

## 三角形の合同条件に関する史的考察

なか にし まき はる  
中 西 正 治

(羽曳野市立峰塚中学校)

(1996年2月28日受付)

**概 要**：昭和44年度の学習指導要領にもとづく教科書以後、三角形の合同条件は単に事実として記述されているのみで、その証明はほとんど示されてない。それ以前はやや厳密さに欠けるがともかくも証明がなされている。なぜこのように変わってきたのであろうか。

筆者はこの問題を解決するために、まず明治期における代表的な幾何教科書である菊池大麓編纂『初等幾何学教科書』、および当時我が国に流布した諸外国の幾何学書を分析・検討してみることに始めた。その結果、菊池は改良協会の教科書を参考にすることによって、ロビンソン、ウィルソン、ルジャンドル、ライトそれぞれの幾何学書を最大公約的・間接的に利用しているかたちになっていることがわかった。つまり菊池は、当時のヨーロッパの数学教育の情勢も考慮し、ユークリッド『原論』は少なくとも最良の手本ではないということを理解し教育的な立場に立って幾何の教科書を編纂したのである。

### [1] 問題の所在

中学校幾何教育における論証指導では、三角形の合同条件がその基礎的事項の1つとして位置づけられているにもかかわらず、今日の多くの教科書では、この三角形の合同条件は単に事実として記述されているのみで、その証明はほとんど示されていない。

しかし、このような状況は昭和44年度の学習指導要領にもとづく教科書以後のものであって、それ以前はやや厳密さに欠けるが、ともかくも証明がなされている。例えば、昭和33年度の学習指導要領のもとで編集・作成された大阪書籍の教科書『中学 数学2』（昭和35年）では次のページに示されたように書かれている<sup>(1)</sup>。

この証明方法を見ると、例えば三角形を三角形に重ねるときの重ね方という点において厳密性に欠けると筆者には思われるのである。

実際、今日の学校教育で扱われている多くの幾何的内容を初めてまとまった形で取り上げ、演繹的論理体系として『原論』なる書物（現代の幾何教育に大きな影響をもたらしている）を編纂したユークリッドは三角形の合同<sup>(2)</sup>をかなり厳密に証明している。

例えば、「二辺夾角相等の場合」は『原論』第Ⅰ巻命題4で扱われていて、筆者が先に厳密性に欠けると指摘した点を、二辺夾角相等の場合に即していえば、

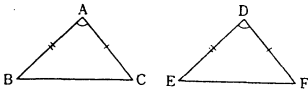
## 二辺夾角相等の場合

141

$AB=DE, \quad BC=EF, \quad CA=FD$   
 $\angle A=\angle D, \quad \angle B=\angle E, \quad \angle C=\angle F$

(1) 三角形の合同 I

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、 $\angle A=\angle D, AB=DE, AC=DF$ とする。 $\triangle DEF$ を $\triangle ABC$ の上に移動させ、 $DE$ を $AB$ に重ね、 $\angle EDF$ を $\angle BAC$ に重ねると、頂点 $C$ と $F$ は重なる。

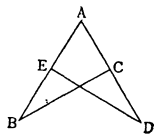


二辺とそのはさむ角が、それぞれ等しい二つの三角形は、合同である。

例 1 つぎの図で、 $AB=AD, AC=AE$ ならば、 $\triangle ABC \equiv \triangle ADE$ である。

証明  $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において、

$AB=AD$   
 $AC=AE$   
 $\angle BAC=\angle DAE$   
 $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ADE$



『中学 数学 2』(昭和35年) p.141

$AB$ を $DE$ に、 $\angle A$ を $\angle D$ に、 $AC$ を $DE$ にそれぞれ重ねるとき、 $BC$ は $EF$ に重なる、なぜなら、もし重ならなければ、点 $B$ が $E$ に、点 $C$ が $F$ に重なっているのだから、2線分 $BC$ と $EF$ が面積を囲むことになるが、これは不可能である。ゆえに $BC$ は $EF$ に重なる。

のように公理をもって記述されているのである。

ところで、「二辺夾角相等の場合」の証明方法に関しては、『原論』も大阪書籍の教科書も「重ね合わせの方法」を用いる点で基本的に同じであるが、他の2つの場合は証明方法そのものが異なっており、それゆえに証明の順序も異なっているのである。

「二辺夾角相等の場合」をSAS型、「二角夾辺相等の場合」をASA型、そして「三辺相等の場合」をSSS型と略記して、ユークリッド『原論』と大阪書籍の教科書『中学数学2』を比較対照してみると次のようになる。

	SAS型	ASA型	SSS型
『原論』	① 重ね合わせ	③ SAS型に帰着	② 二等辺三角形の利用
大阪書籍	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ 垂直二等分線の利用

(表中の数字は証明の順序を示す)

