

非線形シュレディンガー方程式の初期値問題  
に対する考察

平成 18 年 度

藤 川 千 恵 子

# 修 士 論 文

## 非線形シュレディンガー方程式の初期値問題 に対する考察

三重大学大学院教育学研究科  
教科教育専攻 数学教育専修

No.205M026

藤川 千恵子

2007 年 2 月 5 日

## 目次

|   |     |
|---|-----|
| 概要  | 2   |
| 1 序章  | 3   |
| 2 非線形シュレディンガー方程式の初期値問題  | 5   |
| 2.1 非線形シュレディンガー方程式  | 5   |
| 2.2 線形シュレディンガー方程式の解の評価式   | 5   |
| 2.3 時間局所解の一意存在  | 7   |
| 2.4 時間大域解の存在  | 20  |
| 2.5 時間大域解の非存在   | 34  |
| 3 非線形シュレディンガー方程式の定在波解   | 38  |
| 3.1 定在波解  | 38  |
| 3.2 変分法による定式化   | 38  |
| 3.3 極値問題  | 42  |
| 3.4 定在波解の存在と安定性 ( $1 < p < 1 + 4/n$ の場合)                            | 48  |
| 3.5 定在波解の存在と不安定性 ( $1 + 4/n < p < p^*(n)$ の場合)                      | 60  |
| 4 非線形関数 $f(x, z) = \lambda x ^{-b} z ^{p-1}z$ の場合                   | 71  |
| 4.1 非線形関数 $f$ における $b, p$ の仮定                                       | 71  |
| 4.2 時間局所解の一意存在  | 77  |
| 4.3 時間大域解の存在  | 83  |
| 4.4 時間大域解の非存在   | 92  |
| 4.5 定在波解  | 96  |
| 4.6 定在波解の存在 ( $1 < p < 1 + (4 - 2b)/n$ の場合)                         | 99  |
| 4.7 定在波解の存在と不安定性 ( $1 + (4 - 2b)/n < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2)$ の場合) | 109 |
| 謝辞  | 122 |
| 参考文献  | 123 |

## 概要

非線形シュレディンガー方程式  $i\partial_t u + \Delta u = f(u)$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in (-T, T)$  の初期値問題の一意可解性, および定在波解の存在と, その安定性・不安定性を扱った. 非線形関数が  $f(u) = \lambda|u|^{p-1}u + \mu|u|^{q-1}u$  の場合, いかなる条件のもとでこれらの議論が正当化されるかに関する文献は豊富に存在し, 詳しく研究されてきた. この論文の主結果は, 非線形関数が  $f(x, u) = \lambda|x|^{-b}|u|^{p-1}u$  の場合に, 初期値問題の時間局所的な一意可解性を保証するための  $b, p$  の条件を得たことである. さらに, その条件のもとで,  $f(u) = \lambda|u|^{p-1}u + \mu|u|^{q-1}u$  の場合と同様の議論がどこまで可能であるのかを考察した.

# 1 序章

この論文は、非線形シュレディンガー方程式

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f(u), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in (-T, T)$$

の初期値問題に関してである。非線形関数が  $f(u) = \lambda|u|^{p-1}u + \mu|u|^{q-1}u$  の場合、初期値問題の一意的可解性、および定在波解の存在と、その安定性・不安定性については、すでに明らかにされてきたことが多くある。第2章と第3章ではそれらのことを堤[4]をもとにしてまとめている。省略されている部分を詳しく記述することを心がけた。さらに、第4章では非線形関数が  $f(x, u) = \lambda|x|^{-b}|u|^{p-1}u$  の場合について新たな考察を加えた。

第2章では、非線形関数  $f$  に次のような仮定をおいて初期値問題の一意的可解性を扱っている：

- (f1)  $f$  は  $\mathbf{C}$  から  $\mathbf{C}$  への関数で、 $f(0) = 0$  であり、 $\mathbf{C}$  を実部と虚部に分けて  $\mathbf{R}^2$  とみなしたときに、 $f \in C^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$  となる。  
(f2)  $|f(z_1) - f(z_2)| \leq K(1 + |z_1| + |z_2|)^{p-1} |z_1 - z_2|$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ .  
ただし、 $K$  と  $p$  は  $z_1, z_2$  には依存しない正定数で、 $1 < p < p^*(n)$  を満たす。ここで、

$$p^*(n) = \begin{cases} \infty & (n = 1, 2), \\ \frac{n+2}{n-2} & (n \geq 3). \end{cases}$$

- (f3)  $s \in \mathbf{R}$  に対して  $f(s)$  は実数値をとり、

$$f(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}f(z), \quad z \in \mathbf{C}, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

仮定 (f1), (f2) は、初期値問題の時間局所的な一意的可解性を数学的に保証する条件である。仮定 (f3) は、方程式の解が物理的な保存則（たとえばエネルギー保存）などを満たすことを保証するものであり、時間大域解の存在を調べる際に重要となる。

第3章では、非線形関数を  $f(u) = -|u|^{p-1}u$  として、定在波解の存在と、その安定性・不安定性について調べている。定在波解は、非線形シュレディンガー方程式に関連した作用汎関数に対する変分問題の解として定式化され、 $n \geq 2$ ,  $1 < p < p^*(n)$  のときにその存在が保証される。その安定性・不安定性は、定在波解の変分法的特徴付けから導かれ、 $n \geq 2$ ,  $1 < p < 1 + 4/n$  のときに安定、 $n \geq 2$ ,  $1 + 4/n < p < p^*(n)$  のときに不安定となる。なお、安定性の証明においては、Kwong[9] による解の一意的性を用いることにより、明確な説明ができた。

第4章は、この論文の主結果を含む。非線形関数が  $f(x, u) = \lambda|x|^{-b}|u|^{p-1}u$  の場合を考え、仮定

$$n \geq 3, 0 < b < \frac{4}{n}, 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

のもとで、初期値問題の時間局所的な一意可解性が保証されることを明らかにした．定理 4.5 で時間局所解の一意存在，定理 4.8 で時間大域解の存在を証明している．さらに，非線形関数が  $f(x, u) = -|x|^{-b}|u|^{p-1}u$  の場合に，定在波解の安定性を除けば，第 3 章と同様の議論ができた．すなわち，定理 4.17 と定理 4.18 でそれぞれ  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 < p < 1 + (4 - 2b)/n$ , および  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 + (4 - 2b)/n < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2)$  の場合に，定在波解の存在を証明している．また，定理 4.22 では， $n \geq 3$ ,  $0 < b < 4/n$ ,  $1 + (4 - 2b)/n < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2)$  のとき，その解が不安定であることを示した．一方， $\omega > 0$  に対する楕円型方程式  $-\Delta w + \omega w - |x|^{-b}|w|^{p-1}w = 0$  ( $w \neq 0$ ) の非負解が，原点を含んだ  $\mathbf{R}^n$  全体で正值となることを示すことができないために，第 3 章で用いた Kwong[9] による解の一意性に従えず，定在波解の安定性の証明は今後の課題となった．

## 2 非線形シュレディンガー方程式の初期値問題

### 2.1 非線形シュレディンガー方程式

次のような非線形シュレディンガー方程式を考える:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f(u), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in (-T, T), \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.2)$$

未知関数  $u$  は  $\mathbf{R}^n \times (-T, T)$  から  $\mathbf{C}$  への関数で, 非線形関数  $f$  については仮定 (f1)–(f3) をおく.

(f1), (f2), (f3) を満たす非線形関数  $f$  の例をあげれば,

$$f(z) = \lambda|z|^{p-1}z + \mu|z|^{q-1}z, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad 1 < q < p < p^*(n)$$

となる.

本章の目標は, 仮定 (f1), (f2) のもと, 初期値問題 (2.1)–(2.2) の時間局所解が一意的に存在することを示すことである. さらに, 非線形関数  $f$  が仮定 (f3) を満たすときに, その解がある2つの保存量をもつことを示し, 時間大域解の存在・非存在を考える.

### 2.2 線形シュレディンガー方程式の解の評価式

線形シュレディンガー方程式の初期値問題

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (2.4)$$

の解  $u(x, t)$  は基本解を用いて, 次のように表せる:

$$u(x, t) = (4\pi it)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(\frac{i|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy. \quad (2.5)$$

ここで, 初期値  $u_0$  に対して, 時刻  $t$  での解関数  $u(x, t)$  を与える写像を  $U(t)$  とする. すなわち,

$$[U(t)u_0](x) = u(x, t).$$

解作用素  $U(t)$  の性質についてまとめる.

**命題 2.1.**  $\{U(t); t \in \mathbf{R}\}$  は, 次の性質を満たす:

$$U(0) = I, \quad U(t+s) = U(t)U(s), \quad t, s \in \mathbf{R}, \quad (2.6)$$

$$(U(t))^* = U(-t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2.7)$$

$$U(t)v \longrightarrow v \text{ in } L^2(\mathbf{R}^n) \quad (t \rightarrow 0), \quad v \in L^2(\mathbf{R}^n), \quad (2.8)$$

$$\|U(t)v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad v \in L^2(\mathbf{R}^n). \quad (2.9)$$

新しい関数空間を定義し、解作用素  $U(t)$  が満たす評価式をまとめておく。これらの評価式は、初期値問題 (2.1)–(2.2) の可解性を調べる際に重要な役割を果たす。

**定義 2.2.**  $X$  をバナッハ空間とし、 $I$  を  $\mathbf{R}$  の区間とする。

(i)  $C_0(I; X) = \{f \in C(I; X) ; \text{supp } f \text{ が } I \text{ におけるコンパクト集合} \}$  とする。  $f \in C_0(I; X)$  に対して、

$$\|f\|_{L^p(I; X)} = \left( \int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

とおく。このとき、空間  $C_0(I; X)$  は  $\|\cdot\|_{L^p(I; X)}$  をノルムとし、ノルム空間となる。このノルム空間を完備化して得られる空間を、 $L^p(I; X)$  とする。

(ii) 関数  $f: I \rightarrow X$  は、任意の  $F \in X^*$  に対して、関数  $\langle F, f(t) \rangle: I \rightarrow \mathbf{C}$  が可測関数となるとき、弱可測であるという。さらに、 $X$  が可分であるとき、弱可測関数  $f$  に対して、

$$\|f\|_{L^\infty(I; X)} = \text{ess sup}_{t \in I} \|f(t)\|_X$$

とおき、

$$L^\infty(I; X) = \{f; \text{関数 } f: I \rightarrow X \text{ は弱可測かつ } \|f\|_{L^\infty(I; X)} < \infty\}$$

とする。このとき、 $L^\infty(I; X)$  は  $\|\cdot\|_{L^\infty(I; X)}$  をノルムとして、バナッハ空間となる。

**補題 2.3** ( $L^p$ – $L^q$  評価式)。

$$n \geq 1, \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

に対して、

$$\|U(t)u_0\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{p}\right)} \|u_0\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}, \quad t \neq 0.$$

**補題 2.4** (ストリッカーツの評価式)。

$$2 \leq p < p^*(n) + 1, \quad r \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \right) = 2$$

に対して、

$$\|U(\cdot)u_0\|_{L^r(\mathbf{R}; L^p(\mathbf{R}^n))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

ただし、 $C$  は  $u_0$  には依存しない正定数である。

**補題 2.5.**  $I$  を  $\mathbf{R}$  の任意の開区間とする。

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$2 \leq p < p^*(n) + 1, \quad r \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \right) = 2$$



に対して,

$$\left\| \int_I U(-s)f(s)ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^{r'}(I;L^{p'}(\mathbf{R}^n))}.$$

ただし,  $C$  は  $f$  と  $I$  には依存しない正定数で,  $n = 1$  のとき  $p = \infty$  でも上の不等式は成立する.

**系 2.6.**  $I$  は  $\mathbf{R}$  の任意の開区間,  $\bar{I}$  はその閉包で,  $t_0 \in \bar{I}$  とする.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \\ 2 \leq p < p^*(n) + 1, \quad r \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \right) = 2 \end{aligned}$$

に対して,

$$\left\| \int_{t_0}^t U(t-s)f(s)ds \right\|_{L^\infty(I;L^2(\mathbf{R}^n))} \leq C\|f\|_{L^{r'}(I;L^{p'}(\mathbf{R}^n))}.$$

ただし,  $C$  は  $f$ ,  $I$ ,  $t_0$  には依存しない正定数で,  $n = 1$  のとき  $p = \infty$  でも上の不等式は成立する.

**補題 2.7.**  $I$  は  $\mathbf{R}$  の任意の開区間,  $\bar{I}$  はその閉包で,  $t_0 \in \bar{I}$  とする.

$$2 \leq p < p^*(n) + 1, \quad r \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \right) = 2$$

に対して,

$$\left\| \int_{t_0}^t U(t-s)f(s)ds \right\|_{L^r(I;L^p(\mathbf{R}^n))} \leq C\|f\|_{L^1(I;L^2(\mathbf{R}^n))}.$$

ただし,  $C$  は  $f$ ,  $I$ ,  $t_0$  には依存しない正定数である.

**命題 2.8 (ソボレフの埋蔵定理).**

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}(1-a) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) a, \\ 2 \leq p \leq \infty, \quad 0 \leq a \leq 1 \end{aligned}$$

に対して,

$$\|v\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^a, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

ただし,  $C$  は  $v$  には依存しない正定数である.

## 2.3 時間局所解の一意存在

非線形関数  $f$  が仮定 (f1) と (f2) を満たすとき, バナッハ空間の縮小写像の原理に帰着させることにより, 初期値問題 (2.1)–(2.2) の時間局所解の一意存在が示される.

**定理 2.9.** (縮小写像の原理)

$(X, d)$  を完備距離空間とする. 写像  $T : X \rightarrow X$  が,

$$\exists k \in (0, 1); d(Tx, Ty) \leq k d(x, y), \quad x, y \in X$$

を満たすとき,  $T$  は  $X$  においてただ 1 つの不動点  $x_0$ , すなわち,  $Tx_0 = x_0$  となる点をもつ.

初期値問題 (2.1)–(2.2) の時間局所解の一意存在定理を述べるために, 記号を定義する. バナッハ空間  $X$  と  $\mathbf{R}$  の开区間  $I$  に対して,

$$C_b(I; X) = \left\{ v \in C(I; X); \sup_{t \in I} \|v(t)\|_X < \infty \right\},$$

$$C_b^m(I; X) = \left\{ v \in C^m(I; X); \sum_{j=0}^m \sup_{t \in I} \left\| \frac{d^j v}{dt^j}(t) \right\|_X < \infty \right\}, \quad m \in \mathbf{N}$$

とおく.

**定理 2.10.**  $n \geq 1$  とし, 仮定 (f1) と (f2) が満たされているとする. 任意の  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, ある正定数  $T$  が存在し, 時間区間  $(-T, T)$  上で次を満たす (2.1)–(2.2) の解  $u$  が一意的に存在する:

$$u \in C_b((-T, T); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C_b^1((-T, T); H^{-1}(\mathbf{R}^n)), \quad (2.10)$$

$$\nabla u \in L^r((-T, T); L^{p+1}(\mathbf{R}^n)). \quad (2.11)$$

ただし,  $p$  は仮定 (f2) の中で与えられたもので,  $r$  は

$$r \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p+1} \right) = 2$$

を満たすものとし, 正定数  $T$  は, 仮定 (f2) の中に現れる定数  $K, p, n$  と  $\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  にだけ依存して決まる.

**証明.** 関数  $\varphi \in C^\infty([0, \infty))$  を

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & (s \geq 2), \\ 0 & (0 \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とする. 非線形関数  $f$  を次のように分解する:

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z), \\ f_1(z) &= \varphi(|z|)f(z), \\ f_2(z) &= (1 - \varphi(|z|))f(z). \end{aligned}$$

このとき、仮定 (f1), (f2) より、

$$f_1(0) = f_2(0) = 0, \quad f_1, f_2 \in C^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$$

であり、ある正定数  $K_1, K_2$  に対して、

$$|f_1(z_1) - f_1(z_2)| \leq K_1(|z_1| + |z_2|)^{p-1}|z_1 - z_2|, \quad (2.12)$$

$$|f_2(z_1) - f_2(z_2)| \leq K_2|z_1 - z_2| \quad (2.13)$$

が成立する.

ここで、 $I_T = (-T, T)$  とおく. (2.9) と補題 2.4 より、

$$\|U(\cdot)u_0\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I_T} \|U(\cdot)u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u_0\| \equiv \eta_1,$$

$$\|\nabla U(\cdot)u_0\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I_T} \|U(\cdot)\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_2,$$

$$\|\nabla U(\cdot)u_0\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} = \|U(\cdot)\nabla u_0\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \leq C\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_3.$$

$\eta = \max\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  とおき、距離空間  $(X_T, d)$  を次のように定義する:

$$X_T = \{v; v \in L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n)), \nabla v \in L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n)),$$

$$\|v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,$$

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,$$

$$\|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta\},$$

$$d(v, w) = \|v - w\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|v - w\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}, \quad v, w \in X_T. \quad (2.14)$$

ここで、

$$Y_T = L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)) \cap L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))$$

とおくと、 $L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)), L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))$  の完備性により、 $Y_T$  は距離関数  $d$  に関して完備距離空間となる. さらに、 $X_T$  は  $Y_T$  の閉部分集合である. なぜならば、 $\forall v \in X_T$  とすると、 $v \in L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))$  は問題ない.  $v \in L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))$  については、 $p$  の仮定からソボレフの埋蔵定理により、

$$\|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \leq C\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^a \leq C\|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq C\eta$$

が成り立つから、

$$\|v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} = \|\|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}\|_{L^r(I_T)} \leq \|C\eta\|_{L^r(I_T)} \leq C\eta T^{1/r}.$$

したがって、 $X_T$  は  $Y_T$  の部分集合であることがわかる. 次に  $X_T$  が  $Y_T$  の閉部分集合であることを示す.

$$\{v_m\} \subset X_T, \quad v \in Y_T; \quad d(v_m, v) \longrightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

とすると、まず

$$\|v_m - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \longrightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

より、

$$\|v\|_{L^\infty(I_T; L^2)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta.$$

次に、 $\{\nabla v_m\}$  は  $L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)) = (L^1(I_T; L^2))^*$  の有界点列であるから、

$$\exists \{\nabla v_{m_j}\} \subset \{\nabla v_m\}, \exists w \in L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)); \quad \nabla v_{m_j} \longrightarrow w \quad * \text{weakly in } L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)).$$

さらに、 $\{\nabla v_{m_j}\}$  は  $L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))$  の有界点列であるから、

$$\exists \{\nabla v_{m_j'}\} \subset \{\nabla v_{m_j}\}, \exists \tilde{w} \in L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n)); \quad \nabla v_{m_j'} \longrightarrow \tilde{w} \quad \text{weakly in } L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n)).$$

ところで、 $L^1(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)), L^{r'}(I_T; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))$  (ただし、 $1/r + 1/r' = 1$ ) をともに含む空間として  $C_0^\infty(I_T \times \mathbf{R}^n)$  を考えれば、 $\forall g \in C_0^\infty(I_T \times \mathbf{R}^n)$  に対して、

$$\langle g, \nabla v_{m_j'} \rangle \longrightarrow \langle g, w \rangle \text{ かつ } \langle g, \nabla v_{m_j} \rangle \longrightarrow \langle g, \tilde{w} \rangle$$

であるから、極限の一意性より

$$w = \tilde{w} \quad \text{in } D'(I_T \times \mathbf{R}^n)$$

となる。一方、超関数として、

$$\langle g, \nabla v_{m_j'} \rangle = -\langle \nabla g, v_{m_j'} \rangle \longrightarrow -\langle \nabla g, v \rangle = \langle g, \nabla v \rangle$$

であるから、極限の一意性により

$$w = \nabla v \quad \text{in } D'(I_T \times \mathbf{R}^n).$$

このことより、列  $\{v_m\}$  は次を満たすことが結論される:

$$\begin{aligned} \nabla v_m &\longrightarrow \nabla v \quad * \text{weakly in } L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)), \\ \nabla v_m &\longrightarrow \nabla v \quad \text{weakly in } L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n)). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\nabla v_m\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta, \\ \|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\nabla v_m\|_{L^\infty(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta. \end{aligned}$$

ゆえに、 $v \in X_T$  となり、 $X_T$  の集積点はすべて  $X_T$  に属することになるので、 $X_T$  が  $Y_T$  の閉部分集合であることが示された。以上より  $(X_T, d)$  は完備距離空間となる。

初期値問題 (2.1)–(2.2) をデュアメルの原理を使って書き直すと、

$$u(t) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-s)f(u(s))ds, \quad t \in (-T, T)$$

となる．このことに注意して，いま，非線形写像  $N$  を

$$N[v](t) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-s)f(v(s)) ds, \quad v \in X_T$$

と定める．

以下，次の 2 つのステップに分けて証明する．

(ステップ 1) 十分小さな  $T > 0$  に対して，非線形写像  $N$  は  $X_T$  から  $X_T$  への縮小写像となることを示す．

(ステップ 2) (2.10) と (2.11) を満たす初期値問題 (2.1)–(2.2) の時間局所解が一意的であることを示す．

(ステップ 1) はじめに，十分小さな  $T > 0$  に対して，非線形写像  $N$  は  $X_T$  から  $X_T$  の中への写像となることを示す．

まず， $v \in X_T$  に対して， $\nabla N[v]$  の  $L^2(\mathbf{R}^n)$  ノルムを評価する．(2.9)，補題 2.4 と系 2.6 より，

$$\begin{aligned} \|\nabla N[v](t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \|\nabla U(t)u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_1(v(s))] ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_2(v(s))] ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + C\|\nabla[f_1(v)]\|_{L^{r'}(I_T; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + \left| \int_0^t \|U(t-s)\nabla[f_2(v(s))]\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} ds \right| \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2} \\ &\quad + C\|\nabla[f_1(v)]\|_{L^{r'}(I_T; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + C \left| \int_0^t \|\nabla[f_2(v(s))]\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} ds \right|, \quad t \in I_T, v \in X_T. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし， $r'$  は  $1/r + 1/r' = 1$  を満たす．(2.12) と (2.13) より，

$$|\nabla[f_1(v)]| \leq C|v|^{p-1}|\nabla v| \quad (2.16)$$

$$|\nabla[f_2(v)]| \leq C|\nabla v| \quad (2.17)$$

が成り立っている．たとえば (2.16) については，次のように説明される．

$f_1 \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$  であるから， $\partial_{x_j}[f_1(v)]$  は， $f_1(v)$  の Re, Im をそれぞれ  $v$  の Re, Im で微分し，

続いて  $x_j$  で微分して得られる.

