

# 中学生の空間思考に関する調査研究※

——インタビュー調査にみられる生徒の思考の特性——

中西 正 治  
美原町立西中学校

荊 木 聡  
貝塚市立第一中学校

坂 本 宏 和  
美原町立西中学校

加 波 忠 弘  
大阪市立茨田北中学校

吉 武 進  
大阪教育大学附属高等学校

要約：これまで指摘されたきた空間図形の学習や問題解決における生徒の困難さに、本質的なアプローチを試みるには空間思考の特徴を明確にする必要がある。本研究は、与えられた課題場面において主に図を基にして空間的な心像をつくり操作する力を把握することを目的とし、インタビュー調査の分析を中心に据えた。その結果、空間図形の場合、推論を進めるにあたって念頭操作が重要な位置を占めていた。またイメージを活用する者は、明確な心像を形成できる者と曖昧な心像しか形成できない者とに分かれ、前者はイメージが論理的見方・考え方のチェック機能を果たしているため、論理的なアプローチもしっかりできている場合が多い。しかし逆に論理的なアプローチができていても明確なイメージを持っているとは必ずしも言えない。さらに、課題に対して空間図形の構造の必要部分だけを取り出したり、空間図形を投影して2次元化する能力や、各判断の根拠やその特徴を一定表現できる能力がこの時期にすでに出来始めていること等も明らかになった。

## 〔1〕はじめに

空間図形に関する思考活動は、平面図形の思考の単なる延長上に位置するものではなく階層の異なる特有の性質を持つと考えられる。個々の空間図形の学習や問題解決における生徒の困難さは指摘されているが、この状況を打破するには、その本質的課題である「空間思考(図を基盤とする空間図形に関する思考操作)」という観点からの総合的・系統的研究が不可欠であろう。本調査研究は、中学生の与え

られた課題場面において、主として図を基にして空間的な心像をつくり、操作する力を把握し、空間思考の特性を明らかにすることを目的とする。前回の口頭発表では、全体的なことについて概観・考察した。今回は、その考察をより明確にするためにインタビュー調査の質的分析を行うことにする。

## 〔2〕方法

平成10年6、7月に公立中学5校と公立高校3

校で調査を実施した。時間は7題で40分程度でその後必要に応じて、中学生38名を対象にインタビュー調査も行った。下は、調査問題とその意図である。

(表1)

|     | 調査問題             | その意図及び目的   |
|-----|------------------|--|
| 問題1 | さいころころがし         | 念頭調査による立方体面及び面の合成が可能なを見る                                 |
| 問題2 | 見えない立方体の面の文字を考える | 立方体を3方向から見た面の情報から、面のつながりを考え、断面面に向かい合う面を特定できるかをみる         |
| 問題3 | はどれが紐と結べる紐       | 紐の立体交差を表す図から、その内容を読み取り、結べるかどうかの判断をみる                     |
| 問題4 | 不思議な絵            | 絵における立体的構造に関する観察力とその表現力を調べる                              |
| 問題5 | ポリキューブの通り抜け      | ポリキューブ立体の面及び平面上での向きの変更、立体の投影図の見方、及びそれらの合成、または頂点の自由な変更をみる |
| 問題6 | 正方形タングラム         | 図形の合成・分解による変形操作を調べる                                      |
| 問題7 | 容器を覆って水をこぼす      | 実際の状況を想定した場面提示から、見取り図や展開図への移行の可能性と容易さをみる                 |

[ 3 ] 各問題の分析・考察

分析・考察は、[問題4]を除く6題とする。  
[調査問題1]

1. 立方体を、図の(あ)から(G)まで、1マスごとに転がします。  
立方体が、①～④で示された位置にきたとき、★がかいてある面は、あなたから見て、立方体のどの面にありますか。あてはまるものを○で囲んでください。

① 立方体が(あ)の位置にきたとき、★の面は、  
(上、下、右、左、手前、向こう)にある。  
② 立方体が(か)の位置にきたとき、★の面は、  
(上、下、右、左、手前、向こう)にある。  
③ 立方体が(く)の位置にきたとき、★の面は、  
(上、下、右、左、手前、向こう)にある。  
④ 立方体が(G)の位置にきたとき、★の面は、  
(上、下、右、左、手前、向こう)にある。

