

児童・生徒の空間思考に関する調査研究(2)

— 空間思考の発達の指標についての一考察 —

狭間節子 大阪教育大学	橋本是浩 大阪教育大学	赤井利行 広島大学附属小学校	井上正人 高槻市立西大冠小学校	東尾晃世 河内長野市立千代田小学校
荊木 聡 貝塚市立第三中学校	中西正治 美原町立西中学校	坂本和宏 美原町立西中学校	加波忠弘 大阪市立茨田北中学校	
田中正男 大阪府立豊中高等学校		吉武 進 大阪教育大学附属高等学校平野校舎		

本研究は、小学～高校生を対象にした調査をもとに、立体・空間に関する課題遂行における生徒の空間思考の諸特性を明確にし、発達の指標を捉え、空間思考の育成を視座においた立体・空間図形教育を目的とする。本稿では、近接領域の同領域内の問題に対する児童・生徒の反応を分析し、次の発達の指標を抽出した。**A.**無反応または問題の意味がわからない。**B.**図の全体的形・みえによって、視覚的に処理する。**C.**図の意味する対象を物的に捉え、手を使って物理的操作に類似させる。(部分的に空間像を形成する。「物理的操作」は空間像の操作の源になる。)**D.**問題のメインとなる立体図形の操作を行う。(対象の空間像をつくり、操作する。)**E.**対象の構造を保って、対象の次元をきり換え、焦点化して操作する。(次元の変化を伴う空間像の操作を行う。さらに操作そのものへの焦点化に向かう。)**F.**数学的(幾何学的)操作、操作のアルゴリズム化または論理的推論がなされ、(フリーハンドを含めて)図表示や(自然言語を用いた)説明や記述に現れる。

1. 本研究の目的と方法

本研究は、小学～高校生を対象にした調査をもとに、空間に関する課題の遂行過程における児童・生徒の空間思考の諸特性を明確にし、発達の指標を捉え、空間思考の育成を視座においた立体・空間図形教育を目指す。

本研究では、「空間思考」を実在的空間または抽象的空間に関わる課題遂行場面で、種々の直観的支え：

ア. 事物、模型；写真、絵；ビデオ、コンピ

ュータの画像など

イ. 規約的な図(見取図、展開図、投影図、地図、関係図など)

ウ. 言語、文字、記号、式など

をもとに、空間像(空間的心像)をつくり、(心的)操作をする知的活動と捉え、児童・生徒の空間思考を次の観点から調査し、分析し、考察した。

① 対象の空間像の構成

図を伴う課題で、対象の空間像をつくる

② 空間像の操作のタイプ

I. 像の空間的位置・方向の変化に導く操作：回転、移動など

II. 像の構造の変化に導く操作：展開、構成、投影、切断、合成・分解、変形など

III. IとIIの合成

③ 空間像の操作の柔軟性

異種の直観的支え（前記のア、イ、ウ）の間の、また規約的図表示間の移行と容易さ

④ 立体に関するまたは空間的關係の図表現

⑤ 空間における定位の体系の移行

身体的スキーマから他の座標系への移行

⑥ 視点の変更と統合

これまでに、小学・中学・高校生を対象に、第一次・第二次調査を行い、集計結果、インタビューの内容、児童・生徒のメモ書きや図表示等を諸側面から分析し、考察してきた。本稿では、これまでの研究結果をまとめながら、次の諸点を考察する。

(1) 調査問題の近接領域

(2) 問題遂行における反応の発達の指標

2. これまでの研究概要

第一次調査は、立体・空間図形に関する7問題（表1を参照）で、小学・中学・高校生を対象に行った（1998）。結果の反応率の側面から、全体として、学年の上昇とともに正反応率も上昇するが、小学1-3年、4年、5-6年、中学1-3年、高校1-3年の間に反応率に顕著な変化が見られ、特に小4年と5-6年の間、中学と高校の間で大きい。各段階の変容の大まかな特徴を捉えた。

さらにインタビュー調査の内容および児童生徒のメモ書き（図・記号・言葉による表示）等を分析して、各問題についての空間思考の特性を抽出し、次の諸点を明らかにした。

(1) 小学生のインタビュー調査の考察 [1]