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}[f_1(v)] &= \partial_{x_j}[\operatorname{Re} f_1(v)] + i\partial_{x_j}[\operatorname{Im} f_1(v)], \\ \partial_{x_j}[\operatorname{Re} f_1(v)] &= \partial_{\operatorname{Re} v}[\operatorname{Re} f_1(v)]\partial_{x_j}\operatorname{Re} v + \partial_{\operatorname{Im} v}[\operatorname{Re} f_1(v)]\partial_{x_j}\operatorname{Im} v, \\ \partial_{x_j}[\operatorname{Im} f_1(v)] &= \partial_{\operatorname{Re} v}[\operatorname{Im} f_1(v)]\partial_{x_j}\operatorname{Re} v + \partial_{\operatorname{Im} v}[\operatorname{Im} f_1(v)]\partial_{x_j}\operatorname{Im} v.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}|\partial_{x_j}[f_1(v)]| &\leq |\partial_{x_j}[\operatorname{Re} f_1(v)]| + |\partial_{x_j}[\operatorname{Im} f_1(v)]| \\ &\leq |\partial_{\operatorname{Re} v}[\operatorname{Re} f_1(v)]||\partial_{x_j}\operatorname{Re} v| + |\partial_{\operatorname{Im} v}[\operatorname{Re} f_1(v)]||\partial_{x_j}\operatorname{Im} v| \\ &\quad + |\partial_{\operatorname{Re} v}[\operatorname{Im} f_1(v)]||\partial_{x_j}\operatorname{Re} v| + |\partial_{\operatorname{Im} v}[\operatorname{Im} f_1(v)]||\partial_{x_j}\operatorname{Im} v|.\end{aligned}$$

ここで (2.12) より,

$$\frac{|\operatorname{Re} f_1(z_1) - \operatorname{Re} f_1(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq K_1(|z_1| + |z_2|)^{p-1}$$

であるから, 絶対値が十分小さい  $h$  ( $h \in \mathbf{R}$ ) に対して,

$$\frac{|\operatorname{Re} f_1(v+h) - \operatorname{Re} f_1(v)|}{|(v+h) - v|} \leq C(|v+h| + |v|)^{p-1} \leq C|v|^{p-1}.$$

$f_1 \in C^1$  により,  $h \rightarrow 0$  のとき左辺の存在は保証されるから,

$$|\partial_{\operatorname{Re} v}[\operatorname{Re} f_1(v)]| \leq C|v|^{p-1}$$

を得る. 同様にして,

$$|\partial_{\operatorname{Im} v}[\operatorname{Re} f_1(v)]|, |\partial_{\operatorname{Re} v}[\operatorname{Im} f_1(v)]|, |\partial_{\operatorname{Im} v}[\operatorname{Im} f_1(v)]| \leq C|v|^{p-1}.$$

また,

$$|\partial_{x_j}\operatorname{Re} v|, |\partial_{x_j}\operatorname{Im} v| \leq |\partial_{x_j}v| \leq |\nabla v|$$

であるから,  $|\partial_{x_j}[f_1(v)]| \leq C|v|^{p-1}|\nabla v|$  となり,  $|\nabla[f_1(v)]| \leq C|v|^{p-1}|\nabla v|$  を得る.

したがって, (2.16) により (2.15) の右辺第2項は,

$$\begin{aligned}\|\nabla[f_1(v)]\|_{L^{r'}(I_T; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} &\leq C\| |v|^{p-1}\nabla v \|_{L^{r'}(I_T; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &= C\| |v|^{p-1}\nabla v \|_{L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n)}\|_{L^{r'}(I_T)}\end{aligned}$$

条件  $(p-1)/(p+1) + 1/(p+1) = p/(p+1)$  のもとでヘルダーの不等式を用いて

$$\cdots \leq C\| |v|^{p-1} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}\| \nabla v \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}\|_{L^{r'}(I_T)}$$

ソボレフの埋蔵定理より,  $\|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \leq C\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a}\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^a \leq C\|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  が成り立つから

$$\begin{aligned} \cdots &\leq C\|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}\|_{L^{r'}(I_T)} \\ &\leq C\|v\|_{L^\infty(I_T;H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^{r'}(I_T;L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

さらに, 時間変数  $t$  について, 条件  $\alpha + 1/r = 1/r'$  のもとでヘルダーの不等式を用いれば,

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^{r'}(I_T;L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} &= \|1 \cdot \nabla v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}\|_{L^r(I_T)} \\ &\leq \|1\|_{L^{1/\alpha}(I_T)}\|\nabla v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}\|_{L^{r'}(I_T)} \\ &\leq CT^\alpha\|\nabla v\|_{L^r(I_T;L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

ただし,

$$\alpha = \frac{(n+2) - (n-2)p}{2(p+1)}$$

である. よって,

$$\|\nabla[f_1(v)]\|_{L^{r'}(I_T;L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \leq CT^\alpha\|v\|_{L^\infty(I_T;H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^r(I_T;L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}.$$

また, (2.17) により (2.15) の右辺第 3 項は,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \|\nabla[f_2(v(s))]\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} ds \right| &\leq C \left| \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} ds \right| \\ &\leq CT\|\nabla v\|_{L^\infty(I_T;L^2(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned} \|\nabla N[v]\|_{L^\infty(I_T;L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + CT^\alpha\|v\|_{L^\infty(I_T;H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^r(I_T;L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + CT\|\nabla v\|_{L^\infty(I_T;L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C(T^\alpha\eta^{p-1} + T)\eta, \quad v \in X_T. \end{aligned} \quad (2.18)$$

同様にして,

$$\begin{aligned} \|N[v]\|_{L^\infty(I_T;L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha\|v\|_{L^\infty(I_T;H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1}\|v\|_{L^r(I_T;L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + CT\|v\|_{L^\infty(I_T;L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha\eta^{p-1}T^{1/r}\eta + CT\eta \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C(T^{\alpha+1/r}\eta^{p-1} + T)\eta, \quad v \in X_T. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで, 仮定 (f2) における  $p$  についての条件より,  $\alpha > 0$  であることに注意すると,  $T > 0$  を十分小さくとることにより

$$C(T^\alpha\eta^{p-1} + T), C(T^{\alpha+1/r}\eta^{p-1} + T) \leq 1 \quad (2.20)$$

とできる。このとき、(2.18) と (2.19) より、 $v \in X_T$  に対して、

$$\|N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta, \quad (2.21)$$

$$\|\nabla N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta. \quad (2.22)$$

次に、 $v \in X_T$  に対して、 $\nabla N[v]$  の  $L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))$  ノルムを評価する。補題 2.4 より、

$$\begin{aligned} \|\nabla N[v]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} &\leq \|U(t)\nabla u_0\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_1(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_2(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_1(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_2(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \eta + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_1(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[f_2(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

ここで、右辺の第 2 項と第 3 項をそれぞれ  $A$ ,  $B$  と書くことにする。補題 2.3 と (2.16) より、

$$\begin{aligned} A &\leq \left\| \int_0^t \|U(t-s)\nabla[f_1(v(s))]\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)} \\ &\leq C \left\| \int_0^t |t-s|^{-(\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1})} \|\nabla[f_1(v(s))]\|_{L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)} \\ &\leq C \left\| \int_0^t |t-s|^{-(\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1})} \|v(s)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \|\nabla v(s)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)} \end{aligned}$$

空間変数  $x$  について、条件  $(p-1)/(p+1) + 1/(p+1) = p/(p+1)$  のもとでヘルダーの不等式を用いて

$$\cdots \leq C \left\| \int_0^t |t-s|^{-(\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1})} \|v(s)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \|\nabla v(s)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)}$$



次に、時間変数  $t$  について、条件

$$\frac{1}{r} = \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p+1} \right) + \frac{n+4-(n-4)p}{4(p+1)} - 1$$

のもとでハーディ・リトルウッド・ソボレフの不等式を用いて

$$\cdots \leq C \| \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T)}$$

ソボレフの埋蔵定理より

$$\begin{aligned} \cdots &\leq C \| \|v\|_{H^1}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T)} \\ &\leq C \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

さらに、時間変数  $t$  について、条件

$$\alpha + \frac{1}{r} = \frac{n+4-(n-4)p}{4(p+1)}$$

のもとでヘルダーの不等式を用いると

$$\begin{aligned} &\|\nabla v\|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &= \|1 \cdot \|\nabla v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}\|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T)} \\ &\leq \|1\|_{L^{1/\alpha}(I_T)} \| \|\nabla v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \|_{L^r(I_T)} \\ &\leq CT^\alpha \|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \end{aligned}$$

となるから、

$$A \leq CT^\alpha \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}.$$

また、補題 2.7 と (2.17) より、

$$B \leq C \|\nabla[f_2(v)]\|_{L^1(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq C \|\nabla v\|_{L^1(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq CT \|\nabla v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \|\nabla N[v]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} &\leq \eta + CT^\alpha \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + CT \|\nabla v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \eta + C(T^\alpha \eta^{p-1} + T)\eta, \quad v \in X_T. \end{aligned} \tag{2.23}$$

したがって、同様に  $T > 0$  を十分小さくとれば (2.23) より

$$\|\nabla N[v]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta, \quad v \in X_T. \quad (2.24)$$

以上, (2.21), (2.22), (2.24) を合わせると, 十分小さな  $T > 0$  に対して, 非線形写像  $N$  は  $X_T$  から  $X_T$  の中への写像となっていることが示せた. また, (2.20) より  $T$  の選び方は  $C, \alpha, \eta$  に依るから  $n, p, \|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  にしか依存しないこともわかる.

続いて, 非線形写像  $N$  が十分小さな  $T > 0$  に対して縮小写像となる, すなわち

$$\exists k \in (0, 1); \quad d(N[u], N[v]) \leq k d(u, v), \quad u, v \in X_T$$

を満たすことを示す.  $u, v \in X_T$  に対して,

$$d(N[u], N[v]) = \|N[u] - N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|N[u] - N[v]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}. \quad (2.25)$$

(2.25) の右辺第 1 項を評価する.

$$N[u](t) - N[v](t) = -i \int_0^t U(t-s)[f(u(s)) - f(v(s))] ds$$

であるから, まず, 補題 2.4 と系 2.6 より

$$\begin{aligned} \|N[u](t) - N[v](t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \left\| \int_0^t U(t-s)[f_1(u(s)) - f_1(v(s))] ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)[f_2(u(s)) - f_2(v(s))] ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq C \|f_1(u) - f_1(v)\|_{L^{r'}(I_T; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + C \left| \int_0^t \|f_2(u(s)) - f_2(v(s))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} ds \right| \end{aligned}$$

ただし,  $1/r + 1/r' = 1$  である. (2.12) と (2.13) より

$$\begin{aligned} \cdots &\leq C \|(|u| + |v|)^{p-1} |u - v|\|_{L^{r'}(I_T; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + C \left| \int_0^t \|u - v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} ds \right| \end{aligned}$$

右辺第 1 項に条件  $(p-1)/(p+1) + 1/(p+1) = p/(p+1)$  のもとでヘルダーの不等式を用いて

$$\begin{aligned} \cdots &\leq C \|(|u| + |v|)^{p-1}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \|u - v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \Big\|_{L^{r'}(I_T)} \\ &\quad + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C (\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1}) \|u - v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \Big\|_{L^{r'}(I_T)} \\ &\quad + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \end{aligned}$$

ソボレフの埋蔵定理より

$$\begin{aligned}
\cdots &\leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \Big\|_{L^{r'}(I_T)} \\
&\quad + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq C \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^{r'}(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
&\quad + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}
\end{aligned}$$

さらに、時間変数  $t$  について、条件  $\alpha + 1/r = 1/r'$  のもとでヘルダーの不等式を用いて

$$\begin{aligned}
\cdots &\leq CT^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
&\quad + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}.
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&\|N[u] - N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq CT^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
&\quad + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

次に、(2.25) の右辺第 2 項を評価する。

$$\begin{aligned}
&\|N[u] - N[v]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq \left\| \int_0^t U(t-s) [f_1(u(s)) - f_1(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
&\quad + \left\| \int_0^t U(t-s) [f_2(u(s)) - f_2(v(s))] ds \right\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}.
\end{aligned}$$

ここで、右辺の第 2 項と第 3 項をそれぞれ  $A', B'$  と書くことにする。補題 2.3 と (2.12) より、

$$\begin{aligned}
A' &= \left\| \int_0^t \|U(t-s) [f_1(u(s)) - f_1(v(s))]\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)} \\
&\leq C \left\| \int_0^t |t-s|^{-\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{p+1}\right)} \|f_1(u(s)) - f_1(v(s))\|_{L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)} \\
&\leq C \left\| \int_0^t |t-s|^{-\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{p+1}\right)} \left( \|u\| + \|v\| \right)^{p-1} \|u - v\|_{L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)}
\end{aligned}$$

空間変数  $x$  について、条件  $(p-1)/(p+1) + 1/(p+1) = p/(p+1)$  のもとでヘルダーの不等式を用いて

$$\begin{aligned} \cdots &\leq C \left\| \int_0^t |t-s|^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1}\right)} \| |u| + |v| \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \|u-v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)} \\ &\leq C \left\| \int_0^t |t-s|^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1}\right)} (\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1}) \|u-v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} ds \right\|_{L^r(I_T)} \end{aligned}$$

次に、時間変数  $t$  について、条件

$$\frac{1}{r} = \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p+1} \right) + \frac{n+4-(n-4)p}{4(p+1)} - 1$$

のもとでハーディ・リトルウッド・ソボレフの不等式を用いて

$$\cdots \leq C \left\| (\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1}) \|u-v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \right\|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T)}$$

ソボレフの埋蔵定理より

$$\begin{aligned} \cdots &\leq C \left\| (\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1}) \|u-v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \right\|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T)} \\ &\leq C \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u-v\|_{L^{\frac{4(p+1)}{n+4-(n-4)p}}(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

さらに、時間変数  $t$  について、条件

$$\alpha + \frac{1}{r} = \frac{n+4-(n-4)p}{4(p+1)}$$

のもとでヘルダーの不等式を用いれば、

$$A' \leq CT^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u-v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}$$

となる。また、補題 2.7, (2.13), ヘルダーの不等式より、

$$B' \leq C \|f_2(u) - f_2(v)\|_{L^1(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq C \|u-v\|_{L^1(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq CT \|u-v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}.$$

したがって、

$$\begin{aligned} &\|N[u] - N[v]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u-v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + CT \|u-v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

以上, (2.26) と (2.27) から,

$$\begin{aligned} d(N[u], N[v]) &\leq CT^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT^\alpha \eta^{p-1} \|u - v\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + CT \|u - v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

$T > 0$  を十分小さくとれば,

$$\exists k \in (0, 1); \quad CT^\alpha \eta^{p-1}, \quad CT \leq k$$

とできるから,

$$\exists k \in (0, 1); \quad d(N[u], N[v]) \leq k d(u, v), \quad u, v \in X_T$$

が成り立つ.

以上のことから,  $N$  は  $X_T$  から  $X_T$  の中への縮小写像であり, 縮小写像の原理より初期値問題 (2.1)–(2.2) の時間局所解の存在が示せた.

さらに,

$$\int_0^t U(t-s)f(s) ds \in C(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))$$

が成り立つことより, この解は (2.10) を満たす.

(ステップ 2) ここでは, (2.10)–(2.11) のクラスに属する初期値問題 (2.1)–(2.2) の局所解の一意性を示す.

同じ初期値  $u_0$  をもち (2.10)–(2.11) を満たす (2.1)–(2.2) の 2 つの解を  $u, v$  とする.  $w = u - v$  とおくと,  $w$  は

$$w(t) = u(t) - v(t) = -i \int_0^t U(t-s)[f(u(s)) - f(v(s))] ds$$

を満たし, ステップ 1 における  $d(N[u], N[v])$  と同様の計算により, 次を得る:

$0 < T' < T$  なる  $T'$  に対して,

$$\begin{aligned} &\|w\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|w\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|w\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + CT' \|w\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT'^\alpha \eta^{p-1} \|w\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + CT' \|w\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

よって,  $T' > 0$  を十分小さくとれば,

$$\|w\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|w\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \leq 0$$

となり, これは,

$$w(t) = 0, \quad t \in (-T', T')$$

を意味している。したがって、

$$u(t) = v(t), \quad t \in (-T', T')$$

を得る。

(2.28) の右辺の定数  $C$  は  $T'$  によらず、また仮定より、

$$u, v \in C_b(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))$$

であることに注意すれば、

$$u_1(x, t) = u(x, t + T'), \quad v_1(x, t) = v(x, t + T')$$

となる  $u_1, v_1$  を考えると、これらは同じ初期値  $u_1(x, 0) = u(x, T')$ ,  $v_1(x, 0) = v(x, T')$  をもつ方程式 (2.1) の解となる。ふたたび、 $w_1 = u_1 - v_1$  とおいて、上の操作を繰り返せば、定数  $C$  は  $T'$  に依らないから、同じ  $T'$  に対して、

$$u_1(t) = v_1(t), \quad t \in (0, 2T')$$

を得る。ゆえに、この操作を有限回繰り返すことにより、

$$u(t) = v(t), \quad t \in (-T, T)$$

が示される。 □

## 2.4 時間大域解の存在

本節では、定理 2.10 によって得られた時間局所解  $u$  が、時間大域的に延長できるかという問題を考える。

そのためには、解の満たす保存量が重要な役割を果たすことから、まず、非線形関数  $f$  が仮定 (f3) を満たすならば、定理 2.10 によって得られた解は、次の 2 つの保存量 (2.29) と (2.30) を満たすことを示す。

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad (2.29)$$

$$E(u(t)) = E(u_0). \quad (2.30)$$

ただし、

$$E(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|v(x)|) dx, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \quad (2.31)$$

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau, \quad s \in \mathbf{R}. \quad (2.32)$$

**命題 2.11.** 非線形関数  $f$  に対して, 仮定 (f1), (f2), (f3) が成立しているものとし,  $I$  を任意の  $\mathbf{R}$  の開区間とする. 関数  $u$  は,

$$u \in C(I; H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1(I; H^{-1}(\mathbf{R}^n)), \quad (2.33)$$

$$\nabla u \in L^r(I'; L^{p+1}(\mathbf{R}^n)) \quad (I' \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界閉区間}) \quad (2.34)$$

であり, 方程式 (2.1) を区間  $I$  上で満たしているものとする. このとき, すべての  $t \in I$  に対して (2.29) と (2.30) が成立する.

命題 2.11 を証明するために, 次のような問題を考える.  $\mathbf{R}^n$  上の実数値  $C^\infty$  級関数  $h(x)$  を,

$$h(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n), \quad h(x) = 0 \quad (|x| \geq 1), \quad \int_{\mathbf{R}^n} h(x) dx = 1$$

であるようなものとし,  $\varepsilon > 0$  に対して,  $h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} h(x/\varepsilon)$  とおく.  $\mathbf{R}^n$  上の 2 つの関数  $u$  と  $v$  の合成積を  $u * v$  で表す. また,  $t_0 \in \mathbf{R}$  とする. このとき, 次のような初期値問題を考える:

$$i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta u_\varepsilon = h_\varepsilon * (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon)), \quad t \in (t_0 - T, t_0 + T), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (2.35)$$

$$u_\varepsilon(t_0, x) = (h_\varepsilon * u_0)(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.36)$$

初期値問題 (2.35)–(2.36) に対して, 次の補題が成立する.

**補題 2.12.** 非線形関数  $f$  に対して, 仮定 (f1), (f2) が成立しているとする.  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  とすると, ある正定数  $T$  が存在して, 時間区間  $(t_0 - T, t_0 + T)$  上で次を満たす (2.35)–(2.36) の解  $u_\varepsilon$  が一意的に存在する:

$$u_\varepsilon \in \bigcap_{j=1}^{\infty} C_b^1((t_0 - T, t_0 + T); H^j(\mathbf{R}^n)), \quad (2.37)$$

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty((t_0 - T, t_0 + T); H^1(\mathbf{R}^n))} \leq 4\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}. \quad (2.38)$$

ただし, 仮定 (f2) の中で与えられた  $p$  に対して,  $r$  は

$$r \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p+1} \right) = 2$$

を満たすものとし, 正定数  $T$  は仮定 (f2) の中に現れる  $K, p$  と  $n, \|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  だけに依存し,  $\varepsilon$  には依存しない. さらに, 時刻  $t = t_0$  で初期値  $u_0$  を与えた初期値問題 (2.1)–(2.2) を考え, その解を  $u$  とし解の存在時間を  $(t_0 - T_0, t_0 + T_0)$  とする. そのとき,  $0 < T' \leq \min\{T, T_0\}$  を満たす任意の定数  $T'$  に対して,

$$\sup_{t \in I_{T'}} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad 2 \leq q < p^*(n) + 1. \quad (2.39)$$

ただし,  $I_{T'} = (t_0 - T', t_0 + T')$  である.

**証明.** デュアメル原理により, 初期値問題 (2.35)–(2.36) は, 次の積分方程式に書き直せることに注意する:

$$u_\varepsilon(t) = U(t-t_0)h_\varepsilon * u_0 - i \int_{t_0}^t U(t-s)h_\varepsilon * [f(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))]ds. \quad (2.40)$$

定理 2.10 の証明と同じようにして縮小写像の原理を用いることにより, ある正定数  $T$  が存在し, 時間区間  $(t_0 - T, t_0 + T)$  上で次を満たす (2.40) の解  $u_\varepsilon$  が一意的存在することが示せる:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in L^\infty((t_0 - T, t_0 + T); H^1(\mathbf{R}^n)), \\ \nabla u_\varepsilon &\in L^r((t_0 - T, t_0 + T); L^{p+1}(\mathbf{R}^n)), \\ \|u_\varepsilon\|_{L^\infty((t_0 - T, t_0 + T); H^1(\mathbf{R}^n))} &\leq 4\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

実際に,  $I_T = (t_0 - T, t_0 + T)$  とおけば, ヤングの不等式から,

$$\|h_\varepsilon * v\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leq \|v\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}, \quad 1 \leq q \leq \infty$$

であることに注意すると, (2.9), 補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} \|U(\cdot)h_\varepsilon * u_0\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &= \|h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_1, \\ \|\nabla U(\cdot)h_\varepsilon * u_0\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &= \|\nabla h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_2, \\ \|\nabla U(\cdot)h_\varepsilon * u_0\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} &= C\|\nabla h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_3. \end{aligned}$$

$\eta = \max\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  とおき, 距離空間  $(X_T, d)$  を次のように定義する:

$$\begin{aligned} X_T &= \{v_\varepsilon; v_\varepsilon \in L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n)), \nabla v_\varepsilon \in L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n)), \\ &\quad \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta, \\ &\quad \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta, \\ &\quad \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta\}, \end{aligned}$$

$$d(v_\varepsilon, w_\varepsilon) = \|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}, \quad v_\varepsilon, w_\varepsilon \in X_T. \quad (2.42)$$

ここで,

$$Y_T = L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)) \cap L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))$$

とおくと,  $L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)), L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))$  の完備性により  $Y_T$  は距離関数  $d$  に関して完備距離空間となる. さらに,  $X_T$  は  $Y_T$  の閉部分集合である. よって,  $(X_T, d)$  は完備距離空間となる. いま, 非線形写像  $N$  を

$$N[v_\varepsilon](t) = U(t-t_0)h_\varepsilon * u_0 - i \int_{t_0}^t U(t-s)h_\varepsilon * [f(h_\varepsilon * v_\varepsilon(s))]ds, \quad v_\varepsilon \in X_T$$

と定めれば, 定理 2.10 の証明と同様の計算により,

$$\begin{aligned} \|\nabla N[v_\varepsilon]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq \eta + C(T^\alpha \eta^{p-1} + T)\eta, \\ \|N[v_\varepsilon]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq \eta + C(T^{\alpha+1/r} \eta^{p-1} + T)\eta, \\ \|\nabla N[v_\varepsilon]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} &\leq \eta + C(T^\alpha \eta^{p-1} + T)\eta, \quad v_\varepsilon \in X_T \end{aligned}$$



が得られる。ただし,

$$\alpha = \frac{n+2-(n-2)p}{2(p+1)}$$

である。よって,  $T > 0$  を十分小さくとれば,

$$C(T^\alpha \eta^{p-1} + T)\eta, C(T^{\alpha+1/r} \eta^{p-1} + T)\eta \leq 1$$

とできるから,  $v_\varepsilon \in X_T$  に対して,

$$\begin{aligned} \|\nabla N[v_\varepsilon]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq 2\eta, \\ \|N[v_\varepsilon]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq 2\eta, \\ \|\nabla N[v_\varepsilon]\|_{L^r(I_T; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} &\leq 2\eta. \end{aligned}$$

以上より, 十分小さな  $T > 0$  に対して非線形写像  $N$  は  $X_T$  から  $X_T$  の中への写像である。このとき, ヤングの不等式から, 正定数  $T$  は  $\varepsilon$  によらずに選べることがわかる。さらに,  $N$  が  $X_T$  から  $X_T$  への縮小写像となること, および  $I_T$  上で (2.40) の解  $u_\varepsilon$  が一意的であることも定理 2.10 の証明と同様に示すことができる。

また, (2.41) については, (2.40) より,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} &\leq \|U(t-t_0)h_\varepsilon * u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \left\| \int_{t_0}^t U(t-s)h_\varepsilon * [f(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))] ds \right\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + C(T^{\alpha+1/r} \eta^{p-1} + T)\eta + C(T^\alpha \eta^{p-1} + T)\eta. \end{aligned}$$

ここで,  $\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \eta$ ,  $C\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \eta$  より,  $\eta \leq C\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  とできることに注意すれば,

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + C(T^{\alpha+1/r} \eta^{p-1} + T^\alpha \eta^{p-1} + T)\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}.$$

したがって, さらに小さく  $T > 0$  をとることにより,

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq 4\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$$

を得る。ゆえに,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))} \leq 4\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \quad (2.43)$$

また, 任意の  $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$  と任意の多重指数  $\alpha$  に対して, ヤングの不等式より

$$\|\partial_x^\alpha (h_\varepsilon * v)\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} = \|(\partial_x^\alpha h_\varepsilon) * v\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leq \|\partial_x^\alpha h_\varepsilon\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

である。ただし,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} - 1, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

を満たす  $p$  の存在のために,  $2 \leq q \leq \infty$  となる。よって,  $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$  に対して,

$$\partial_x^\alpha (h_\varepsilon * v) \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad 2 \leq q \leq \infty.$$

このことを用いて, (2.40) より (2.37) が得られる.

