

三角形の合同条件に関する史的考察(V)

—『新主義数学』⁽¹⁾からの示唆—

なかにし まさ はる
中 西 正 治

(広島大学大学院)

(2000年11月1日 受付)

概 要：三角形の合同条件の授業においてよく行われる実践は、3要素を与えて三角形をかかせ、3つの合同条件を教えるというものである。しかしその授業では、2辺夾角相等・2角夾辺相等・3辺相等の3つ以外の合同条件が出るが、その合同条件は、合同条件と認めないで授業を進めていく。生徒の発想や発見は結局認められないのである。筆者は、もっと自由な発想・発見的学習ができるのではないかと考え、5つの合同条件を認めている『新主義数学』を分析・考察し、何らかの示唆を得ようと試みた。その結果、『新主義数学』は合同な三角形のいろいろなかき方に対して対応していることがわかった。このことは、生徒の思考の柔軟性あるいは多様な考え方に対応できると考えられる。『新主義数学』の指導からすると、教師も教科書も、もっと多様性のある方向で三角形の合同条件を扱えるのではないだろうか。我々教師は、教科書では扱っていないという理由だけで、生徒の発想の多様性を奪ってはならない。

検索語：3つの合同条件、『新主義数学』、5つの合同条件

[1] 研究の動機

筆者は拙稿(2)から(5)で、三角形の合同条件が学校教育でどのように扱われてきたかについて、中学校(明治35年の教授要目から平成元年の学習指導要領まで)と高等科および高等学校(明治5年から昭和21年まで)を対象として考察してきた。その時代その時代で扱われ方や指導法(証明法)も多少の変化をしている。「定理-証明」の形をとる指導や、三角形を描きそこから合同条件を導く指導(決定条件から合同条件を導く)等様々な方法が取られてきた。

しかし殆どの幾何学書や教科書は2辺夾角・2角夾辺・3辺の3種類しか扱っていないのである。ただし、2辺夾角の注意事項として2辺とその1辺に対する角の場合は扱っている。現代の教科書や指導法は、3要素で三角形を描かせて、その方法で画けば一通りにしかかけないから、誰が画いても同じ三角形がかける、だからこの画き方を合同条件にするという指導法が非常に多い。しかし、実際の授業でこのような指導法は、教科書以外の合同条件を見つけ出す。また、教師も生徒が考えたものを整理していくうちに、上記以外の合同条件にぶち当たる。しかし、教科書に載っている3つの合同条件しか合同条件とは認めない方向で授業を進めていくのである。生徒の自由な発想・発見など結局認められない。なぜなのか。それは、教科書では3つしか認め

ていないからである。もし授業中に教科書に載っていない合同条件を認めてしまうと、教師は生徒がその中学校以外でのテストにその合同条件を使った場合誤答にされてしまうのではないかと恐れる。『新主義数学』のように5つの合同条件を認めている数学書をみたことのある教師は、ほとんどいないのが現状ではないだろうか。このことが教えることの自信のなさにつながっているのかも知れない。結局生徒も教師も、授業中の自由な発想や発見などは意味をなさなくなるのである。それならば、最初から公理として教えればもっとすっきりする。筆者は、三角形の合同条件が3つだけではないにもかかわらず、どうして3つに集約されたかわからない。1915年(大正4年)に出版された『新主義数学』は、三角形の合同条件を5つ扱っている。合同条件の授業において、もっと自由な発想・発見的学習ができるのではないか。以上の理由で、『新主義数学』は現代の教育に何らかの示唆があるのではないかと考え、本稿では同書の分析・考察を行った。

[2]『新主義数学』について

『新主義数学』(大正4年)が出版された大正初期は、ようやく日本も国際的な数学教育改造運動を理解し始め、国内にもその機運がではじめた頃である。その流れの中で『数学教授の新思潮』では、幾何教授の目的について「中等學校幾何學教授ニ於テハ、特ニ教育ト云フ立場カラ教材ヲ整理シテ、生徒ノ心理的發達ニ適應スル所ノ幾何学ヲ組立テル」⁽⁶⁾と述べている。1915年に学習院教授の森外三郎(1866-1936)が、ドイツのゲッティンゲン「ギムナジウム」教授ベーレンドゼン、ゲッティング両氏の合著“Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen”を翻訳して文部省から出版したものである。森は「緒言」で幾何学と代数学に関して、以下のよう
なことを書いている。

