（負）×（負）＝（正）の教授法の変遷についての一考察

――――明治期の教科書について――――

中西正治
大阪府南河内郡美原町立西中学校

要約

明治期の教科書では，(負)×(負)＝(正)になる説明を代数的な方法でおこなっている。その説明の特徴は，(1)「数量」と「数」，「数」と「量」，「式」と「量」をほとんど同義語として使っていること，(2)文字は算術で扱われている数の代表としてであること，(3)どの代数書の説明もその説明の論拠を減法・加法に帰していること，(4)（－）の記号を，あるときは「引き算の演算」としてあるときは「マイナスの符号」として説明の都合のよいように使い分けていること，(5)(負)×(負)＝(正)の説明は反対の量とした説明をしていないこと，(6)どの教科書もその説明法は技巧的であることなどである。

[1] 研究の目的

数学の歴史を見ると，(負)×(負)＝(正)になることは，たやすく得られてきた概念ではないことがよくわかる。数学者にとっても難しい概念であったろう。まして数学者でない一般の者にとっては不思議であり，理解しがたいことであったことは容易に想像できる。その概念を学校数学で教えようというのである。教科書ではどのような扱いになっていたのであろうか。本稿は，日本に西洋数学が入ってきた明治期に焦点をあて，(負)×(負)＝(正)になることを，学校数学ではどのように扱い教えていたかを教科書に基づいて考察するものである。

[2] 研究の方法

西洋数学が入ってきた明治期は，授業を行うのに外国の教科書を直接利用したりその翻訳·翻案教科書を使用していた。本来は，そのすべての教科書を調べなければならないが，当時の傾向を知るには，当時よく使用されたと思われる教科書を見れば充分と考え，ロビンソン，トドハンター，チャーレス·スミスらが著した代数学の教科書を調べることにした[1]。

ロビンソンの代数書は，原書が入手できなかったのでロビンソン著「NEW UNIVERSI-

TY ALGEBRA」を原本としている石川彝譯『代數學一』(明治10年)を，トドハンターの代数書は，吉岡平助が1887年にreprintした『ALGEBRA FOR BEGINNERS』(PREFACE1863年)を，チャーレス·スミスの代数書は三省堂が1888年のロンドン版を明治21年にreprintした『A TREATISE ON ALGEBRA』(PREFACE 1887年)を調べることとした。また，これらの３人の代数書以外に，ウード氏の数学初歩に基づいて作られた安藤令三郎編纂『代數學　第一編』(明治18年出版)，野口保興編纂『初等代數學　第一編』(明治19年初版)，アシュ·ボッスが編成した中学科の程度のものを原本とした千本福隆·櫻井房記合譯『中等教育 代數學上巻』(明治25年三版)，ハムブリン·スミスの初等代数改正新版を訳した松岡文太郎譯述『はむぶりんすみす氏 初等代數教科書　上巻』(明治28年初版)などの教科書も参考とした。

［３］各教科書の検討

(1) ロビンソンの代数書(石川彝譯『代數學一』明治10年)について (2)

展開を利用し，そこから(負)×(負)＝(正)を導き出している。

$a\times(c-d)=ac-ad$ であるから，$a\times c$，$a\times(-d)$ は，それぞれ

$$a\times c=\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots\cdots+a}_{c個}\qquad a\times(-d)=\underbrace{-a-a-a-\cdots\cdots\cdots-a}_{d個}$$

ということ（掛け算を累加で考えている）である。だから，乗数の符号が「＋」のときは被乗数を乗数分だけ累加し，乗数の符号が「－」のときは被乗数を乗数分だけ累減することになる。よって，$-a\times(-d)$ は，

$$-a\times(-d)=-(-a)-(-a)-(-a)-\cdots\cdots\cdots\cdots-(-a)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$=+a+a+a+\cdots\cdots\cdots+a\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(※)$$

となる。ただし(＊)が(※)になることは，減法のところで，ほぼ次のような説明がなされている。同符号の「差」と異符号の「和」を利用して $-(-)=+$ の説明を行っている。