さらに,  $u$  と  $u_\varepsilon$  との差を考える.  $t \in I_{T'}$  に対して,

$$u(t) - u_\varepsilon(t) = U(t - t_0)(u_0 - h_\varepsilon * u_0) - i \int_{t_0}^t U(t - s) (f(u(s)) - h_\varepsilon * [f(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))]) ds$$

であるから, まず,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \|U(t - t_0)(u_0 - h_\varepsilon * u_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^t U(t - s) (f_1(u(s)) - h_\varepsilon * [f_1(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))]) ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^t U(t - s) (f_2(u(s)) - h_\varepsilon * [f_2(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))]) ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \end{aligned}$$

定理 2.10 の証明のステップ 1 と同様に (2.9), 補題 2.4 と系 2.6 より

$$\begin{aligned} \cdots &\leq \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + C \|f_1(u) - h_\varepsilon * [f_1(h_\varepsilon * u_\varepsilon)]\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + C \left\| \int_{t_0}^t \|f_2(u(s)) - h_\varepsilon * [f_2(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))]\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} ds \right\|. \end{aligned}$$

ただし,  $1/r + 1/r' = 1$  である. 右辺の第 2 項と第 3 項を定数を除いてそれぞれ  $A, B$  と書くと,

$$\begin{aligned} A &\leq \|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + \|h_\varepsilon * f_1(u) - h_\varepsilon * [f_1(h_\varepsilon * u_\varepsilon)]\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\quad + \|f_1(u) - f_1(h_\varepsilon * u_\varepsilon)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

この右辺第 2 項については, 定理 2.10 の証明のステップ 1 と同様に,

$$\begin{aligned} &\|f_1(u) - f_1(h_\varepsilon * u_\varepsilon)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

ただし,

$$\alpha = \frac{n + 2 - (n - 2)p}{2(p + 1)}$$

である. さらに,

$$\begin{aligned} &\|u - h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + \|h_\varepsilon * u - h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \end{aligned}$$

とできるから,

$$\begin{aligned}
A &\leq CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\
&\quad \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \right) \\
&\quad + \|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))}. \\
B &\leq \left| \int_{t_0}^t \left( \|f_2(u(s)) - h_\varepsilon * f_2(u(s))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \|h_\varepsilon * f_2(u(s)) - h_\varepsilon * f_2[h_\varepsilon * u_\varepsilon(s)]\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t \left( \|f_2(u(s)) - h_\varepsilon * f_2(u(s))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|f_2(u(s)) - f_2[h_\varepsilon * u_\varepsilon(s)]\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t \left( \|f_2(u(s)) - h_\varepsilon * f_2(u(s))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|u(s) - h_\varepsilon * u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t \left( \|f_2(u(s)) - h_\varepsilon * f_2(u(s))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \|u(s) - h_\varepsilon * u(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|h_\varepsilon * u(s) - h_\varepsilon * u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t \left( \|f_2(u(s)) - h_\varepsilon * f_2(u(s))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \|u(s) - h_\varepsilon * u(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|u(s) - u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right) ds \right| \\
&\leq CT' \left( \|f_2(u) - h_\varepsilon * f_2(u)\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right. \\
&\quad \left. + \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right).
\end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned}
&\|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C \|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\
&\quad + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\
&\quad \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \right) \\
&\quad + CT' \left( \|f_2(u) - h_\varepsilon * f_2(u)\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right. \\
&\quad \left. + \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right) \\
&\quad 0 < T' \leq \min\{T, T_0\}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}
& \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
& \leq \|U(t - t_0)(u_0 - h_\varepsilon * u_0)\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
& \quad + \left\| \int_{t_0}^t U(t - s) (f_1(u(s)) - h_\varepsilon * [f_1(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))]) \, ds \right\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
& \quad + \left\| \int_{t_0}^t U(t - s) (f_2(u(s)) - h_\varepsilon * [f_2(h_\varepsilon * u_\varepsilon(s))]) \, ds \right\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))}.
\end{aligned}$$

右辺の第2項と第3項をそれぞれ  $P, Q$  と書く. 定理 2.10 の証明, および  $\|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))}$  の評価と同じようにして次を得る:

$$\begin{aligned}
P \leq & \left\| \int_{t_0}^t |t - s|^{-(\frac{n}{2} - \frac{n}{p+1})} \left[ \|f_1(u(s)) - h_\varepsilon * f_1(u(s))\|_{L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n)} \right. \right. \\
& \left. \left. + (\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1}) (\|u - h_\varepsilon * u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}) \right] \, ds \right\|_{L^r(I_{T'})}
\end{aligned}$$

ハーディ・リトルウッド・ソボレフの不等式, ソボレフの埋蔵定理, ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}
\cdots \leq & C \|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\
& + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\
& \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q \leq & C \|f_2(u) - h_\varepsilon * f_2(h_\varepsilon * u_\varepsilon)\|_{L^1(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \\
& \leq CT' \left( \|f_2(u) - h_\varepsilon * f_2(u)\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right. \\
& \quad \left. + \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right).
\end{aligned}$$

したがって, 以上より,

$$\begin{aligned}
& \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
& \leq C \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C \|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\
& \quad + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\
& \quad \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \right) \\
& \quad + CT' \left( \|f_2(u) - h_\varepsilon * f_2(u)\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right. \\
& \quad \left. + \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right) \\
& \quad 0 < T' \leq \min\{T, T_0\}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

(2.44) と (2.45) から

$$\begin{aligned}
& \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
& \leq C\|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C\|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\
& \quad + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\
& \quad \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \right) \\
& \quad + CT' \left( \|f_2(u) - h_\varepsilon * f_2(u)\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right. \\
& \quad \left. + \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right) \\
& \quad 0 < T' \leq \min\{T, T_0\}.
\end{aligned}$$

よって、正定数  $T'$  を十分小さくとれば、

$$\begin{aligned}
& \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
& \leq C\|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C\|f_1(u) - h_\varepsilon * f_1(u)\|_{L^{r'}(I_{T'}; L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n))} \\
& \quad + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^{p+1}(\mathbf{R}^n))} \\
& \quad + CT' \left( \|f_2(u) - h_\varepsilon * f_2(u)\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \right).
\end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon \rightarrow +0$  とすれば、右辺  $\rightarrow 0$  となり、

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

を得る。ところで、ソボレフの埋蔵定理より、

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leq C\|u - u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \|\nabla(u - u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^a.$$

ただし、

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2}(1-a) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)a, \quad 0 \leq a < 1 \quad (2.46)$$

である。ゆえに、(2.43) より  $\|\nabla(u - u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} < \infty$  だから、

$$\sup_{t \in I_{T'}} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

が示される。また、(2.46) から、

$$2 \leq q < \frac{2n}{n-2} = p^*(n) + 1$$

を得る。 □

補題 2.12 を用いて, 命題 2.11 を示す.

**命題 2.11 の証明.**  $t_0 \in I$  とする. ここで  $u_0 = u(t_0)$  とした初期値問題 (2.35)–(2.36) を考える. 補題 2.12 より与えられる初期値問題 (2.35)–(2.36) の解を  $u_\varepsilon$  とすると, ある正定数  $T$  が存在して次が成立する:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))} \leq 4\|u(t_0)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad (2.47)$$

$$\sup_{t \in I_T} \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad 2 \leq q < p^*(n) + 1. \quad (2.48)$$

ただし,  $T$  は  $[t_0 - T, t_0 + T] \subset I$  となるように小さくともものとし,  $I_T = (t_0 - T, t_0 + T)$  である. 一方,

$$(h_\varepsilon * f(h_\varepsilon * u_\varepsilon), u_\varepsilon) = (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon), h_\varepsilon * u_\varepsilon)$$

に注意して, (2.35) に  $\overline{u_\varepsilon}$  を乗じ,  $x$  変数について積分し, 虚部をとると,

$$i \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \overline{u_\varepsilon} dx + \int_{\mathbf{R}^n} \Delta u_\varepsilon \overline{u_\varepsilon} dx = \int_{\mathbf{R}^n} h_\varepsilon * (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon)) \overline{u_\varepsilon} dx.$$

左辺の第 2 項は実数値になるから,

$$\text{Im(左辺)} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (u_\varepsilon \overline{u_\varepsilon}) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2.$$

右辺については,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} h_\varepsilon * (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon)) \overline{u_\varepsilon} dx &= (h_\varepsilon * (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon)), u_\varepsilon) \\ &= (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon), h_\varepsilon * u_\varepsilon) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(h_\varepsilon * u_\varepsilon) \overline{h_\varepsilon * u_\varepsilon} dx. \end{aligned}$$

これは, 仮定 (f3) により  $f(z)\bar{z} \in \mathbf{R}$ , ( $\forall z \in \mathbf{C}$ ) であることから実数となる. なぜならば,  $\forall z \in \mathbf{C}$ ,  $\forall \theta \in \mathbf{R}$  に対して,  $e^{i\theta}z$  は任意の複素数を表す. (f3) の仮定より,

$$f(e^{i\theta}z) \overline{e^{i\theta}z} = e^{i\theta} f(z) e^{-i\theta} \bar{z} = f(z) \bar{z}.$$

ここで,  $\theta = -\arg z$  ととると,  $e^{i\theta}z \in \mathbf{R}$  であるから, (f3) の仮定より  $f(e^{i\theta}z)$  は実数値をとる. よって,  $f(z)\bar{z} \in \mathbf{R}$ , ( $\forall z \in \mathbf{C}$ ) を得る.

したがって, 右辺は実数値となり,

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = 0.$$

ゆえに,

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|h_\varepsilon * u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad t \in I_T$$

を得る．ここで、両辺  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると、(2.48) より、

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad t \in I_T. \quad (2.49)$$

次に、(2.35) に  $\partial \overline{u_\varepsilon} / \partial t$  を乗じ、 $x$  変数について積分し、実部をとると、

$$i \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \overline{u_\varepsilon}}{\partial t} dx + \int_{\mathbf{R}^n} \Delta u_\varepsilon \frac{\partial \overline{u_\varepsilon}}{\partial t} dx = \int_{\mathbf{R}^n} h_\varepsilon * (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon)) \frac{\partial \overline{u_\varepsilon}}{\partial t} dx.$$

左辺の第 1 項は純虚数だから、

$$\operatorname{Re}(\text{左辺}) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \overline{u_\varepsilon}) dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2.$$

右辺については、虚部をとったときと同じようにして、

$$\int_{\mathbf{R}^n} h_\varepsilon * (f(h_\varepsilon * u_\varepsilon)) \frac{\partial \overline{u_\varepsilon}}{\partial t} dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(h_\varepsilon * u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} (\overline{h_\varepsilon * u_\varepsilon}) dx.$$

ここで、 $h_\varepsilon * u_\varepsilon \in \mathbf{C}$  を

$$h_\varepsilon * u_\varepsilon = r e^{i\theta}, \quad r = r(x, t) \in \mathbf{R}, \quad \theta = \theta(x, t) \in \mathbf{R}$$

とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{h_\varepsilon * u_\varepsilon}) = \frac{\partial r}{\partial t} e^{-i\theta} + r e^{-i\theta} \left(-i \frac{\partial \theta}{\partial t}\right)$$

であるから、

$$f(h_\varepsilon * u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} (\overline{h_\varepsilon * u_\varepsilon}) = f(h_\varepsilon * u_\varepsilon) \frac{\partial r}{\partial t} e^{-i\theta} - i f(h_\varepsilon * u_\varepsilon) r e^{-i\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

ところで、仮定 (f3) より、 $f(e^{-i\theta}(h_\varepsilon * u_\varepsilon)) = e^{-i\theta} f(h_\varepsilon * u_\varepsilon)$  であることと、 $e^{-i\theta}(h_\varepsilon * u_\varepsilon) = r = |h_\varepsilon * u_\varepsilon|$  であることから、

$$f(|h_\varepsilon * u_\varepsilon|) = e^{-i\theta} f(h_\varepsilon * u_\varepsilon).$$

よって、

$$f(h_\varepsilon * u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} (\overline{h_\varepsilon * u_\varepsilon}) = f(|h_\varepsilon * u_\varepsilon|) \frac{\partial r}{\partial t} - i f(|h_\varepsilon * u_\varepsilon|) r \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

このことに注意すれば、(2.32) を用いて、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\text{右辺}) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(|h_\varepsilon * u_\varepsilon|) \frac{\partial r}{\partial t} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} F(|h_\varepsilon * u_\varepsilon|) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^n} F(|h_\varepsilon * u_\varepsilon|) dx. \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|h_\varepsilon * u_\varepsilon|) dx \right) = 0$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|) dx \\ = \frac{1}{2} \|\nabla h_\varepsilon * u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|h_\varepsilon * u_\varepsilon(x, t_0)|) dx, \quad t \in I_T. \end{aligned} \quad (2.50)$$

ここで, 両辺  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると (2.50) より,

$$E(u(t)) = E(u(t_0)), \quad t \in I_T$$

が得られることを言うために, いくつかのことを示す. まず,  $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, ソボレフの埋蔵定理, ヤングの不等式, および  $\|v - h_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$  であることを用いて, 次が成立することに注意する:

$$\begin{aligned} \|v - h_\varepsilon * v\|_{L^r(\mathbf{R}^n)} &\leq C \|v - h_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \|\nabla(v - h_\varepsilon * v)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^a \\ &\leq C (\|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|h_\varepsilon * \nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)})^a \|v - h_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \\ &\leq C (\|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)})^a (\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)})^{1-a} \\ &= C \varepsilon^{1-a} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0). \end{aligned} \quad (2.51)$$

ただし,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}(1-a) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)a, \quad 0 \leq a < 1$$

であるから,  $2 \leq r < p^*(n) + 1$  となる. そこで, 仮定 (f2) より,

$$|F(|z_1|) - F(|z_2|)| \leq C(|z_1| + |z_2| + |z_1|^p + |z_2|^p)|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbf{C}$$

であるので, 次を得る:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx - \int_{\mathbf{R}^n} F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|) dx \right| \\ \leq \int_{\mathbf{R}^n} |F(|u(x, t)|) - F(|(h_\varepsilon * u)(x, t)|)| dx + \int_{\mathbf{R}^n} |F(|(h_\varepsilon * u)(x, t)|) - F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|)| dx \end{aligned}$$

右辺の第1項と第2項をそれぞれ  $A, B$  とすると, シュワルツの不等式と条件

$$\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$$



のもとでヘルダーの不等式を用いて,

$$\begin{aligned}
A &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} (|u(x, t)| + |(h_\varepsilon * u)(x, t)| \\
&\quad + |u(x, t)|^p + |(h_\varepsilon * u)(x, t)|^p) |u(x, t) - (h_\varepsilon * u)(x, t)| dx \\
&\leq C \left[ \| |u(t)| + |(h_\varepsilon * u)(t)| \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right. \\
&\quad \left. + \| |u(t)|^p + |(h_\varepsilon * u)(t)|^p \|_{L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n)} \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \right] \\
&\leq C \left[ (\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|(h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}) \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right. \\
&\quad \left. + (\|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p + \|(h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p) \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \right]
\end{aligned}$$

ヤングの不等式より

$$\cdots \leq C \left[ \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \right].$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
B &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} (|(h_\varepsilon * u)(x, t)| + |(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)| + |(h_\varepsilon * u)(x, t)|^p + |(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|^p) \\
&\quad \times |(h_\varepsilon * u)(x, t) - (h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)| dx \\
&\leq C \left[ (\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}) \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right. \\
&\quad \left. + (\|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p + \|u_\varepsilon(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p) \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \right].
\end{aligned}$$

したがって, (2.47), (2.48), (2.51) より,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx - \int_{\mathbf{R}^n} F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|) dx \right| \\
&\leq C \left[ \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \right. \\
&\quad + \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \\
&\quad + (\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}) \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\
&\quad \left. + (\|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p + \|u_\varepsilon(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p) \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \right] \\
&\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad t \in I_T.
\end{aligned}$$

また, (2.47) と (2.48) より, 次が成立する:

$$u_\varepsilon(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n), \quad t \in I_T.$$

なぜならば、いま、 $\varepsilon_n \searrow 0$  なる任意の列  $\{\varepsilon_n\}$  を考え、各元に対して補題 2.12 より与えられる初期値問題 (2.35)–(2.36) の解を  $u_{\varepsilon_n}$  とする。このとき、列  $\{\varepsilon_{n'}\}$  を列  $\{\varepsilon_n\}$  の任意の部分列とすれば、(2.47) より  $\{u_{\varepsilon_{n'}}\}$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列であるから、

$$\exists \{\varepsilon_{n''}\} \subset \{\varepsilon_{n'}\}, \exists v \in H^1(\mathbf{R}^n); u_{\varepsilon_{n''}} \rightarrow v \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n).$$

一方、(2.48) より、 $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$  in  $L^q(\mathbf{R}^n)$  であるから、

$$u_{\varepsilon_{n''}} \rightarrow u \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n).$$

したがって、任意の  $\{u_{\varepsilon_{n'}}\} (\subset \{u_{\varepsilon_n}\})$  は、 $u$  に弱収束する部分列  $\{u_{\varepsilon_{n''}}\}$  をもち、

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n)$$

が成り立つ。ここで、ふたたび  $\{\varepsilon_n\}$  は任意であったから、

$$u_\varepsilon(t) \rightarrow u(t) \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n), \quad t \in I_T.$$

としてよいのである。このとき、

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad t \in I_T$$

が成り立つ。また、ヤングの不等式より、

$$\|\nabla h_\varepsilon * u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \|\nabla u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

である。ゆえに、(2.50) の両辺で  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると、次の不等式が成立する:

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t_0)|) dx.$$

すなわち、

$$E(u(t)) \leq E(u(t_0)), \quad t \in I_T. \quad (2.52)$$

ここで、あらかじめ  $T > 0$  を十分小さくとおき、各  $t_1 \in I_T$  を初期時刻、 $u(t_1)$  を初期値とした初期値問題 (2.35)–(2.36) を考えたとき、初期時刻  $t_1$  によらず同じ  $T$  で (2.47) と (2.48) が成立するようにしておく ((2.47) により可能である)。こうして、上と同じ操作を行うと、次の不等式が成立する:

$$E(u(t_0)) \leq E(u(t_1)), \quad t_0 \in I_T. \quad (2.53)$$

ゆえに、(2.52) と (2.53) を合わせると、

$$E(u(t)) = E(u(t_0)), \quad t \in I_T \quad (2.54)$$

を得る。

各  $t_0 \in I$  に対して、ある正定数  $T$  が存在して、区間  $(t_0 - T, t_0 + T)$  上で (2.49) と (2.54) が成立することが示された。ゆえに、 $I$  上で (2.29) と (2.30) が成立する。□

命題 2.11 を用いて，時間大域解の存在を証明することができるが，どんな非線形関数  $f$  に対しても，解が時間大域的に延ばせるというわけではない．さらに，非線形関数  $f$  に対して次の仮定をおく必要がある：

$$(f4) \quad F(|z|) \geq -L_1|z|^{q+1} - L_2|z|^2, \quad z \in \mathbf{C}, \quad 1 < q < 1 + \frac{4}{n}.$$

ただし， $L_1, L_2, q$  は  $z$  に依存しない正定数である．

このとき，次の時間大域解の存在定理を得る．

**定理 2.13.**  $n \geq 1$  で仮定 (f1)–(f4) が成立しているものとする．任意の  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して，定理 2.10 で得られた (2.1)–(2.2) の時間局所解  $u$  は時間大域的に一意に延長することができ，

$$u \in C_b(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C_b^1(\mathbf{R}; H^{-1}(\mathbf{R}^n)), \quad (2.55)$$

$$\nabla u \in L^r((-T, T); L^{p+1}(\mathbf{R}^n)), \quad 0 < T < \infty \quad (2.56)$$

を満たす．さらに，すべての  $t \in \mathbf{R}$  に対して，(2.29) と (2.30) が成立する．

**証明.** 定理 2.10 によって与えられる時間局所解を  $u$  とする．このとき，命題 2.11 より，解  $u$  が存在する時刻  $t$  に対しては，(2.29) と (2.30) が成立する．

いま，(2.30) と仮定 (f4) より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= E(u_0) - \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx \\ &\leq E(u_0) + \int_{\mathbf{R}^n} (L_1|u(x, t)|^{q+1} + L_2|u(x, t)|^2) dx \\ &= E(u_0) + L_1 \|u(t)\|_{L^{q+1}(\mathbf{R}^n)}^{q+1} + L_2 \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

ソボレフの埋蔵定理より，

$$\|u\|_{L^{q+1}(\mathbf{R}^n)}^{q+1} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{(1-a)(q+1)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{a(q+1)}, \quad a = \frac{n(q-1)}{2(q+1)}.$$

よって，(2.29) と (2.57) より，

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \leq E(u_0) + C \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{(1-a)(q+1)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{a(q+1)} + L_2 \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$$

となるが，仮定 (f4) より， $q < 1 + 4/n$  であるので， $a(q+1) < 2$  となり，

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq M' \quad (M' \text{ は時間 } t \text{ に依存しない正定数})$$

を得る．したがって，時間  $t$  に依存しないある正定数  $M$  が存在して，

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq M. \quad (2.58)$$

解  $u(t)$  が存在する限り, (2.58) が成立するので, 各  $t_0$  を初期時刻とし,  $u(t_0)$  を初期値として (2.1)–(2.2) を解くと, 定理 2.10 より解は少なくとも閉区間

$$\left[ t_0 - \frac{1}{2}T, t_0 + \frac{1}{2}T \right]$$

上で一意的に存在する. このとき, (2.58) より  $T$  は初期時刻  $t_0$  に依存しないで一様にとることができる. ゆえに, 定理 2.10 を繰り返し適用して, 正の方向と負の方向に対してそれぞれ  $T/2$  ずつ解を一意的に延長していけば時間大域解を得る. また, (2.55) は (2.58) から従う. (2.56) は明らかである.  $\square$

仮定 (f1)–(f4) を満たす非線形関数  $f$  の例をあげておく.

$$f(z) = \lambda |z|^{p-1} z, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0$$

に対して, 次の 3 つの場合を考える:

- (i)  $\lambda > 0, \quad 1 < p < p^*(n),$
- (ii)  $\lambda < 0, \quad 1 < p < 1 + \frac{4}{n},$
- (iii)  $\lambda < 0, \quad 1 + \frac{4}{n} \leq p < p^*(n).$

(i) と (ii) のときは, 仮定 (f1)–(f4) がすべて満たされる. しかし, (iii) のときは, 仮定 (f4) は満たされず, 一般に解は時間大域的には存在しない.