以下、簡単に上記の表について説明を加えよう。

まず『原論』第I巻では、命題4で「重ね合わせの方法」によってSAS型を証明した後、命題8において「重ね合わせの方法」を用いながらも、最終的には「二等辺三角形の両底角は等しい」ことに依拠してSSS型を証明している。さらに、命題26におけるASA型の証明はSAS型に帰着させることによってなされているのである。

一方、大阪書籍の教科書では3つの場合のいずれの場合も「重ね合わせの方法」を基本としているが、SSS型の場合は最終的には垂直二等分線を利用することによって証明がなされている。

このような証明の方法と順序の相違点は、どのような背景と経過に由来するのであろうか。

筆者はこの問題を明治期における代表的な幾何教科書である菊池大麓編集『初等幾何学教科書』および当時我が国に流布した諸外国の幾何学書を分析・検討することによって明らかにしたいと考える。

## [2] 菊池大麓編集『初等幾何学教科書』の検討

菊池大麓の『初等幾何学教科書』は、当時の文部省普通学務局長服部一三から、数学の教科課程を一定にする目的のための教科書の編纂を依頼され、その依頼に応じて編纂されたものであり、日本人の手による初めての本格的な幾何教科書であった<sup>(3)</sup>。

この教科書は伝統的なユークリッド流の幾何に沿ったもので、例えば「二つの三角形は合同である」というべきところを、“合同”なる言葉を使用せずに、「二つの三角形ハ全ク相等シ」と記述しているのである。ただ、本論文では菊池の教科書に言及する場合においても、今日常用されている“合同”なる用語を使用することにする。

さて『初等幾何学教科書』では、三角形の合同条件は SAS型  $\Rightarrow$  ASA型  $\Rightarrow$  SSS型という順序で扱われており、前節で見た大阪書籍の教科書と同様であって、菊池が範とした伝統的なユークリッド流の幾何に沿っていない。しかもその証明も多少異なっている。

具体的には次のようになされている。

### ① 二辺夾角相等の場合

第一編 第三節 定理 9. 27

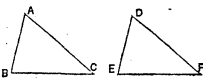
定義 32. 三角形ノ何レノ邊ニテモ之ヲ其ノ底邊ト稱スルヲ得。之ニ對スル角ノ頂點ヲ三角形ノ頂點ト稱ス。

定義 33. ニつの邊ガ相等シキ三角形ヲ二等邊三角形ト稱ス。

二等邊三角形ニ於テハ相等シキ邊ノ夾ム角ノ頂點ヲ特ニ其ノ頂點ト稱シ、第三邊ヲ底邊ト稱ス。

定理 9. 一ノ三角形ノ二邊ガ夫々一ノ他ノ三角形ノ二邊ニ等シク又此二邊ノ夾ム角ガ相等シクレバ、二ノ三角形ハ全ク相等シ、而シテ相等シキ角ハ夫々相等シキ邊ニ對ス。

ABC, DEF ハ二ノ三角形ニシテ、AB ハ DE ニ等シク、AO ハ DF ニ等シク、夾角 BAC ハ夾角 EDF ニ等シトセヨ。

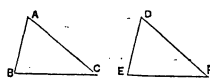


然ルトハ、二ノ三角形ハ全ク相等シテ、第三邊 BC ハ第三

『初等幾何学教科書』(明治31年)p.27

28 平面幾何学。

邊 EF ニ等シク、角 ACB ハ角 DFE ニ等シク、角 ABC ハ角 DEF ニ等シカル可シ。



三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ重テ、A 點ハ D 點ノ上ニ、邊 AB ハ邊 DE ノ上ニ重ナリ、O 點ト F 點トハ DE ノ同側ニ在ル様ニ置テ、然レバ AB ハ DE ニ等シキヲ以テ、  
AB ハ DE ト合シ、B 點ハ E 點ノ上ニ重ナル、  
又角 BAC ハ角 EDF ニ等シキヲ以テ、  
邊 AC ハ邊 DF ノ上ニ重ナル、  
又 AC ハ DF ニ等シキヲ以テ、  
AC ハ DF ト合シ、O 點ハ F 點ノ上ニ重ナル、  
斯ク B ハ E ノ上ニ重ナリ、O ハ F ノ上ニ重ナルヲ以テ、邊 BC ハ邊 EF ト合ス、  
然レバ三角形 ABC ハ三角形 DEF ト合ス、  
故ニ此二ノ三角形ハ全ク相等シク、BC ハ EF ニ等シク、角 ACB ハ角 DFE ニ等シク、角 ABC ハ角 DEF ニ等シ。

『初等幾何学教科書』(明治31年)p.28

## ② 二角夾辺相等の場合

第一編 第三節 定理 10. 29

問題 15. 二等邊三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ其ノ底邊ヲ直角ニ二等分ス。(頂角トハ頂點ニ於テノ角ノ意ナリ)

問題 16. 二等邊三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ノ上ニ在ル點ハ皆各底邊ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニ在リ。