操作の内容・特徴には個人差があり、それは  
A「イメージ(念頭操作)で転がして考える」、  
B「一マスずつ、または所々立ち止まりながら

転がして考える」、C「一マスずつ記号を書いて考える」の3つに大別できる。

Aの滑らかで連続的な念頭操作によるアプローチでは、回答用紙に何もメモがないという特徴がある。正答者18人に対して誤答者は10人で、その内訳は表2の通りである。また、念頭操作の際、対象把握の仕方にも差がある。つまり、さいころ全体の回転をイメージする場合と指定された★印の面のみをイメージする場合であり、前者の考え方に依った者は誤答することもあった。しかし、後者の考え方ならかなり正確に素早く(10秒程度)解くことが可能である。

Bの一つずつコマ切れに動かす念頭操作では、回答用紙の一部分に記号を記入しているのが特徴である。この方法では、「最初は図を描いて考え、次に頭で立体を動かした」という生徒もいたが、①の段階で間違えている。またCの一マスずつかく方法では、回答用紙のマス目に記号を記入したり、マス目上に立方体の見取図を描くなどの特徴がある。

(表2)

| 解法 | 人数 | 正答 | 誤答 | 問題番号 <sup>※1</sup> |   |   |   | 問から問への正答者 <sup>※2</sup> |    |    |    |
|----|----|----|----|--------------------|---|---|---|-------------------------|----|----|----|
|    |    |    |    | ①                  | ② | ③ | ④ | →①                      | →② | →③ | →④ |
| A  | 28 | 18 | 10 | 4                  | 3 | 2 | 1 | 6                       | 5  | 3  | 3  |
| B  | 6  | 2  | 4  | 4                  | 0 | 0 | 0 | 0                       | 3  | 3  | 2  |
| C  | 4  | 2  | 2  | 2                  | 0 | 0 | 0 | 0                       | 1  | 0  | 1  |

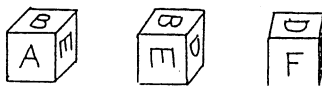
※1: 第何問題目で初めて誤答したのか。  
※2: たとえ誤答でも、それを正答とみなした時、次の問に正答しているかどうかを見る。

さて、被験者の数が少ないので断定はできないが、概観すると次のことが予想される。表2より、解法AはBに比べ、②以降の「問から問への正答者」の割合が小さいと言える。つまり解法Bは何かの拍子に誤答しても、その後を正確に答える場合が多いのに対し、解法Aでは何かの拍子に誤答したというよりも、イメージ操作自体に問題があって誤答している者がかなりいる。そして、彼らは「90°回転させる時の回転軸はどの辺か」という要点を認識していないと思われる。

[ 調査問題2 ]

2. 図は、同じ立方体を3つの方向からみたものです。立方体の面には、それぞれ、文字 A、B、C、D、E、F が書いてあります。

E面の反対側の面には、どの文字がありますか。



判断の根拠に注目すると、「A:非論理的な場合」と「B:論理的な場合」に分かれ、前者は「a:問題の図に“C”がないのでCとしたもの」「b:単なる思い込みで結論づけたもの」に、後者は「a:図①②のみを統合したもの」「b:①②を統合し、それに③を組み合わせようとしたもの」「c:①②③を全て統合したもの」に分けられる。

【A-a】このタイプは5人いたが、いずれも「視覚的に現れていないCが答えである」と結論づけており、対象の把握の仕方は単純である。すなわち、3つのさいころを独立した形で認識しており、さいころ同士を重ね合わせようという意識が全くない状態である。

【A-b】このタイプは4人いた、内容的には全くの勘に頼っている場合と、見えない面を決定しようと努力している場合とがある。しかし、いずれにしても3つのさいころを結びつけることが出来ていない。

対象の把握の仕方としては、3つの図は1つのさいころを別な方向から見た所との意識はある。ただ、イメージが乏しいため、操作して結びつけることは出来ない。

【B-a】これは6人いた、内容的には①②は統合しているが、③のさいころを全く利用していないか、もしくは利用の過程で論理的な矛盾が生じている状態にある。①②を統合する際の操作の内容・特徴は、簡単な念頭操作(一つの回転軸を基準に90°回転させるイメージ)を用いていることである。また、統合する際の判断の根拠は、共通面が2つある(BとE)ということであり、これらを組織づけるときにも2面を重ね合わせるだけで済むため、比較的容易に統合できていた。

【B-b】これは①②を統合したものと③とを適当に結びつけて間違えてしまったタイプで、3人いる。誤答の原因を直観的視点からは「面Dの向きを考慮する」という判断の根拠を欠いている。また、論理的視点からも、たとえば面Dの向きに注意がいかなずとも「③を①②と統合する際に、可能性として2つの候補がある」という判断の根拠が意識されておらず、実際「Cという考えは、全然頭になかった」などの感想もある。このように判断の根拠に気づかないことが、①②と③をうまく組織づけられない最大の原因と考えられる。