## 2.5 時間大域解の非存在

解が時間大域的に存在しない場合を考える. 問題を単純化にするため, 次のような仮定をおく:

$$(f5) \quad f(z) = \lambda |z|^{p-1} z, \quad \lambda < 0, \quad 1 + \frac{4}{n} \leq p < p^*(n).$$

また,  $t > 0$  の方向だけ考えることにする.

このとき, 定理 2.10 で与えられる初期値問題 (2.1)–(2.2) の時間局所解  $u$  は,  $[0, \infty)$  全体に延長できないことが示される. まず, その証明に必要な保存量に関する補題から始める.

**補題 2.14.**  $n \geq 1$  で仮定 (f5) が成立しており, また  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  かつ  $xu_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$  と仮定する.  $I = [0, T)$  とし, 関数  $u$  を  $I$  上の (2.1)–(2.2) の解で (2.33) と (2.34) を満たすとする. このとき,

$$xu \in C(I; L^2(\mathbf{R}^n))$$

であり,  $u$  は次を満たす:

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(u_0) \\ &\quad + \frac{4\lambda n(p-1-\frac{4}{n})}{p+1} \int_0^t \int_0^s \|u(\tau)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} d\tau ds, \quad t \in I. \end{aligned} \quad (2.59)$$

証明. ここでは簡単のため, 解  $u$  が滑らかで, 各  $t$  に対し  $|x| \rightarrow \infty$  のとき十分速く  $u(x, t) \rightarrow 0$  となることを仮定して, (2.59) を示すことにする.

まず, 方程式 (2.1) に  $|x|^2 \bar{u}$  を乗じて,  $\mathbf{R}^n$  上で積分し, 虚数部分をとると,

$$\begin{aligned} i \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} |x|^2 \bar{u} dx + \int_{\mathbf{R}^n} \Delta u |x|^2 \bar{u} dx &= \int_{\mathbf{R}^n} f(u) |x|^2 \bar{u} dx. \\ (\text{左辺第2項}) &= - \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u \cdot \nabla (|x|^2 \bar{u}) dx \\ &= - \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u \cdot [(\nabla |x|^2) \bar{u} + |x|^2 \nabla \bar{u}] dx \\ &= -2 \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u \cdot \bar{u} x dx - \int_{\mathbf{R}^n} |x|^2 \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\text{左辺}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (|x|^2 u \bar{u}) dx - 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u \cdot \bar{u} x dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|xu\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla u dx. \end{aligned}$$

右辺は仮定 (f3) より,  $f(u) \bar{u} \in \mathbf{R}$  であるから実数値となる. したがって,

$$\frac{d}{dt} \|xu\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = 4 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla u dx.$$

ゆえに,

$$\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4 \int_0^t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x, s) x \cdot \nabla u(x, s) dx ds \quad (2.60)$$

を得る.

一方, ガウスの発散定理より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x, t) x \cdot \nabla u(x, t) dx &= \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u dx + \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u dx + \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \nabla \cdot \left( x \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx \\ &\quad - n \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} dx - \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} x \cdot \nabla \bar{u} dx \\ &= 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u dx - n \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

ここで (2.1) より,  $\partial \bar{u} / \partial t = i(-\Delta \bar{u} + \lambda |u|^{p-1} \bar{u})$  であるから,

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u \, dx &= 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} i(-\Delta \bar{u} + \lambda |u|^{p-1} \bar{u}) x \cdot \nabla u \, dx \\
&= -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \Delta \bar{u} (x \cdot \nabla u) \, dx + 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \lambda |u|^{p-1} \bar{u} (x \cdot \nabla u) \, dx \\
&= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \nabla \bar{u} \cdot \nabla (x \cdot \nabla u) \, dx + 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\lambda}{p+1} x \cdot \nabla (|u|^{p+1}) \, dx \\
&= (2-n) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{2\lambda n}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}.
\end{aligned}$$

同様にして, (2.1) より,  $\partial u / \partial t = i(\Delta u - \lambda |u|^{p-1} u)$  であるから,

$$\begin{aligned}
n \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx &= n \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} i \bar{u} (\Delta u - \lambda |u|^{p-1} u) \, dx \\
&= n \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \Delta u \, dx - \lambda n \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} |u|^{p+1} \, dx \\
&= -n \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda n \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}.
\end{aligned}$$

上の 3 つの等式を合わせると,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x, t) x \cdot \nabla u(x, t) \, dx = 2 \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{\lambda n(p-1)}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}$$

を得る. この式の両辺を時間変数について積分すると,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x, s) x \cdot \nabla u(x, s) \, dx - \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx \\
= \int_0^s \left[ 2 \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{\lambda n(p-1)}{p+1} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] d\tau.
\end{aligned}$$

これを, (2.60) と合わせると,

$$\begin{aligned}
\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx \\
&\quad + \int_0^t \int_0^s 4 \left[ 2 \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{\lambda n(p-1)}{p+1} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] d\tau ds. \quad (2.61)
\end{aligned}$$

ここで, エネルギー等式 (2.30)–(2.32) を用いて, (2.61) の右辺から  $\|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$  を消去すると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= E(u_0) - \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x)|) \, dx \\
&= E(u_0) - \frac{\lambda}{p+1} \int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^{p+1} \, dx \\
&= E(u_0) - \frac{\lambda}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(t_0) \\ &\quad + \frac{4\lambda n(p-1-\frac{4}{n})}{p+1} \int_0^t \int_0^s \|u(\tau)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} d\tau ds, \quad t \in I \end{aligned}$$

を得る. □

**定理 2.15.**  $n \geq 1$  で仮定 (f5) が成立しているとする. また,  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  かつ  $xu_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$  で,

$$E(u_0) < 0$$

を仮定する. このとき, 定理 2.10 で与えられる初期値問題 (2.1)–(2.2) の時間局所解  $u$  は, 存在区間を  $[0, \infty)$  全体に延長することはできない.

**証明.** 背理法で示す.

初期値問題 (2.1)–(2.2) の解  $u$  が  $[0, \infty)$  上に延長できると仮定する. このとき, 補題 2.14 より, (2.59) がすべての  $t \in [0, \infty)$  に対して成立するから,

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(u_0) \\ &\quad + \frac{4\lambda n(p-1-\frac{4}{n})}{p+1} \int_0^t \int_0^s \|u(\tau)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} d\tau ds. \end{aligned}$$

$\lambda < 0$  かつ  $p \geq 1 + 4/n$  であることを使うと, (右辺第 3 項)  $\leq 0$  より,

$$\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \leq \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(u_0), \quad t \in [0, \infty). \quad (2.62)$$

仮定より  $E(u_0) < 0$  であるので  $t$  の 2 次方程式

$$8E(u_0)t^2 + 4\left(\operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx\right)t + \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = 0$$

は正と負の根をもつ. 正の根を  $t_0$  とすると, (2.62) より  $t > t_0$  に対して,

$$\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 < \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t_0 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t_0^2 E(u_0) = 0$$

でなければならないが, これは明らかに矛盾である. したがって, 解  $u$  は時間  $t_0$  を超えて解として延長することはできない. □

### 3 非線形シュレディンガー方程式の定在波解

#### 3.1 定在波解

本章での目標は、定在波解とよばれる特殊解の存在とその性質を調べることである。  
話を簡単にするため、次のような非線形シュレディンガー方程式のみ考えることにする:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = -|u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.1)$$

このとき、 $\omega > 0$  に対して、関数  $w(x)$  を次の非線形楕円型方程式の解とする:

$$-\Delta w + \omega w - |w|^{p-1}w = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad w \neq 0. \quad (3.2)$$

このとき、

$$v(x, t) = e^{i\omega t}w(x) \quad (3.3)$$

とおくと、関数  $v(x, t)$  は方程式 (3.1) を満たす。(3.3) のような形に表される解を定在波解という。

#### 3.2 変分法による定式化

方程式 (3.2) の非自明解の存在を調べるために、変分法とよばれる手法を用いる。まず、バナッハ空間における作用素の微分の定義から始める。

**定義 3.1.**  $X_1$  と  $X_2$  を実バナッハ空間とし、 $\|\cdot\|_1$  と  $\|\cdot\|_2$  をそれぞれ  $X_1$  と  $X_2$  のノルムとする。 $F$  は  $X_1$  から  $X_2$  への写像とする。

もし任意の  $y \in X_1$  に対して、極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + ty) - F(x)}{t}$$

が存在するとき、 $F$  は点  $x$  でガトー微分可能であるといい、その極限を  $dF(x, y)$  と書きガトー微分とよぶ。

$p^*$  を 2 章の仮定 (f2) で定められたものとする。 $1 < p < p^*(n)$ ,  $\omega > 0$  のとき、

$$S_\omega(u) = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{2}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n) \quad (3.4)$$

とおく。

**定義 3.2.** 実ヒルベルト空間  $H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$  とその内積  $(\cdot, \cdot)_{H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)}$  を次のように定める:

$$H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n) = \{u; u \in H^1(\mathbf{R}^n)\},$$

$$(u, v)_{H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)} = \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \left( u(x) \cdot \overline{v(x)} + \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} \right) dx, \quad u, v \in H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n).$$



また,  $S_\omega(u)$  を  $H^1_{\text{real}}(\mathbf{R}^n)$  上の汎関数  $S_\omega(u) : H^1_{\text{real}}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$  とみなす. このとき,  $S_\omega(u)$  のガトー微分が存在するならば, それを  $dS_\omega(u, v)$  ( $v \in H^1_{\text{real}}(\mathbf{R}^n)$ ) と書くことにする.

**定理 3.3.**  $n \geq 1$ ,  $1 < p < p^*(n)$ ,  $\omega > 0$  とする. このとき, 汎関数  $S_\omega$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  全体で定義され,  $H^1_{\text{real}}(\mathbf{R}^n)$  上の汎関数とみると, すべての  $u \in H^1_{\text{real}}(\mathbf{R}^n)$  に対してガトー微分  $dS_\omega(u, v)$  ( $v \in H^1_{\text{real}}(\mathbf{R}^n)$ ) が存在する. さらに, このガトー微分は次のように表現できる:

$$\begin{aligned} dS_\omega(u, v) &= \partial_u S_\omega(u)v + \partial_{\bar{u}} S_\omega(u)\bar{v} \\ &= 2\text{Re}[\partial_u S_\omega(u)v], \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで, 各  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して  $\partial_u S_\omega(u)$  と  $\partial_{\bar{u}} S_\omega(u)$  は,  $H^1(\mathbf{R}^n)$  から  $\mathbf{C}$  への有界線形作用素で次のようなものとする:

$$\begin{aligned} \partial_u S_\omega(u)v &= (\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u) - (v, |u|^{p-1}u), \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ \partial_{\bar{u}} S_\omega(u)v &= \overline{\partial_u S_\omega(u)\bar{v}}, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

**証明.**  $p$  の仮定からソボレフの埋蔵定理により,

$$\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n) \quad (3.6)$$

が成り立つ. したがって,  $S_\omega$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  から  $\mathbf{R}$  への写像として定義されることがわかる.

さらに,  $u, v \in H^1_{\text{real}}(\mathbf{R}^n)$  とし, 絶対値が十分小さな  $t \in \mathbf{R}$  に対して,

$$R(t) = S_\omega(u + tv) - S_\omega(u) - t^2 \left[ \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right]$$

とおく. このとき,  $S_\omega(u)$  の定義より,

$$\begin{aligned} R(t) &= 2t \text{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] \\ &\quad - \frac{2}{p+1} \int_{\mathbf{R}^n} [(|u + tv|^2)^{(p+1)/2} - (|u|^2)^{(p+1)/2}] dx \\ &= 2t \text{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] \\ &\quad - \frac{2}{p+1} \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} (\theta|u + tv|^2 + (1-\theta)|u|^2)^{(p+1)/2} d\theta dx \\ &= 2t \text{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 (\theta|u + tv|^2 + (1-\theta)|u|^2)^{(p-1)/2} d\theta (|u + tv|^2 - |u|^2) dx. \end{aligned}$$

$|u + tv|^2 - |u|^2 = 2t \text{Re}(v\bar{u}) + t^2|v|^2$  であるから,

$$\begin{aligned} I(t) &= 2 \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 (\theta|u + tv|^2 + (1-\theta)|u|^2)^{(p-1)/2} d\theta \text{Re}(v\bar{u}) dx, \\ J(t) &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 (\theta|u + tv|^2 + (1-\theta)|u|^2)^{(p-1)/2} d\theta |v|^2 dx \end{aligned}$$

とにおいて,

$$R(t) = 2t \operatorname{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] - tI(t) - t^2 J(t). \quad (3.7)$$

まず,  $J(t)$  を評価する.

$$\int_0^1 (\theta|u + tv|^2 + (1 - \theta)|u|^2)^{(p-1)/2} d\theta \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}), \quad |t| < 1$$

であるから, 条件

$$\frac{p-1}{p+1} + \frac{2}{p+1} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式と (3.6) を用いて,

$$\begin{aligned} |J(t)| &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} (|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|v|^2 dx \\ &\leq C \left( \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \right) \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &\leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \right) \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^2, \quad |t| < 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$I(t)$  の評価については, まず次の 2 つが成立していることに注意する:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (\theta|u + tv|^2 + (1 - \theta)|u|^2)^{(p-1)/2} d\theta \operatorname{Re}(v\bar{u}) \\ &\quad \longrightarrow |u|^{p-1} \operatorname{Re}(v\bar{u}) = \operatorname{Re}(v|u|^{p-1}\bar{u}), \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n \quad (t \rightarrow 0), \\ &\left| \int_0^1 (\theta|u + tv|^2 + (1 - \theta)|u|^2)^{(p-1)/2} d\theta \operatorname{Re}(v\bar{u}) \right| \\ &\quad \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u||v|, \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n, \quad |t| < 1. \end{aligned}$$

さらに, 条件

$$\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式と (3.6) を用いて,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} (|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u||v| dx &= \int_{\mathbf{R}^n} (|u|^p|v| + |u||v|^p) dx \\ &\leq \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \\ &\leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right). \end{aligned}$$

よって,  $C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u||v| \in L^1(\mathbf{R}^n)$  となる. したがって, ルベーグの収束定理より,

$$I(t) \longrightarrow 2 \int_{\mathbf{R}^n} \operatorname{Re}(v|u|^{p-1}\bar{u}) dx = 2 \operatorname{Re}(v, |u|^{p-1}u) \quad (t \rightarrow 0) \quad (3.9)$$

を得る.

以上 (3.7)–(3.9) より,

$$\begin{aligned}
dS_\omega(u, v) &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbf{R}} \frac{S_\omega(u + tv) - S_\omega(u)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbf{R}} \left( \frac{R(t)}{t} + t \left( \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbf{R}} \frac{R(t)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbf{R}} 2 \operatorname{Re} [(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u) - (v, |u|^{p-1}u)] \\
&= \partial_u S_\omega(u)v + \partial_{\bar{u}} S_\omega(u)\bar{v}, \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n)
\end{aligned}$$

が示せた.

また, 各  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, 作用素  $\partial_u S_\omega(u), \partial_{\bar{u}} S_\omega(u) : H^1(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$  が線形作用素であることは明らか. 有界性については, シュワルツの不等式, 条件

$$\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p+1} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式, および (3.6) を用いて,

$$\begin{aligned}
|\partial_u S_\omega(u)v| &\leq |(\nabla v, \nabla u)| + \omega|(v, u)| + |(v, |u|^{p-1}u)| \\
&\leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \omega \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|v\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \\
&\leq C \left( \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right) \\
&\leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right) \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n).
\end{aligned}$$

同様にして,

$$|\partial_{\bar{u}} S_\omega(u)v| \leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right) \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

ゆえに,  $u$  をとめるごとに  $\partial_u S_\omega(u)$  と  $\partial_{\bar{u}} S_\omega(u)$  は,  $H^1(\mathbf{R}^n)$  から  $\mathbf{C}$  への有界線形作用素である.  $\square$

**定義 3.4.** すべての  $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して,  $dS_\omega(u, v) = 0$  となる  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  を  $S_\omega$  の臨界点といい, このときの  $S_\omega$  の値  $S_\omega(u)$  を臨界値という.

**定義 3.5.**  $n \geq 1$ ,  $1 < p < p^*(n)$  とする.  $w \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が超関数の意味で (3.2) を満たすとき, すなわち

$$(\nabla v, \nabla w) + \omega(v, w) - (v, |w|^{p-1}w) = 0, \quad v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad (3.10)$$

が成立するならば,  $w$  は (3.2) の弱解であるという.

**注意 3.6.**  $1 < p < p^*(n)$  の仮定のもとでは, (3.10) でテスト関数  $v$  の属するクラスを  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  から  $H^1(\mathbf{R}^n)$  に置き換えることができる.

**定理 3.7.**  $n \geq 1$ ,  $1 < p < p^*(n)$  とする.  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が  $S_\omega$  の臨界点であることと,  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が (3.2) の弱解であることは同値である. また,  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, 次の関係が成立する:

$$dS_\omega(u, v) = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n) \iff \partial_u S_\omega(u)v = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

**証明.** 定理 3.3 の  $\partial_u S_\omega(u)v$  の定義より, (3.10) の左辺と  $\partial_u S_\omega(u)v$  は等しいことに注意しておく.

$u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が  $S_\omega$  の臨界点ならば, 定理 3.3 の (3.5) より,

$$dS_\omega(u, v) = 2\operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)v] = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

このとき,  $\partial_u S_\omega(u)$  の線形性により,

$$\operatorname{Im}[\partial_u S_\omega(u)v] = \operatorname{Re}[-i\partial_u S_\omega(u)v] = -\operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)(iv)] = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

このことから,  $u$  は (3.10) を満たし, (3.2) の弱解であることが結論できる.

逆に,  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が (3.2) の弱解ならば, 注意 3.6 の事実と定理 3.3 により,  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  は  $S_\omega$  の臨界点である.  $\square$

(3.2) の弱解がもつ性質をまとめた命題を述べておく.

**命題 3.8.**  $n \geq 1$ ,  $1 < p < p^*(n)$  とする. 関数  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が (3.2) の弱解ならば, 次の (i)(ii) が成立する:

- (i)  $u \in C^2(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ .
- (ii) ある 2 つの正定数  $\eta$  と  $\kappa$  が存在して,

$$|u(x)| \leq \eta e^{-\kappa|x|}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

### 3.3 極値問題

**定義 3.9.**  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  とする. ある正定数  $\varepsilon$  が存在して,

$$S_\omega(v) > S_\omega(u) \quad (0 < \|u - v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon) \tag{3.11}$$

が成立するとき,  $u$  は  $S_\omega$  の極小点であるといい, その値  $S_\omega(u)$  を極小値という. (3.11) において  $S_\omega(v)$  と  $S_\omega(u)$  に関して逆向きの不等式が成立するとき,  $u$  は  $S_\omega$  の極大点であるといい, その値  $S_\omega(u)$  を極大値という. 極小点・極大点と極小値・極大値を総称して, それぞれ極値点と極値とよぶ.

**命題 3.10.**  $n \geq 1$ ,  $1 < p < p^*(n)$  とする.  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が汎関数  $S_\omega$  の極値点ならば,  $\partial_u S_\omega(u) = 0$  である. すなわち, 次が成立する:

$$(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u) - (v, |u|^{p-1}u) = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

**証明.** いま,  $u$  が汎関数  $S_\omega$  の極小点であるとする. このとき,  $\forall v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  と絶対値が十分小さい  $t \in \mathbf{R}$  に対して,

$$\exists \varepsilon > 0; \|u - (u + tv)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} = |t|\|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon$$

が成り立つから, 極小点の定義より,

$$S_\omega(u + tv) - S_\omega(u) > 0$$

である. ここで,  $t > 0$  ととると,

$$\frac{S_\omega(u + tv) - S_\omega(u)}{t} > 0.$$

$t \rightarrow +0$  とすると, 定理 3.3 により,

$$dS_\omega(u, v) \geq 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

一方,  $t < 0$  ととって, 両辺を  $t$  で割り,  $t \rightarrow -0$  とすると,

$$dS_\omega(u, v) \leq 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

よって,

$$dS_\omega(u, v) = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

を得る. したがって, 定理 3.7 から,

$$\partial_u S_\omega(u)v = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

が結論できる.  $u$  が極大点であるときも, 同様にして証明できる. □

次の定理は, 条件付き極値問題を解くときに役立つ定理である.

**定理 3.11.**  $n \geq 1$ ,  $1 < p < p^*(n)$  とし,

$$T(u) = a\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + b\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + c\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

とおく. ただし,  $a, b, c$  は実定数とする.

