

立方体の切断面の作図法 についての一考察

中西正治
羽曳野市立峰塚中学校

要 約

立方体を扱った先行研究や実践報告は、これまでもいろいろなされてきた。正方形・平行四辺形など特殊な多角形を対象としたり、立方体の展開図との関係を扱ったり、切断したときにできる多面体の求積問題などである。しかし、これらの場合の切断面の作図法は、その問題を解くときの手段になっている場合が多い。切断面の作図法そのものを目的とした先行研究・実践報告は、筆者の調べた限り見あたらなかった。切断は、与えられた点の位置が少し違うだけで作図方法が異なり作図の難易度も変わってくる。そこで本論文では、切断面の作図法を調べた。そのために3点の取り方を(1)辺または頂点に3点がある場合、(2)平面に3点がある場合の2通りに分け、それぞれすべての場合を考察した。その結果、作図法は、ほぼ6種類に類別できることが分かった。

〔1〕本論文の目的

立方体の切断の授業は1年生の最後の単元で出てくるため、時間に追われつい急いで終わってしまうことが多かった。つまり時間をかけてじっくり取り組んだことはなかったのである。授業ではプラスチックで作られた立方体に水を入れていろいろな切断面ができる様子を生徒に見せる程度であった。その日は授業時間が少し余ったので、生徒に立方体の見取り図に切断面を作図する問題を与えた。

しかし、筆者自身が立方体の切断についてあまり理解していなかったため、ごく簡単な問題しか与えられなかった。このことがきっかけとなり筆者は、立方体の切断面の作図方法について深く考えることになった。そこでこれまでの先行研究や実践報告を調べてみた。しかし、正方形・平行四辺形など特殊な多角形を対象としたり⁽¹⁾、立方体の展開図との関係を扱ったり⁽²⁾、切断したときにできる多面体の求積問題など⁽³⁾⁽⁴⁾が、その主なも

のであった。だが、これらの場合の切断面の作図法はその問題を解くときの手段になっている場合が多い。切断面の作図法そのものを目的とした先行研究・実践報告は筆者の調べた限り見あたらなかった。切断は、与えられた点の位置が少し違うだけで作図方法が異なり、作図の難易度も変わってくる。そこで筆者は切断面の作図法をいろいろな場合に分け考察を試みた。本論文はそれをまとめたものである。

〔2〕立方体の切断について

立方体の切断面は平面、その平面は同一直線上にない3点を与えれば決定される。だが立方体の切断についての問題は、同じ正方形の上に3点を取っても意味がないので、同じ正方形の上には3点を取らないことにする。

また、立方体は2つの平行な平面に囲まれているから、切断面は

平行な2平面に他の1つの平面が交わってできる2つの直線は平行である

なる性質を担っている。もちろん

異なる2平面の交わりは直線になる

という性質も担っている。切断面を作図するには、これらの性質を考慮して行われる。

〔3〕切断の場合分け

辺または頂点に3点がある場合と平面に3点がある場合に分けて考える。

（1）辺または頂点に3点がある場合

- （ア）1つの正方形の辺または頂点に2点があり、他の1点はその正方形でない他の正方形の辺または頂点にある場合
- （イ）1つの正方形の辺または頂点に1点があり、他の2点はその正方形でない他の正方形の辺または頂点にある場合

（2）平面に3点がある場合

（ウ）3点が平行な対面上にある場合

（エ）3点が隣あわせた2面にある場合

（オ）3点が1つずつ3つの面にある場合
さらに、例えば（ア）の場合は、

●2点とともに辺にある場合

隣り合う辺のとき

対辺のとき

●1点が辺で1点が他の辺の頂点である場合

●2点とともに頂点にある場合

同一辺のとき

対角にあるとき

の5通りが考えられ、さらにそれぞれの場合に2点を含む正方形に対して、

●垂直な辺上にある場合（4通り）

●平行な辺上にある場合（4通り）

●その正方形に含まれない頂点にある場合（4通り）

が考えられる。ただし、同じ位置関係にあるものは省いて考えていく。

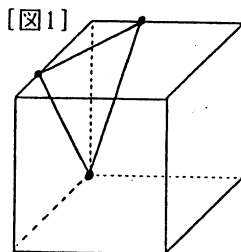
以下（イ）～（オ）も同様に考え、場合分けをしてゆく。

〔4〕切断面の作図法

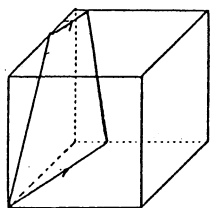
ここでは紙面上、上記のすべての場合を図示することができないので、本論文で最低必要なものに留め、他のものは当日配布予定の別紙のプリントに記載の予定である。以下の図の番号は別紙のプリントの図の番号と対応している。