① 問題場面の図を意識しその図を操作しようとしている。また、数や位置関係を基に

判断しようとしている。

② 場面をイメージしようとしているが、場面の図に強い関心がある。

③ 場面をイメージすることができるが、まだ場面の図を強く意識して思考活動を行っている。

④ 場面をイメージできるとともに、そのイメージの中で、論理的考察をすることができる。

(2) 中学生のインタビュー調査の考察 [2]

① 図表示への記号の記入は推論を進めるにあたって大切な役割を果たしている。

② 空間図形の場合、特に推論において念頭操作が重要な位置を占めている。

③ ある場面でイメージを活用する生徒は他の場面でも積極的に活用する傾向にあり、他方、イメージではなく論理的思考のみに頼っている生徒は他の場面でも論理的に考えようとする。

④ イメージを活用する生徒は明確な像を形成できる者と曖昧な像しか形成できない者とに分かれ、前者はイメージが論理的見方・考え方のチェック機能を果たしているため、論理的アプローチもしっかりしている場合が多い。しかし、その逆はいえない。

⑤ 課題に対して、空間図形の構造の必要な部分だけを取り出したり、空間図形を投影し2次元化する能力や、各判断の根拠やその特徴を一定表現できる能力がこの時期にはすでに出来始めている。

(3) 児童・生徒のメモ書きの考察 [3]

① 空間的心像は次元的形象をもつ（3次元的、2次元的、1次元的、0次元的形象。図表示に見られるよりもはるかに、概略的、部分的、一時的、シンボルのであろう）

② 空間像の操作の過程で、同次元の像の間のきり換え、低次元の像へのきり換えおよびそれらの逆がなされる。

③ 像のきり換えは操作の柔軟性の指標となる。

④像のきり換えや操作は図表示を直観的支えとして行われ、推論の主要な過程は児童・生徒の図・記号・独自の表示に現れる。

⑤特に像の次元のきり換えには、展開、構成、投影、切断などの数学的(幾何学的)手法・知識および図表示が介在する。

⑥空間像の構成と操作、数学的手法・知識および図表示は相補的關係にあり、三者の相乗作用によって、空間思考は有効に働く。なお、これらの諸特性は、思考を促進する要因とも、制止する要因ともなりうる。

第二次調査は7問題で行った(1999)。第二次では、第一次では扱わなかった座標系を用いる問題、遊園地の場面での問題、遠近がわかる絵をかく問題および第一次との共通問題等を含む(表1を参照)。第二次調査結果の考察はすでに行った(4)。

これらの研究結果を基に以下の考察を行う。

3. 調査問題^近隣接領域の考察

本稿の著者の一人(吉武)は第二次調査問題(問題5を除く)について、問題間の反応率の関連性、つまり問題解決に必要な力の関連性から、隣接領域の分析を行った[5]。各設問の評価基準をきめ、分析手法として、問題間の相関係数(Pearson)、因子分析(主因子法)、クロス集計を用いた。

その結果、第二次調査問題は小学1年～高校1年では3領域に、小学5年～高校1年では3領域+1領域(後者の1領域は小学5～高校1年対象の問題)に分割できた。表1の第一次問題の4領域がそれに当たる。ここで同じ領域にある問題は同じような力を必要とする問題といえ、各領域を特徴づけた。特に、問題2①は問題3、問題6と相関が高く、児童・生徒の力をみるのに適当な問題である。

表1は、第二次調査問題の領域分割を基礎に、第一次問題を、領域で、対応させたものである(隣接領域分析の結果ではない)。

表1の「活動の特徴」欄の「解釈」と「構成」は、Gorgorio, N.が「問題解決で必要な活動」の区別として用いている[6]次の意味で使用する。「与えられた対象の情報を解釈し、意味づけし、ある幾何学的操作の結果を与えられた情報から選択する」場合を「解釈」とし、また「対象にある幾何学的操作を行い、新しい対象を生成・構成する」場合(作図・記述を含む)を「構成」として表示した。「操作のタイプ」は、課題解決活動でメインとなる操作で、本稿で用いている操作のタイプI, II, IIIを意味する。