(i)  $T(u)$  を  $H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$  上の汎関数とみなすと, すべての  $u \in H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$  に対しガトー微分  $dT(u, v)$  ( $v \in H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$ ) が存在し, 次のように表せる:

$$\begin{aligned} dT(u, v) &= \partial_u T(u)v + \partial_{\bar{u}} T(u)\bar{v} \\ &= 2 \operatorname{Re}[\partial_u T(u)v], \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

ここで、各  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して  $\partial_u T(u)$  と  $\partial_{\bar{u}} T(u)$  は、 $H^1(\mathbf{R}^n)$  から  $\mathbf{C}$  への有界線形作用素で次のようなものとする：

$$\begin{aligned}\partial_u T(u)v &= a(\nabla v, \nabla u) + b(v, u) + \frac{c(p+1)}{2}(v, |u|^{p-1}u), \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ \partial_{\bar{u}} T(u)v &= \overline{\partial_u T(u)\bar{v}}, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

(ii) 実数  $\alpha$  に対して、 $H^1(\mathbf{R}^n)$  の部分集合  $K$  を次のようにおく：

$$K = \{v \in H^1(\mathbf{R}^n); T(v) = \alpha\}.$$

もし  $u \in K$  が  $S_\omega$  の  $K$  上の極値点で、 $\partial_u T(u) \neq 0$  ならば、次が成立する：

$$\partial_u S_\omega(u) - \lambda \partial_u T(u) = 0,$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)v]}{\operatorname{Re}[\partial_u T(u)v]}.$$

ただし、 $v$  は  $\operatorname{Re}[\partial_u T(u)v] \neq 0$  となる  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の元とする。

**証明.** (i) の部分については、定理 3.3 と同様にして示せるので、証明は省略する。(ii) を示す。

まず、仮定より  $\partial_u T(u) \neq 0$  であるから、

$$\operatorname{Re}[\partial_u T(u)w] \neq 0$$

となる  $w \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する。そこで、 $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  を任意に 1 つとり、

$$F(t, s) = S_\omega(u + sv + tw),$$

$$G(t, s) = T(u + sv + tw) - \alpha$$

とおく。このとき、定理 3.3 と定理 3.11(i) から、 $F, G \in C^1(\mathbf{R}^2)$  である。さらに、 $F(0, 0) = S_\omega(u)$  に注意すれば、仮定より  $u \in K$  は  $S_\omega$  の  $K$  上の極値点であるから、点  $(s, t) = (0, 0)$  は関数  $F$  を集合

$$\tilde{K} = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2; G(s, t) = 0\}$$

上に制限したときの極値点である。また、

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h, 0) - G(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(u + hw) - T(u)}{h} = dT(u, w) = 2 \operatorname{Re}[\partial_u T(u)w] \neq 0\end{aligned}$$

したがって、通常の 2 変数関数のラグランジュの未定乗数法より、ある実定数  $\lambda$  に対して、

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) - \lambda \frac{\partial G}{\partial s}(0, 0) = 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0, 0) - \lambda \frac{\partial G}{\partial t}(0, 0) = 0 \tag{3.13}$$

を得る。ここで,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(0,0) \neq 0$$

であるから, (3.13) より,

$$\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)}{\frac{\partial G}{\partial t}(0,0)} = \frac{dS_\omega(u,w)}{dT(u,w)} = \frac{\operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)w]}{\operatorname{Re}[\partial_u T(u)w]}$$

となる。また,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0,0) = 2 \operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)v], \quad \frac{\partial G}{\partial s}(0,0) = 2 \operatorname{Re}[\partial_u T(u)v]$$

によって, (3.12) を書き直すと,

$$\operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)v - \lambda \partial_u T(u)v] = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

$\lambda$  は実定数で,  $\partial_u S_\omega(u)$  と  $\partial_u T(u)$  は線形作用素であるので,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}[\partial_u S_\omega(u)v - \lambda \partial_u T(u)v] \\ &= \operatorname{Re}[-i(\partial_u S_\omega(u)v - \lambda \partial_u T(u)v)] \\ &= -\operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)(iv) - \lambda \partial_u T(u)(iv)] \\ &= 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

したがって,

$$\partial_u S_\omega(u)v - \lambda \partial_u T(u)v = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

が結論される。よって, (ii) が証明された。  $\square$

以降の節で必要な対称減少再配分とよばれる関数の性質, および関数空間の定義をまとめる。

**補題 3.12.**  $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  とする。このとき, 次の (3.14)–(3.18) を満たすような  $v^* \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する:

$$v^*(x) \geq 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n, \quad (3.14)$$

$$v^*(x) = v^*(|x|) \quad (\text{球対称}), \quad (3.15)$$

$$|x| \leq |y| \implies v^*(x) \geq v^*(y), \quad (3.16)$$

$$\operatorname{meas}\{x; v^*(x) > t\} = \operatorname{meas}\{x; |v(x)| > t\}, \quad t > 0, \quad (3.17)$$

$$\|\nabla v^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \quad (3.18)$$

ただし,  $\mathbf{R}^n$  の可測集合  $A$  に対して,  $\operatorname{meas} A$  は  $A$  のルベーグ測度を表すものとする。したがって (3.17) より, 特に次が成立する:

$$\|v\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} = \|v^*\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (3.19)$$

**注意 3.13.** (i)  $\mathbf{R}^n$  上の関数  $v(x)$  が  $v(x) = v(|x|)$  であるとき、関数  $v$  は球対称であるという。

(ii) (3.14)–(3.17) を満たすような関数  $v^*$  を  $v$  の対称減少再配分という。

**定義 3.14.**  $m \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  に対して、関数空間  $H_r^m(\mathbf{R}^n)$  と  $L_r^q(\mathbf{R}^n)$  を次のように定める：

$$\begin{aligned} H_r^m(\mathbf{R}^n) &= \{v \in H^m(\mathbf{R}^n); v(x) = v(|x|)\}, \\ L_r^q(\mathbf{R}^n) &= \{v \in L^q(\mathbf{R}^n); v(x) = v(|x|)\}. \end{aligned}$$

**補題 3.15.**  $n \geq 2$  とし、 $v \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  と仮定する。このとき、次の不等式が成立する：

$$\|v\|_{L^\infty(|x|>R)} \leq CR^{-(n-1)/2} \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad R > 0.$$

ただし、正定数  $C$  は  $R$  と  $v$  には依存しない。

**証明.**  $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  かつ  $v(x) = v(|x|)$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} |v(r)|^2 &= - \int_r^\infty \frac{d}{dr'} |v(r')|^2 dr' \\ &= -2 \int_r^\infty \operatorname{Re} \left[ v(r') \frac{d}{dr'} \bar{v}(r') \right] dr' \end{aligned}$$

$v(r') = u_1 + iu_2$ ,  $\bar{v}(r') = u_1 - iu_2$  とおくと、

$$\begin{aligned} \dots &= 2 \left| \int_r^\infty \left( u_1 \frac{du_1}{dr'} + u_2 \frac{du_2}{dr'} \right) dr' \right| \\ &\leq 2 \left[ \left( \int_r^\infty |u_1|^2 dr' \right)^{1/2} \left( \int_r^\infty \left| \frac{du_1}{dr'} \right|^2 dr' \right)^{1/2} + \left( \int_r^\infty |u_2|^2 dr' \right)^{1/2} \left( \int_r^\infty \left| \frac{du_2}{dr'} \right|^2 dr' \right)^{1/2} \right] \\ &\leq C \left( \int_r^\infty |v(r')|^2 dr' \right)^{1/2} \left( \int_r^\infty \left| \frac{d}{dr'} v(r') \right|^2 dr' \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ここで、 $1 = r'^{n-1} r'^{-(n-1)}$  と考えると、 $r < r' < \infty$  より  $1 < r'^{n-1} r'^{-(n-1)}$  であるから、

$$\begin{aligned} \dots &\leq Cr^{-(n-1)} \left( \int_r^\infty |v(r')|^2 r'^{(n-1)} dr' \right)^{1/2} \left( \int_r^\infty \left| \frac{d}{dr'} v(r') \right|^2 r'^{(n-1)} dr' \right)^{1/2} \\ &\leq Cr^{-(n-1)} \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} |v(r)| &\leq Cr^{-(n-1)/2} \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1/2} \\ &\leq CR^{-(n-1)/2} \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1/2} \\ &\leq CR^{-(n-1)/2} \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad r > R > 0. \end{aligned}$$

$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  で稠密であるので、このことから証明すべき不等式が結論される。  $\square$



**補題 3.16.**  $n \geq 2$  とし,  $2 < q < p^*(n) + 1$  と仮定する. このとき,  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  から  $L_r^q(\mathbf{R}^n)$  への埋め込みはコンパクトである. すなわち,  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の任意の有界列  $\{v_m\}$  から適当に部分列  $\{v_{m_k}\}$  を選び, その列  $\{v_{m_k}\}$  が  $L_r^q(\mathbf{R}^n)$  における収束列となるようにできる.

**証明.**  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の任意の有界列を  $\{v_m\}$  とし,

$$B_k = \{x \in \mathbf{R}^n; |x| < k\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく. このとき, 関数  $\varphi_1(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  を

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1), \\ 0 & (|x| \geq 3/2) \end{cases}$$

であるようなものとすれば,  $\varphi_1 v_m \in H_0^1(B_2)$  となる. また,

$$\|\varphi_1 v_m\|_{H^1(B_2)} \leq C (\|v_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla v_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)})$$

であるから,  $\{\varphi_1 v_m\}$  は  $H_0^1(B_2)$  における有界列となる. したがって, レリッヒのコンパクト性定理より,  $L^2(B_2)$  で収束列となるような部分列  $\{\varphi_1 v_{m_k}\}$  がとれる. 次に, ソボレフの埋蔵定理を用いれば,  $\{\varphi_1 v_{m_k}\} \subset H_0^1(B_2)$  であることと,  $\{\varphi_1 v_{m_k}\}$  が  $L^2(B_2)$  における収束列であることにより,

$$\begin{aligned} & \|\varphi_1 v_{m_k} - \varphi_1 v_{m_l}\|_{L^q(B_2)} \\ & \leq C \|\varphi_1 v_{m_k} - \varphi_1 v_{m_l}\|_{L^2(B_2)}^{1-a} \|\nabla(\varphi_1 v_{m_k} - \varphi_1 v_{m_l})\|_{L^2(B_2)}^a \longrightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

したがって,  $\{\varphi_1 v_{m_k}\}$  は  $L^q(B_2)$  のコーシー列であり, 完備性により収束列であることがわかる. さらに,

$$\|\varphi_1 v_{m_k} - \varphi_1 v_{m_l}\|_{L^q(B_1)} \leq \|\varphi_1 v_{m_k} - \varphi_1 v_{m_l}\|_{L^q(B_2)}$$

であるから,  $\{\varphi_1 v_{m_k}\} = \{v_{m_k}\}(x \in B_1)$  は  $L^q(B_1)$  における収束列となる.

以上のようにして,  $\{v_m\}$  から,  $L^q(B_1)$  で収束列となるような部分列  $\{v_{1m}\}$  がとれる. 同様の操作を行えば, ふたたびレリッヒのコンパクト性定理とソボレフの埋蔵定理を用いて,  $\{v_{1m}\}$  から  $L^q(B_2)$  で収束列となるような部分列  $\{v_{2m}\}$  がとれる. この操作を繰り返すことにより,

$$\begin{aligned} & \{v_{km}\}; L^q(B_k) \text{ における収束列,} \\ & \{v_m\} \supset \{v_{1m}\} \supset \cdots \supset \{v_{jm}\} \supset \cdots \end{aligned}$$

となる部分列  $\{v_{km}\}$  が各  $k \in \mathbf{N}$  に対してとれる. ここで対角論法を用いる. 各  $k \in \mathbf{N}$  に対して, 部分列  $\{v_{km}\}$  の元  $\{v_{kk}\}$  をとり出して  $\tilde{v}_k = v_{kk}$  とおき,  $\{v_m\}$  の部分列  $\{\tilde{v}_k\}$  をつくる. このようにしてつくられた部分列  $\{\tilde{v}_k\}$  は各  $j \in \mathbf{N}$  に対して  $L^q(B_j)$  での収束列となっている.

次に, こうして構成された  $\{v_m\}$  の部分列  $\{\tilde{v}_k\}$  が  $L_r^q(\mathbf{R}^n)$  でコーシー列となっていることを示

す. 仮定より  $\{\tilde{v}_k\}$  は  $H^1_r(\mathbf{R}^n)$  の有界列であるので, 条件  $1/\infty + 1 = 1$  のもとでヘルダーの不等式と, 補題 3.15 を用いて次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}_k\|_{L^q(|x|>R)} &= \left( \int_{|x|>R} |\tilde{v}_k|^{q-2} |\tilde{v}_k|^2 dx \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \|\tilde{v}_k\|_{L^\infty(|x|>R)}^{q-2} \|\tilde{v}_k\|_{L^2(|x|>R)}^2 \right)^{1/q} \\ &= \|\tilde{v}_k\|_{L^\infty(|x|>R)}^{(q-2)/q} \|\tilde{v}_k\|_{L^2(|x|>R)}^{2/q} \\ &\leq CR^{-\frac{(n-1)(q-2)}{2q}} \|\tilde{v}_k\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{(q-2)/q} \|\tilde{v}_k\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{2/q} \\ &= CR^{-\frac{(n-1)(q-2)}{2q}} \|\tilde{v}_k\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad R > 0.\end{aligned}$$

よって, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 十分大きな  $R > 0$  をとれば, 次の不等式が成立する:

$$\|\tilde{v}_k\|_{L^q(|x|>R)} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

一方,  $j > R$  となるような  $j \in \mathbf{N}$  に対して列  $\{\tilde{v}_k\}$  は  $L^q(B_j)$  で収束列であるから, 次の関係が成立するような  $N \in \mathbf{N}$  が存在する:

$$\|\tilde{v}_k - \tilde{v}_l\|_{L^q(B_j)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k, l \geq N).$$

したがって,

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}_k - \tilde{v}_l\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} &= \|\tilde{v}_k - \tilde{v}_l\|_{L^q(B_j)} + \|\tilde{v}_k - \tilde{v}_l\|_{L^q(|x|>j)} \\ &\leq \|\tilde{v}_k - \tilde{v}_l\|_{L^q(B_j)} + \|\tilde{v}_k\|_{L^q(|x|>j)} + \|\tilde{v}_l\|_{L^q(|x|>j)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad (k, l \geq N).\end{aligned}$$

$\varepsilon$  は任意の正数であるので, この不等式は列  $\{\tilde{v}_k\}$  が  $L^q(\mathbf{R}^n)$  でのコーシー列であることを示している. ゆえに, 完備性により列  $\{\tilde{v}_k\}$  は  $L^q(\mathbf{R}^n)$  における収束列である.  $\square$

### 3.4 定在波解の存在と安定性 ( $1 < p < 1 + 4/n$ の場合)

$\omega > 0$  とする. 任意の  $\alpha > 0$  に対して, 次のような最小化問題を考える:

$$b_\alpha = \inf_{u \in K_\alpha} S_\omega(u). \quad (3.20)$$

ただし,

$$K_\alpha = \{u \in H^1(\mathbf{R}^n); \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}\}, \quad \alpha > 0.$$

$b_\alpha$  が有限な値で  $b_\alpha = S_\omega(u)$  となる  $u \in K_\alpha$  が存在するとき,  $b_\alpha$  と  $u$  をそれぞれ最小化問題 (3.20) の最小値と解という. この最小化問題を考えることは, 汎関数  $S_\omega$  の定義式 (3.4) から次の最小化問題を考えることと同じである:

$$c_\alpha = \inf_{u \in K_\alpha} E(u). \quad (3.21)$$

ただし,  $E$  は方程式 (3.1) のエネルギー汎関数である. このとき,

$$b_\alpha = 2c_\alpha + \omega\alpha$$

という関係が成立する. 最小化問題 (3.21) で最小値  $c_\alpha$  を達成する  $w \in K_\alpha$  が存在すれば, それが方程式 (3.2) の解の候補となる.

方程式 (3.2) の解が存在することを証明するために, まず次の補題を準備する. この補題は, 非常に重要である. 成立を認めてしまえば, 方程式 (3.2) の解の存在, さらに定在波解の安定性を示すことができる.

**補題 3.17.**  $n \geq 2$ ,  $1 < p < 1 + 4/n$  とする. 任意の  $\alpha > 0$  に対して,  $c_\alpha$  は有限な負の値をとると仮定する. さらに, 正定数  $\alpha$  と  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の列  $\{u_m\}$  に対して, 次が満たされているとする:

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\longrightarrow \sqrt{\alpha} \quad (m \rightarrow \infty), \\ E(u_m) &\longrightarrow c_\alpha \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

このとき, 列  $\{u_m\}$  のある部分列  $\{u_{m_k}\}$  と  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の元  $w$  が存在して, 次が成立する:

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\longrightarrow w \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n) \quad (m_k \rightarrow \infty), \\ c_\alpha &= E(w), \quad \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

さらに, ある  $\omega > 0$  に対して, 関数  $w$  は方程式 (3.2) の弱解となっている.

補題 3.17 の証明で必要となる次の補題から示す.

**補題 3.18.**  $n \geq 2$ ,  $1 < p < 1 + 4/n$  とする. 正数  $\alpha$  に対して,  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の列  $\{u_m\}$  は,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$$

を満たすものと仮定する. このとき,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) \geq c_\alpha$$

が成立する.

**証明.**  $\liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) = +\infty$  のときは明らかに成立するので,  $\liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) < +\infty$  として背理法で示す.  $\liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq 1} E(u_{m+n})$  に注意して,

$$\inf_{n \geq 1} E(u_{m+n}) = \alpha_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = l$$

とおく. もし補題 3.18 が成立しないとすると,  $l < c_\alpha$  であるから, ある正定数  $\varepsilon_0$  が存在して,

$$l + 2\varepsilon_0 < c_\alpha$$

が成り立つ。一方、 $\alpha_m$  は単調増加であるから、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $m$  を十分大にとれば、

$$l - \varepsilon < \alpha_m \leq l.$$

さらに、 $\alpha_m = \inf_{n \geq 1} E(u_{m+n})$  であることから、この  $\varepsilon$  に対して、

$$\exists n \in \mathbf{N}; E(u_{m+n}) < \alpha_m + \varepsilon.$$

したがって、

$$c_\alpha > c_\alpha - \varepsilon_0 > l + \varepsilon_0 \geq \alpha_m + \varepsilon_0 > E(u_{m+n})$$

であり、

$$\exists \varepsilon_0, \exists \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}; E(u_{m_k}) \leq c_\alpha - \varepsilon_0 \quad (3.22)$$

が成り立つとしてよい。ここで、

$$u_{m_k}^\lambda = (1 + \lambda)u_{m_k}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{\alpha}}{\|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}} - 1$$

とおく、このとき、

$$\|u_{m_k}^\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \alpha$$

となり、 $u_{m_k}^\lambda \in K_\alpha$  であることに注意する。

一方、 $p$  の仮定より、ソボレフの埋蔵定理を用いて、

$$\|u_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \leq C \|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p\}/2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{n(p-1)/2}$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned} E(u_{m_k}) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - C \|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p\}/2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{n(p-1)/2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

仮定から  $n(p-1)/2 < 2$  となるので、(3.22) と上の不等式より列  $\{\|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\}$  は有界となることがわかる。よって、列  $\{u_{m_k}\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  で有界である。ゆえに、

$$\|u_{m_k} - u_{m_k}^\lambda\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} = \left| \frac{\sqrt{\alpha}}{\|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}} - 1 \right| \|u_{m_k}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty)$$

を得る。したがって、自然数  $N$  を適当に選べば、(3.22) より、

$$E(u_{m_k}^\lambda) \leq E(u_{m_k}) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \leq c_\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \quad (m_k \geq N).$$

これは、 $c_\alpha$  の定義式に矛盾する。したがって補題 3.18 が証明された。  $\square$

補題 3.18 を用いて, 補題 3.17 を証明する.

**補題 3.17 の証明.** 証明を 4 つのステップに分ける.

(ステップ 1) 列  $\{\|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\}$  は有界であり,  $p$  の仮定より  $n(p-1)/2 < 2$  であることと (3.23) から, 列  $\{u_m\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  における有界列であることがわかる. よって, 補題 3.16 を用いると,

$$\exists\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}, \exists w \in L^{p+1}(\mathbf{R}^n); u_{m_k} \longrightarrow w \text{ in } L^{p+1}(\mathbf{R}^n)$$

がいえる. さらに,  $\{u_{m_k}\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  における有界列であるから,

$$\exists\{u_{m_k'}\} \subset \{u_{m_k}\}, \exists \tilde{w} \in H_r^1(\mathbf{R}^n); u_{m_k'} \longrightarrow \tilde{w} \text{ weakly in } H_r^1(\mathbf{R}^n).$$

このとき,  $u_{m_k'} \longrightarrow w$  weakly in  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  でもあるから,  $w = \tilde{w}$  である. ゆえに, 改めて次が成立するようにできる:

$$\begin{aligned} \exists\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}, \exists w \in H_r^1(\mathbf{R}^n); \\ u_{m_k} \longrightarrow w \text{ weakly in } H_r^1(\mathbf{R}^n), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$u_{m_k} \longrightarrow w \text{ in } L^{p+1}(\mathbf{R}^n). \quad (3.25)$$

(3.24) より, 次も成り立つ:

$$\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}, \quad (3.26)$$

$$\|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow \beta \quad (\beta \geq 0). \quad (3.27)$$

ここで,  $w \neq 0$  であることを背理法によって示す. もし  $w = 0$  とすると, (3.25) と (3.27) より,

$$\begin{aligned} E(u_{m_k}) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = \frac{1}{2} \beta^2 \quad (m_k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

一方,  $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$  であるから, 仮定より,

$$E(u_{m_k}) \longrightarrow c_\alpha \quad (m_k \rightarrow \infty). \quad (3.28)$$

したがって,

$$c_\alpha = \frac{1}{2} \beta^2 \geq 0$$

でなければならない. これは,  $c_\alpha$  が負の値をとるという仮定に矛盾する. したがって,  $w \neq 0$  が示せた.

(ステップ 2)  $\gamma = \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$  とおくと, (3.26) より  $\gamma \leq \alpha$  である. このステップでは,  $\gamma = \alpha$

かつ  $u_{m_k} \rightarrow w$  in  $L^2(\mathbf{R}^n)$ であることを示す. まず,  $\gamma = \alpha$ を背理法によって示す.  $\gamma < \alpha$ と仮定する. このとき,

$$\tilde{u}_{m_k} = u_{m_k} - w$$

とおくと, (3.24) と (3.25) より,

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{m_k} &\longrightarrow 0 \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n), \\ \tilde{u}_{m_k} &\longrightarrow 0 \quad \text{in } L^{p+1}(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}(\tilde{u}_{m_k}, w) &\longrightarrow (0, w) = 0 \quad (m_k \rightarrow \infty), \\ \|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|\tilde{u}_{m_k} + w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &= \|\tilde{u}_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 2\text{Re}(\tilde{u}_{m_k}, w) \\ &\longrightarrow \alpha \quad (m_k \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

であるから,

$$\|\tilde{u}_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \longrightarrow \alpha - \gamma \quad (m_k \rightarrow \infty) \quad (3.29)$$

を得る. ここで, 次のような事実に注意しておく. もし,  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して,

$$u_\lambda(x) = \lambda^\eta u(\lambda x), \quad \lambda > 0, \quad \eta \in \mathbf{R} \quad (3.30)$$

とおくと, 次が成立する:

$$\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \lambda^{2\eta-n} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \quad (3.31)$$

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \lambda^{2\eta-n+2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \quad (3.32)$$

$$\|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = \lambda^{\eta(p+1)-n} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}. \quad (3.33)$$

いま, (3.30) で  $\eta = 2/(p-1)$  とおくと, (3.31)–(3.33) より,  $\lambda > 0$  に対して,

$$\begin{aligned}\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^{\frac{4-n(p-1)}{p-1}} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ E(u_\lambda) &= \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p}{p-1}} E(u).\end{aligned}$$

ゆえに,  $0 < \gamma < \alpha$  なる  $\gamma$  に対して,

$$\lambda = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{p-1}{4-n(p-1)}}$$

とおくと,

$$\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \frac{\gamma}{\alpha} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \quad E(u_\lambda) = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{n+2-(n-2)p}{4-n(p-1)}} E(u)$$

であるから、 $c_\alpha$  の定義式より

$$c_\gamma = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{n+2-(n-2)p}{4-n(p-1)}} c_\alpha$$

が結論される．ここで、 $\gamma$  を  $\alpha - \gamma$  で置き換えると、

$$c_{\alpha-\gamma} = \left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{n+2-(n-2)p}{4-n(p-1)}} c_\alpha$$

を得る．もし、 $q > 1$  ならば、 $s > 0$  に対して  $s^q$  は下に凸な関数であるので、

$$\theta^q + (1-\theta)^q < 1 \quad (0 < \theta < 1)$$

が成立することに注意すると、 $p$  の仮定より

$$\frac{n+2-(n-2)p}{4-n(p-1)} > 1$$

であることと、仮定より  $c_\alpha < 0$  であることから、

$$c_\gamma + c_{\alpha-\gamma} = \left[ \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{n+2-(n-2)p}{4-n(p-1)}} + \left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{n+2-(n-2)p}{4-n(p-1)}} \right] c_\alpha > c_\alpha \quad (0 < \gamma < \alpha). \quad (3.34)$$

一方、

$$\begin{aligned} E(u_{m_k}) &= E(\tilde{u}_{m_k} + w) \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \operatorname{Re}(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) + \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \|\tilde{u}_{m_k} + w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= E(\tilde{u}_{m_k}) + E(w) + \operatorname{Re}(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \left[ \|\tilde{u}_{m_k} + w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} - \|\tilde{u}_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} - \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \end{aligned}$$

と変形して、

$$\begin{aligned} E(u_{m_k}) &= E(\tilde{u}_{m_k}) + E(w) + A(\tilde{u}_{m_k}, w), \\ A(\tilde{u}_{m_k}, w) &= \operatorname{Re}(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \left[ \|\tilde{u}_{m_k} + w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} - \|\tilde{u}_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} - \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

とする．このとき、 $(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) \rightarrow 0$  ( $m_k \rightarrow \infty$ ) であるから、次が成立する：

$$A(\tilde{u}_{m_k}, w) \rightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty).$$

この事実、および (3.29) と補題 3.18 より、(3.35) の両辺において、 $m_k \rightarrow \infty$  のときの下極限をとると、

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \liminf_{m_k \rightarrow \infty} E(u_{m_k}) \\ &\geq \liminf_{m_k \rightarrow \infty} E(\tilde{u}_{m_k}) + E(w) + \liminf_{m_k \rightarrow \infty} A(\tilde{u}_{m_k}, w) \\ &\geq c_{\alpha-\gamma} + c_\gamma \end{aligned}$$

を得る。これは、(3.34) に矛盾する。したがって、 $\gamma = \alpha$  と結論される。さらに、このことと (3.24) より、

$$\|u_{m_k} - w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - 2\operatorname{Re}(u_{m_k}, w) + \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \longrightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty).$$