同符号の「差」は　$-8a-(-5a)=-3a$　である。 一方，異符号の「和」は　$-8a+5a=-3a$　である。 $(\because -8a+5a=-3a-5a+5a=-3a)$ だから，$-8a-(-5a)=-8a+5a$　となる。

よって，$-(-a)=+a$　になるというのである。そして，「乗数が正の数のときは被乗数はそのままで倍増され，乗数が負の数のときは被乗数の符号を変更され倍増される」（波線部は筆者）とまとめている。このようにして(負)×(負)＝(正)であることを説明している。減法に依拠して掛け算の説明を行っている。本稿ではこの説明法を「同符号の差·異符号の和型」と呼ぶことにする。

(2) チャーレス·スミスの代数書について

スミスも掛け算を累加で考えている。乗数が負の数ときについて考える。

$$-5=-1-1-1-1-1$$

だから，　$4\times(-5)=-4-4-4-4-4=-20$

すなわち，乗数が負の数であれば累減を行うのである。このことを被乗数が負の数の場合にも適応する。$(-5)\times(-4)$の計算で説明しよう。

$$-4=-1-1-1-1$$

だから，

$$\begin{aligned}(-5)\times(-4)&=-(-5)-(-5)-(-5)-(-5) \quad \cdots\cdots(☆)\\&=+5+5+5+5 \quad \cdots\cdots(★)\\&=+20\end{aligned}$$

としている。(☆)が(★)になることは，減法のところで，ほぼ次のように説明がなされている。

「引き算は足し算の作用とは反対の作用だから，正の量を引くことは減少することであり，負の量を引くことは増加することである。」から「正の量を引くことはその絶対値を引くことであり，負の量を引くことはその絶対値を加えることである。」

と結論し，代数和に直す説明をしている。すなわち，「引き算は足し算の作用とは反対の作用」とうことから $-(-5)=+5$ を導いているのである。スミスもまた減法に依拠して掛け算の説明を行っている。このようにして(負)×(負)＝(正)を導いているのである。本稿ではこの説明法を「反対の作用型」と呼ぶことにする。

(3) トドハンターの代数書について [3]

まず，分配法則を説明する（掛け算は同数累加であることがわかる）。

$$3(a+b)=a+b+a+b+a+b=3a+3b$$

これを一般化して，　$c(a+b)=ca+cb$

同様にして，　$c(a-b)=ca-cb$

ここで，$(a-b)$と$(c-d)$の積を考える。上の式を利用する。

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d)&=(c-d)(a-b)\\&=(c-d)a-(c-d)b\\&=a(c-d)-b(c-d)\\&=ac-ad\underline{-(bc-bd)}\\&=ac-ad\underline{-bc+bd}\end{aligned}$$

波線の部分の変形は，引き過ぎたので，その分を足すことで説明をしている。つまり，$ac-ad$からbcだけをを引いた値は，本来求めなければならない値より，bd分だけ引き過ぎているから，本来求めなければならない値は，それにbdを足しておかなければならないというのである。

$$\therefore (a\underline{\underline{-b}})(c\underline{\underline{-d}})=ac-ad-bc\underline{\underline{+bd}}$$

そして，結果として二重線の部分だけをみると，$(-b)\times(-d)=+bd$ となってい

る.だから,(負)×(負)=(正)になるというのである.本稿ではこの説明法を「引き過ぎ算型」と呼ぶことにする。トドハンターと同じ説明を行っているものに，野口保興編纂『初等代數學　第一編』(明治19年)，松岡文太郎譯述『はむふりんすみす氏 初等代數教科書上巻』(明治28年初版)がある。

(4) アシュ·ボッスの代数書について [4]

アシュ·ボッスの代数書も多項式の積の展開を利用している。展開を利用しているという点では，基本的にはトドハンターらと同じである。しかし，アシュ·ボッスは「引き過ぎ算型」ではなく，「２つの数の差はその各数にある同じ数を加えても変わらない」ことと「ある１つの数よりある和を引くにはこの数より次第に和の各部分を引けばよい」ことを使って説明をしている。