定理 10. 一ノ三角形ノ二角ガ夫々一ノ他ノ三角形ノ二角ニ等シク又此二角ノ頂點ノ間ノ邊ガ相等シケレバ、二ノ三角形ハ全ク相等シ、而シテ相等シキ邊ハ夫々相等シキ角ニ對ス。

ABC, DEF ハ二ノ三角形ニシテ、角 ABC ハ角 DEF ニ等シク、角 ACB ハ角 DFE ニ等シク、邊 BC ハ邊 EF ニ等シトセヨ。

然ルハ二ノ三角形ハ全ク相等シケレバ、第三角 BAC ハ第三角 EDF ニ等シク、邊 AB ハ邊 DE ニ、邊 AC ハ邊 DF ニ等シカシ。

『初等幾何学教科書』(明治31年)p.29

30 平面幾何学

三角形 ABC 三角形 DEF ノ上ニ重テ、B 點ハ E 點ノ上ニ、邊 BC ハ邊 EF ノ上ニ重ナリ、A 點ト D 點トハ EF ノ同側ニ在ル様ニ重テ、

然レハ BC ハ EF ニ等シキヲ以テ、假設 BC ハ EF ト合シ、O 點ハ F 點ノ上ニ重ナル。

而シテ角 OBA ハ角 FED ニ等シキヲ以テ、假設 BA ハ ED ノ上ニ重ナル。

又角 OCA ハ角 EFD ニ等シキヲ以テ、假設 OA ハ FD ノ上ニ重ナル。

故ニ BA ト OA ノ交點 A ハ ED ト FD ノ交點 D ノ上ニ重ナル。

故ニ三角形 ABC ハ三角形 DEF ト合シ。

故ニ此二ノ三角形ハ全ク相等シク、角 BAC ハ角 EDF ニ等シク、AB ハ DE ニ等シク、AC ハ DF ニ等シ。

問題 17. 三角形ノ一ノ角ヲ二等分スル直線ガ其ノ角ニ對スル邊ニ垂線ナレバ、三角形ハ二等邊ナリ。

『初等幾何学教科書』(明治31年)p.30

## ③ 三辺相等の場合

第一編 第三節 定理 21. 47

問題 34. D ハ三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ナリ；邊 AB ガ邊 AC ヨリ小ナレバ、角 ADC ハ鈍角ナリ。

定理 21. 一ノ三角形ノ三邊ガ夫々一ノ他ノ三角形ノ三邊ニ等シケレバ、二ノ三角形ハ全ク相等シ；而シテ相等シキ角ハ夫々相等シキ邊ニ對ス。

二ノ三角形 ABC, DEF ニ於テ、BC ハ EF ニ等シク、OA ハ FD ニ等シク、AB ハ DE ニ等シトセヨ。

然ルハ二ノ三角形 ABC, DEF ハ全ク相等シク、角 CAB ハ角 FDE ニ等シク、角 ABC ハ角 DEF ニ等シク、角 BCA ハ角 EFD ニ等シカシ。

第一證明法。

二ノ三角形 ABC, DEF ニ於テ二邊 BA, AC ハ各二邊 ED, DF ニ等シ；

『初等幾何学教科書』(明治31年)p.47

48 平面幾何学

今若シ角 BAC ガ角 EDF ニ等シカラザレバ、第三邊 BC ハ第三邊 EF ニ等シカラズ；I. 10.

然ルニ BC ハ EF ニ等シ；

故ニ角 BAC ハ角 EDF ニ等シカラザレバ得ズ；即角 BAC ハ角 EDF ニ等シ；

故ニ三角形 ABC, DEF ハ全ク相等シク；I. 8.

角 ABC ハ角 DEF ニ等シク、角 BCA ハ角 EFD ニ等シ。

第二證明法 (第一證明法ノ如ク簡單ナラズト雖定理 11 ヲ用テ證明スルヲ利便アリ)

三角形 DEF 三角形 ABC ノ上ニ重テ、E 點ハ B 點ノ上ニ、邊 EF ハ邊 BC ノ上ニ重ナリ；A 點ト D 點トハ BC ノ反對ノ側ニ在ル様ニ重テ、BC ハ EF ニ等シキヲ以テ、

假設

甲 乙 丙

『初等幾何学教科書』(明治31年)p.48

第一編 第三節 定理 21.

49

F 點ハ C 點ノ上ニ重ナル;

D' ヲ D ノ落ル點トセヨ;

若シ ABD' ガ一直線ナルトハ、(丙圖ノ如ク)、

角 BAC ハ角 BD'C ニ等シ;

I, 11.

即角 EDF ニ等シ;

若シ ABD' ガ一直線ナラザルトハ、AD' ヲ結ビ付ケヨ;

然レハ BA ハ BD' ニ等シキヲ以テ、

I, 11.

角 BAD' ハ角 BD'A ニ等シ;

I, 11.

又 CA ハ CD' ニ等シキヲ以テ、

I, 11.

角 CAD' ハ角 CD'A ニ等シ;

I, 11.