ゆえに、

$$u_{m_k} \longrightarrow w \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^n).$$

(ステップ 3) このステップでは、 $c_\alpha = E(w)$ 、 $u_{m_k} \longrightarrow w$  in  $H^1(\mathbf{R}^n)$  であることを証明する。(3.24), (3.25), (3.28) から、

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \lim_{m_k \rightarrow \infty} E(u_{m_k}) \\ &\geq \frac{1}{2} \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \|u_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = E(w). \end{aligned}$$

ところで、ステップ 2 より  $\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$  であるので、 $c_\alpha$  の定義式より、

$$c_\alpha = E(w)$$

でなければならない。これより、ふたたび (3.25) と (3.28) から次を得る：

$$\begin{aligned} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= 2 \lim_{m_k \rightarrow \infty} \left[ E(u_{m_k}) + \frac{1}{p+1} \|u_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= 2 \left( c_\alpha + \frac{1}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right) \\ &= 2 \left( E(w) + \frac{1}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right) = \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

したがって、(3.24) から、

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{m_k} - \nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - 2\operatorname{Re}(\nabla u_{m_k}, \nabla w) + \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &\longrightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

よって、ステップ 2 で得た  $\|\nabla u_{m_k} - \nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \longrightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty)$  と合わせて

$$u_{m_k} \longrightarrow w \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n)$$

が結論される。

(ステップ 4) ある  $\omega > 0$  に対して、関数  $w$  が方程式 (3.2) の弱解となっていることを示す。そのために、汎関数  $S_\omega$  を汎関数  $E$  で置き換え、 $a = c = 0$  かつ  $b = 1$  として、定理 3.11(ii) を適用する。つまり、

$$\begin{aligned} T(u) &= \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ K &= \{v \in H^1(\mathbf{R}^n); T(v) = \alpha\} \end{aligned}$$



とする。このとき、

$$\begin{aligned}\partial_u T(u)v &= (v, u), \\ \partial_u E(u)v &= \frac{1}{2}(\nabla v, \nabla u) - \frac{1}{2}(v, |u|^{p-1}u)\end{aligned}$$

である。これまでの議論から、 $w \in H^1(\mathbf{R}^n)$  は  $w \in K$  で  $E$  の  $K$  上の極値点であり、 $\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \alpha \neq 0$  である。よって、

$$\begin{aligned}\partial_w E(w)v - \lambda \partial_w T(w)v &= 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ \lambda &= \frac{\operatorname{Re}[\partial_w E(w)w]}{\operatorname{Re}[\partial_w T(w)w]}.\end{aligned}$$

したがって、次を得る：

$$\begin{aligned}(\nabla v, \nabla w) - (v, |w|^{p-1}w) - 2\lambda(v, w) &= 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ 2\lambda &= \frac{\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}}{\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2}.\end{aligned}$$

ところで、

$$0 > c_\alpha = E(w) = \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1}\|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}$$

であるから、

$$\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < \frac{1-p}{p+1}\|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0.$$

よって、 $\lambda < 0$  でなければならない。そこで、 $\omega = -2\lambda$  とおくと、関数  $w$  は方程式

$$(\nabla v, \nabla w) + \omega(v, w) - (v, |w|^{p-1}w) = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

を満たす。これで、補題 3.17 の証明はすべて完結した。  $\square$

**定理 3.19.**  $n \geq 2$  かつ  $1 < p < 1 + 4/n$  とする。任意の  $\alpha > 0$  に対して、 $0 > c_\alpha > -\infty$  であり、 $c_\alpha$  を達成する  $w \in K_\alpha \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する。この関数  $w$  は、ある  $\omega > 0$  に対して方程式 (3.2) の弱解となっている。

**証明.** 最初に、 $c_\alpha$  が有限な負の値となることを示す。

$u \in K_\alpha$  であるように  $u$  を選び、(3.30) で  $\eta = n/2$  とおくと、任意の  $\lambda > 0$  に対して、

$$\begin{aligned}E(u_\lambda) &= \lambda^2 \left[ \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{\lambda^{\frac{n}{2}(p-1)-2}}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right], \\ \|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \alpha\end{aligned}$$

を得る。仮定より、 $p < 1 + 4/n$  であるので、 $\lambda$  を

$$0 < \lambda < \left( \frac{2}{p+1} \frac{\|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}}{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2} \right)^{1/\{2-\frac{n}{2}(p-1)\}}$$

ととれば、 $u_\lambda \in K_\alpha$  かつ  $E(u_\lambda) < 0$  となる。したがって、 $c_\alpha < 0$  である。

一方、 $p$  の仮定より  $n(p-1)/2 < 2$  であることと (3.23) から、次の関係が結論される：

$$0 > c_\alpha \geq \inf_{s>0} \left[ \frac{1}{2} s^2 - C\alpha^{\{n+2-(n-2)p\}/4} s^{\{n(p-1)\}/2} \right] > -\infty.$$

ゆえに、 $c_\alpha$  は有限な負の値となる。

次に、後半の主張を示す。 $c_\alpha$  の定義式より、 $K_\alpha$  の元の列  $\{u_m\}$  で、

$$\begin{aligned} E(u_m) &\longrightarrow c_\alpha \quad (m \rightarrow \infty), \\ c_\alpha &\leq E(u_m) \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

を満たすものがとれる。列  $\{u_m\}$  の各元の対称減少再配分  $u_m^*$  を考えると、補題 3.12 より、

$$\|u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$$

であるから、

$$\{u_m^*\} \subset K_\alpha \cap H_r^1(\mathbf{R}^n).$$

また、

$$\begin{aligned} c_\alpha &\leq E(u_m^*) = \frac{1}{2} \|\nabla u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_m^*\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_m\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= E(u_m) \end{aligned}$$

であるから、

$$E(u_m^*) \longrightarrow c_\alpha \quad (m \rightarrow \infty).$$

ゆえに、列  $\{u_m^*\}$  は補題 3.17 の仮定をすべて満たすので、補題 3.17 より、列  $\{u_m^*\}$  の部分列  $\{u_{m_k}^*\}$  と  $w \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在して次が成立するようにできる：

$$\begin{aligned} u_{m_k}^* &\longrightarrow w \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n) \quad (m_k \rightarrow \infty), \\ c_\alpha &= E(w), \quad \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

すなわち、 $c_\alpha$  を達成する  $w \in K_\alpha \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する。さらに、補題 3.17 の後半より、ある  $\omega > 0$  に対して、関数  $w \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  は方程式 (3.2) の弱解となる。□

ここで、 $\omega > 0$  を 1 つ固定したときの方程式 (3.2) の解の一意性の問題について、少しだけまとめしておく。

**注意 3.20.** 関数  $w \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  を定理 3.19 で与えられる, ある  $\omega > 0$  に対する方程式 (3.2) の弱解とする. このとき, 同じく定理 3.19 で与えられる方程式 (3.2) の弱解  $v \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  で,  $\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$  を満たすものは, 同じ  $\omega > 0$  に対する方程式 (3.2) の弱解となる. すなわち, 次のように表される:

$$v = e^{i\theta} w, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

このことは, Kwong によって与えられた「方程式  $\Delta u - u + u^p = 0$  in  $\mathbf{R}^n$  ( $p > 1$ ) の解  $u$  で  $u \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  かつ  $u > 0$  であるものは, 存在すれば一意である (文献 [9] 参照)」を用いて, 次のように説明ができる.

いま,  $\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|\tilde{w}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$  を満たす  $w, \tilde{w}$  をそれぞれ次の楕円型方程式の弱解であるとし,  $\omega \neq \tilde{\omega}$  を仮定する:

$$\begin{aligned} -\Delta w + \omega w - |w|^{p-1} w &= 0, \\ -\Delta \tilde{w} + \tilde{\omega} \tilde{w} - |\tilde{w}|^{p-1} \tilde{w} &= 0. \end{aligned}$$

これまでの議論より,  $w \geq 0, \tilde{w} \geq 0$  であるから, これらは,

$$\begin{aligned} -\Delta w + \omega w - w^p &= 0, \\ -\Delta \tilde{w} + \tilde{\omega} \tilde{w} - \tilde{w}^p &= 0 \end{aligned}$$

としてよい. また, 命題 3.8 によって  $w, \tilde{w} \in C^2(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$  であることがわかっている. ここで, スケール変換により  $w, \tilde{w}$  の係数を 1 とする方程式への書き換えを考える.

$$w_\lambda(x) = \lambda^{2/(p-1)} w(\lambda x), \quad \lambda > 0$$

とおけば,

$$\Delta w_\lambda(x) = \lambda^{2/(p-1)+2} (\Delta w)(\lambda x), \quad w_\lambda^p = \lambda^{2/(p-1)+2} (w(\lambda x))^p$$

であるから,  $w_\lambda$  は方程式

$$-\Delta w_\lambda + \lambda^2 \omega w_\lambda - w_\lambda^p = 0$$

を満たす. よって,  $u = w_\lambda$  ( $\lambda = \omega^{-1/2}$ ),  $\tilde{u} = \tilde{w}_\lambda$  ( $\lambda = \tilde{\omega}^{-1/2}$ ) とおけば, 次の方程式を得る:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u - u^p &= 0, \\ -\Delta \tilde{u} + \tilde{u} - \tilde{u}^p &= 0. \end{aligned}$$

このとき,  $u, \tilde{u} \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$ ,  $u, \tilde{u} \geq 0$  であることは明らかである. さらに  $u, \tilde{u} \in C^2(\mathbf{R}^n)$  であることから, 楕円型方程式に特有の強最大値原理を用いて,

$$u > 0, \quad \tilde{u} > 0$$

であることがわかる. したがって, Kwong による解の一意性定理より  $u = \tilde{u}$  が従う. ところが,  $\omega \neq \tilde{\omega}$  を仮定しているから,

$$\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \neq \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

となり矛盾する. ゆえに  $\omega = \tilde{\omega}$  である.

解の安定性を調べる前に言葉をいくつか定義しておく.

関数  $w \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が方程式 (3.2) の弱解であるとき, 次の集合  $G$  に含まれるような方程式 (3.2) の弱解  $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  は方程式 (3.2) の基底状態解とよばれる.

$$G = \{v \in H^1(\mathbf{R}^n); v(x) = e^{i\theta} w(x+a), \theta \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^n\}$$

定理 3.19 によって与えられた方程式 (3.2) の解は基底状態解であることが知られている.

**定義 3.21.** (i) 定常方程式 (3.2) の基底状態解  $w$  から, (3.3) によってつくられる発展方程式 (3.1) の定在波解  $v$  を方程式 (3.1) の基底状態解という.

(ii) 方程式 (3.1) の定在波解  $v$  が安定であるとは, 次が成立するときという. すなわち, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある  $\delta > 0$  が存在し,

$$\begin{aligned} u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n), \quad \|u_0 - v(\cdot, 0)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \delta \\ \implies \inf_{\theta \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^n} \|u(\cdot, t) - e^{i\theta} v(\cdot + y, t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon, \quad t > 0 \end{aligned}$$

が満たされる. ただし, 関数  $u(x, t)$  は, 初期時刻  $t = 0$  で初期条件  $u(x, 0) = u_0(x)$  を満たす方程式 (3.1) の解である. 定在波解  $v$  が安定でないとき, 不安定であるという.

(3.1) の基底状態解の安定性を考えるとき, この定義の意味での安定性を示すのは証明がやや複雑になる. そこで, ここでは, 基底状態解が各  $t$  を固定するごとに球対称となっていることに着目し, 考える空間を  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  に制限した場合の次の安定性の定義を採用する.

**定義 3.22.** 方程式 (3.1) の基底状態解  $v$  が安定であるとは, 次が成立しているときという. すなわち, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある  $\delta > 0$  が存在し,

$$\begin{aligned} u_0 \in H_r^1(\mathbf{R}^n), \quad \|u_0 - v(0)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \delta \\ \implies \inf_{\theta \in \mathbf{R}} \|u(t) - e^{i\theta} v(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon, \quad t > 0 \end{aligned}$$

が満たされる. ただし, 関数  $u(x, t)$  は, 初期時刻  $t = 0$  で初期条件  $u(x, 0) = u_0(x)$  を満たす方程式 (3.1) の解である.

**注意 3.23.** ラプラシアン  $\Delta$  は回転不変な偏微分作用素であるので、方程式 (3.1) の解  $u(x, t)$  を  $x$  変数について回転させてもまた (3.1) の解となる。したがって、もし初期値  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  が球対称ならば、初期値問題の解の一意性より、(3.1) の解  $u(x, t)$  も各  $t$  に対して球対称となる。

**定理 3.24.**  $n \geq 2$ ,  $1 < p < 1 + 4/n$ ,  $\omega > 0$  とする。このとき、方程式 (3.1) の基底状態解  $v$  は、定義 3.22 の意味で安定である。

**証明.** 背理法で証明する。基底状態解  $v$  が定義 3.22 の意味では安定でないとすると、ある正定数  $\varepsilon_0$ , 正数の列  $\{t_k\}$  そして  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の列  $\{u_{0k}\}$  が存在して、 $k \in \mathbf{N}$  に対して次が成立する:

$$\|u_{0k} - v(0)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \frac{1}{k}, \quad (3.36)$$

$$\inf_{\theta \in \mathbf{R}} \|u_k(t_k) - e^{i\theta} v(t_k)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \geq \varepsilon_0. \quad (3.37)$$

ただし、 $u_k$  は初期時刻  $t = 0$  で初期条件  $u_k(0) = u_{0k}$  を満たすような方程式 (3.1) の解とする ( $u_k$  は、注意 3.23 より  $x$  変数に関して球対称である)。定理 2.13 より、 $u_k(t)$  は  $0 \leq t < \infty$  上で存在し、

$$\begin{aligned} \|u_k(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &= \|u_{0k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \\ E(u_k(t)) &= E(u_{0k}). \end{aligned}$$

さらに、 $\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \alpha$  とおくと、この  $\alpha$  に対して、定理 3.19 より、

$$0 > c_\alpha > -\infty. \quad (3.38)$$

また、(3.36) およびソボレフの埋蔵定理から次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \|u_{0k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\longrightarrow \|v(0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha} \quad (k \rightarrow \infty), \\ \|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\longrightarrow \|\nabla v(0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \quad (k \rightarrow \infty), \\ \|u_{0k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} &\longrightarrow \|v(0)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.39)$$

よって、

$$E(u_{0k}) \longrightarrow E(v(0)) = E(w) = c_\alpha \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.40)$$

ただし、 $w$  は (3.3) によって  $v$  をつくる (3.2) の弱解。つまり、 $v(x, t) = e^{i\omega t} w(x)$  である。(3.39) と (3.40) より、 $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の列  $\{u_k(t_k)\}$  に対して、

$$\begin{aligned} \|u_k(t_k)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\longrightarrow \sqrt{\alpha} \quad (k \rightarrow \infty), \\ E(u_k(t_k)) &\longrightarrow c_\alpha \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である．このことと (3.38) より，補題 3.17 を列  $\{u_k(t_k)\}$  に対して適用すれば，列  $\{u_k(t_k)\}$  の部分列  $\{u_{k_l}(t_{k_l})\}$  と  $\tilde{w} \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在して，

$$\begin{aligned} u_{k_l} &\longrightarrow \tilde{w} \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n) \quad (k_l \rightarrow \infty), \\ c_\alpha &= E(\tilde{w}), \quad \|\tilde{w}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

が満たされる．このとき， $\|\tilde{w}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$  であるから注意 3.20 より，

$$\tilde{w} = e^{i\theta} w$$

と表されることがわかる．

$$\forall \varepsilon > 0, \exists L \in \mathbf{N}; \|u_{k_l} - \tilde{w}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon \quad (l \geq L)$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} \|u_{k_l}(t_{k_l}) - e^{i\theta} v(t_{k_l})\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} &= \|u_{k_l}(t_{k_l}) - e^{i(\theta+\omega t_{k_l})} w\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq \|u_{k_l}(t_{k_l}) - \tilde{w}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|\tilde{w} - e^{i(\theta+\omega t_{k_l})} w\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \\ &< \varepsilon + \|\tilde{w} - e^{i(\theta+\omega t_{k_l})} w\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \quad (l \geq L). \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \inf_{\theta \in \mathbf{R}} \|u_{k_l}(t_{k_l}) - e^{i\theta} v(t_{k_l})\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} &< \varepsilon + \inf_{\theta \in \mathbf{R}} \|\tilde{w} - e^{i(\theta+\omega t_{k_l})} w\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \\ &= \varepsilon + \inf_{\theta \in \mathbf{R}} \|e^{i\theta'} w - e^{i(\theta+\omega t_{k_l})} w\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

これは，(3.37) と矛盾する．したがって，基底状態解  $v$  は，定義 3.22 の意味で安定であることが示された．  $\square$

### 3.5 定在波解の存在と不安定性 ( $1 + 4/n < p < p^*(n)$ の場合)

$n \geq 2$  かつ  $1 + 4/n < p < p^*(n)$  のときの，定在波解の存在とその不安定性を示す．

まず，定在波解の存在証明から始めるために， $H^1(\mathbf{R}^n)$  上の汎関数  $T$  を次のように定める：

$$T(u) = 2\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

これは，2 章の (2.61) における右辺の時間積分の中に被積分関数として現れるものであることに注意しておく． $\omega > 0$  に対して，次のような最小化問題を考える：

$$c_\omega = \inf_{u \in K} S_\omega(u). \tag{3.41}$$

ただし,

$$K = \{u \in H^1(\mathbf{R}^n); u \neq 0, T(u) = 0\}.$$

とする. このとき, この最小化問題を考えることは, 次の最小化問題を考えることと同じである:

$$\begin{aligned} c_\omega &= \inf_{u \in K} J_\omega(u), \\ J_\omega(u) &= \frac{n(p-1)-4}{n(p-1)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

いま  $p > 1 + 4/n$  を仮定しているので,  $J_\omega(u)$  の定義式における右辺の第 1 項の係数は正となる. したがって,  $c_\omega$  は有限な非負の値をとる.

**定理 3.25.**  $n \geq 2$ ,  $1 + 4/n < p < p^*(n)$ ,  $\omega > 0$  とする. このとき,  $c_\omega > 0$  であり,  $c_\omega$  を達成する最小化問題 (3.42) (あるいは (3.41)) の解  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する. また, 関数  $w$  は方程式 (3.2) の弱解となっている.

**証明.** 2つのステップに分けて進める.

(ステップ 1)  $c_\omega$  を達成する (3.42) の解  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の存在を示す.

$c_\omega$  の定義より,  $m \in \mathbf{N}$  に対して, 次が成り立つ:

$$\exists \{u_m\} \subset K; J_\omega(u_m) \rightarrow c_\omega \quad (m \rightarrow \infty).$$

このとき, 汎関数  $J_\omega$  の定義より, 列  $\{u_m\}$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列となる. そこで, 列  $\{u_m\}$  の各元の対称減少再配分  $u_m^*$  を考えると, 補題 3.12 より, 次を満たすような  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列  $\{u_m^*\}$  がとれる:

$$\begin{aligned} \|u_m^*\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} &= \|u_m\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}, \quad 2 \leq q < p^*(n), \\ \|\nabla u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \|\nabla u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}$$

したがって,

$$T(u_m^*) \leq T(u_m) = 0 \quad (m \geq 1)$$

となる. もし  $T(u_m^*) = 0$  であるときは  $v_m = u_m^*$  とおく. もし  $T(u_m^*) < 0$  ならば,

$$T(\lambda u_m^*) = 2\lambda^2 \|\nabla u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p+1} \frac{n(p-1)}{p+1} \|u_m^*\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0$$

となるような  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) を選び,  $v_m = \lambda u_m^*$  とおく. 実際,  $p+1 > 2$  であることから, このような  $p$  はただ一つ存在する. こうして得られた列  $\{v_m\}$  に対しては,

$$v_m \in K \quad (m \geq 1).$$

また,

$$\begin{aligned} J_\omega(v_m) &= \lambda^2 J_\omega(u_m^*) \quad (0 < \lambda \leq 1), \\ J_\omega(u_m^*) &\leq \frac{n(p-1)-4}{n(p-1)} \|\nabla u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = J_\omega(u_m) \end{aligned}$$

であるから,

$$c_\omega \leq J_\omega(v_m) \leq J_\omega(u_m^*) \leq J_\omega(u_m) \quad (m \geq 1)$$

が満たされている. したがって, 列  $\{v_m\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列であり,

$$J_\omega(v_m) \longrightarrow c_\omega \quad (m \rightarrow \infty)$$

が成立する. さらに, 補題 3.16 を用いれば, 補題 3.17 の証明と同様にして次が成立するようになる:

$$\begin{aligned} \exists \{v_{m_k}\} \subset \{v_m\}, \quad \exists w \in H_r^1(\mathbf{R}^n); \\ v_{m_k} \longrightarrow w \quad \text{weakly in } H_r^1(\mathbf{R}^n), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$v_{m_k} \longrightarrow w \quad \text{in } L^{p+1}(\mathbf{R}^n). \quad (3.44)$$

次に,  $w \in K$  かつ  $c_\omega = J_\omega(w)$  であることを示す. まず (3.43) より,

$$\begin{aligned} c_\omega &= \lim_{m_k \rightarrow \infty} J_\omega(v_{m_k}) \\ &\geq \frac{n(p-1)-4}{n(p-1)} \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &\geq \frac{n(p-1)-4}{n(p-1)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &= J_\omega(w). \end{aligned} \quad (3.45)$$

一方,  $T(v_{m_k}) = 0$  であるから,

$$\begin{aligned} T(w) &= 2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\leq 2 \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)}{p+1} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \|v_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \left( 2\|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)}{p+1} \|v_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

を得る. ここで,  $T(w) = 0$  であることを背理法で示す. もし,  $T(w) < 0$  とすると,

$$2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 < \frac{n(p-1)}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}$$

であるから,  $w \neq 0$  となる. よって,

$$T(\lambda w) = 2\lambda^2 \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p+1} \frac{n(p-1)}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0$$

となるように  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) を選べば,  $\lambda w \in K$  であり,  $0 < \lambda < 1$  と (3.45) より,

$$J_\omega(\lambda w) = \lambda^2 J_\omega(w) < J_\omega(w) \leq c_\omega$$



となる。これは、 $c_\omega$  の定義式に矛盾する。したがって、 $T(w) = 0$  でなければならない。  $w \in K$  であることをいうためには、あと  $w \neq 0$  であることを示せばよい。そこで、 $v_{m_k} \in K$  であることとソボレフの埋蔵定理より、

$$\begin{aligned}\|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \frac{n(p-1)}{2(p+1)} \|v_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\leq C \|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p\}/2} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{n(p-1)/2}.\end{aligned}$$

いま、 $v_{m_k} \neq 0$  であるので、上の不等式の両辺を  $\|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$  で割ると、

$$1 \leq C \|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p\}/2} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n(p-1)-4\}/2}. \quad (3.46)$$

ただし、右辺の定数  $C$  は  $m_k$  にはよらない。もし、 $w = 0$  とすると (3.44) より、

$$\begin{aligned}\|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \frac{n(p-1)}{2(p+1)} \|v_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\rightarrow \frac{n(p-1)}{2(p+1)} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0 \quad (m_k \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

となる。列  $\{v_{m_k}\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  での有界列であるので、列  $\{\|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\}$  は有界となる。ここで、 $p$  の仮定から  $\{n(p-1)-4\}/2 > 0$  であることに注意して、不等式 (3.46) の両辺において  $m_k \rightarrow \infty$  のときの極限を考えると、右辺  $\rightarrow 0$  となり矛盾が生じる。したがって、 $w \neq 0$  が示された。以上より、 $w \in K$  が結論される。さらに、(3.45) と  $c_\omega$  の定義より、

$$c_\omega = J_\omega(w) > 0$$

を得る。

(ステップ 2) ステップ 1 で求めた  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が方程式 (3.2) の弱解になっていることを示す。

ステップ 1 で求めた関数  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  は最小化問題 (3.41) の解であるから、 $w \in K$  は  $S_\omega$  上の極値点である。よって定理 3.11(ii) を適用すると次の関係式を得る：

$$\partial_w S_\omega(w)v - \lambda \partial_w T(w)v = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \quad (3.47)$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{Re}[\partial_w S_\omega(w)w]}{\operatorname{Re}[\partial_w T(w)w]}. \quad (3.48)$$

このとき、

$$\partial_u T(u)v = 2(\nabla v, \nabla u) - \frac{n(p-1)}{2}(v, |u|^{p-1}u)$$

である。ここで、 $w \in K$  より、

$$2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)}{p+1}\|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0 \quad (3.49)$$

であるので,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[\partial_w T(w)w] &= 2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)}{2}\|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= -\frac{n(p-1)^2}{2(p+1)}\|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0.\end{aligned}$$

したがって,  $w$  は  $\operatorname{Re}[\partial_w T(w)w] \neq 0$  となる  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の元であり定理 3.11(ii) の仮定はすべて満たされていることに注意しよう.