「反応の難易」は、集計結果の正反応率の平均が小学5-6年で50%以上、中1-3年で60%以上を「易」で、それ未満を「難」で、その中で各20%、30%未満を「難*」で示した。

表1は多くのことを示唆している。領域に注目すると、[領域1]の問題はいずれも机上の空間に関する世界であり、それをマイクロ空間とよぶとすれば、[領域2]の問題は現実世界の遊園地というマクロ空間とよぶことができよう。そこに対応づけた一連の不思議な絵は想像の世界ではあるが、やはりマクロ空間である。どちらもマクロ空間における位置関係が思考の対象になる。違いは、前者は写真と絵地図から空間関係を解釈し空間像をつくるのに対して、後者は絵から位置関係を解釈し、自分のもつ空間像と対比して矛盾を解釈する。[領域3]ではマクロ空間における位置関係の記述が要求される。

[領域4]の問題はマイクロ空間ではあるが、ここでは、必要な諸力が求められる。容器に水を入れてこぼした経験はあっても、そのときどきの水面の形を観察したことは希であろう。問題7②では、情報の解釈から空間像をつくり、その操作は数学的解釈をとりこみ、それをチェックしたり、逆にそれによってコントロールされる必要がある。

他方、領域分割の範囲外の問題5「遠近が

表1. 調査問題近接領域

領域		第2次調査問題			第1次調査問題		
小5 ～高	小1 ～高	問題の要旨	活動特徴	操作 のタイプ	問題の要旨	活動特徴	操作 のタイプ
			反応難易			反応難易	
領域1	a	1①②. ポリキューブの見本の見取図と同じ形の立体を5つの見取図から選ぶ。	解釈 易	I	5. 5種のポリキューブの見取図から、板の穴(図)を通り抜ける立体を選ぶ。	解釈 易	I II III
		4① (小1-4年) 平面座標上に示された3点に加えて、長方形を作る第4点を図示する。	構成(図示) 難*			II	
		3. 進路のます目に沿って立方体を回転し、指定位置で★面は立方体のどの位置にあるかを言葉で選ぶ。	解釈 易	I			
	b	2①. 立方体の一面不足している展開図のどの辺に面を付加するか、辺を選ぶ。	構成 難*		II	6. 正方形を分割した大中小4つの三角形からできる形を図から選ぶ。小1-中1は図に正方形ドット有り。	構成 易～難
		4① (小5-6年). 平面座標上に3mのハタが垂直に3本立っている。ハタの先が平行四辺形を作る第4のハタを立てる位置を図示する。	構成(図示) 難*	III			
領域2	a	6あ①,い①,う①. 遊園地でとった写真の撮影位置を、絵地図上に印を付ける。	解釈 あう難		II	1. 二次問題3に類似するが、進路が異なり、こちらの方が易しい。	解釈 易
		2①. 同じ立方体を3方向から見た見取図(面には文字・記号)から、指定面の対面を文字で選ぶ。	解釈 易	I II III			
領域3	a	6あ③,う③,い③. 位置を選んだ理由をかく。	構成(記述) あう難*		III	2. 同じ立方体を3方向から見た見取図(面には文字・記号)から、指定面の対面を文字で選ぶ。	解釈 易
		4① (小5-6年). 平面座標上に3mのハタが垂直に3本立っている。ハタの先が平行四辺形を作る第4のハタを立てる位置を図示する。	構成(図示) 難*	III			
領域4	a	7① (小5-6年). ふた付きの透明の四角柱状の容器に水が半分入っている。底面を机に置いた時(見取図有)、水面を真上から見た形を用語で選ぶ。	解釈 難		II	4①. 絵を見て不思議なところに印をつける。小1-4:安野作「ふしぎなえ」、中1-3:エッシャー作「物見の塔」、高1-3:エッシャー作「相対性」	解釈 易
		7② (中1-高3年). 容器を手を持って自由に傾けた時にできる水面の真上から見た形を用語で選ぶ。	構成 難*	III			
領域4	b	7② (中1-高3年). 容器を手を持って自由に傾けた時にできる水面の真上から見た形を用語で選ぶ。	構成 難*		III	4②. 不思議と思った理由をかく。	構成(記述) 難
		7① (小5-高3). ふた付きの透明の四角柱状の容器に水が半分入っている。底面を机に置いた時(見取図有)、水面を真上から見た形を用語で選ぶ。	解釈 難	II			
領域4	b	7② (中1-高3年). 容器を手を持って自由に傾けた時にできる水面の真上から見た形を用語で選ぶ。	構成 難*		III	7① (小5-高3). 水の入った四角柱の容器を底面の一边を軸にして傾け水をこぼす。水面が指定辺上の点まで減ったときの水面の線を見取図に図示する。	構成(図示) 小: 難* 中: 難
		7② (中1-高3年). 容器を手を持って自由に傾けた時にできる水面の真上から見た形を用語で選ぶ。	構成 難*	III			
領域4	b	5①. 大小2つの円が用紙の左下と右上の位置に書いてある。遠近が分かる絵に描く。	構成(描画) 易		III	3. 紐の立体交差を示す図から、結べるものを選ぶ。	解釈 易
		7② (中1-高3年). 容器を手を持って自由に傾けた時にできる水面の真上から見た形を用語で選ぶ。	構成 難*	III			