幾何學ニ於テハ全クゆーくりど式ヲ脱シテ自由ニ數ノ觀念ヲ引キ入レ、代數學ニ於テハ單ニ數ノミヲ取扱ハズシテ大ニ幾何學的圖形ヲ使用シ、双方ニ於テ早ク變數並ニ函數ノ觀念ヲ與ヘ且坐標ノ用法ヲ授ケ、一方ニ代數式ノ圖式的描寫ヲ行フト同時ニ於テ幾何學的關係ヲ代數式ニテ表ス。

(波線は筆者)

同書は、特に準備過程を設け、論証幾何より先に直観的及び実験的方法で基本的図形(直線・角・円・長方形・正方形・平行線)を扱い、角・直線・平行線に関する性質を定理の形で述べている。また実験的方法からくる不正確さを知り証明の必要性も感じさせている。そして準備過程の後もしかり定理を掲げて証明するのではなく、直観・実験・推理等によって定理を導いている。

[3]『新主義数学』の合同条件について

三角形の合同条件は、上巻の「第二編 平面幾何学」の「第一章 三角形」で扱われている。まず「第十九節 三角形ノ作圖」において、三角形の作図をいろいろな条件のもとでかかせ、次節

「第二十節 合同定理」で合同定理としてまとめている。決定条件から合同条件へという流れである。詳しくその流れを見てみよう。

「第十九節」までに、「第十六節 平面図形一般」で、三角形・四角形・多角形・周・辺・角・外角・対角線等のことばの紹介、「第十七節 三角形ノ邊」で、三角形の成立条件・等辺三角形・等脚三角形・不等辺三角形・頂点・脚・底辺などについて、「第十八節 三角形ノ角」で、内角の和は180度・内対角と外角の関係・鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形・勾・股・弦などについて教えている。

三角形の作図は、与える条件についてはどの例題もすべて3要素で、1辺と2角が与えられたときを2通りに、2辺と1角が与えられたときを2通りに、3辺が与えられたときは1通り、計5通りの場合に分け扱われている。要素は具体的な長さや角度ではなく、文字を使って表している。作図は分度器を使わず定規とコンパスのみで行われている。

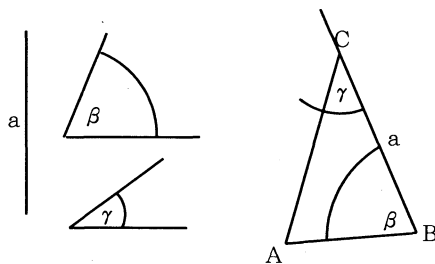
では「第十九節 三角形ノ作圖」の内容を見てみよう。

《1辺と2角が与えられたとき》

例題 I a 一ツノ邊ト之ニ隣レル二ツノ角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。 (2角夾辺のとき)

作法(第62圖) 一ツノ線分 a ト二ツノ角、 β 及 γ ヲ與ヘタリトセヨ。線分 $BC = a$ ヲ引キ、 B 上 B ニ於テ角 β ヲ置キ、 C ニ於テ角 γ ヲ置ケ、此等ノ角ノ邊ガ交ル點 A ハ 第三角點ナリ。

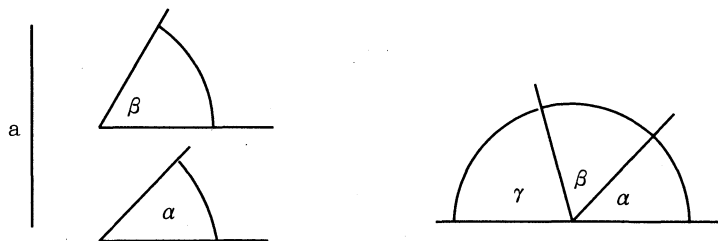
所求ノ三角形ハ全ク定レリ、然レドモ此作法ハ $\beta + \gamma < 2R$ ノ時二限り之ヲ行フヲ得、 a ノ大サハ全ク任意ナリ。



(第62圖)