故ニ二角 BAD', CAD' ノ和 (甲圖ノ場合) 或ハ差 (乙圖ノ場合) ナル角 BAC ハ二角 BD'A, CD'A ノ和 或ハ差 ナル角 BD'C ニ等シ; 公理丁ニ依ル。

故ニ (甲, 乙, 丙) 何レノ場合ニ於テモ、

二角ノ三角形 ABC, DEF ニ於テ、

AB ハ DE ニ等シク、AC ハ DF ニ等シク;

角 BAC ハ角 EDF ニ等シ;

故ニ二角ノ三角形ハ全ク相等シク;

I, 2.

角 ABC ハ角 DEF ニ等シク;

角 ACB ハ角 DFE ニ等シ;

『初等幾何学教科書』(明治31年)p.49

『初等幾何学教科書』の証明の方法・順序を整理すると、下に示したような表になる。

	SAS型	ASA型	SSS型
菊池	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ 1辺と対角の利用 (第一証明法) SAS型に帰着 (第二証明法)

(表中の数字は証明の順序を示す)

我が国の幾何教育史における菊池の『初等幾何学教科書』の位置を考えれば当然とも言えるが、菊池以後の幾何教科書における三角形の合同条件の指導順序は、ほぼ菊池と同様である<sup>(4)</sup>。

従って、何故に菊池の『初等幾何学教科書』が『原論』と異なる指導順序を取ったのが問題である。

実は、『初等幾何学教科書』はその凡例にも書かれているように英国幾何学教授法改良協会(以下、改良協会とする)が編纂した幾何学書『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETRY』に依拠しているのである。実際、証明の順序、方法とも全く同じである。

	SAS型	ASA型	SSS型
改良協会	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ 1辺と対角の利用 (第一証明法) SAS型に帰着 (第二証明法)

(表中の数字は証明の順序を示す)

さらに凡例には「他ノ英、佛、獨ノ幾何學書ニ參酌スル所アリ」と書かれていることから伺えるように菊池は改良協会の教科書以外にも、当時の我が国に流布していた諸外国の幾何学書を参考にしたと推測される。実際に菊池がどの幾何学書を読んでいたかを調べることは筆者には荷が重すぎる。そこで小倉金之助著の『数学教育史』を参考にし、当時の我が国に流布していた諸外国の幾何学書を調べることにした。

### [3] 諸外国の幾何学書の検討

菊池の英国からの帰国が明治10年の5月、『初等幾何学教科書』の完成が明治21年を考えるとこの間に流布していた幾何学書を読んでいた可能性が高い。そこでこの11年間に絞って小倉金之助著『数学教育史』（昭和13年第四刷）を見てみると、当時の諸外国の教科書について次の様なことが書かれている。

「明治10年（1877）前後において、日本の中等學校數學はアメリカ、特にロビンソンによって支配された。従て、算術は所謂イギリス流のものであり、代數も大體に於てはイギリス流であつた。之に反して幾何はフランス流であつたのである。」<sup>(6)</sup>

「ロビンソン流行の最高潮は明治10年であつた。この年にイギリスから歸られた菊池大麓は、ロビンソンの代わりに、トドハンターを推薦した。」<sup>(7)</sup>

「さて明治15-18年頃に於て、原書として最も多く採用された教科書は、

代 数      トドハンター

幾 何      ウィルソン、ライト

三角法      トドハンター

などであつた。」<sup>(8)</sup>

以上のことからすると、菊池はトドハンター、ウィルソン、ライト（この3人はイギリス）の幾何学書及び明治10年前後まで使われていたフランス、アメリカの幾何学書には目を通していたものと推測する。そこで以下の5つの幾何学書を検討して見ることにする。

- ルジャンドル(フランス) 『ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTORIE』(1823)<sup>(9)</sup>
- ロビンソン(アメリカ) 『ELEMENTS OF GEOMETORY PLANE AND SPHERICAL』(1860)<sup>(10)</sup>
- トドハンター(イギリス) 『Euclid's Elements』(1862)<sup>(11)</sup>
- ウィルソン(イギリス) 『ELEMENTARY GEOMETORY』(1881)<sup>(12)</sup>
- ライト(イギリス) 『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETORY』(1885)<sup>(13)</sup>

これらの幾何学書の証明順序及びその証明方法を説明するにあたって、三角形の合同条件の証明を便宜上、以下のようなタイプに分ける。

タイプ分けの観点は、3つの場合のいずれの場合も「重ね合わせの方法」を基本としているの

で、特徴となる証明の方法の部分の違いをもって行う。

- 重ね合わせだけを利用して証明しているものを「重ね合わせの原理型」
- 二辺夾角相等に帰着して証明しているものを「SAS型帰着型」
- 二等辺三角形の性質を利用して証明しているものを「二等辺三角形利用型」
- 一辺とその対角の関係を利用して証明しているものを「1辺-対角利用型」
- 垂直二等分線の性質を利用して証明しているものを「垂直二等分線利用型」