わかる絵をかく」では、与えられた2つの円はマイクロ（2つのボール）にもマクロ（月と月見団子）にも自由に解釈でき、空間像もさまざまな様相を呈するであろう。

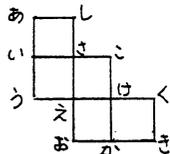
「解釈」も「構成」も与えられた情報を意味づけし解釈し、適切なものに統合することが必要で、「構成」は一般に解釈に基づいてなされる。「解釈」と「構成」の別によって、また、操作のタイプの別およびそこで必要な次元の変化の有無によって、活動の難易度や複雑さの度合いも違ってくると同時に、反応を分析し、発達の指標を抽出するのに役立つ。

4. 課題遂行における反応の発達の指標

「領域1」及びそこに対応づけた問題から児童・生徒の反応の発達の指標を抽出する。

第二次の問題2①について、その調査結果と考察（[7] [8]）に基づいて抽出する。

問題2①。(小学5-6年) 立方体を作りたいのですが、面が1つたりません。もう1面をどの辺につければいいでしょうか。いいと思うところをぜんぶみつけて、○をつけてください。



〔問題2①：反応の発達の指標〕

- A. 無反応、単なる選択（すべての辺に○）
- B. 展開図の形にもとづく
 - B1. 全体的形から面が付きそうにない辺を示す
 - B2. 特徴的な部分の形を分析するが、不十分であるか、統合できない
- C. 手を使った立体の組み立てにもとづく底面をきめて、順に組み立てていく。
- D. 立体の構成にもとづく
 - D1. 基準面(底面)をきめて順に構成する。部分的には構成できるが、途中で分からなくなる場合もしばしば。
 - D2. 基準面を(図の中央部に)変更して構成

D3. 基準面を適切に選んで構成する。

E. 接合する辺に注目して部分を構成し、統合する

E1. 接合する2辺が分かるが、不十分または統合できない。

E2. 諸部分の接合辺を統合する。

F. 上記 C、D、E から、付加する面を同定し、展開図の辺に対応させる

F1. 正しい1辺を選択

F1-1. 展開図の他の3辺への対応が困難

F1-2. 1辺が決まればそれでよしとする

F2. 正しい2-3辺を選択

F3. 正しい4辺だけを選択

主に上記 C,D,(E)→F の過程で、展開図(2D/2D) から、立体またはその部分(3次元)の空間像を構成し、足りない面(2次元)を同定し、その面を展開図の辺(1D/2D)に対応させるといった像の次元のきり換えを伴う操作がなされていると考えられる。他方、E→Fの過程では、論理的根拠(接合辺を排除していくなど)にもとづく例が、中学・高校段階でみられた。