例題 I b 一邊ト之ニ隣レル一角及對角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。

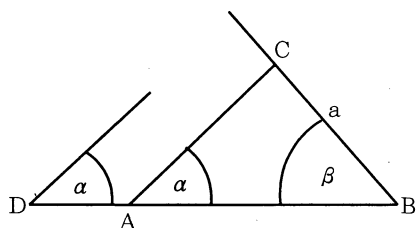
作法(第63圖) 一ツノ線分 a ト角 α 及 β ヲ與ヘタリトセヨ。第十八節例題(2)ニヨリ角 $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ヲ作り、而シテ後、**例題 I a** ニヨリテ作圖スベシ。



(第63圖)

2角夾辺に帰着させている。この後に別解が与えられる。平行移動を利用した作図方法である。もちろん $\alpha + \beta < 2R$ である。

[別解]



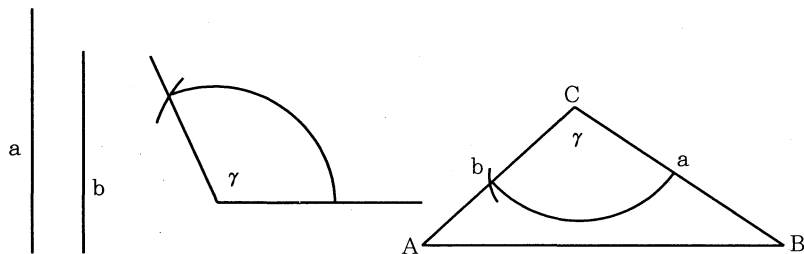
(第64圖)

その後、 a の長さを変えないで角度 α か β のいずれか一方を変化させたり、角の大きさは変えないで a の長さを変化させたりして、三角形の変化の様子を考えさせる質問がある。

《2辺と1角が与えられたとき》

例題Ⅱ 二邊及其夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。 (2辺夾角のとき)

作法(第65圖) 二ツノ線分 a 及 b 並ニ角 γ ヲ與ヘタリトセヨ。頂點 C ヲ有スル角 γ ヲ作り、其一邊上ニ線分 a ニ等シク CB ヲ取り又他ノ邊上ニ線分 b ニ等シク CA ヲ取り A ト B トヲ結合セヨ。所求ノ三角形ハ全ク定レリ、而シテ各元素ノ大サ如何ニ拘ラズ常ニ作圖スルコトヲ得。

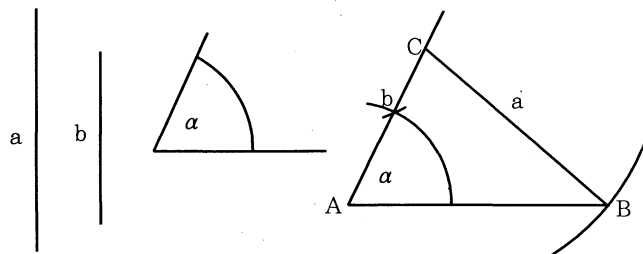


(第65圖)

前の例題と同じように質問がある。要素の2つを変えないで、残りの1つの大きさを変えると三角形はどうなるかを考えさせている。

例題Ⅲ 二邊及其一邊ニ對スル角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。

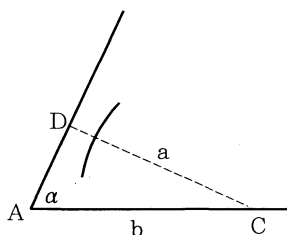
作法(第66圖) 線分 a 及 b 並ニ角 α ヲ與ヘタリトセヨ。頂點 A ヲ有シ且角 α ニ等シキ角ヲ作り、其一邊ノ上ニ線分 b ニ等シク AC ヲ取り、 C ヲ中心トシテ半徑 a ヲ有ツ圓ヲ畫キ、角 α ノ第二邊ト此圓トノ交點 B ヲ C ト結合セヨ。



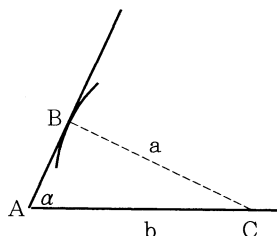
(第66圖)