と名付ける。この呼び名に従って、各幾何学科書のSAS型・ASA型・SSS型のタイプをまとめたのが以下の表である。

	SAS型	ASA型	SSS型
ルジャンドル (フランス) 1823年 (出版した年)	① PROPOSITION V 重ね合わせの原理型	② PROPOSITION VI 重ね合わせの原理型	③ PROPOSITION XI 1辺-対角利用型
ロビンソン (アメリカ) 1860年 (PREFACEを書いた年)	① THEOREM XM 重ね合わせの原理型	② THEOREM XVI 重ね合わせの原理型	③ THEOREM XXI SAS型帰着型 (折り返し)
トドハンター (イギリス) 1862年 (PREFACEを書いた年)	① PROPOSITION 4 重ね合わせの原理型	③ PROPOSITION 26 SAS型帰着型	② PROPOSITION 8 二等辺三角形利用型
ウィルソン (イギリス) 1881年 (出版した年)	① THEOREM 5 重ね合わせの原理型	② THEOREM 7 重ね合わせの原理型	③ THEOREM 15 SAS型帰着型 (折り返し)
ライト (イギリス) 1885年 (出版した年)	② THEOREM 2° 重ね合わせの原理型	① THEOREM 1° 重ね合わせの原理型	③ THEOREM 3° 1辺-対角利用型

(表中の数字は証明の順序を示す)

この表から伺えることは

SAS型は、全て「重ね合わせの原理型」

ASA型は、トドハンターのみ「SAS型帰着型」

それ以外は「重ね合わせの原理型」

SSS型は、トドハンターのみが「二等辺三角形利用型」

ロビンソン、ウィルソンが「SAS型帰着型(折り返し)」

ルジャンドル、ライトが「1辺-対角利用型」

である。

これまでのことを総合的にみるとトドハンターの幾何学書のみがユークリッド『原論』と同じ

で、他の幾何学書とは違った形をとっていることがわかる。

改良協会の幾何学書『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETORY』（1891年）の証明の順序・方法をこれらの幾何学書と比べると、その内容はトドハンターの幾何学書を除く最大公約的なものであることも分かる。では、

- ① なにゆえにトドハンターの幾何学書のみがユークリッド『原論』と同じ形をとったのか
  - ② 逆にいえば、他の幾何学書は何故ユークリッド『原論』と違った形をとったのか
- が問題である。この疑問に答えるためにそれぞれの本の書かれた目的を調べてみることにする。

#### [4] 諸外国の幾何学書の書かれた目的

##### ●改良協会の幾何学書『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETORY』（1891年）

###### — PREFACEの一部 —

The Association is desirous that it should be clearly understood that the present work is not offered us a section of a complete traetise on Elementary Geometory, but simply as an edition of a part of the Syllabus with the demonstrations supplied and suitable exercises inserted.

Probably many teachers will find in this all that they require in a Text Book for their pupils, being satisfied to supply the needfull illustrations, explanations and developments of the subject in their oral teaching. Still there is, doubtless, room for other traetises embodying such illustrative and explanatory matter; but the Association is of opinion that such traetises shuold rather be the work of an Association.

（波線は筆者）

「ユークリッド原論流のそのままの扱い」ではなく、「適当な練習問題」があり、それらの問題は生徒の要求に応えられていて、そのために「必要な図や説明そして発展問題」も用意されたということは、幾何学の専門書ではなく、生徒の理解を十分に考慮するために書かれたものであるということが分かる。

##### ●ルジャンドル（フランス）『ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTORIE』（1823年）

###### — AVERTISSEMENTの一部 —

Le lecteur qui voudra se borner, au moins dans une premiere lecteur, aux simples éléments, peut passer sans inconvénient les notes, appendices, et généralement tout ce qui est imprimé en petits caracteres, comme étant moins utile ou exigeant une étude plus approfondie. Il reviendra ensuite sur ces objets, s'il le juge à propos, en choisissant

sant ceux qui lui conviendront le mieux, d'après l'avis d'un professeur éclairé.

(波線は筆者)

「少なくとも一番最初の講義では簡単な内容に限って欲しいと願っている学生は豊富な経験を持っていないかもしれない」。「もっと深く研究をしようと思うときに」「注や補遺」を書き「目的を達成してくれる」ように配慮をしている。つまり、学生の状態を考え、彼等がより深く学習できるように構成しているということである。

●ロビンソン(アメリカ)『ELEMENTS OF GEOMETRY PLANE AND SPHERICAL』(1860年)

PREFACEの一部

In the preparation of this work, the author's previous treatise, ELEMENTS OF GEOMETRY, has formed the groundwork of construction, But in adapting the work to the present advanced state of Mathematical education in our best Institutions, it was found necessary so to alter the plan, and the arrangement of subjects, as to make this essentially a new work. The demonstrations of propositions have undergone radical changes, many new propositions have been introduced, and the number of Practical Problems greatly increased, so that the work is now believed to be as full and complete as could be desired in elementary treatise. (波線は筆者)

