第 33 回数学教育学会論文発表会論文集

クラインの関数教育についての考察
—関数概念と初等微積分を中心にして—

中　西　正　治
広島大学大学院教育学研究科

本研究は、クラインの数学教育運動の中でも特に関数教育に焦点をあて、彼の関数教育の関数的思想と初等微積分に視点を当てその考察をおこなった。その結果、①クラインの根本的思想は、「一般教養の原理」であり、教育にも数学教育にもこの原理は生かされていること、②自国の数学教育史から、教育の形式陶冶面も実質陶冶の面も共に正しく融解しなければならないとしていること、③関数概念が近代数学の基本的思想であることと、すでに実用面（職業）でグラフが使われていることから、「全生活ニ永ク附随スル所ノ概念教養」即ち一般教養でなければならないとしたこと、④そのことから関数概念の養成の有効的方法として幾何学的取形式があること、⑤関数的思考の養成は代数学だけでなく幾何学でも行い数学全体を通じて行うとしていること、⑥微積分に対しても「一般教養の原理」の立場から微積分を数学教育の一つの本質的部分であると主張していること、などが分かった。

1．研究の目的

本稿は、クラインの数学教育運動の中でも特に関数教育に焦点をあて、彼の関数教育の関数的思想と初等微積分に視点を当てその考察をおこなうものである。ただし、クラインの教育に対する基本的な思想がその底辺にあるので、まずその思想から考察する。

2．クラインの教育に対する基本的思想

クラインは 1900 年 11 月 26 日付け勅令に強い関心を示す。この勅令の「基本的な考え方は、——特殊の性格を持っている、種々の、多くの型の一般的教養の教育の方法は、まったく等価値のものであり、そのことにもとづいて互いに共存すべきである——というものである」。[4] すなわち、長年新ヒューマニズムの下に圧迫されていた実科学校の宿望が達せられ、ギムナジウム・実科ギムナジウム・高等実科学校の三種の高等学校が等価値と同権を法律で認められたということである。こ

のことは、「生徒もしくは彼らの両親が、その素質と人生計画に応じて,どんな方の教育を受けるかということが,自由に選択できるようになる」、「古典主義と実用主義の教育とが、異なる価値観を持っているという古くからの偏見は、根本的にやぶられた」、「ギムナジウム・実科ギムナジウム・高等実科学校の卒業生が種々の職業につくためにも、形式的に同一の権利をもつ」など[5]を意味するで。クラインが非常に望んでいたことであるが、この法律で認められたからといって、これまでの実科学校に対する社会的通念が、すぐにぬぐいさられるということはない。しかし、この法律のもっている内容は、今後の学校教育の方向性やあり方を示したということで大きな意義があるのである。クラインは、この「特殊の性格を持っている、種々の、多くの型の一般的教養の教育の方法は、まったく等価値のものであり、そのことにもとづいて互いに共存すべきである」[4]という考え方を「一般教養の原理」と考えている。

当時の人々は、一般教養といえば、昔のギムナジウム教育が一般的性格をもっていたという判断で、古典語(ラテン語、ギリシャ語)・修辞学・詩を中心にした教育が一般教養であると考えを根強くもっていた。そうでない学科即ち実科ギムナジウム・高等実科学校が中心学科としていた数学・自然科学は専門教育(職業教育)とされた。古典語(ラテン語、ギリシャ語)・修辞学・詩は“一般”であり、数学・自然科学は“特殊”と考えられていたのである。学校数学成立以来、一般教養にはなれず、学校教育の柱になることはなかったのである。そうではなくて、「数学や自然科学も、古典語や近代語と同様に、一般教養の教に寄与するものだ」[6]という考え、即ちこれが、「一般教養の原理」なのである。この「般教養の原理」という考え方は、ドイツの教育史を語るときのキーワードといっても過言ではないのである。

クラインは、16世紀から1901年までを5期に分け、歴史的展開から、この「一般教養の原理」の重要性を説明している。

またこの歴史から、数学は、一つは形式陶冶として、二つ目は応用数学であったり職業教育の一環であったりしたことである。それは数学教育の形式陶冶面と実質陶冶面である。彼はこの2面のどちらが良いということでなく,共に必要であり 2 方面をうまく共存していくべきであるといっている。