但しこの場合は、Cから角 α の第2辺上に下した垂線をCDとすると、 a とCDの大小関係で作図ができる場合できない場合が起こる。このことについても詳しく触れている。

- (1) $a < CD$ の場合(第67圖)・・・作図できない (2) $a = CD$ の場合(第68圖)・・・直角三角形

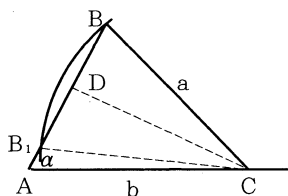


(第67圖)

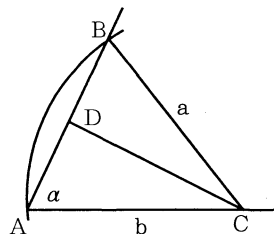


(第68圖)

- (3) $a > CD$ かつ $a < b$ の場合(第69圖) (4) $a = b$ の場合(第70圖)・・・二等辺三角形
..... 2つの三角形ができる



(第69圖)



(第70圖)

- (5) $a > b$ の場合(第66圖)・・・作図できる

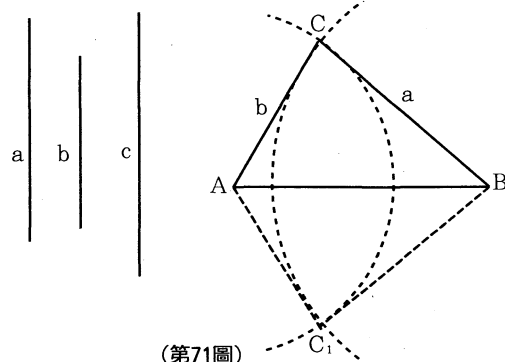
以上から、2辺及びその大きい方の辺に対する角を与えた場合は常に作図可能であり、2辺及びその小さい方の辺に対する角を与えた場合は作図不可能とまとめている。

《3辺が与えられたとき》

例題IV 三邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。(3辺のとき)

作法(第71圖) 今三邊ヲ a, b, c ($c > a$ 且 $c > b$)ヲ與ヘタリトセヨ。AB = c ヲ引キ、Aヲ中心トシテ半径 b ノ圓ヲ畫キ、又Bヲ中心トシテ半径 a ノ圓ヲ畫キ、此二ツノ圓がA Bの一方ニ於ケル點Cニ於テ交ハルトシ、之ヲA及Bト結合セヨ。

此作圖ハ $a + b > c$ ノ場合ニノミ可能ナリ。



(第71圖)

注意として、 $\triangle ABC$ と $\triangle ABC_1$ ができるが、2つの三角形は相合するから上の作図は唯一の形及び大きさに定まる三角形になっていると述べている。

以上の内容をまとめる形で、「第二十節 合同定理」で三角形の合同条件を述べている。その節の最初には、与えられた3要素で、たくさんの三角形を何処にかいてもまた誰がかいても唯一のものができると述べ、そのことを説明する方法として、その中の1つの三角形を切り抜くかあるいは模写紙にかきとり、他の三角形に与えられた条件のように重ね合わせる方法を取っている。そうすると2つの三角形は全く相重なるというのである。このように相重なることを合同と定義し、三角形の合同条件を確認している。そして以下のような形でまとめている。

合同条件Ⅰ 三角形ハーツノ邊ト二ツノ對應角即

a) 兩隣角、或ハ

b) 一ツノ隣角及對角

トガ一致スルトキハ合同ナリ

合同条件Ⅱ 三角形ハ二邊及其夾角ガ相等シキトキハ合同ナリ。

合同条件Ⅲ 三角形ハ二邊及其大ナル邊ニ對スル角ガ相等シキトキハ合同ナリ。

合同条件Ⅳ 三角形ハ三邊ガ相等シキトキハ合同ナリ。

合同条件Ⅴ 三角形ハ二邊及其小ナル邊ニ對スル角ガ相等シクシテ他ノ邊ニ對スル角ガ同種類(即双方共鋭角、直角、或ハ鈍角)ノトキハ合同ナリ。

合同条件Ⅴは、条件を付け加えて考えている。具体的な作業で生徒に納得させる方法を取っている。

[4] まとめと考察

ここで、例題Ⅰaから例題Ⅳまでと合同条件Ⅰから合同条件Ⅴまでの関係をまとめてみよう。以下のようになる。

例題Ⅰa 一ツノ邊ト之ニ隣レル二ツノ角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。→合同条件Ⅰa)