「in adapting the work to the present advanced state of Mathematical education」と書かれているように、古典的なユークリッド『原論』には縛られず現代の数学教育の発展した状態へ沿うようにその著書を適応しようとしている。その結果、「命題の証明には徹底的な変更を行い、たくさんの新しい命題を紹介し、演習問題の数を大幅に増やした」のである。その演習問題は学力を上げるためであり。生徒の理解を確かめるためでもある。時代に合わせた数学教育をしようというのである。

●トドハンター(イギリス)『Euclid's Elements』(1862年)

PREFACEの一部

After the notes will be found an Appendix, consisting of propositions supplemental to those in the Elements of Euclid; it is hoped that a judicious choice has been made from the abundant materials which exist for such an Appendix. The propositions selected are worthy of notice on various grounds; some for their simplicity, some for their value as geometrical facts, and some as being problems which may naturally suggest themselves, but of which the solutions are not very obvious.

The work finishes with a collection of exercises. Geometrical deductions afford a most valuable discipline for a student of mathematics, especially in the earlier period of his course; .....

Many persons whose duties have rendered them familiar with the examination of large numbers of students in elementary mathematics have noticed with regret the frequent failures in geometrical deductions. ....

Those in the present volume may be divided into two parts; the first part contains 440 exercises, which it is hoped will not be found beyond the power of early students; the second part consists of the remainder, which may be reserved for practice at a later stage.

(波線は筆者)

「幾何学の演繹法は、数学を学ぶ教育課程の初期の頃の学生にとって、もっとも価値のある科目になる」と書かれているように、トドハンターは「演繹法」というものを重視している。しかし「初等数学でたくさんの学生に演繹法を教えようと試みたが、その多くの者は失敗をしている」。失敗を繰り返さないために、その教育方法として練習問題に工夫を施したわけである。練習問題を2つの部分にわけ最初の部分は初等的なもので440題の練習問題を与え、もう1つの部分は主に大学のテストから選んだものである。

●ウィルソン（イギリス）『ELEMENTARY GEOMETRY』（1881年）

表紙に「FOLLOWING THE SYLLABUS OF GEOMETRY PREPARED BY THE GEOMETRICAL ASSOCIATION」と書かれているように、この幾何学書は「幾何学協会によって準備された幾何学の教授細目に従って」作られたものである。従ってその目的は、改良協会の幾何学書である『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETRY』と同じと考えてよい。

●ライト（イギリス）『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETRY』（1885年）

PREFACEの一部

In this work, on the contrary, advantage is taken of many simple and incontestably true notions, already in the pupil's possession,—inquiry into their interdependence being postponed, with a view of commencing without delay the all-important part of the subject—the passage with absolute certainty, and in the most direct and simple manner, from geometrical properties which are obvious to others which are less obvious, or not at all so.

(波線は筆者)

「生徒がすでに持っているたくさんの単純な明らかな真の概念を多く使っている」と書かれて

いるように、厳密に演繹的に作られた『原論』とは全く違って、生徒の「単純な明らかな真の概念」を重視し、直観的なことを認め作られている。

以上をまとめてみると、

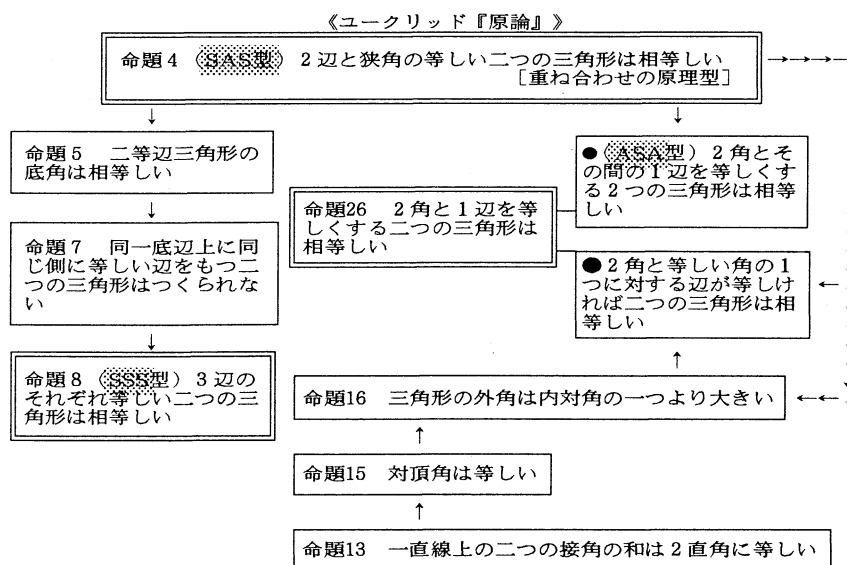
- どの幾何学書にも共通して言えることは、生徒や学生のために練習問題にかなりの考慮をし工夫を凝らしているということ
- その中でもトドハンターが特に「演繹法」の重要性を記述していることがわかる。