次に,  $\lambda = 0$  であることを示す. 関数  $w$  に対して,  $\eta = 2/(p-1)$  とした (3.30) によって与えられる関数を  $w_\lambda$  とする. このとき, (3.31)–(3.33) より,

$$\begin{aligned}\|w_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^{\frac{4+n-np}{p-1}}\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|\nabla w_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p}{p-1}}\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|w_\lambda\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} &= \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p}{p-1}}\|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$T(w_\lambda) = \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p}{p-1}}T(w) = 0, \quad \lambda > 0$$

となり, すべての  $\lambda > 0$  に対して,  $w_\lambda \in K$  となる.  $w$  は  $J_\omega$  の  $K$  上での最小値を達成する関数であるので,

$$J_\omega(w_\lambda) \geq J_\omega(w), \quad \lambda > 0$$

でなければならない. したがって, 次の関係式を得る:

$$\begin{aligned}& \left. \frac{d}{d\lambda} J_\omega(w_\lambda) \right|_{\lambda=1} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} \left[ \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p}{p-1}} \frac{n(p-1)-4}{n(p-1)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \lambda^{\frac{4+n-np}{p-1}} \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right] \right|_{\lambda=1} \\ &= \frac{n(p-1)-4}{n(p-1)} \frac{n+2-(n-2)p}{p-1} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{4+n-np}{p-1} \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.50}$$

(3.49) と (3.50) より,

$$\begin{aligned}\omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \frac{n+2-(n-2)p}{n(p-1)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} &= \frac{2(p+1)}{n(p-1)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2\end{aligned}$$

これらを用いて,

$$\partial_w S_\omega(w)w = 0$$

が示される。したがって、(3.48) から  $\lambda = 0$  が結論できる。

$\lambda = 0$  が示せたので、(3.47) から、

$$\partial_w S_\omega(w)v = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

を得る。これは、関数  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が方程式 (3.2) の弱解であることを示している。  $\square$

定理 3.25 で求めた方程式 (3.2) の解から、(3.3) によってつくられる方程式 (3.1) の基底状態解  $v$  が不安定であることを示す。その証明の前に、補題を 2 つ準備しておく。

**補題 3.26.**  $n \geq 2$ ,  $1 + 4/n < p < p^*(n)$ ,  $\omega > 0$  とし、関数  $u$  は、

$$T(u) < 0,$$

$$S_\omega(u) < c_\omega$$

を満たすような任意の  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の元とする。このとき、次の不等式が成立する：

$$T(u) \leq S_\omega(u) - c_\omega.$$

**証明.**  $\lambda > 0$  とする。関数  $u$  に対して、 $\eta = n/2$  とした (3.30) によって与えられる関数を  $u_\lambda$  とする。このとき、(3.31)–(3.33) より、

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|\nabla u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} &= \lambda^{n(p-1)/2} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \end{aligned}$$

であるから、次が成立する：

$$T(u_\lambda) = \lambda^2 \left[ 2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{\{n(p-1)-4\}/2} \frac{n(p-1)}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right], \quad (3.51)$$

$$S_\omega(u_\lambda) = \lambda^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{n(p-1)/2} \frac{2}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}. \quad (3.52)$$

$p$  の仮定より  $n(p-1) - 4 > 0$  であることと (3.51) から、

$$\begin{aligned} 0 < \lambda^* < 1, \quad T(u_{\lambda^*}) &= 0, \\ T(u_\lambda) < 0 \quad (\lambda^* < \lambda \leq 1) \end{aligned}$$

を満たす定数  $\lambda^*$  がただ 1 つ存在することがわかる。一方、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} S_\omega(u_\lambda) &= 2\lambda \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)}{p+1} \lambda^{\{n(p-1)-2\}/2} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}, \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} S_\omega(u_\lambda) &= 2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)\{n(p-1)-2\}}{2(p+1)} \lambda^{\{n(p-1)-4\}/2} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \end{aligned}$$

である。ここで、 $h(\lambda) = S_\omega(u_\lambda)$  とおくと、

$$h'(1) = T(u). \quad (3.53)$$

$p$  の仮定から、

$$\frac{n(p-1)-2}{2} > 1$$

であるので、 $\lambda^* \leq \lambda \leq 1$  のとき  $T(u_\lambda) \leq 0$  より、

$$h''(\lambda) \leq \left[1 - \frac{n(p-1)-2}{2}\right] \frac{n(p-1)}{p+1} \lambda^{\{n(p-1)-4\}/2} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0. \quad (3.54)$$

したがって、テイラーの定理より、ある定数  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) に対して、次式が成立する:

$$h(\lambda^*) = h(1) + (\lambda^* - 1)h'(1) + \frac{1}{2}(\lambda^* - 1)^2 h''(1 + \theta(\lambda^* - 1)).$$

ゆえに、(3.53) と (3.54) より、

$$S_\omega(u_{\lambda^*}) \leq S_\omega(u) + (\lambda^* - 1)T(u).$$

$u_{\lambda^*} \in K$  であるので、 $c_\omega \leq S_\omega(u_{\lambda^*})$  と  $0 < \lambda^* < 1$  に注意すると、

$$\begin{aligned} T(u) &\leq \frac{1}{1-\lambda^*} \{S_\omega(u) - S_\omega(u_{\lambda^*})\} \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda^*} \{S_\omega(u) - c_\omega\} \\ &\leq S_\omega(u) - c_\omega \end{aligned}$$

が結論される。 □

**補題 3.27.**  $n \geq 2$ ,  $1 + 4/n < p < p^*(n)$ ,  $\omega > 0$  とする。ここで、 $d < c_\omega$  であるような実数  $d$  に対して、

$$A_d = \{u \in H^1(\mathbf{R}^n); T(u) < 0, S_\omega(u) \leq d\}$$

とおく。  $0 < T \leq +\infty$  とし、初期時刻  $t = 0$  で  $u_0 \in A_d$  を初期値とする方程式 (3.1) の解  $u$  が時間区間  $[0, T)$  上で存在し、

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0, T); H^{-1}(\mathbf{R}^n)), \\ \nabla u &\in L^r((0, T'); L^{p+1}(\mathbf{R}^n)), \quad 0 < T' < T \end{aligned}$$

を満たすものとする。ただし、 $r$  は

$$r \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{p+1} \right) = 2$$

を満たす定数である。このとき、次が成立する:

$$u(t) \in A_d, \quad t \in [0, T).$$

証明. 命題 2.11 より,  $t \in [0, T)$  に対して,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &= \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \\ E(u(t)) &= E(u_0)\end{aligned}$$

が成立する. よって,

$$\begin{aligned}S_\omega(u(t)) &= 2E(u(t)) + \omega\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &= 2E(u_0) + \omega\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &= S_\omega(u_0) \leq d, \quad t \in [0, T).\end{aligned}\tag{3.55}$$

次に,

$$T_0 = \sup\{t_0 \in [0, T); T(u(t)) < 0 \quad (0 \leq t \leq t_0)\}$$

とおく.  $T(u(t))$  は  $t$  に関する連続関数であり  $T(u_0) < 0$  であるから  $T_0 > 0$  でなければならない. なぜならば,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; |T(u_0) - T(u(t))| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \delta$$

が成り立つから,

$$-\varepsilon < T(u_0) - T(u(t)) < \varepsilon.$$

よって,

$$T(u(t)) < T(u_0) + \varepsilon.$$

ここで,  $T(u_0) < 0$  に注意して,  $\varepsilon = -(1/2)T(u_0)$  とおけば,

$$T(u(t)) < \frac{1}{2}T(u_0) < 0, \quad 0 \leq t \leq \delta$$

となり,  $\sup$  の定義と  $\delta > 0$  より  $0 < \delta \leq T_0$  を得る.

いま,  $T_0 = T$  であることを背理法によって示す. もし,  $T_0 < T$  とすると,  $T(u(t))$  の  $t$  に関する連続性より,  $T(u(T_0)) = 0$  であることが, 次のようにして示される:

まず,  $\sup$  の定義から,  $n \in \mathbf{N}$  に対して,

$$\forall \frac{1}{n}, \exists t_n \in \{t_0 \in [0, T); T(u(t)) < 0 \quad (0 \leq t \leq t_0)\}; \quad T_0 - \frac{1}{n} < t_n \leq T_0.$$

よって,  $T(u(t_n)) < 0$  に注意すれば,  $T(u(t))$  の  $t$  に関する連続性より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(u(t_n)) = T(u(T_0)) \leq 0.\tag{3.56}$$

一方,  $T_0 < T$  より, 次を満たす列  $\{y_n\}$  がとれる:

$$T_0 < y_n < T, \quad y_n \searrow T_0.$$

このとき,  $t \in [0, y_n] \cap [0, T_0]$  で考えて, もし,  $(T_0, y_n]$  上で常に  $T(u) < 0$  とすれば,  $T_0$  の定義に矛盾するから,

$$z_n \in (T_0, y_n], \quad T(u(z_n)) \geq 0$$

を満たすような列  $\{z_n\}$  が存在することがわかる. よって, 再び  $T(u(t))$  の  $t$  に関する連続性より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(u(z_n)) = T(u(T_0)) \geq 0. \quad (3.57)$$

(3.56) と (3.57) より,

$$T(u(T_0)) = 0$$

を得る.

また, 解  $u(t)$  の  $L^2(\mathbf{R}^n)$  ノルムは  $t$  によらず一定となるので,  $u_0 \neq 0$  である ( $u_0 = 0$  とすると  $T(u_0) < 0$  に反する). このことより,

$$\|u(T_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \neq 0.$$

よって,

$$u(T_0) \neq 0.$$

ゆえに,  $u(T_0) \in K$  であり,  $c_\omega$  の定義式より,

$$d < c_\omega \leq S_\omega(u(T_0))$$

を得る. これは, (3.55) に矛盾する. したがって,  $T_0 = T$  でなければならない.

以上より,

$$u(t) \in A_d, \quad t \in [0, T)$$

が結論される. □

**定理 3.28.**  $n \geq 2$ ,  $1 + 4/n < p < p^*(n)$ ,  $\omega > 0$  とする. このとき, 方程式 (3.1) の基底状態解  $v$  は, 定義 3.21(ii) の意味で不安定である.

**証明.** 方程式 (3.1) の基底状態解  $v$  の不安定性を証明するためには,  $v(0)$  の任意の近傍から, 方程式 (3.1) の解が有限時間内に爆発するような初期値が必ずとり出せることを示せばよい.

$d < c_\omega$  とし,  $u_0 \in A_d$  かつ  $xu_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$  とする. ただし,  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の部分集合  $A_d$  は, 補題 3.27 の中で定義されているようなものとする. 初期時刻  $t = 0$  で初期条件  $u(0) = u_0$  を満たす方程式 (3.1) の解を  $u(x, t)$  と書く. このとき, 解  $u(t)$  が時間区間  $[0, \infty)$  上全体に延長できないことを背理法で示す. もし, 解  $u(t)$  が  $[0, \infty)$  上で存在したとすると, 補題 2.14 より,

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx \\ &\quad + 4 \int_0^t \int_0^s T(u(\tau)) d\tau ds, \quad t \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (3.58)$$

を得る。  $u_0 \in A_d$  の仮定から、補題 3.27 より、

$$u(t) \in A_d, \quad t \in [0, \infty).$$

よって、補題 3.26 より、

$$T(u(t)) \leq S_\omega(u(t)) - c_\omega \leq d - c_\omega$$

が成立する。これと、(3.58) を合わせると、

$$\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \leq \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx + 2(d - c_\omega)t^2, \quad t \in [0, \infty).$$

ところが、  $d - c_\omega < 0$  であるから、この不等式の右辺は十分大きな  $t > 0$  に対して負の値をとる。しかし、左辺は非負の値しかとらないので、これは矛盾。したがって、解  $u(t)$  は  $[0, \infty)$  上全体に延長できない。すなわち、ある正定数  $T$  に対して、

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \infty$$

が成立している。

次に、関数  $w$  を最小化問題 (3.41) の解であるとする。ここで、

$$w_\lambda(x) = \lambda w(x), \quad \lambda > 0$$

とおく。関数  $w$  は (3.2) の弱解であるので、

$$\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0$$

を満たすことから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} S_\omega(w_\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \lambda^2 \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \lambda^2 \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{2}{p+1} \lambda^{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= 2\lambda \left[ \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p-1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= 2\lambda(1 - \lambda^{p-1}) \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}. \end{aligned}$$

よって、次が成立する:

$$\frac{d}{d\lambda} S_\omega(w_\lambda) < 0, \quad \lambda > 1.$$

ゆえに、  $d_\lambda = S_\omega(w_\lambda)$  とおくと、

$$d_\lambda < d_\lambda|_{\lambda=1} = S_\omega(w) = c_\omega, \quad \lambda > 1.$$

また、  $T(w) = 0$  であるから、  $\lambda > 1$  のとき、

$$\begin{aligned} T(w_\lambda) &= \lambda^2 \left[ 2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p-1} \frac{n(p-1)}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= \lambda^2(1 - \lambda^{p-1}) \frac{n(p-1)}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0. \end{aligned}$$

すなわち,  $\lambda > 1$  のとき,  $d_\lambda < c_\omega$  に対して,

$$w_\lambda \in A_{d_\lambda} = \{u \in H^1(\mathbf{R}^n); T(u) < 0, S_\omega(u) \leq d_\lambda\}$$

である.

一方, 明らかに,

$$w_\lambda \longrightarrow w \text{ in } H^1(\mathbf{R}^n) \quad (\lambda \rightarrow 1).$$

したがって, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\|w_\lambda - w\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon, \quad w_\lambda \in A_{d_\lambda}$$

となるように,  $\lambda(> 1)$  をとることができる. さらに, この  $w_\lambda$  に対して, 命題 3.8(ii) により,

$$xw_\lambda \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

も成り立つことがわかる. したがって,  $t = 0$  で  $u(0) = w_\lambda$  を満たす方程式 (3.1) の解は, 前半の議論より, 有限時間内で  $H^1(\mathbf{R}^n)$  ノルムが無大に発散する. これは, 方程式 (3.1) の基底状態解  $v$  が安定でない, すなわち不安定であることを示している.  $\square$

**注意 3.29.**  $n \geq 2$ ,  $p = 1 + 4/n$  の場合, 方程式 (3.1) の定在波解は, 存在して不安定であることが知られている.



## 4 非線形関数 $f(x, z) = \lambda|x|^{-b}|z|^{p-1}z$ の場合

本章では, 次のような非線形関数  $f$  をもつ非線形シュレディンガー方程式をとりあげ, 初期値問題の一意可解性および, 定在波解の存在とその性質を調べることを目標とする:

$$f = f(x, z) = \lambda|x|^{-b}|z|^{p-1}z.$$

### 4.1 非線形関数 $f$ における $b, p$ の仮定

次のような非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を考える:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \lambda|x|^{-b}|u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in (-T, T), \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (4.2)$$

初期値問題 (4.1)–(4.2) の一意可解性を調べる際に用いる不等式をまとめておく.

**補題 4.1 (ストリッカーズ型評価式).**

$n \geq 3$ ,  $I$  を  $\mathbf{R}$  の任意の開区間とする.  $\bar{I}$  をその閉包とし,  $t_0 \in \bar{I}$  とする. さらに,  $\tilde{q}, \tilde{q}', \hat{q}, \tilde{r}, \tilde{r}', \hat{r}$  は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}'} &= 1, & \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{q}'} &= 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}, & \frac{2}{\hat{r}} &= n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}} \right), \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}, & \frac{2}{\tilde{r}} &= n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right) \end{aligned}$$

を満たすものとする. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\left\| \int_{t_0}^t U(t-\tau)f(\tau) d\tau \right\|_{L^{\tilde{r}}(I; L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n))} \leq C \|f\|_{L^{\tilde{r}'}(I; L^{\hat{q}'}(\mathbf{R}^n))}.$$

ただし,  $C$  は  $f$  と  $I$  には依存しない正定数である.

**補題 4.2 (重み付きハーディー型の不等式).**

$p, q, \alpha, s$  は,

$$1 < p \leq q < \infty, \quad -\alpha + \frac{n}{q} = -s + \frac{n}{p}, \quad \alpha \geq 0$$

を満たすものとする. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\| |x|^{-\alpha} v \|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leq C \| |D_x|^s v \|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

ただし,  $C$  は  $v$  には依存しない正定数で,  $|D_x|^s v = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \hat{v}]$  である.

いま、考えている方程式 (4.1) の非線形関数  $f$  は

$$f(x, u) = \lambda |x|^{-b} |u|^{p-1} u, \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

であったから、ノルムの評価に対してこれらの不等式を用いる際には、次の3つのタイプが問題となる:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \| |x|^{-b} |u|^{p-1} \nabla u \|_{L^{\tilde{r}'}((-T, T); L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))}, \\ \text{(ii)} \quad & \| |x|^{-b-1} |u|^p \|_{L^{\tilde{r}'}((-T, T); L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))}, \\ \text{(iii)} \quad & \| |x|^{-b} |u|^p \|_{L^{\tilde{r}'}((-T, T); L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

ただし、 $\tilde{q}'$ ,  $\tilde{r}'$  は補題 4.1 の不等式の右辺に現れる  $\tilde{q}'$ ,  $\tilde{r}'$  である.

$u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して (i)–(iii) が評価できるためには、 $b$ ,  $p$  にどのような仮定が必要であるのかを調べなくてはならない. このとき、前提として  $b > 0$ ,  $p > 1$  である.

(i) から考えよう.  $I_T = (-T, T)$  とおく. まず、条件

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{\tilde{q}'} \quad (4.3)$$

のもとでヘルダーの不等式を用いて、次が成り立つ:

$$\| |x|^{-b} |u|^{p-1} \nabla u \|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n)} \leq \| |x|^{-b/(p-1)} u \|_{L^{q_1(p-1)}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \| \nabla u \|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}.$$

さらに、重み付きハーディ型不等式を用いて、

$$\| |x|^{-b/(p-1)} u \|_{L^{q_1(p-1)}(\mathbf{R}^n)} \leq \| |D_x|^s u \|_{L^{q_3}(\mathbf{R}^n)}.$$

ただし、

$$2 \leq q_3 \leq q_1(p-1) < \infty, \quad (4.4)$$

$$-\frac{b}{p-1} + \frac{n}{q_1(p-1)} = -s + \frac{n}{q_3}. \quad (4.5)$$

このとき、 $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対する評価を考えているから、

$$0 \leq s \leq 1 \quad (4.6)$$

でなくてはならない. (4.3)–(4.6) がすべて満たされたとすれば、さらに、条件

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\tilde{r}'} \quad (4.7)$$

のもとでヘルダーの不等式を用いて、

$$\begin{aligned} \| |x|^{-b} |u|^{p-1} \nabla u \|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} &\leq C \left\| \| |D_x|^s u \|_{L^{q_3}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \| \nabla u \|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)} \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T)} \\ &\leq C \left\| \| |D_x|^s u \|_{L^{r_1(p-1)}(I_T; L^{q_3}(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \| \nabla u \|_{L^{r_2}(I_T; L^{q_2}(\mathbf{R}^n))} \right\| \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし,

$$1 \geq \frac{2}{r_1(p-1)} \geq n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q_3} \right) \geq 0, \quad (4.8)$$

$$1 \geq \frac{2}{r_2} \geq n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) \geq 0. \quad (4.9)$$

(4.3)–(4.9) を満たすような  $q_1, q_2, q_3, r_1, r_2$  がとれるための  $b, p$  の条件を求めたい。そこで,  $q_3 = 2, r_1 = \infty$  として進めてみる。このとき, (4.8) は常に満たされる。また, (4.7) より,

$$r_2 = \tilde{r}'$$

となるから, (4.9) は,

$$1 \geq \frac{2}{\tilde{r}'} \geq n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) \geq 0$$

となるが,  $0 \leq \frac{1}{\tilde{r}'} \leq \frac{1}{2}$  であるから,  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\tilde{r}'} \leq 1$ , つまり,  $1 \leq \frac{2}{\tilde{r}'} \leq 2$  であり,

$$\tilde{r}' = 2$$

と決まる。したがって, (4.9) は,

$$1 \geq n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) \geq 0$$

となる。ここで, 改めて (4.3)–(4.9) を整理すると次のようになる:

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{\tilde{q}'}, \quad (4.10)$$

$$2 \leq q_1(p-1) < \infty, \quad (4.11)$$

$$-\frac{b}{p-1} + \frac{n}{q_1(p-1)} = -s + \frac{n}{2}, \quad (4.12)$$

$$0 \leq s \leq 1, \quad (4.13)$$

$$\frac{n}{2} - 1 \leq \frac{n}{q_2} \leq \frac{n}{2}. \quad (4.14)$$

(4.12) と (4.13) より,

$$0 \leq \frac{b}{p-1} - \frac{n}{q_1(p-1)} + \frac{n}{2} \leq 1$$

であるから,

$$b + \frac{n(p-1)}{2} - (p-1) \leq \frac{n}{q_1} \leq b + \frac{n(p-1)}{2}. \quad (4.15)$$

また, (4.11) より,

$$\frac{n}{q_1} \leq \frac{n(p-1)}{2} \quad (4.16)$$

である。したがって、(4.15) と (4.16) を満たす  $q_1$  がとれるためには、

$$b + \frac{n(p-1)}{2} - (p-1) \leq \frac{n(p-1)}{2}$$

でなければならず、次の関係を得る:

$$1 + b \leq p. \quad (4.17)$$

次に、(4.10) と (4.15) より、

$$b + \frac{n(p-1)}{2} - (p-1) \leq n \left( \frac{1}{\tilde{q}'} - \frac{1}{q_2} \right) \leq b + \frac{n(p-1)}{2}$$

であるから、

$$b + \frac{n(p-1)}{2} + \frac{n}{q_2} - (p-1) \leq \frac{n}{\tilde{q}'} < b + \frac{n(p-1)}{2} + \frac{n}{q_2}.$$

ところで、

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}$$

より、

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\tilde{q}'} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.$$

つまり、

$$\frac{n}{2} \leq \frac{n}{\tilde{q}'} \leq \frac{n}{2} + 1$$

であるから、

$$\frac{n}{2} \leq b + \frac{n(p-1)}{2} + \frac{n}{q_2} \quad \text{かつ} \quad b + \frac{n(p-1)}{2} + \frac{n}{q_2} - (p-1) \leq \frac{n}{2} + 1$$

でなければならない。これより、

$$n - b - \frac{np}{2} \leq \frac{n}{q_2} \leq n - b - \frac{np}{2} + p \quad (4.18)$$

となる。したがって、(4.14) と (4.18) を満たす  $q_2$  がとれるためには、

$$\frac{n}{2} - 1 \leq n - b - \frac{np}{2} + p \quad \text{かつ} \quad n - b - \frac{np}{2} \leq \frac{n}{2}$$

でなければならず、 $p > 1$  より次の関係を得る:

$$p \leq \frac{n+2-2b}{n-2} = 1 + \frac{4-2b}{n-2}. \quad (4.19)$$

(4.17) と (4.19) より、

$$1 + b \leq 1 + \frac{4-2b}{n-2} \quad \text{かつ} \quad 1 + b \leq p \leq 1 + \frac{4-2b}{n-2}.$$

すなわち  $b, p$  について, 次の条件を得る:

$$0 < b \leq \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p \leq 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}.$$

この  $b, p$  の条件のもと (4.3)–(4.9) が満たされて,

$$\| |x|^{-b} |u|^{p-1} \nabla u \|_{L^{\tilde{p}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \leq C \| |D_x|^s u \|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \| \nabla u \|_{L^2(I_T; L^{q_2}(\mathbf{R}^n))}$$

が成り立つ. さらに,  $0 \leq s \leq 1$  であるから,

$$\| |D_x|^s u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C \| u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \| \nabla u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s \leq C \| u \|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$$

が成立する. なぜならば,  $s = 0, 1$  のときは明らかに成り立つから,  $0 < s < 1$  とする. フーリエ変換を考えて, 条件

$$1 = (1 - s) + s = \frac{1}{\frac{1}{1-s}} + \frac{1}{\frac{1}{s}}.$$

のもとでヘルダーの不等式を用いると,

$$\begin{aligned} \| |\xi|^s \hat{u} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbf{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}|^2 dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}|^{2(1-s)} |\xi|^{2s} |\hat{u}|^{2s} dx \\ &\leq \| |\hat{u}|^{2(1-s)} \|_{L^{1/(1-s)}(\mathbf{R}^n)} \| |\xi|^{2s} |\hat{u}|^{2s} \|_{L^{1/s}(\mathbf{R}^n)} \\ &= \| \hat{u} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{2(1-s)} \| |\xi| \hat{u} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{2s} \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\| |\xi|^s \hat{u} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \| \hat{u} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \| |\xi| \hat{u} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s.$$

したがって,

$$\| |D_x|^s u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \| u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \| \nabla u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s.$$

以上のことから, (i) について,

$$0 < b \leq \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p \leq 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

の条件のもと, 次の不等式が成立する:

$$\| |x|^{-b} |u|^{p-1} \nabla u \|_{L^{\tilde{p}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \leq C \| u \|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \| \nabla u \|_{L^2(I_T; L^{q_2}(\mathbf{R}^n))}$$

ただし,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2}$$

である.