例題Ⅰb 一邊ト之ニ隣レル一角及對角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。→合同条件Ⅰb)

例題Ⅱ 二邊及其夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。→合同条件Ⅱ

例題Ⅲ 二邊及其一邊ニ對スル角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。

(1) $a < CD$ の場合……作図できない

(2) $a = CD$ の場合……直角三角形

→合同条件Ⅴ(直角)

(3) $a > CD$ かつ $a < b$ の場合……2つの三角形ができる

→合同条件Ⅴ(鋭角・鈍角)

(4) $a = b$ の場合……二等辺三角形

→合同条件Ⅴ(鋭角)

(5) $a > b$ の場合……作図できる

→合同条件Ⅲ

例題Ⅳ 三邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。

→合同条件Ⅳ

さて、このような『新主義数学』の指導法は、我々にどのような示唆を与えているのだろうか。特徴としては、基本理念である論証幾何よりも直観的及び実験的方法を重視する立場が貫かれ、実験（作図）を積極的に取り入れ作業を通して理解させる方向を取っている。

現代の教科書は、三角形の作図指導は2辺夾角（2辺夾角の注意事項として2辺とその1辺に対する角の場合は扱っている）・2角夾辺・3辺の3通りしか教えられていない。しかし『新主義数学』は、三角形の作図を通して、9通りに分けすべての場合を試している。その中から合同条件を5つにまとめている。ただ、合同条件Ⅴは「他ノ邊ニ對スル角が同種類(即双方共鋭角、直角、或ハ鈍角)ノトキ」と、条件を加えて考えている。このような指導法を取っているのは、筆者の調べた限りであるが、この『新主義数学』くらいではないだろうか。

実際の授業で3要素を条件として三角形をかかせると、様々な場合が出され作図される。例題Ⅰbのような場合は、すぐ例題Ⅰaに帰着できる。問題となってくるのは、例題Ⅲのような場合である。(1)の場合は、すぐに合同条件とはならないことがわかる。(2)から(4)の場合は、条件を付け加えれば合同条件とはなるが、通常合同条件には入れていない。しかし、(5)の場合は、合同条件に成り得るのに合同条件としない。

いろいろな三角形のかき方に対して『新主義数学』は対応している。これは生徒の思考の柔軟性あるいは多様な考え方に対応しているものと考えられる。生徒の発想を最大限に保証するという意味で、合同条件を2辺夾角相等・2角夾辺相等・3辺相等の3つだけとするのではなく、それ以外の合同条件も認めて指導していく方向で教えてみてはどうだろうか。教師も教科書も、もっと多様性のある方向で合同条件を扱えるのではないだろうか。教科書では扱っていないという理由だけ生徒の発想の多様性を奪ってはならない。

[引用文献・参考文献]

- (1) 文部省『新主義数学』（大正4年11月15日三版発行）株式会社国定教科書共同販売所
- (2) 拙稿「三角形の合同条件に関する史的考察」
大阪教育大学数学教室『数学教育研究第25号』pp.87～100
- (3) 拙稿「三角形の合同条件に関する史的考察(Ⅱ) — 昭和17年の教授要目から平成元年の学習指導要領まで —」大阪教育大学数学教室『数学教育研究第26号』pp.89～104
- (4) 拙稿「三角形の合同条件に関する史的考察(Ⅲ) — 高等小学算術書(国定)に関して —」
大阪教育大学数学教室『数学教育研究第28号』pp.59～72
- (5) 拙稿「三角形の合同条件に関する史的考察(Ⅳ) — 1872年(明治5年)から1902年(明治35年)にかけて —」
大阪教育大学数学教室『数学教育研究第28号』pp.73～84
- (6) 黒田稔著『数学教授の新思想』（昭和2年10月10日発行）培風館 p.321
- (7) 小倉金之助・黒田孝郎共著『日本数学教育史』（1978年）明治図書出版株式会社