（1）辺または頂点に3点がある場合

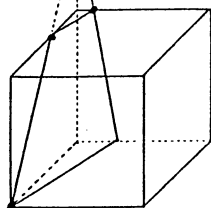
（ア）の場合



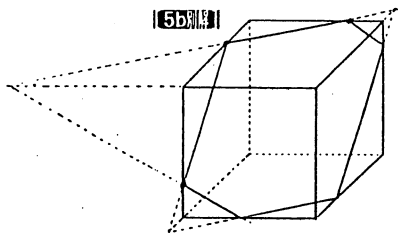
[图2a]



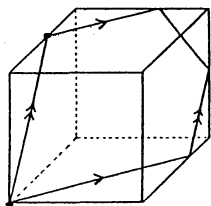
[2a] 图



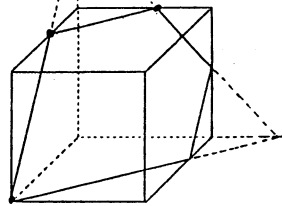
[5b] 图



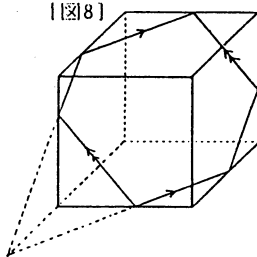
[图2b]



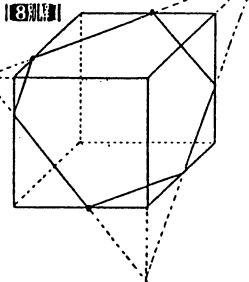
[2b] 图



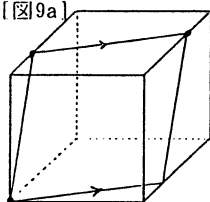
[图8]



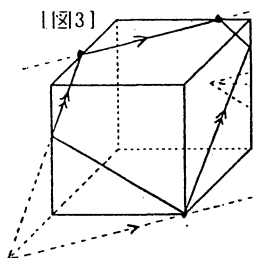
[8] 图



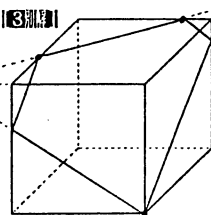
[图9a]



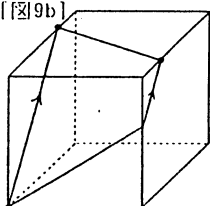
[图3]



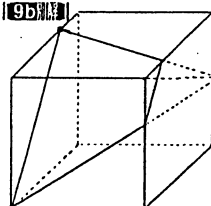
[3] 图



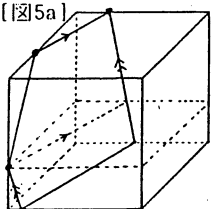
[图9b]



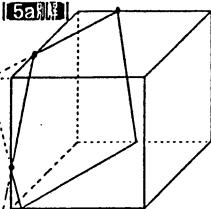
[9b] 图



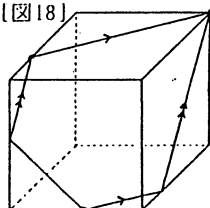
[图5a]



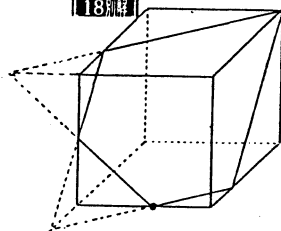
[5a] 图



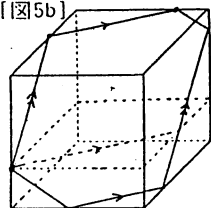
[图18]



[18] 图

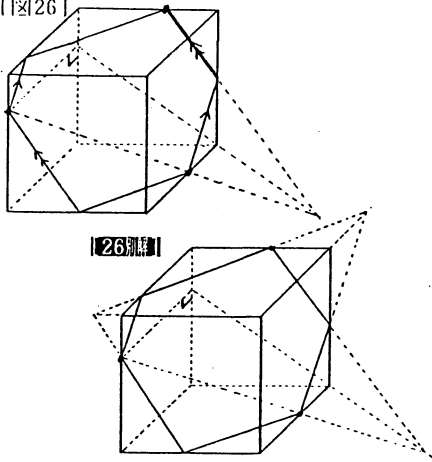


[图5b]

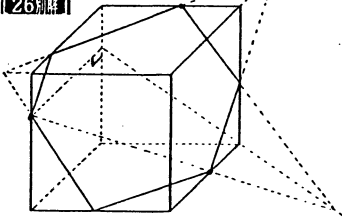


(イ) の場合

[図26]



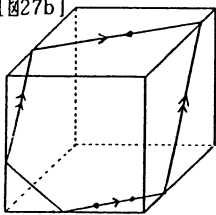
[26別解]