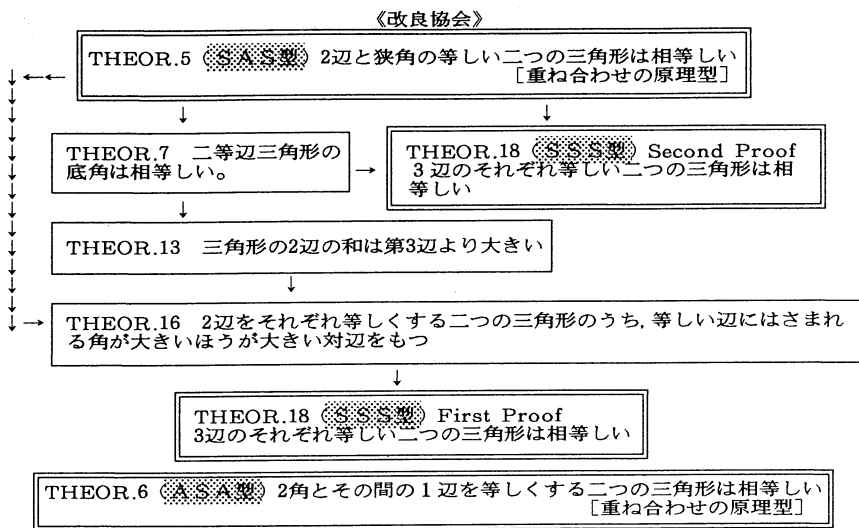
トドハンターの幾何学書には他の教科書とは違った考えがあることが伺える。したがって、教科書の題目が『Euclid's Elements』と名付けられているのも納得がいくのである。

このことから推察すると、トドハンターは特に「演繹法」の重要性を意識したが故に、「演繹法」が明確に使われているユークリッド『原論』にその範を依ったのであろう。筆者はこれがトドハンターの幾何学書のみがユークリッド『原論』と同じ形になった理由の1つではないかと考える。実際、『Euclid's Elements』の命題の証明の方法と順番は『原論』と全く同じである。

## 〔5〕 改良協会の幾何学書とユークリッド『原論』の比較

ここで三角形の単元の構成から、改良協会の幾何学書『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETRY』とユークリッド『原論』の合同条件の取扱の違いを比較検討することは、何故菊池の『初等幾何学教科書』が『原論』と異なる指導順序・方法を取った理由を考える1つの示唆になるのではないかと考える。三角形の合同条件に関する両者の構造は以下のようになっている。矢印は論理関係を筆者が付けたものである。





上の図から、以下のことが言える。

- ① ASA型を扱うのにユークリッド『原論』では「命題26 (ASA型) 2角と1辺を等しくする二つの三角形は相等しい」において「2角とその間の1辺を等しくする二つの三角形は相等しい」と「2角と等しい角の1つに対する辺が等しければ二つの三角形は相等しい」の2つを同時に扱っているが、改良協会の幾何学書は2つを切り離して別々の定理として扱っている。

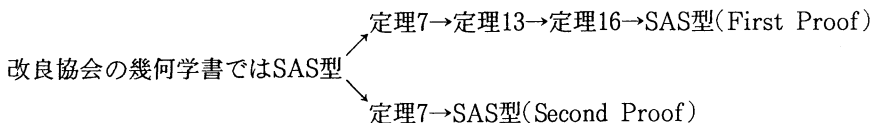
- ②
- 『原論』ではSAS型

↗ 命題5 → 命題7 → SSS型

↘ ASA型

の構造になっており、SAS型がASA型、

SSS型のいずれの証明にも利用され証明の中心的役割を果たしている。



と2通りの証明方法を行っているが、ASA型は独立に証明されている。

これらのことから筆者は、以下のことを考える。

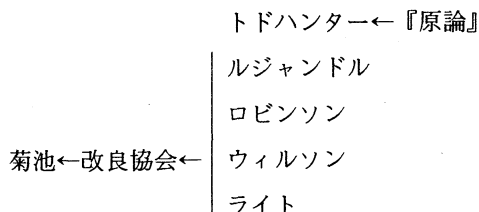
1つは、改良協会の幾何学書は証明の方法が『原論』に比べそれほど構造的になっておらず、あまり演繹的に扱っていない。

2つ目は、改良協会の幾何学書はSSS型を2通りで証明したり、『原論』の「命題26 2角と1辺を等しくする二つの三角形は相等しい」を2つに分けたりと、より分かり易くしようと努力している点がうかがわれる。

