三辺形の理解について

―平面上の図形と球面上の図形との対比を通して―

堺市立さつき野中学校
中　西　正　治

要　約

本研究は、これまで平面幾何で学習してきた基本的な図形の性質が、球面上においても成り立つかどうかを調べることを通して、図形の理解の様相を明らかにすることを目的としている。方法として、念頭操作や実験・実測などの具体的操作活動を重視する。本稿では 3 つの直線で作られる領域（三辺形；以下で使用する三角形は三辺形という意味で用いる）を扱った授業について考察している。その結果、球面上における最短の道を延長して大円がかけたとしても、球面上における大円が直線であることの認識には至りにくいこと、球面にできた三角形を三角形と認めるものの、平面上での認識が極めて深く印象に残り、球面上での概念形成に大きな影響を及ぼすこと、すなわち生徒が最初に学習した概念は、きわめて強い固定観念となることなどが明らかとなった。

1．研究の目的と方法

小学校以来、平面における図形の性質を学習しているが、それらの性質には平面だからいえること、平面でなくてもいえることがある。例えば、「三角形の内角の和が 180°である」ことは、ユークリッド幾何では成り立っているが、「1 つの直線に対して垂線がかける」ことは、球面幾何でもいえる。生徒は、平面という条件を意識して、平面における図形の性質を理解していることは少ない。このことは、平面の図形の性質の認識が本質的に育成されていないことを示している。空間における図形の性質は、その図形が存在する空間に依存する。このことの認識は、空間思考を行う上で極めて重要なことである。本研究では István Lénárt (1996) [(1)] の研究を参考とした。István Lénárt

本稿は、平成 15 年度～平成 16 年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）研究成果報告書『数学教育における空間思考の育成の視座からの図形・空間のカリキュラム開発研究』、平成 17 年 3 月、pp.160-169 の「球面上の図形―平面上の図形との比較を通して―」の研究の一部である。

(1996)の研究は、平面上の図形と球面上の図形を比較的に取り扱うことによって、球面上の図形およびその空間の理解を目的としている。本稿では、これまで平面幾何で学習してきた基本的な図形の性質が、球面上においても成り立つかどうかを調べることを通して、図形の理解の様相を明らかにすることを目的とする。方法として、念頭操作や実験・実測などの具体的操作活動を重視する。

そのために授業では、以下の5点の内容を指導する。

① 2点を決めれば直線は決まることがわかり、球面においては大円になること

② 2直線の交点は、平面においては1点であり、球面においては2点で交わること

③ 平面においては平行線が存在し、球面においては平行線が存在しないこと

④ 2直線に共通する垂線は、一般的に平面では存在しないが、球面では必ず存在すること

⑤ 平面における三角形の内角の和は180°であり、球面における三角形の内角の和は180°より大きく540°より小さいこと

本稿では特に、3つの直線で作られる領域（三辺形；以下で使用する三角形は三辺形という意味で用いる）を扱った授業（本時）について考察する。

2．指導計画（全6時間）

指導の流れを大きく3つに分け、それらを展開Ⅰ（本単元全体に関わる導入）、展開Ⅱ（直線に関わる指導領域）、展開Ⅲ（三角形に関わる指導領域）とした。これらの3つの展開の指導内容は以下のようである。またこの授業は選択授業で行った。指導時間は校時の5限目・6限目と続いているため、それを1回分とし全部で3回分とした。

展開Ⅰ〔導入〕 展開Ⅱ〔直線〕 　直線 　2直線の交点の数	第一・二時 ［第一回目］
平行線 　垂直・垂線 展開Ⅲ〔三角形〕	第三・四時 ［第二回目］
3直線で作られる領域（本時） 　直角三角形（本時） 　三角形の内角の和	第五・六時 ［第三回目］

3．使用教具

ワークシート（プリント）9枚（内容は資料参照）、プラスチック製の球面模型（外径 16.8cm）、ホワイトボード用カラーペン、淵のついた柔らかい塩化ビニール製の半球（内径 17cm、授業では直線ハットと呼ぶ）