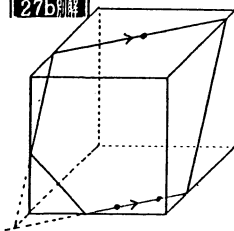
(2) 平面に3点がある場合

(ウ) の場合

[図27b]

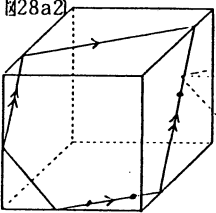


[27b別解]

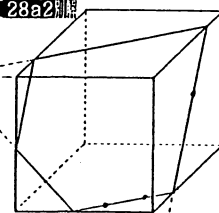


(エ) の場合

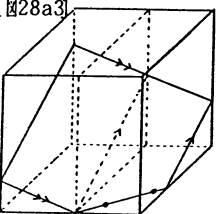
[図28a2]



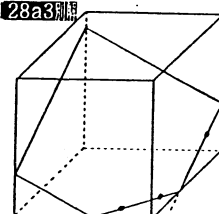
[28a2別解]



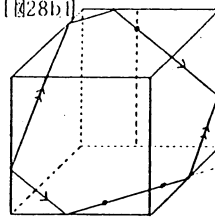
[図28a3]



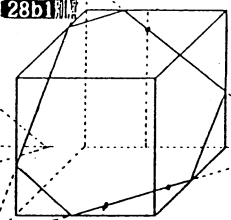
[28a3別解]



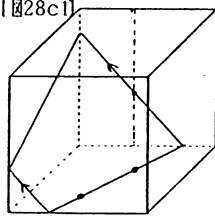
[図28b1]



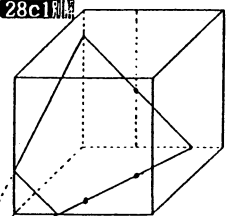
[28b1別解]



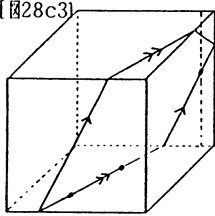
[図28c1]



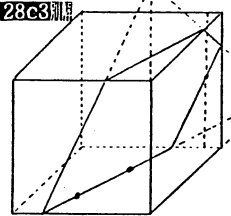
[28c1別解]



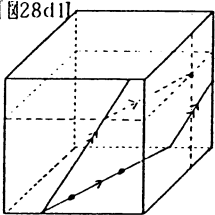
[図28c3]



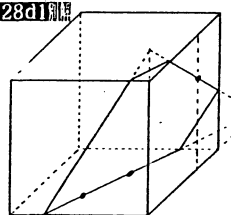
[28c3別解]



[図28d1]

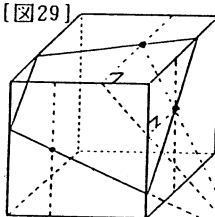


[28d1別解]

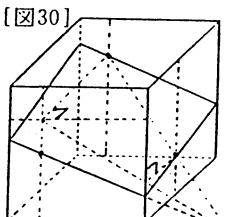


(オ) の場合

[図29]



[図30]



[図29][図30]は上のように切断面が4角形になるのも以外に、5角形、6角形も考えられる

以上で、作図法の説明を終える。次の章では、これらの作図法の類別を試みる。

[5] 作図法の類別

[4]で行ってきた作図法には、大きく分けて次の6種類があると考ええる。そしてそれぞれを右側に書いたように名付ける。

タイプ1 線分を結ぶだけでかける作図法……単純線分型

タイプ2 性質[1]を1回使ってかく作図法……1回平行型

タイプ3 性質[1]を2回使ってかく作図法……2回平行型

タイプ4 延長線のみを利用してかく作図法……延長型

タイプ5 性質[1]・延長線を使ってかく作図法……平行・延長型

タイプ6 性質[1]・延長線・射影を使ってかく作図法……平行・延長・射影型

この類別によってまとめた表は、別紙のプリントに載せている。

[6] 作図法の類別からいえること

作図法の類別から以下のことが言えるのではないか

① 単純に線を結ぶだけでかける切断面の形は3角形になる。

② タイプ2の1回平行型では、切断面の形は必ず4角形になる。

③ タイプ3の2回平行型では、切断面の形は5角形または6角形になる。

④ 延長型の入ったタイプ4、5、6では、切断面の形は4角形または5角形または6角形になる。

⑤ 1つの面に2点があり、その対面の正方形内(辺・頂点を含まない)に1点がある場合は、平行線を利用しないと

くことができない。

⑥ 1つの面に2点があり、残りの1点に対面の正方形内(辺・頂点を含まない)にない場合は、延長線の利用だけでかくことができる(ただし、同一平面上の2点を通る直線が、その2平面の交線と平行な場合は除く)。