3. クラインの関数思想

クラインは数学史・数学教育史の観点及び実用面の観点から、関数概念が如何に現代社会・文化・生活にとって、基本的概念及び基本的教養であるかということを訴えている。

まず歴史的観点である。数学の歴史を語ることによって、その数学の発展が学校数学の変化に影響を与えてきたこと、また数学が時代の産物であることを主張する。

次は、実用面である。直接的実用面として、職業において関数的関係を現実に使う場面が多く、そのとき関数関係の視覚的方法として図に表していることを、気体圧力曲線や相場や列車のダイヤグラムの例で持って説明している。列車のダイヤグラムの例を使って、かなり詳しく説明している。関数関係がグラフに表現されているということは、まず「數學的思考ガ吾々ニ接近スル所ノ標本的形式」[7]を普段から使っていることを意味している。またこの関数関係の「標本形式」を日常から使っているということは、関数概念は国民の一般教養であらねばならないということの大きな理由になる。さらに、現実に関数関係をグラフ化することが日常的に行われているということは、裏を返せば、関数概念をグラフ化することによってやさしく説明できるものであるという裏づけにもなっている。以上のことを理由に、「余ノ考フル所ニテハ非常ニ容易ニ了解シ得ベキ例ニ連絡シテ曲線ノ傾斜

ノ概念ヲ明カニスルヲヨシトス。又前以テカノ困難ナル極限ノ考エ、及ビソレノ存在問題ニツキテ生徒ヲ苦シマシムルコトナク割線ヨリ出發シテ切線ニ移リ行カシムベシ」[8]などのような意見をもつのである。つまり、「“函數思想”ノ養成ハ吾々ガ前ニ述ベシ如ク實際ニ廣キ範圍ニ於テ大イニ必要ナルモノ」[9]であり、関数概念は「生徒將來ノ全生活ニ永ク附随スル所ノ概念敎養」[15]でなければならないのである。

では数学教育において、この関数的思考をどのように位置付けるのであろうか。具体的に見るために、「ギムナジウムに対する数学の教科課程」の関数的思考に関する部分を見てみる。そこでは、関数的思考の教育は、代数学、幾何学両面で行われていることが分かる。

代数学では、その準備は、第三級下（12歳）で「代数式の中の個々の量にいろいろの値を代入して、その式の変化を考えることによって、まったく自然に理解されるように」行われている。それを土台として、一次関数・二次関数のグラフ、及びそれらの関数と一次方程式・二次方程式との関係、数とその対数との関係のグラフ表示、二元二次方程式を計算及びグラフを用いて解くことなどがおこなわれている。べき概念の拡張も本質的に関数的考えによっておこなわれている。そして微分法を積分法の取り扱いは第一級下（16歳）で、その初級を教えている。

幾何学の面では、関数的思考の習慣を、「図形の個々の部分の大きさの変化が、図形全体に及ぼす影響の考察」「直角三角形の、辺の比と角の大きさの関係」「角の変化と角の関数の変化との相互関係」などを通して、たえず四角形の形の変化、二つの円の相互の位置の変化などの、大きさや位置の変化によって生ずる変換を考察することによって、指導するようにいっている。[11] そして、そこで「表われる諸関係は、いろいろの観点に立って排列することができるが、同時にそれらは、論理的思考の訓練の優れた手段」[11]であり、この「論理的思考の訓練の優れた手段」は、「極限への移行の考察にも、また極限概念の指導にも、できるだけ利用すべきである」[11]という。

以上のことを統合すると、「函數概念ハ一般ニ數學敎育ノ精神」であり、方法は、「幾何學的形式」であり、関数概念は代数だけでなく、その考え方は幾何学にも生かされ数学全体の思想となっていることがわかる。そしてこの関数的思想は、昔ながらの偏見から自由であらなければいけない。まさに、クラインの関数的思想は「余ハ幾何學的形式ニ於ケル函數概念ハ一般ニ數學敎育ノ精神タラザル可カラザルヲ確信スルモノナリ．函數概念ヲ中心トシテノ周圍ニ全體ノ數學敎材ガ自由ニ集中セラルヽトキハ今迄多ク逸セラレタル所ノ周到ナル連絡ヲ得ベシ」[7]に尽きるのである。

4．クラインの微積分に対する考え方

クラインが、関数概念が現代社会全体においてどんなに重要な意味を持っているかを3．で説明した。そして関数概念の発展としての微積分を重要視した。関数概念の発展として微積分があることは、この時代には数学として自然な帰結であろう。関数概念が「生徒將來ノ全生活ニ永ク附随スル所ノ概念敎養」[10]であるということは、「微積分は、関数概念の発展として、すべての人に要求すべき一般的な数学の教養に属しており、将来ますますそうなるだろう」[12]と確信するのも当然である。実際、その扱われ方は別にして、たとえば、第一級実科学校や高等実科学校であつかわれていたことがある。そして、関数概念の発展として微積分があるということは、関数概念の理解は微積分の理解につながるということになる。すなわち、関数概念の理解の方法「數學的思考ガ吾々ニ接近スル所ノ標本的形式」が、微積分の理解を大いに助けてくれるということになる。「標本的形式」を基礎とすれば、