4．対象生徒

1年生2人、2年2人、3年2人（計6人）

5．これまでの授業の流れ

［プリント1］から［プリント7］の学習で、平面と球面における直線、2直線の交点の数、平行線、垂直・垂線について学習をしている。すでに、以下のことをまとめとして確認している。

［プリント1］球面にはその独自な性質があること。

［プリント 2］直線は、平面においては左右に延びるが、球面においては一周してつながる大円となること。大円で切るとその切断面は球の中心を通ること。大円は無数あること。

［プリント3］2直線でできる交点の数は、平面では1つ、球面では2つあること。その2つの交点は球の中心に対して反対側であり、この関係をもつ2つの点を対極点ということ。

［プリント4］平行線は、平面では存在するが球面では存在しないこと。

［プリント5］赤道と経線が90°で交わることを利用して、垂直な2直線がかけること。

［プリント6］垂直・垂線について、平面では、2直線が平行のときは共通な垂線が存在するが、2直線が平行でないときは存在しない。球面では、2つの大円に共通な垂線が必ず存在すること。

［プリント7］3直線が作る領域の数は、平面では7、6、4の3通り、球面では8、6の2通りあること。

6．実際に行なわれた授業

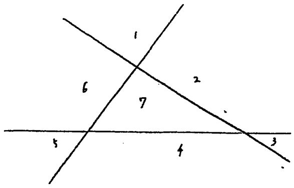
以下が、実際に行われた授業の様子の概略である。授業の流れを作っていった生徒の発言や活動およびそれに対する教師の示唆や他の生徒の反応を中心にかいている。

1年生の2人を1a、1b、2年生の2人を2a、2b、3年生2人を3a、3bとする。（まとめ）は、教師の授業のまとめを生徒が板書したものである。

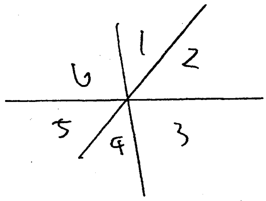
［第二回目］（2004.12.7）の後半から

[プリント7]

（問1）最初に出た分け方は、次の2通り（5人（図1）、1人（図2））であった。

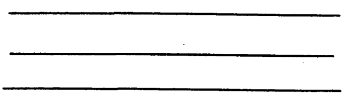


[図 1]1a,1b,2a,2b,3a

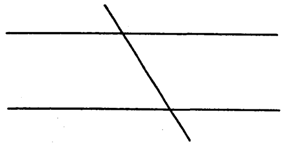


[図 2] 3b

そこで、次のような分け方もあることを説明した。



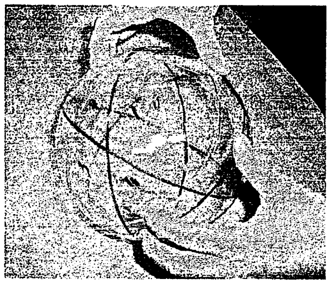
[図 3]



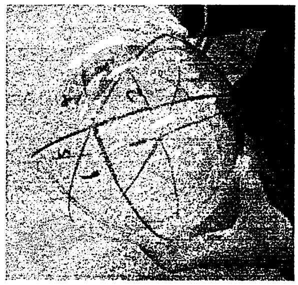
[図 4]

（問 2）球面は容易に領域に分けることができた。

[図 5]



[図 6]

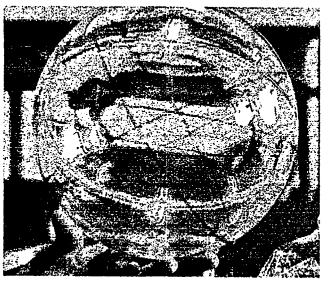


[図 7]

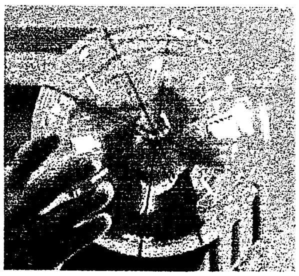
（まとめ）平面では 7、6、4 の 3 通りあるが、球面では 8（図 5、図 6）、6（図 7）の 2 通りである。

[第三回目]（2005.1.25）

前回の復習を兼ねて、3 本の直線を引き三角形を作ることから始めた。前回確認した 2 種類（8（図 8)、6（図 9）の 2 通り）が再びでた。新しくできた面に番号をかかせ面の数を確認した。