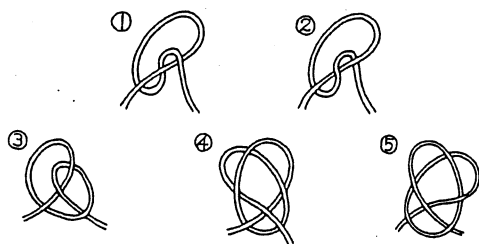
【B-c】18人いた、このタイプは、③のDの向きに注意しつつ、それを判断の根拠として正答した。③を①②に組織づける際の具体的な特徴として、複雑な念頭操作(2つの辺やさいころの対角線を回転軸とする)を用いて③を位置づけたり(14人)、展開図上に一面ずつ文字を書いたり(3人)、見取図を利用したり(1人)するなどが挙げられる。いずれも、単なる「DとFは隣同士」という意識ではなく、Dのどの位置にFがあるのかをきっちり把握しているという共通点がある。

ここで、問題1と2を合わせると、次のことが分かる。すなわち、問題1で解法B、Cを用いている7人のうちの6人は、問題2で「C」と答えていない。問題1に必要な「イメージを創ってそれを動かす力」が不十分だと、問題2において①②と③のさいころを統合することが困難となるのかも知れない。

### 〔調査問題3〕

3. 図①～⑤のひもは、両端を引っ張ると結び目ができるものと、ほどけるものがあります。

結び目ができるものをすべて選び、番号をかくてください。





判断の根拠に注目すると、「Ⅰ.経験に基づいて判断する場合」、「Ⅱ.頭の中に紐全体をイメージして判断する場合」、「Ⅲ.ある特定の部分に注目して判断する場合(特に複雑な場合によく見られる)」が認められた。

①では、Ⅰ型として「かけただけ」、Ⅱ型として「イメージするとほどける」という意見がありこの2つの型で大半を占める。Ⅲ型として「紐と紐の間隔が小さくなるので結べる」と言った者も1名いた。

②では、Ⅰ型として「団子結びの状態」、Ⅱ型として「イメージすると結べる」があり、またその中間型として「巻いている」というものもあった。

③では、Ⅱ型として「紐の片側を引っ張る」「両側を引っ張る」、Ⅲ型として「輪の中にもう一つの輪が入っている(絡まっている)」「(一部分に注目して)上と下で交差しているから」という意見に分かれた。

④では、Ⅰ型として「形が蝶結びの半分に似ている」、Ⅱ型は③と同じ発言や「一方の輪が抜ける」があった。Ⅲ型には「同じ所で交差している」との回答があった。

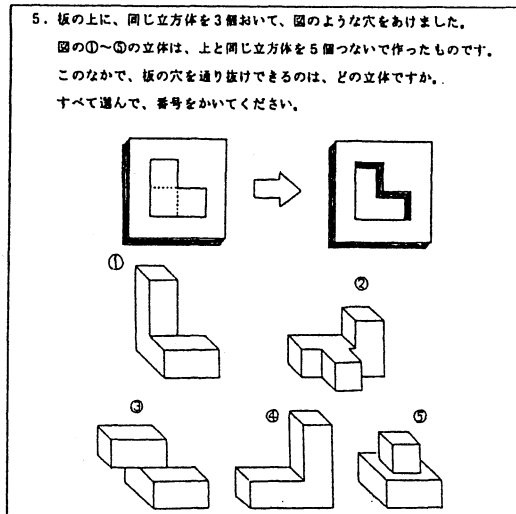
⑤は、ほぼ3分の2が「結べる」と誤答しておりその根拠もⅡ型(紐の片方、または両端を引っ張る)が圧倒的に多い。残りの3分の1は一応正答であったが、理由がはっきりしなかったり、「紐の交わりが“下・下”だからほどける」といったものであった。

⑥は、④と同様の意見がある一方で、紐の右端を引っ張ることにこだわり、結べると判断した者が少なくとも2名は確認できた。

⑦は、⑤と似て非なるものだが、実際は36人中20人までが同様のものと考えているようである。実際、答えを導く理由付けや判断基準は⑤とほとんど変わらない。

なお、この問題3で「2,3,5,7(5は誤りであるが)」と答えた者は17人だが、そのうち問題1を誤答した者は2名しかおらず、この2題を解く際の思考に質的共通点があるかも知れない。

#### [調査問題5]



インタビューの事例から推測すると、3つのパターンがある。

(a) 平面に描かれたポリキューブを手前から見て、正方形の3つの“穴の形”に合致しているかを、平面的な図から判断する(穴の形とサイズ、両方を意識する場合と、形のみを意識している場合とがある)。平面に描かれたポリキューブ立体から空間的像をイメージし、

