう一言言うと愛情の差ですね。今語られている数学の世界を愛せるか否か、それが分るか分らないかの差を付けてしまうのではないのでしょうか。頭の良し悪しは、何より集中力の差だと思います。集中力を付けるのには、愛情を持てるかどうか懸かっていると思います。

そこでどうしたら愛情を持って貰えるかを教師は工夫しなければいけません。チャーミングな授業が如何したらできるかを考え、努力しなければいけません。しかし生徒の側から言えば、教師の工夫だけを待っていてはいけません。

人を愛したことがありますか？その人が自分に優しいから、それだけで人を好きになりますか？人を愛さなくても生きていくことは出来ます。世界を愛さなくても、この世界からすぐに追い出されることもないでしょう。しかし、僕等の生きているこの世界を愛さずに生きるより、愛しながら生きた方が、より良いとは言いません、でもより心が暖かくなるでしょう。その方が豊かに生きることが出来るのではないのでしょうか。世界を愛する為に、数学を愛して下さい。世界を理解するためには、数学が必要なのですから。この世界の現象を人間が理解するためには、人間の言葉で、人間が理解できる形にしなくてははいけません。勿論世界を理解するために創られた数学は、世界を利用するためにも使われます。悪用されないようにするためにも、数学を愛して下さい。数学を愛する人は、数学を悪用したりは出来ません。

数学を愛すれば、数学を理解することが出来、数学を善く利用することが出来るようになります。

受験数学と言うものではありません。少なくとも数学の側にはありません。高校か予備校か受験雑誌の世界にしかありません。本当の数学の1つの影のようなものです。本当の数学の姿を知って数学を愛さずにいられる人はいないと思います。義務として数学をしないで下さい。数学を愛すること、そして数学をすること、それが“数学が出来る”ようになるただ一つの道です。

数学を愛せないようにしているものが、今の世の中には沢山あります。親や先生が数学の勉強をしろというと、それだけで数学が嫌いになる人もいます。でも数学を嫌いにならないで下さい。数学が悪いわけじゃないのですから。何でもそうだけれど、強制されて好きになるということは難しい。

ただ“数学を愛して下さい”と繰り返すことしか出来ません。数学こそが世界に通ずる道なのですから。人類はいつまでもこの地球にしがみついているわけにはいきません。人類以外の知的生物と理解し合う方法は数学を通してしか有り得ません。自分を限定しないで下さい。人間が一世紀後もこの地球上に生きているためには、もっと理性的にならないといけません。文化も人種も人であることも越えて分り合うためには、少なくとも数学を愛する心が必要だと思っています。

巧く話せないものですね。少しでも前より数学を好きになって貰えたら、それで有難いと思います。

## 8 終わりに

最初に心配した通り、実際には7節の後半、つまり  $n=4$  のフェルマ予想の証明がやれるような心理状態には受講生はありませんでした。多くの受講生は二日目のこの時間の直前まで、近くの大洞山という山に登っていたのです。美杉村の御好意でスクールバスを出して貰い、山の中腹まで送迎をして頂きましたが、矢張りかなり疲れていたようです。また前の夜の睡眠が余り取れなかった人も多く、疲れていた人が多かったようです。

$n=4$  の証明は技術的にも易しくはないので、集中力を欠いている状態で講義するのは実際上無意味だと思いました。

そこで、クイズのような問題（今年の数学コンクールの第1問）の解説をした後、循環小数の循環節の始まる位置とその長さの問題を少し話しました。多少端折りましたが、フェルマの小定理まで行くことは行きましたので（フェルマ予想と対して）、これはこれで良かったかも知れません。また何時か機会があったらゆっくり話させて頂きたいと思います。

一人でこの文章と同じ構想で書いたとしたら、こんな文章にならなかったかも知れません。受講生諸君の前で内容について考え、どうしたら分って貰えるのかと思い、何を伝えたいのか自分の心を探り、受講生の目の中に理解のキラメキが見られると喜び、そうした触合いがこの文章を作ってくれたのだと思います。講義は話し手と聞き手との共同作業です。熱心に聞いてくれ

た受講生と、この催しを企画・運営下さった皆様に、もう一度感謝の気持ちを述べたいと思います。

気持ちよくゆっくりと、じっくりと数学に接し、数学をする機会が高校までの段階でも、また社会人になってからも、増えるようになればと念じて、この稿を終えたいと思います。どうも有難うございました。

[平成3年11月7日付け原稿 ver1.3]

この論文は、日本数学教育学会誌 1992 第74巻 第5号 から、NEWS LETTER の欄に連載されます。本研究会誌への掲載をお許しいただいた蟹江先生と日本数学教育学会誌の編集部に、あつくお礼を申し上げます。