[図 8] 1b,1a,2a,3a



[図 9] 3b,2b

次に、反対側に同じ形があることを意識させるため、作った面の中で、同じ面の形のところに同じ色を付けさせた。3b は、8 つの面を作ってはいたが、その中の 6 つの面が互い違いに同じ形が並んでいるようにかいたため、2 つのグループに分かれてしまっていた。

また6つの面のとり方は、8つの面のとり方の特殊型であることを確認した。

しかしこの段階では、まだ球の対称性を認識していないと判断し、その指導の準備として適度な大きさの三角形をかかせ、その中の1つの三角形に注目させた。その三角形の異なる3つの角度に異なる記号（○、△、×）を、同じ角度には同じ記号をつるよう指示した。しかし、その三角形と反対側にできる三角形が合同であることに気づいていない様子だったので、反対側の三角形に同じ角度があるのではないかという示唆を行った。するとすぐさま、1aから「反対側にできる三角形は同じ面積である」という発言が返ってきた。一方3bは、内角の和が180°を越えていることに気づき、「ここにできている三角形は三角形ではない」と、強い口調で主張した。この意見は重要な意見と考え、後でじっくり扱うこととし、とりあえず、同じ角度に同じ記号をつけさせることにし、全員正しく記号がつけられているかの確認を行った。

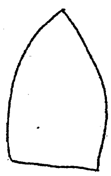
次は長さについて確認を行なった。同じ長さには同じ記号をつけるように指示し、教師指導型で行なった。そして最初に対象とした三角形と反対側にできる三角形は長さ角度ともに同じだから、反対側にできる三角形とは合同になることを確認した。この確認は先程の1aの意見である「反対側にできる三角形が同じ面積である」を裏付けるためのものでもあった。さらに対象としなかった残りの三角形に関しても、それぞれ反対側にできる三角形とは合同であることを、異なる色を塗ることによって確認した。この2つの三角形の対称性は、後に行なう三角形の内角の和が180°以上であるという証明の理解に重要な役割を果たすことになる。

（まとめ）8つの領域ができる。反対側にひっくり返ってぴったり重なる1組の三角形ができる。形・面積が同じ三角形が4組できる。

ここで先程の3bの発言「ここにできている三角形は三角形ではない」を取り上げた。

再度3bに先程の発言について尋ねると、「三角形ではない。平面にすると三角形にならない、かけない。180°にならない」といい、球面にできる三角形を三角形として受け入れがたいものとして捉えていた。

すると1aより、[図10]が示された。



[図 10] 1a

教師側から、考えるべき方向を示すために、「これ（図 10）が三角形かどうかを考えればよいことになる」と、生徒の意見をまとめた。そしてこのことを解決するためには、「三角形とは何か」という定義に立ち戻る必要があることを確認した。

そして生徒に「三角形とは何か」と尋ねると、「内角の和が180°である」「辺が3つある」「頂点が3つある」という答えが返ってきた。生徒は定義と性質の区別がついて

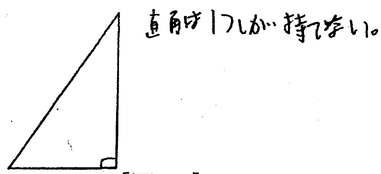
いない。そこで「小学校のとき最初三角形とはどんな形と習いましたか」といい直した。しかし生徒はそのことを忘れていて応えられなかったので、今度は「三角形をかきましょうといわれたら、小学校のときはどのようにしましたか」と誘導的な質問に切り換えた。すると、3 つの線をかいて作ったという内容の発言が返ってきた。その発言を捉えて、三角形の定義—3 直線で囲まれた図形を三角形という—を確認した。それでも 3b は「(球面にできる直線は) 曲がっているから直線でない」といい、球面にできている三角形は三角形とは認められないと主張した。この主張に対して教師は、大円を直線と見ることに納得していないからだと判断し、三角形を構成している直線について、「結局は三角形を作っている直線が問題になってくるね」と考えるべき方向を示唆した。そして、「直線とは何か」という定義に関わる質問をした。この質問に対しては、3b も含め全員が、直線は 2 点を最短距離で結ぶ線であることは認めた。この承認から、球面にできる最短距離は大円になるから、球面における大円を直線と考えなければならないことを再確認した。このように、順序立てて考えていくと、三角形の定義から、球面に作られた形は三角形であると認めなければならないと説明した。しぶしぶ 3b は、球面にできた三角形を三角形と認めたものの、それでも 3b は「許されへん」と不満げであった。3b の「許されへん」という発言は、最初の認識が極めて深く印象に残り、後の概念形成に大きな影響を及ぼしていることを示している。