具体的には次のようである。

$P=a-b+c-d$ と $Q=e+f-g+h$ の積の展開を考える。

$mQ=me+mf-mg+mh$ だから

$$
\begin{aligned}
PQ=(a-b+c-d)e&\\
+(a-b+c-d)f&\\
-(a-b+c-d)g&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(♣)\\
+(a-b+c-d)h&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=ae-be+ce-de&\\
+af-bf+cf-df&\\
-ag+bg-cg+dg&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\dagger)\\
+ah-bh+ch-dh&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b+c-d)(e+f-g+h)=ae-be+ce-de&\\
+af-bf+cf-df&\\
-ag+bg-cg+dg&\\
+ah-bh+ch-dh&
\end{aligned}
$$

波線部分だけをみると，$(-b)\times(-g)=+bg$ となっている。

(♣) が ($\dagger$) になることは,減法のところでほぼ次のような説明がなされている.

> 「２つの数の差は，その各数にある同じ数を加えても変わらない」（原則）から
>
> $$Q=a+b-c+d-f$$
> $$
> \begin{aligned}
> P-Q&=P-(a+b-c+d-f)\\
> &=P\underline{\underline{+c+f}}-(a+b-c+d-f\underline{\underline{+c+f}})\\
> &=P+c+f-(a+b+d)
> \end{aligned}
> $$
>
> 「ある１つの数よりある和を引くには，この数より次第に和の各部分を引けばよい」（原則）から
>
> $$
> \begin{aligned}
> P-Q&=P+c+f-(a+b+d)\\
> &=P+c+f-a-b-d
> \end{aligned}
> $$

$$= P - a - b + c - d + f$$

$$\therefore P - (a + b - c + d - f) = P - a - b + c - d + f$$

これらの結果，「ある量Ｐよりある多項式を引くには，この量の次に多項式の各項をその符号を変えて書けばよい」ということになる。だから（負）×（負）＝（正）になるというのである。本稿では，この説明の方法を「２項加数減法型」と呼ぶことにする。

(5) ウードの代数書について [5]

第31章の「第四」で次のように説明をしている。

$-a \times -b$ は，$-b$ の a 倍すなわち $-ab$ を他の量より減ずることだから

$$-a \times -b = -(-ab) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\Diamond)$$

である。一方，　$-(-ab) = +ab$ 　　$\cdots\cdots\cdots\cdots$（✥）

であるから，$-a \times -b = +ab$ となる。

(◇)については，第31章の「第三」との関連で，次のような説明をしている。

第三　$-a \times +b$ ニ於テハ正量 b ヲ $-a$ 倍スルノ義ナリ之レ極論セハ b ヲ a 倍シタルモノヲ他量ヨリ減スルニ外ナラス
第四　$-a \times -b$ ニ於テハ $-b$ ノ a 倍即チ $-ab$ ヲ他ノ量ヨリ減スルノ義ナリ

(✥)については，第28章で，次のような説明をしている。

$2bx$ ニ等量 cy ヲ加減セハ其値ハ旧ノ如シ即チ $2bx + cy - cy = 2bx$ 故ニ此等量ヨリ $-cy$ ヲ減去セハ $2bx + cy = 2bx - (-cy)$ ナリ

だから（負）×（負）＝（正）になるというのである。ここでは，この説明の方法を「負数減法型」と呼ぶことにする。

さらにウードの代数書は，[redacted]として「$b - b = 0$」であることを利用して説明している。

両辺に $-a$ をかける　　$(-a) \times b + (-a) \times (-b) = (-a) \times 0$

だから，　　$(-a) \times b + (-a) \times (-b) = 0$

$-a \times b = -ab$ より　　$-ab + (-a) \times (-b) = 0$

$(-a) \times (-b)$ が ab であれば $=0$ となるから，$(-a) \times (-b) = ab$ とならなければいけない。よって，（負）×（負）＝（正）である。この説明の方法を「ゼロ型」と呼ぶことにする。