微積分の理解をたやすくできるということになる。このように考えると、クラインが、微積分は高等学校では難しすぎるという反論に対して、「グラフで表された簡単な関数から出発し、その後で、たとえば自分で記録した温度計の曲線について、温度勾配に内在している観念を、微分係数の明確な概念に発展させ、また別の機会に、簡単な面積の考察から直観的に積分の概念を得るならば、どうしてそれが生徒にとってむずかしいというのだろうか。[13]（下線は筆者)」と、応えたのにも納得がいく。そして「速度・加速度の概念は微分学の考えと結びつくときにのみ十分に明確にすることができる」と提唱している。微分と深い関係にある速度・加速度は、我々の身近な力学の基本概念の理解ということで、一般教養としても重要であると考えたのだろう。

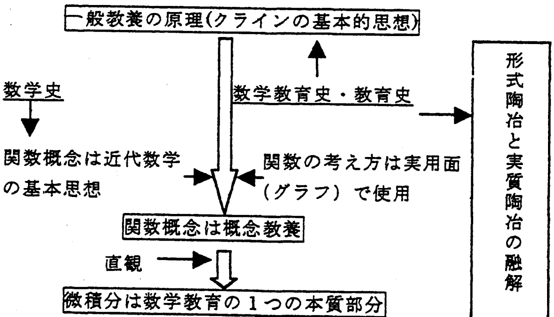
もう一つ微積分への反対の立場として、数学及び自然科学への世間の見方が変わっていないことを指摘する。すなわち、「数学者でさえも今日なお、微積分は一般教養ではなく、専門教育の準備としてのみ必要であるという人が多数いる」[12]ということの事実である。このことの理解を「初等微積分は昔から、高等数学を専門に勉強したり、工学を専門に勉強したりする入り口になっていたから、その基本的考え方もすでに一つの専門的知識であると、人々は考えているのであろう」[12]と考える。この現状に対して、「私はむしろ誰しも是認するような明確な観念形成こそ問題であると確信している。それは、現代人として開かれた精神をもって、文化生活の発展に参加しようとするすべての人に必要なものである。[18]と反論する。(下線は筆者）そして最後に、微積分に対しても「一般教養の原理」の立場から、微積分を数学教育の一つの本質的部分であると主張するのである。

5．クラインの「直観」について

「面積の考察から直観的に積分の概念を得る」などの幾何学的形式には直観能力が働いていることを強調している。

6．結　語

ドイツの教育及び数学教育の歴史から「一般教養の原理」(根本的思想）の重要性と、数学教育の形式陶冶と実質陶冶の２面を正しく融解しなければならないと考える。一方、数学史から、関数概念が近代数学の基本的思想であり、それは学校数学に対しても影響を与えてきたと分析する。実用面で関数の考えを実用的に使っていることから、関数概念は「生徒將來ノ全生活ニ永ク附随スル所ノ概念教養」[15]であるとする。その教授の有効的方法として直観能力を重視し「數學的思考ガ吾々ニ接近スル所ノ標本的形式」である幾何学的形式を提唱している。関数概念の養成は代数学だけでなく幾何学でも行い数学全体を通じて行うとしている。微積分にも「一般教養の原理」の立場から、微積分を数学教育の一つの本質的部分であると主張している。



参考文献・引用文献

（１）ペリー・クライン著丸山哲郎邦訳、『数学教育改革論ペリークライン』(1974 年 12 月再版：明治図書)
（２）林鶴一・武辺松衛共訳『ドイツに於ける数学教育』(大正 10 年 2 月 11 日発行：大日本図書株式会社)
（３）小林佐平著「第三編クライン數學敎育の根本思想」『ペリームーアクライン新數學敎育の根本思想』(昭和 9 年 4 月 20 日発行：モナス)
（４）上掲書(１)p.96
（５）上掲書(１)pp.97-98
（６）上掲書(１)pp.96-97
（７）上掲書(２)p.49
（８）上掲書(２)p.52
（９）上掲書(２)p.51
(10) 上掲書(２)p.55
(12) 上掲書(１)p.105
(11) 上掲書(１)p.137
(13) 上掲書(１)p.104