(b) それを回転させて、通り抜ける“方向”を同定する。

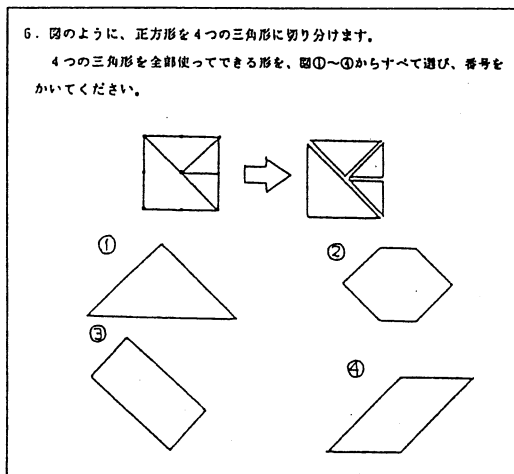
(c) それをいくつかの方向から投影的にみて通り抜ける“方向”を同定する。

(b)と(c)は、ポリキューブを見る方向を変える方法に質的違いがある。(b)では視点を一方向に決め、ポリキューブの回転操作によって通り抜ける“方向”の同定を行うのに対し、(c)では上、下、右等から見るといった投影的見方による視点変更を行い、通り抜ける“方向”の同定を行っている。

また④のポリキューブの板の通り抜け方法は、他のものと質的に異なる。これは、板の途中まで入れて、少し回転して通り抜けさせる。

④の反応率は、20～30%であるが、この中には形のみで判断して回答した生徒もいることがインタビューから分かった。よって上記の操作で通過させた生徒は、実際は20～30%もない。しかし、インタビュアーが生徒たちに上記のような操作が行えることを伝えれば、彼らはイメージできた。彼らにとってこれは、理解できないあるいはイメージできない操作ではない。他の問題に比べて、質的に異なる操作が必要なので、時間中に発想を転換させることが難しかったのであろう。

#### 〔調査問題6〕



全て正答している者が38人中5人である。直角二等辺三角形を定義として認識でき、図形の構成要素を考え、分解が十分にできている。判断の根拠に数学的知識を用いている。ただ、②③④に正答している者も、ある程度図形の構成要素を考え分解ができているとみれる。

①④は、合同な2つの直角二等辺三角形に分解すれば、その後は同じである。そのためか①④両方に正解、また誤答した者が16人いる。「合同な2つの直角二等辺三角形に分けられるか考えた」「④を半分にして考えた」「①から④の図を分解して考えた」「①(を分解して)から④へあてはめた」などがその例である。

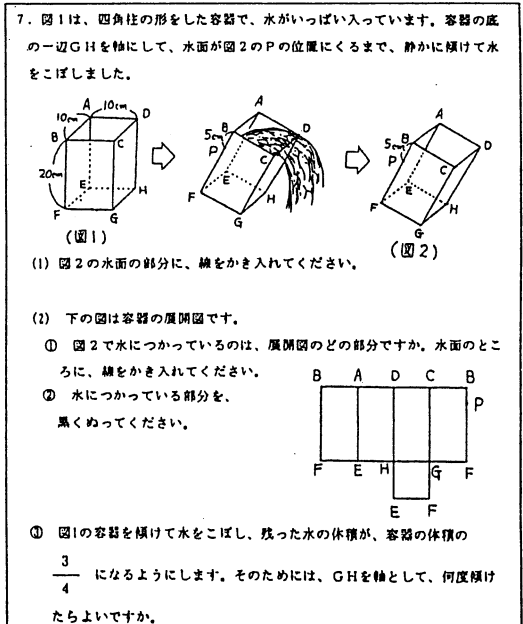
③のみの誤答が9人いる。長方形に対角線を書く例が多い。また直角二等辺三角形に似た形に分解されている例もある。③は、大きい直

角二等辺三角形1つとさらに小さい直角二等辺三角形2つに分解されなければ正しい答へと導かれない。①④より複雑である。統計全体で、③が①と④に比べ反応率が20%ほど低くなったのは、この複雑さが原因と考えられる。

②の反応率が極めて低い。インタビュー調査では説明の図形をかかせても、できる場合を結論する者がある。作図の跡を見ても試行錯誤している。これは、六角形が①③④ほど易しくないことを示している。

その他は、人数は少ないものの直角二等辺三角形は認識しやすい形とはいえないことを示している。直角二等辺三角形と認識できず図形の分解もできず、図形の形や大きさ及び構造も認識できていない生徒もいた。