〔問題3(第1・2次調査)：反応の発達の指標〕

- A. 無反応または単なる位置の選択
- B. 場面の図にもとづくが、「サイコロ(の図)がころがらない」
- C. 手や指を使って立方体を転がす身ぶり
 - C1. 立方体を片手で持てころがすように
 - C2. 立方体の指定面(以下★面とかく)に指や鉛筆をあてて1回転ごとに転がす。
- D. 立方体の回転のイメージがもてる「ボールがころがるときのヘソを想像した」
 - D1. 立方体を一回ごとに回転して、★面の位置を同定する。
 - D2. 数回連続回転して、要所要所で★面の位置を同定する(要所：進路方向転換直前、直後、面の位置が変わらない箇所)
- E. ★面に焦点化して回転する
 - E1. 一回転ごとに ; E1. 数回連続して

F. ★面の動きに焦点化して、ほとんどゴールまでたどりつく。★面の動きの規則がアルゴリズム化されているかのようである。

上記の過程で、最初の方向転換直前と直後の★面の位置が見えない面から見えない面が変わるところで、小学生に困難が見られた。この問題ではメモ書きが多く、見取図、面に焦点化した表示、文字・記号や矢印を用いた独自の表示法が用いられ、空間像とその操作および次元の切り換えが顕著に現われている。

[問題5(第1次調査):反応の発達の指標]

- A. 無反応または板の「穴」を無視
- B. 見取図を自分から見た(側面の)外形のもとづく。「形だけ」と「形とおおきさ」の意識の有無で違いがある。
- C. 見取図の特徴的な部分に注目し、積み木のつき方(位置関係)やたてとよこの個数のもとづく
- D. 穴と同じ「3つ分の形」に (ア)同じになるように (イ)通り抜ける方向にポリキューブの向きを変える
 - D1.平面上で回転 D2.空間内で回転
- E. 立体の面に焦点化し、視点の変更にもとづいて、(ア)「3つ分の形」と同じ、(イ)それを通り抜ける方向を同定する
 - E1.自分が動いたとして見やすいところ
 - E2.いくつか視点を変える
 - E3.視点を自由に変えて適切に選ぶ
- F. いろいろな方向から投影的に見ることができ、通り抜ける方向をきめる。穴の向きも自由になっている。

上記の過程で、D,E で区別した(ア)と(イ)の違いは大きい。インタビューの内容から、(ア)は小学校段階、(イ)中学・高校段階に多い。

6. まとめにかえて

3問題について、児童・生徒の空間思考の発達の指標を、次のように要約できる。

- A. 無反応または問題の意味が分からない。

- B. 図の全体的形・みえによって、視覚的に反応する。

- C. 図の意味する対象を物的に捉え、手を使って物理的操作に類似させて反応する。

(部分的に空間像をつくる。「物理的操作」は像の操作の源になる。)

- D. 課題のメインとなる立体図形の操作を行う。(対象の空間像をつくり、操作する。)

- E. 対象の構造を保って、対象の次元をきり換え、焦点化して操作する。(次元の変化を伴う空間像の操作を行う。さらに操作そのものへの焦点化に向かう。)

- F. 数学的(幾何学的)操作、操作のアルゴリズム化または論理的推論がなされ、(フリーハンドも含めて)図表示や(自然言語を用いた)説明や記述に現れる。

[引用・参考文献]

[1] 赤井・東尾・井上、「小学生に対する調査結果および児童の思考特性」(1999)第32回数学教育論文発表会論文集,pp.245-250,日本数学教育学会

[2] 荊木・中西・坂本・加波・吉武,「中学生の空間思考に関する調査研究」(1999)第32回数学教育論文発表会論文集,pp.269-274

[3] 狭間・田中・橋本,「児童・生徒の空間思考に関する調査研究(1)」(1999)第32回数学教育論文発表会論文集,pp.263-268

[4] 研究代表者狭間,平9-11年度科研成果報告書「数学教育における空間思考の育成に関する研究」(2000)

[5] 吉武,「隣接領域の分析」(2000),上掲 [4] pp.109-117

[6] Gorgorio,N., Exploring functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems.(1998) ESM35, pp.211-212

[7] 東尾,「問題2の小学校の調査結果と考察」(2000),上掲 [4] pp.64-66

[8] 中西,「問題2の中学・高校の調査結果と考察」(2000),上掲 [4] pp.67-68