［４］考察とまとめ

ここで，これまでの各教科書の（負）×（負）＝（正）の説明の論拠を簡単に表に

してまとめてみると，次のようになる。

著　　者	国		論　　　拠
ロビンソン	米	１８７６年	同符号の差·異符号の和型
チャーレス·スミス	英	１８８７年	反対の作用型
トドハンター	英	１８６３年	引き過ぎ算型
野口保興	日	１８８６年	引き過ぎ算型
ハムブリンスミス	英	１８９５年	引き過ぎ算型
アシュ·ボッス	仏	１８９２年	２項加数減法型
ウード	英	１８８５年	負数減法型・ゼロ型(別解)

これらの教科書には，いくつか特徴的なことがある。

その１つは，「数量」と「数」,「数」と「量」,「式」と「量」をほとんど同義語として使っている点である。数と量とは違う概念であるにもかかわらず，その区別はほとんどなされていない。

２つ目は，文字は算術で扱われている数の代表として使われている点である。「－ａ」といっても「ａ＞０」か「ａ＜０」かで，「－ａ」が必ずしも負とは限らない。にもかかわらず負として扱っているのである。

３つ目は，(負)×(負)＝(正)の説明の論拠を減法・加法に帰している点である。例えば，ロビンソンの「同符号の差·異符号の和型」の場合は，チャーレス·スミスの「反対の作用型」の場合と同様に,(－ａ)×(－ｄ)を(－ａ)×(－ｄ)＝－(－ａ)－…－(－ａ)と考え減法に帰している。トドハンターの「引き過ぎ算型」の場合は，引き過ぎた分を足している。アシュ·ボッスの「２項加数減法」の場合は「２つの数の差は，その各数に同じ数を加えても変わらない」という減法の原則を使っている。ウードの「負数減法型」の場合は，－ａ×－ｂを－ｂのａ倍すなわち－ａｂを他の量より減ずることと考え，－ａ×－ｂ＝－(－ａｂ)＝＋ａｂ　とし，(ア)の部分も(イ)の部分も

(ア)　　(イ)

減法や加法を使って説明をおこなっている。「０型」の場合もｂ－ｂ＝０を利用し減法を使っている。

４つ目は，(－)の記号を，あるときは「引き算の演算」として，あるときは「マイナスの符号」として，説明の都合のよいように使い分けている点である。

例えば，ロビンソンの場合である。まず,掛け算を累加で考える。

ａ×ｃ＝ａ＋ａ＋ａ＋ａ＋………＋ａ（ａをｃ個たす）

「＋ａ」の「＋」はすべて演算の記号である。

ａ×ｃ＝ａ＋ａ＋ａ＋ａ＋………＋ａ

⇑　　　　　　⇑
演算　　　　　演算

このことからすると，$a\times(-d)=-a-a-a-a-\cdots\cdots-a$ の「$-a$」の「$-$」はすべて演算の記号と考えられる。すなわち，

$$a\times(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}d)=\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{-}a\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{-}a-a-a-\cdots\cdots\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{-}a \quad (\text{a を d 個ひく})$$

である。だから，$(-a)\times(-d)=-(-a)-(-a)-\cdots\cdots-(-a)$の記号は

$$(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}a)\times(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}d)=\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{-}(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}a)\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{-}(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}a)-\cdots\cdots\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{-}(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}a) \quad (-\text{a を d 個ひく})$$

$$=\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{+}a\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{+}a+a+a+\cdots\cdots\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{+}a=\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{+}ad$$

となる。すなわち

$$(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}a)\times(\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{符号}}}{-}d)=\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{演算}}}{+}ad \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

である。その結果(負)×(負)＝(正)になるというのである。素直に考えれば(1)式からは，(負)×(負)＝(たす)ということが導き出される。(＋)や(－)の記号を説明の都合のよいように使い分けていることがよくわかる。