その後は、先ほどの定義と性質の混同について整理を行った。

(まとめ) 三角形の定義：3 つの直線で囲まれた図形
内角の和が 180°（性質）
辺が 3 つある（性質）
頂点が 3 つある（性質）

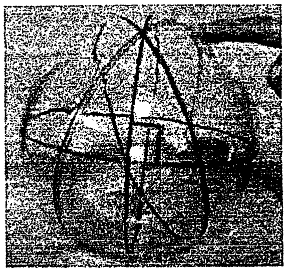
この活動を通して、「三角形とは何か」を考えるためには、さらにそのもととなる「直線とは何か」を考えなければならないという経験した。この論証の考え方は、具体的操作活動の中で創発された内発的動機によるものであって、生徒は自らの課題やその課題を解決するための方法を捉えていくことができた。具体的操作活動の重要性が認められる。

[プリント 8]
(問 1) 1 通りしかないことはすぐさま理解した。

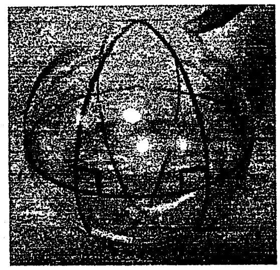


[図 11]3a

（問 2）球面では、まず以下に示す 2 通り（直角が 1 つ（図 12)、直角が 2 つ（図 13)）が出た。

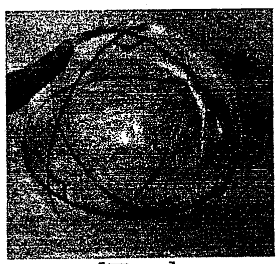


[図 12]



[図 13]

直角が 3 つできる場合がなかったので、教師のほうからその場合を考えることを指示した。最初はできないと思っていた生徒もしばらくしてかくことができた[図 14]。



[図 14]

次の時間の予告として、直角が 1 つの場合を利用して三角形の和が 180°より大きくなること、直角が 3 つある場合を利用して三角形の和が 270°より大きくなり 540°より小さくなるらしいことを軽く触れておいた。

（まとめ）平面では直角は 1 つしかない。球面では直角が 1 つ、2 つ、3 つの場合がある。

3b の意見（こだわり）によって、この第 3 回目の授業は、「三角形とは何か」、「直線とは何か」という図形の認識に関わる重要な思考を可能にし、論証や空間概念の基本に大きく関わった。

7．まとめと考察

本時の授業における図形の理解の様相として、次の 5 点が確認できる。

・球面上における最短の道を延長して大円がかけたとしても、球面上における大円が直線であることの認識には至りにくいこと

・球面にできた三角形を三角形と認めるものの、平面上での認識が極めて深く印象に残り、球面上での概念形成に大きな影響を及ぼすこと（例えば、内角の和が 180°より大きい三角形は納得しがたいこと）

・最初に学習した概念は、きわめて強い固定観念となること
・図形の定義は視覚的に理解されていること
・定義に立ち戻って考えたりかいたりすることの必要性や、定義が物事を考えていくときの根本になることの理解は難しいこと
　また上記以外に、具体的操作活動と関連して次の 3 点が確認できた。
・念頭操作が難しくなってくると、思考している図を球面上にかき込む具体的操作活動へと移ること
・具体的操作活動を行い、自分の考えを一定まとめられた後は、球面上にかかれた特殊な場合だけでなく一般的な場合も想定し、再び念頭操作で考えること
・念頭操作や実験・実測などの具体的操作活動を行うことによって、疑問や葛藤、教師や他の生徒からの説明を受けての考え直しなどの様々な思考ができるようになること