①について

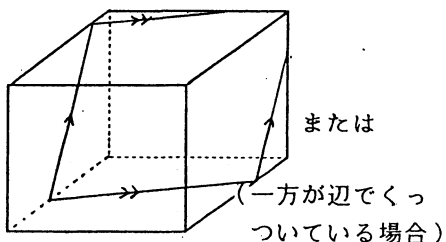
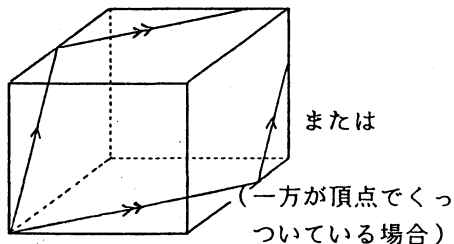
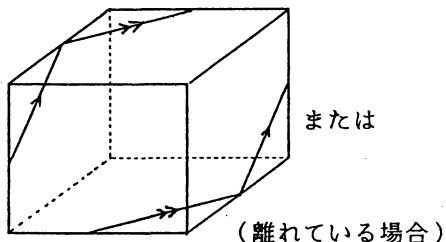
明らかである。

②について

1組の平行で書けるから、4角形にしかないことは明らかである。

③について

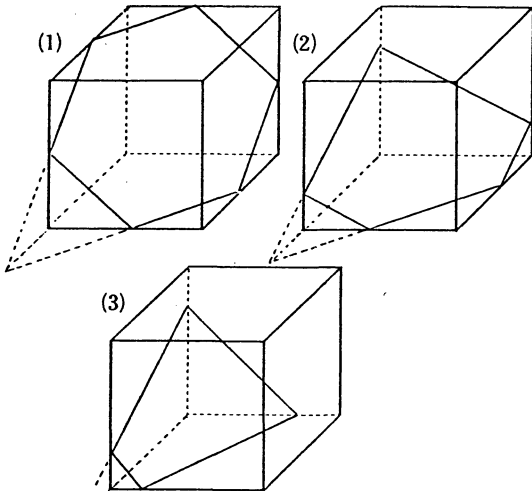
2組の平行は次の3つの場合が考えられる



である。ただし、両方がくっついている場合は、1回平行型になってしまうのでここでは考えない。よって、タイプ3の2回平行型では、切断面の形は5角形または6角形になる。

④について

延長型は、辺と延長線との交わり方を考えると以下の3通りに分かれる。ここでは、同時にできる切断面の形もかき入れておく。



よって、延長型の切断面の形は4角形または5角形または6角形になる。

⑤について

同一平面上の2点を通る直線は、その直線と交わらない辺の延長線と交わる。その交点と対面の正方形内にある1点を結ぶと、その直線は必ず立方体の中をつきぬける。よって平行線を利用しないとかくことができない。

⑥について

同一平面上にある2点を通る直線と、その平面と交わる平面上にある1点を通る直線との交点は、その2平面の交線上で必ずまじわるから延長線の利用だけでかくことができる。

同一平面上の2点を通る直線が、その2平面の交線と平行な場合は、延長線が交わらないのでかくことができない。よって、ここでは省くことにした。

〔7〕結語

立方体の切断面の作図法が14ページの表のように、ほぼ6種類に類別できたことや〔6〕で得た内容は筆者の頭を整理してくれた。本

論文で扱った作図法以外にもいろいろ考えられる（ただし、平行線や延長線や射影の組み合わせになる）。

ただ〔1〕にも書いたように、本論文は立方体の切断面の作図法を考察することが目的であったので、生徒の立方体の切断の認識については全く触れていない。しかし平行線を利用して延長線を利用してもかけるということは、いろいろなかき方があるということである。このことは生徒の多様な思考力を伸ばしたり、空間認識をより深めたりすることができるであろう。また、ここでの作図法の6種類の類別は立方体の切断の授業に多少とも役立つであろう。

今後は、これらの作図法の6種類の類別と生徒のそれに対する認識との関係を研究したい。

〔引用・参考文献〕

- (1) 宮原南海雄著「立体の切断図形での問題作り」『教育科学 数学教育 NO.385』1990年6月pp.46～53
- (2) 荒川昭著「空間図形でのコンピュータ利用」『教育科学 数学教育 NO.428』1993年8月pp.60～68
- (3) 寺内義男著「立体図形を上手に把握する」『高校への数学』VOL.19 1994年11月pp.18～21
- (4) 十河利行著「典型的な問題をマスターしよう」『高校への数学』VOL.19 1994年11月pp.22～23
- (5) 岡崎弘志著「立方体の切断——立方模型を使って——」『数学教室 NO.537』
- (6) 森田俊雄著『空間観念育成についての一考察』第19回数学教育論文発表会発表要項1986年11月pp.169～172
- (7) 森田俊雄著『教材「立方体の切断」への現象学的接近』1986年数学教育研究第1号上越教育大学数学教室pp.13～20
- (8) 和田幸雄著『中学校数学教育の未来構想』1996年5月pp.19～20