つまり、改良協会の幾何学書はユークリッド『原論』に比べ、教育的に構成されていることが判る。

## [6] 結語及び今後の課題

内容及び目的から判断してこれまでのことを鑑み、三角形の合同条件に限って図式に表すと以下のようになる。



すなわち、トドハンターの幾何学書のみがユークリッド『原論』と同じ形をとったが、菊池はトドハンターを推薦しながらも、三角形の合同条件に限って言えば、改良協会の幾何学書を参考にしトドハンターの幾何学書には従わなかったと言える。このことは、小倉金之助が『数学教育史』で述べている内容と一致する。菊池は改良協会の教科書を参考にすることによって、ロビンソン、ウィルソン、ルジャンドル、ライトそれぞれの幾何学書を最大公約的間接的に利用していたと言える。つまり菊池は、当時のヨーロッパの数学教育の情勢も考慮し、ユークリッド『原論』は少なくとも最良の手本ではないということを理解していたと考える。

筆者は菊池の『初等幾何学教科書』が『原論』と異なる指導順序・方法を取った理由は以上のような点にあったと考える。

本論文の対象とした時代は、明治から戦前の国定教書以前までである。国定教科書以降についての研究は今後の課題としたい。

本論文を書くにあたって大阪教育大学の狭間節子先生に御指導・御助言をいただいたことに深く感謝いたします。

付記 本論文は、第19回近畿数学教育学会（1996年2月24日京都女子大学）において「三角形の合同条件に関する史的考察」と題して報告したものを書き改めたものである。

## [参考文献・引用文献]

- (1) 大阪書籍株式会社『中学 数学2』（昭和35年）pp.141～146  
この教科書では「まったく重ね合わせることでできる図形を合同な図形という」と書かれている。
- (2) 中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳『ユークリッド原論』（共立出版1989年初版11刷）p.5  
『原論』には合同の定義はないが公理7で「互いに重なり合うものは互いに等しい」と書かれている。  
「等しい」は「 $\epsilon\sigma\tau\alpha\iota$ 」と表現されている。
- (3) 菊池大麓編纂『初等幾何学教科書』（明治31年）pp.27～30, pp.47～49  
この教科書には「全ク相等シ」の定義は書かれていない。しかし『幾何学講義第一巻』p.77で「ニツノ三

角形ガ全ク相等シトハーッノ三角形ノ三ッノ邊ガ夫々他ノ三ッノ邊ニ等シク、三ッノ角ガ夫々他ノ三ッノ角ニ等シキノ意ナリ」と書かれている。

(4)		SAS型	ASA型	SSS型
	坂井英太郎著(明治38年) 『普通教育 幾何教科書』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着
	林 鶴一著(明治40年) 『新撰 幾何学教科書』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ 垂直二等分線の利用
	黒田 稔著(大正9年) 『幾何学教科書〔平面〕』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着
	林 鶴一著(昭和2年) 『中等教育幾何学教科書』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着
	掛谷 宗一著(昭和2年) 『新定 平面幾何学全』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着
	米山 國蔵著(昭和6年) 『新定平面幾何学教科書』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着
	高須鶴三郎著(昭和7年) 『新制平面幾何学』	② 重ね合わせ	③ 重ね合わせ	① 垂直二等分線の利用
	国枝 元治著(昭和8年) 『新編中等教育 幾何学教科書』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着
	竹内 端三著(昭和10年) 『改訂新修幾何 平面・立體』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着
	津山 三郎著(昭和10年) 『改訂平面幾何学教科書』	① 重ね合わせ	② 重ね合わせ	③ SAS型に帰着

(表中の数字は証明の順序を示す)

- (5) The Committee appointed by the Association『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETRY』 pp.25~28 筆者が参考にしたこの幾何学書は、1891年に共益商社によって日本でreprintされたものである。菊池が明治21年(1889年)に『初等幾何学教科書』の初版を編纂していることからすると、菊池はすでに原書で読んでいたと推察される。
- 合同にあたることばは「identically equal」と表現されている。
- (6) 小倉金之助著『数学教育史』(岩波書店 昭和13年2刷) pp.315~316
- (7) (6)のp.316
- (8) (6)のp.322
- (9) A.M.LEGENDRE『ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE』(DOUZIÈME ÉDITION 1823)  
pp.10~11, pp.13~14 合同にあたることばは「égaux」と表現されている。
- (10) HORATION.ROBINSON, LL.D.『ELEMENTS OF GEOMETRY PLANE AND SPHERICAL』  
(1868)  
pp.32~33, p.36 合同にあたることばは「equal in all respects」と表現されている。
- (11) I.TODHUNTER D.Sc., F.R.S.『Euclid's Elements』(1886)  
pp.9~10, pp.13~14, pp.28~30 合同にあたることばは「equal」と表現されている。
- (12) J.M.WILSON, M.A.『ELEMENTARY GEOMETRY』(NEW EDITION 1881)  
pp.18~22, pp.28~29 合同にあたることばは「identically equal」または「equal in all respects」と表現されている。
- (13) RICHARD P.WRIGHT『THE ELEMENTS OF PLANE GEOMETRY』(FOURTH EDITION 1885)  
pp.16~18 合同にあたることばは「equal」と表現されている。