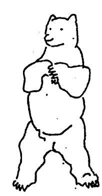
［引用・参考文献］

(1) István Lénárt (1996). *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere : Investigations in Planer and Spherical Geometry*. Key Curriculum Press
この授業で使用したワークシート（プリント）の課題は、この本に載っている問題を引用し、それに修正を加えたものである。
　国内においても『数学教室』No,312、1978 年 11 月号では、黒田俊朗氏の球面幾何の授業報告がのせられているが、そこでは高校生を対象としており、球面幾何を教えることが中心となっている。

資料（ワークシート）

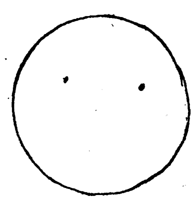
展開Ⅰ〔本単元全体に関わる導入〕

［プリント 1］
熊は何色ですか？
あなたは、つぎのなぞなぞに出会ったことがありませんか。挑戦してみよう。
1 頭の熊がねぐらを出発して、100 キロメートル南に歩きます。
休憩した後、西に向きを変えて真っ直ぐ 100 キロメートル歩きます。
その後再び向きを変えて、北に向かいます。
驚いたことに、熊は元のねぐらに戻ることがわかりました。この熊は何色ですか？

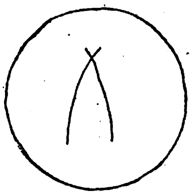


展開Ⅱ〔点・直線に関わる指導領域〕

［プリント 2］
球面上に直線を引くことができますか？
平面上でも、球面上でも、点は最も単純な形です。
（問 1）平面上の 2 点を結ぶ最も単純で最短の道をかきなさい。
（問 2）球面上の 2 点を結ぶ最も単純で最短の道をかきなさい。
（問 3）これらの 2 つの道を延長すると、それぞれどんな形になるか、
　　述べなさい。

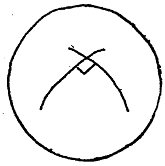


［プリント 3］
2 直線は共通点をいくつもつことができますか？
平面上で、または球面上で、異なる 2 直線が交わるとき、それらは 1 点以上で出会う。
（問 1）平面上の 2 直線の交点を調べなさい。
（問 2）球面上の 2 つの大円の交点を調べなさい。

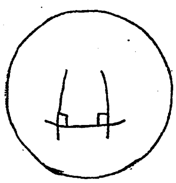


［プリント 4］
平行線を考えてみよう。
（問 1）平面上で平行線を考えてみよう。
（問 2）球面上で平行線を考えてみよう。

［プリント 5］
球面上で、垂直な直線はどのようになっていますか？
平面上で、および球面上で、垂直な直線を調べなさい。
（問 1）平面上で垂直な 2 直線を作図しなさい。
（問 2）球面上で垂直な 2 直線を作図しなさい。

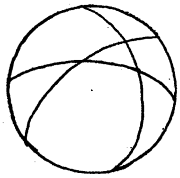


［プリント 6］
2 直線のどちらにも垂直な直線は何本ありますか？
ある直線が他の 2 直線のどちらにも垂直ならば、その直線はそれらの 2 直線に共通な垂線です。
（問 1）平面上で、2 直線に共通な垂線を調べなさい。
（問 2）球面上で、2 つの大円に共通な垂線を調べなさい。



展開Ⅲ〔三角形に関わる指導領域〕

［プリント 7］
3 つの直線が交わるとき、どんな領域をつくることができますか？
（問 1）平面上で、3 直線によってできる領域を調べなさい。
平面をいくつの領域に分けますか？
（問 2）球面上で、3 つの大円によってできる領域を調べなさい。
球面をいくつの領域に分けますか？



［プリント 8］
三角形は直角を一つ以上もつことができますか？
あなたは直角三角形の性質をすでに学習しました。
（問 1）平面上で、直角を一つ以上もつような三角形を構成できますか。調べなさい。
（問 2）球面上で、直角を一つ以上もつような三角形を構成できますか。調べなさい。

［プリント 9］
三角形の内角の和はいくらですか？
三角形の内角の和は、いつも同じですか？
（問 1）平面三角形の内角の和を調べなさい。
（問 2）球面三角形の内角の和を調べなさい。