#### 〔調査問題7〕



①②では、正・誤に関わらず38人中25人が、①の立体の図表示を②の展開図に示している。これは、展開図をかく判断の根拠が、①の立体の図表示における線と面の相互関係を利用していることを示している。立体を構成要素から捉えそれを平面化しているのである。

①の立体の図表示の正答の人数割合が公立中学校全体として、中1では $\frac{1}{3}$ 以下、中2・3では

1/2以下である(インタビュー調査では38人中13人)。誤答の半分は、水面を入れ物の辺と平行に描いたものである(インタビュー調査では誤答25人中13人)。問題の設定からして、傾けた様子をイメージできなかったと考えられる。実際テスト中の生徒の様子を見ていても考え込んだ様子であった。この種の答は学年とともに次第に減少している。

③の公立中学全体での正答率は15%前後とかなり低い。インタビュー調査の例として、(ア)「水のないところの体積で二等辺三角形になったから(1辺が10cm-10cmの直角二等辺三角形をかいている)」(①・②正答)、(イ)「三角すいの体積を求める」(①・②正答)、(ウ)「 $67.5 \cdot 90 \times \frac{1}{2} = 67.5 \cdot 45$ 」これだから(①②誤答)、(エ)「容器の傾き加減が45°と思ったから」(①②正答)、(オ)「説明できない。10cmのところまで、90°で全部、45°から10cmで半分」(①②正答)のようなものがあつた。(ア)・(イ)は、①②ともに正答しており、その答えを導く根拠に三角柱の形を用いている。これは明確な数学的知識が使われている。一方、(エ)・(オ)は、①②ともに正答し45°を出しているものの、その根拠は、「思ったから」等の理由で、不完全であつたりする。(ウ)は、①・②ともに誤答でありながら45°を出している。正答といえどもその根拠がすべて数学的に明確であるとはいえない。

一方、誤答でも一定の根拠を示しているものがある。「水槽を全部傾けると90°になる。その1/2だから、 $90 \times \frac{1}{2} = 22.5$ °となった」「 $90 \times \frac{1}{2} = 22.5$ °」「 $22.5 \times 3 = 67.5$   $90 - 67.5 = 22.5$ 」などのように、4分の1の水を流出させることと角度が4分の1になることを単純に結びつけている例である。その他の誤答は、①②の分析考察の中に根拠の判断材料はなく、「わからない」「山勘で書いた(50°)(60°)」「ほぼ適当(80°)」「90°では傾き過ぎだと思って60°にした」など①②と結びつけて考えたものはない。

#### [4] 全体を通しての考察

以下に示す5点が明かになった。

第1点は、図表示への記号の記入は推論を進めるにあたって大切な役割を果たしていること。第2点は、空間図形の場合特に、推論を進めるにあたって念頭操作が重要な位置を占めてこと。第3点は、空間思考の一つの特性としてある場面でイメージを活用する者は、他の場面でも積極的に活用する傾向にあり、またイメージではなく論理的思考のみに頼っている者は、他の場面においても論理的に考えようとする。第4点は、さらにイメージを活用する者は、明確な像を形成できる者と曖昧な像しか形成できない者とに分かれ、前者はイメージが論理的見方・考え方のチェック機能を果たしているため、論理的なアプローチもしっかりできている場合が多い。しかし逆に論理的なアプローチができて明確なイメージを持っているとは必ずしも言えないこと。第5点は、課題に対して空間図形の構造の必要な部分だけを取り出したり、空間図形を投影して2次元化したりする能力や、各判断の根拠やその特徴を一定表現できる能力がこの時期にはすでに出来始めていることである。

今後イメージを空間思考の一つの核として位置付けイメージの形成過程とその適時性を明らかにするとともにイメージのある者・ない者の両者をさらに伸ばしていくための素材と指導法を考えたい。

※平成9~11年度 文部省科研(基盤研究C)研究代表 狭間節子

#### [参考文献]

- (1) 第31回数学教育論文発表会論文集「空間思考に関する調査研究——中・高校生に対する調査結果の分析・考察——」(1998)pp.493-494
- (2) ヤキマンスカヤ「生徒の空間思考の発達」(1980)
- (3) 平林一榮著「空間・立体に関する教材研究」1999.1.23に大阪教育大学天王寺分校で開かれた空間思考に関するセミナーでの講演の論文である
- (4) 加藤重義著「空間概念陶冶の本質と新指導」(1937年)
- (5) 「中学生の数学的能力の発達・変容に関する調査研究(1)——1年次「潜在力」及び「数」調査結果の分析——」全国数学教育学会誌 数学教育研究 第3巻 1997 pp.165~177