5つ目は，正負の量を「反対の量」とした説明をしているが，(負)×(負)＝(正)の説明のときは，現代のような掛け算を利用した説明[6]はなされていない。
確かに，ロビンソンもチャーレス･スミスもハムブリンスミスも，正負の数の定義を「反対の量」とした。ロビンソンは「表裏相反スルノ意ナリ凡ソ数量反對ノ義ヲ示ス」であり，チャーレス･スミスは「they are also used as marks of distinction between magnitudes of diametrically opposite kinds.」であり，ハムブリンスミスは「増すべき量」「耗らすべき量」である。そして，掛け算の説明を加法や減法に帰せてロビンソンは，「乗数の符号が「＋」のときは被乗数を乗数分だけ累加すること，乗数の符号が「－」のときは被乗数を乗数分だけ累減する」と説明をし，チャーレス･スミスは，「引き算は足し算の作用とは反対の作用だから，正の量を引くことは減少することであり，負の量を引くことは増加することである。」という考えから「正の量を引くことはその絶対値を引くことであり，負の量を引くことはその絶対値を加えることである。」と説明をする。これらは，確かに正負の量を反対の量とした説明であるが，現代のような掛け算を利用した説明ではない。

負の数は，Stiefelが「不条理な数」といったくらい大変認識されにくい数である。このことを考えれば，(負)×(負)＝(正)であることを説明するのに，技巧的にならざるを得なかったことも理解できる。しかし，それは同時に日常的感覚とほど遠くなることを意味する。生徒の理解をより得るために，明治期以降の数学教育の流れの中で(負)×(負)＝(正)の説明の方法は一体どのように変わっていくのであろうか。このことについての考察は次の機会に譲りたい。

付記：この論文を書くにあたって，大阪教育大学の狭間節子先生に御助言・御指導いただいたことを感謝します。

［参考文献および注］

(1)小倉金之助著『数学教育史』(昭和13年第四刷)p.315．p.336

(2)この代数書で使われている文字については，次のような説明がある。

「代數學ノ數量トハ代數學語ヲ以テ顯ス所ノ數量ナリ，其類ヲ別テ二ト為ス，日ク已知數，日ク未知數ナリ」「已知數トハ，已ニ價格ヲ知レル者ナリ，此數量ニシテ數字ヲ用イサル時ハ，初首ノ洋字ａｂｃｄ等ヲ用ヒテ，以テ之ヲ記ス」「未知數トハ，算數ノ始ニ於テ，未ダ其價格ヲ知ラサル者ナリ，此數量ヲ記スルニ末尾ノ洋字ｕｘｙｚヲ以テス」

このことから判断すると，「数量」を「数」と同義語に使っていること，ａ,ｂ,ｃは已知数に，ｘ,ｙ,ｚは未知数に使われていることがわかる。しかし,「－ａ」を「負率」,「＋ａ」を「正率」といった言い方から推定すると,ここでの文字は算術で扱われている数字の代表であると考えられる。また特に整数·分数·小数といった明示はされていない。

(3)この代数書で使われている文字についても，ａ，ｂ，ｃを已知数に，ｘ，ｙ，ｚを未知数に使っている。また数については「Numbers may be either whole or fractional.The word quantity is often usued with the same meaning as number. The word integer is often usued instead of whole number.」と説明しているように「数」は「全数または分数」を表しており，「数」はしばしば「量」と同義語に使われ，「整数」はしばしば「全数」の代わりに使われる。

(4)この代数書で使われている文字についても，ａ，ｂ，ｃは已知数，ｘ，ｙ，ｚは未知数である。また特に整数·分数·小数といった明示はなされていない。「代數式或ハ代數量トハ演算ノ符號ヲ以テ數及ビ文字ヲ聯合シ此數及ビ此文字ガ表ハス所ノ數ノ上ニ施スベキ種々ノ演算ヲ表示シタルモノナリ」と説明していることからすると，「式」は「量」と同義語で使われている。また「－ａ」を「負数」，「＋ａ」を「正数」といっていることからすると，ここでもやはり，文字は算術で扱でれている数字の代表であると考えられる。

(5)この代数書で使われている文字については，ａ，ｂ，ｃは已知量，ｘ，ｙ，ｚは未知量である。特に整数·分数·小数といった明示はなされていない。「－ａ」を「負量」，「＋ａ」を「正量」といった言い方からすると，文字は算術で扱われている数字の代表であると考えられる。「数」と「量」は同義語と考えられている。

(6)「現代のような掛け算を利用した説明とは，「速度×時間＝距離」を利用した説明のことである。