(ii) と (iii) については, (i) と同様にして次の不等式が成立する:

$$\begin{aligned} \| |x|^{-b-1} |u|^p \|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} &= \| |x|^{-b} |u|^{p-1} |x|^{-1} u \|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \| |x|^{-1} u \|_{L^2(I_T; L^{q_2}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla u\|_{L^2(I_T; L^{q_2}(\mathbf{R}^n))}, \\ \| |x|^{-b} |u|^p \|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} &\leq C \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|u\|_{L^2(I_T; L^{q_2}(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

ただし,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2}.$$

(ii) の最後の不等式では, 重み付きハーディー型の不等式, および Fourier multiplier theorem より得られる次の不等式を用いた:

$$\| |x|^{-1} u \|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)} \leq C \| |D_x| u \|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}.$$

以上のことをまとめると, 補題 4.1 の不等式の右辺に現れる  $\tilde{q}'$ ,  $\tilde{r}'$  に対して, 次の補題が成り立つ. ただし, 初期値問題 (4.1)–(4.2) の可解性を調べるにあたり,  $p$  の仮定は

$$p = 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

を除いて

$$1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

とする.

**補題 4.3.**  $I$  を  $\mathbf{R}$  の任意の開区間とし,  $n \geq 3$  で,

$$0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

を仮定する. さらに,  $\tilde{q}'$ ,  $\tilde{r}'$  は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}'} &= 1, \quad \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{q}'} = 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{\tilde{r}} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right) \end{aligned}$$

を満たすものとする. このとき,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$$

を満たす  $q$  が存在し, 次の不等式 (i)–(iii) が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \| |x|^{-b} |u|^{p-1} \nabla u \|_{L^{\tilde{r}'}(I; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^\infty(I; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla u\|_{L^2(I; L^q(\mathbf{R}^n))}, \\ \text{(ii)} \quad & \| |x|^{-b-1} |u|^p \|_{L^{\tilde{r}'}(I; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^\infty(I; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla u\|_{L^2(I; L^q(\mathbf{R}^n))}, \\ \text{(iii)} \quad & \| |x|^{-b} |u|^p \|_{L^{\tilde{r}'}(I; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^\infty(I; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|u\|_{L^2(I; L^q(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

ただし,  $C$  は  $u$  と  $I$  には依存しない正定数である.

注意 4.4. 補題 4.3 の  $q$  に対して, さらに, 次を満たす  $r$  がとれることに注意しておこう:

$$\frac{2}{r} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad 0 \leq \frac{1}{r} < \frac{1}{2}.$$

## 4.2 時間局所解の一意存在

定理 4.5.  $n \geq 3$  で,

$$0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

を仮定する. 任意の  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, ある正定数  $T$  が存在し, 時間区間  $(-T, T)$  上で次を満たす (4.1)–(4.2) の解  $u$  が一意的に存在する:

$$u \in C_b((-T, T); H^1(\mathbf{R}^n)), \quad (4.20)$$

$$u \in L^r((-T, T); L^q(\mathbf{R}^n)), \quad (4.21)$$

$$\nabla u \in L^r((-T, T); L^q(\mathbf{R}^n)). \quad (4.22)$$

ただし,  $q$  は補題 4.3 によって得られる  $q$  で,  $r$  は,

$$\frac{2}{r} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$$

を満たすものとし, 正定数  $T$  は,  $\lambda, b, p, n$  と  $\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  だけに依存して決まる.

証明.  $I_T = (-T, T)$  とおく. 2 章の (2.9) と補題 2.4 より,

$$\|U(\cdot)u_0\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} = \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_1,$$

$$\|\nabla U(\cdot)u_0\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} = \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_2,$$

$$\|U(\cdot)u_0\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_3,$$

$$\|\nabla U(\cdot)u_0\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq C\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \equiv \eta_4.$$

$\eta = \max\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$  とおき, 距離空間  $(X_T, d)$  を次のように定義する:

$$X_T = \{v; v \in L^\infty(I_T; H^1), v \in L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n)), \nabla v \in L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n)),$$

$$\|v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,$$

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,$$

$$\|v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,$$

$$\|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta \},$$

$$d(v, w) = \|v - w\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))}, \quad v, w \in X_T.$$

ここで,  $Y_T = L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))$  とおくと,  $Y_T$  は距離関数  $d$  に関して完備距離空間となる. さらに,  $X_T$  は  $Y_T$  の閉部分集合である. なぜならば,

$$\{v_m\} \subset X_T, \quad v \in Y_T; \quad d(v_m, v) \longrightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

とすると, まず,

$$\|v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta.$$

次に,  $\{v_m\}$  は  $L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)) = (L^1(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)))^*$  の有界点列であるから,

$$\begin{aligned} \exists \{v_{m_j}\} \subset \{v_m\}, \quad \exists w \in L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)); \\ v_{m_j} \longrightarrow w \quad * \text{weakly in } L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)) \end{aligned}$$

が成り立つ. ところで,  $L^1(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))$  を含む空間として,  $C_0^\infty(I_T \times \mathbf{R}^n)$  を考えれば,

$$\forall g \in C_0^\infty(I_T \times \mathbf{R}^n), \quad \langle g, v_{m_j} \rangle \longrightarrow \langle g, w \rangle$$

である. 一方, 超関数として,

$$\langle g, v_{m_j} \rangle \longrightarrow \langle g, v \rangle$$

であるから, 極限の一意性より,  $w = v$  でなければならない. このことより, 列  $\{v_m\}$  は次を満たすことが結論される:

$$v_m \longrightarrow v \quad * \text{weakly in } L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)).$$

したがって,

$$\|v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta.$$

同様にして,

$$\begin{aligned} \nabla v_m \longrightarrow \nabla v \quad * \text{weakly in } L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n)), \\ \nabla v_m \longrightarrow \nabla v \quad \text{weakly in } L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n)) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\nabla v_m\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,$$

$$\|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\nabla v_m\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta.$$

ゆえに,  $v \in X_T$  である. よって,  $X_T$  の集積点はすべて  $X_T$  に属することになるので  $X_T$  は  $Y_T$  の閉部分集合である. 以上より,  $(X_T, d)$  は完備距離空間となる.

初期値問題 (4.1)–(4.2) をデュアメルの原理を使って書き直すと,

$$u(t) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-s)\lambda|x|^{-b}|u(s)|^{p-1}u(s)ds, \quad t \in (-T, T)$$



となることに注意して、非線形写像  $N$  を次のように定める:

$$N[v](t) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-s)\lambda|x|^{-b}|v(s)|^{p-1}v(s) ds, \quad v \in X_T.$$

以下、証明を2つのステップに分ける.

(ステップ1) 十分小さな  $T > 0$  に対して、非線形写像  $N$  は  $X_T$  から  $X_T$  への縮小写像となることを示す.

まず、 $v \in X_T$  に対して  $\nabla N[v]$  の  $L^2(\mathbf{R}^n)$  ノルム、 $L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))$  ノルムを評価する. 補題 4.1 より,

$$\begin{aligned} \|\nabla N[v](t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \|\nabla U(t)u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \left\| \int_0^t U(t-s)\nabla[\lambda|x|^{-b}|v(s)|^{p-1}v(s)] ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C\|\nabla[|x|^{-b}|v|^{p-1}v]\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))}, \quad t \in I_T, v \in X_T. \end{aligned}$$

ただし、 $\tilde{q}'$ ,  $\tilde{r}'$  は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}'} &= 1, \quad \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{q}'} = 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{\tilde{r}} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right) \end{aligned}$$

を満たす. 右辺第2項は,

$$|\nabla|x|^{-b}| \leq C|x|^{-b-1}, \quad |\nabla(|v|^{p-1}v)| \leq C|v|^{p-1}|\nabla v|$$

が成り立つことより,

$$\begin{aligned} &\|\nabla[|x|^{-b}|v|^{p-1}v]\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|(\nabla|x|^{-b})|v|^p\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} + \| |x|^{-b}\nabla(|v|^{p-1}v) \|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C\||x|^{-b-1}|v|^p\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} + C\||x|^{-b}|v|^{p-1}\nabla v\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C\|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^2(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT^\alpha \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))}. \end{aligned}$$

ただし,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$$

である. ここで、3番目の不等式では、 $q$  の仮定より補題 4.3(i) と (ii) を用い、最後の不等式では、 $r$  の仮定より時間変数  $t$  について、条件

$$\alpha + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

のもとでヘルダーの不等式を用いた.

以上より,

$$\begin{aligned}\|\nabla N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha \eta^{p-1} \eta, \quad v \in X_T.\end{aligned}\tag{4.23}$$

同様にして,

$$\|\nabla N[v]\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq C\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha \eta^{p-1} \eta, \quad v \in X_T.\tag{4.24}$$

ここで, 注意 4.4 より,  $\alpha > 0$  であることに注意すると,  $T > 0$  を十分小さくとることにより

$$CT^\alpha \eta^{p-1} \leq 1\tag{4.25}$$

とできる. このとき, (4.23) と (4.24) より,  $v \in X_T$  に対して,

$$\|\nabla N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,\tag{4.26}$$

$$\|\nabla N[v]\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta.\tag{4.27}$$

次に,  $v \in X_T$  に対して  $N[v]$  の  $L^2(\mathbf{R}^n)$  ノルム,  $L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))$  ノルムを評価する. 補題 4.1 より,

$$\begin{aligned}\|N[v](t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \|U(t)u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \left\| \int_0^t U(t-s)\lambda|x|^{-b}|v(s)|^{p-1}v(s) ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + C\||x|^{-b}|v|^{p-1}v\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))}, \quad t \in I_T, \quad v \in X_T.\end{aligned}$$

ただし,  $\tilde{q}'$ ,  $\tilde{r}'$  は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}'} &= 1, \quad \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{q}'} = 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{\tilde{r}} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right)\end{aligned}$$

を満たす. 右辺第 2 項は,  $q$  の仮定から補題 4.3(iii) より,

$$\begin{aligned}\||x|^{-b}|v|^{p-1}v\|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} &\leq C\|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|v\|_{L^2(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT^\alpha \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))}.\end{aligned}$$

ただし,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$$

である. ここで, 最後の不等式では,  $r$  の仮定より時間変数  $t$  について, 条件

$$\alpha + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

のもとでヘルダーの不等式を用いた.

以上より,

$$\begin{aligned}\|N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \|v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha \eta^{p-1}, \quad v \in X_T.\end{aligned}\tag{4.28}$$

同様にして,

$$\|N[v]\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq C \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + CT^\alpha \eta^{p-1}, \quad v \in X_T.\tag{4.29}$$

したがって,  $T > 0$  を十分小さくとれば, (4.28) と (4.29) より,  $v \in X_T$  に対して,

$$\|N[v]\|_{L^\infty(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta,\tag{4.30}$$

$$\|N[v]\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq 2\eta.\tag{4.31}$$

以上, (4.26), (4.27), (4.30), (4.31) を合わせると, 十分小さな  $T > 0$  に対して, 非線形写像  $N$  は  $X_T$  から  $X_T$  の中への写像となっていることが示せた. また, (4.25) より  $T$  の選び方は  $\lambda, b, p, n$  と  $\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  にしか依存しないこともわかる.

続いて, 非線形写像  $N$  が, 十分小さな  $T > 0$  に対して縮小写像となることを示す.  $u, v \in X_T$  に対して,

$$\begin{aligned}d(N[u], N[v]) &= \|N[u] - N[v]\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))}, \\ N[u](t) - N[v](t) &= -i \int_0^t U(t-s) \lambda |x|^{-b} (|u(s)|^{p-1} u(s) - |v(s)|^{p-1} v(s)) ds\end{aligned}$$

であるから,

$$|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v \leq C(|u| + |v|)^{p-1} |u - v|$$

が成り立つことに注意すれば, 補題 4.1 と補題 4.3(i), および時間変数  $t$  についてヘルダーの不等式を用いると, 次の不等式を得る:

$$\begin{aligned}d(N[u], N[v]) &\leq C \| |x|^{-b} (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) \|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C \| |x|^{-b} (|u| + |v|)^{p-1} |u - v| \|_{L^{\tilde{r}'}(I_T; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq C \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^2(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|v\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq CT^\alpha \eta^{p-1} \|u - v\|_{L^r(I_T; L^q(\mathbf{R}^n))}.\end{aligned}$$

ただし,  $\tilde{q}', \tilde{r}'$  は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}'} &= 1, \quad \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{q}'} = 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{\tilde{r}} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right)\end{aligned}$$

を満たし,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$$

である.  $\alpha > 0$  であるから,  $T > 0$  を十分小さくとれば,

$$\exists k \in (0, 1); CT^\alpha \eta^{p-1} \leq k$$

とできる. したがって, 非線形写像  $N : X_T \rightarrow X_T$  は, 次を満たす:

$$\exists k \in (0, 1); d(N[u], N[v]) \leq k d(u, v), \quad u, v \in X_T.$$

ゆえに, 縮小写像の原理により, (4.1)–(4.2) の時間局所解の存在が示された. さらに,

$$\int_0^t U(t-s)f(s) ds \in C(I_T; L^2(\mathbf{R}^n))$$

が成り立っていることより, この解は, (4.20) を満たす.

(ステップ 2) ここでは, (4.20)–(4.22) のクラスに属する初期値問題 (4.1)–(4.2) の局所解の一意性を示す.

同じ初期値  $u_0$  をもち, (4.20)–(4.22) を満たす (4.1)–(4.2) の 2 つの解を  $u, v$  とする.  $w = u - v$  とおくと,  $w$  は次を満たす:

$$w(t) = -i \int_0^t U(t-s) \lambda |x|^{-b} (|u(s)|^{p-1} u(s) - |v(s)|^{p-1} v(s)) ds.$$

ステップ 1 における  $d(N[u], N[v])$  の評価と同様にして,  $0 < T' < T$  なる  $T'$  に対して,  $I_{T'} = (-T', T')$  とおくと,

$$\|w\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq CT'^\alpha \eta^{p-1} \|w\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \quad (4.32)$$

を得る. ゆえに,  $T' > 0$  を十分小さくとれば,

$$\|w\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq 0$$

となり, これは,

$$w(t) = 0, \quad t \in (-T', T')$$

を意味している. したがって,

$$u(t) = v(t), \quad t \in (-T', T') \quad (4.33)$$

を得る.

(4.32) の右辺の定数  $C$  は  $T'$  によらず, また仮定より,

$$u, v \in C_b(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))$$

であるから, 次に,

$$u_1(x, t) = u(x, t + T'), \quad v_1(x, t) = v(x, t + T')$$

となる  $u_1, v_1$  を考えると, これらは同じ初期値  $u_1(x, 0) = u(x, T'), v_1(x, 0) = v(x, T')$  をもつ方程式 (4.1) の解となる. ふたたび,  $w_1 = u_1 - v_1$  において上の操作を繰り返せば, 同じ  $T'$  に対して,

$$u_1(t) = v_1(t), \quad t \in (0, 2T')$$

を得る. ゆえに, 上の操作を有限回繰り返すことにより,

$$u(t) = v(t), \quad t \in (-T, T)$$

が示される. □

### 4.3 時間大域解の存在

本節では, 2章の議論と同じようにして, 定理 4.5 によって得られた時間局所解  $u$  が, 時間大域的に延長できるかという問題を考える. まず, 定理 4.5 によって得られた解は 2 つの保存量 (2.29) と (2.30) を満たすことを示す.

**命題 4.6.**  $n \geq 3$  で,

$$\lambda \in \mathbf{R}, \quad 0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

を仮定する.  $I$  を任意の  $\mathbf{R}$  の開区間とする. 関数  $u$  は,

$$u \in C(I; H^1(\mathbf{R}^n)) \cap L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n)), \quad (4.34)$$

$$\nabla u \in L^r(I'; L^q(\mathbf{R}^n)) \quad (I' \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界閉区間}) \quad (4.35)$$

であり, 方程式 (4.1) を区間  $I$  上で満たしているものとする. このとき, すべての  $t \in I$  に対して (2.29) と (2.30) が成立する. ただし,  $q$  は補題 4.3 によって得られる  $q$  で,  $r$  は,

$$\frac{2}{r} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$$

を満たすものとする.

命題 4.6 を証明するために, 2章で考えた初期値問題 (2.35)–(2.36) に対する次の補題を準備する.

**補題 4.7.**  $n \geq 3$  で,

$$0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

を仮定する.  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  とすると, ある正定数  $T$  が存在して, 時間区間  $(t_0 - T, t_0 + T)$  上で次を満たす (2.35)–(2.36) の解  $u_\varepsilon$  が一意的に存在する:

$$u_\varepsilon \in \bigcap_{j=1}^{\infty} C_b^1((t_0 - T, t_0 + T); H^j(\mathbf{R}^n)), \quad (4.36)$$

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty((t_0 - T, t_0 + T); H^1(\mathbf{R}^n))} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}. \quad (4.37)$$

ただし,  $b, p$  の仮定のもと補題 4.3 で得られる  $q$  に対して,  $r$  は

$$\frac{2}{r} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$$

を満たすものとし, 正定数  $T$  は  $\lambda, p, n$  と  $\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$  だけに依存し,  $\varepsilon$  には依存しない. さらに, 時刻  $t = t_0$  で初期値  $u_0$  を与えた初期値問題 (4.1)–(4.2) を考え, その解を  $u$  とし解の存在時間を  $(t_0 - T_0, t_0 + T_0)$  とする. そのとき,  $0 < T' \leq \min\{T, T_0\}$  を満たす任意の定数  $T'$  に対して,

$$\sup_{t \in I_{T'}} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad 2 \leq \hat{p} < 2 + \frac{4}{n-2}. \quad (4.38)$$

ただし,  $I_{T'} = (t_0 - T', t_0 + T')$  である.

**証明.** デュアメルの原理により, 初期値問題 (2.35)–(2.36) は, 次の積分方程式に書き直せることに注意する:

$$u_\varepsilon(t) = U(t - t_0)h_\varepsilon * u_0 - i \int_{t_0}^t U(t - s)h_\varepsilon * [\lambda|x|^{-b}|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(s)|^{p-1}(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(s)] ds. \quad (4.39)$$

まず, 定理 4.5 の証明と同じようにして, ある正定数  $T$  が存在し, 時間区間  $(t_0 - T, t_0 + T)$  上で次を満たす (4.39) の解  $u_\varepsilon$  が一意的に存在することが示せる:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in L^\infty((t_0 - T, t_0 + T); H^1(\mathbf{R}^n)), \\ u_\varepsilon &\in L^r((t_0 - T, t_0 + T); L^q(\mathbf{R}^n)), \\ \nabla u_\varepsilon &\in L^r((t_0 - T, t_0 + T); L^q(\mathbf{R}^n)), \\ \|u_\varepsilon\|_{L^\infty((t_0 - T, t_0 + T); H^1(\mathbf{R}^n))} &\leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

このとき, ヤングの不等式から,

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon * v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} &\leq \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \\ \|h_\varepsilon * v\|_{L^{\hat{p}}(\mathbf{R}^n)} &\leq \|v\|_{L^{\hat{p}}(\mathbf{R}^n)}, \quad 1 \leq \hat{p} \leq \infty \end{aligned}$$

であることに注意すると, 正定数  $T$  は  $\varepsilon$  によらずに選べることもわかる. また, 任意の  $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$  と任意の多重指数  $\alpha$  に対して,

$$\partial_x^\alpha (h_\varepsilon * v) \in L^{\hat{p}}(\mathbf{R}^n), \quad 2 \leq \hat{p} \leq \infty$$

であるから, (4.39) から (4.36) が得られる.

次に,  $u$  と  $u_\varepsilon$  との差を考える.  $t \in I_{T'}$  に対して,

$$\begin{aligned} u(t) - u_\varepsilon(t) &= U(t - t_0)(u_0 - h_\varepsilon * u_0) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t U(t - s) \left[ \lambda|x|^{-b}|u(s)|^{p-1}u(s) - h_\varepsilon * \left( \lambda|x|^{-b}|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(s)|^{p-1}(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(s) \right) \right] ds \end{aligned}$$

であるから、補題 4.1 より、

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \|U(t - t_0)(u_0 - h_\varepsilon * u_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^t U(t - s) \left[ \lambda |x|^{-b} |u(s)|^{p-1} u(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h_\varepsilon * \left( \lambda |x|^{-b} (h_\varepsilon * u_\varepsilon)(s) |h_\varepsilon * u_\varepsilon(s)|^{p-1} \right) \right] ds \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\
&\leq \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\
&\quad + C \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |h_\varepsilon * u_\varepsilon|^{p-1} h_\varepsilon * u_\varepsilon) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))}.
\end{aligned}$$

ただし、 $\tilde{q}'$ ,  $\tilde{r}'$  は、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}'} &= 1, \quad \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{q}'} = 1, \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{\tilde{r}} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right)
\end{aligned}$$

を満たす。右辺第 2 項の定数  $C$  を除いて  $A$  と書くことにする。まず、ヤングの不等式より、

$$\begin{aligned}
A &\leq \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\
&\quad + \left\| h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |h_\varepsilon * u_\varepsilon|^{p-1} h_\varepsilon * u_\varepsilon) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\
&\quad + \left\| |x|^{-b} (|u|^{p-1} u - |h_\varepsilon * u_\varepsilon|^{p-1} h_\varepsilon * u_\varepsilon) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))}.
\end{aligned}$$

さらに、 $q$ ,  $r$  の仮定から補題 4.3(i) とヤングの不等式、および時間変数  $t$  について条件

$$\alpha + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

のもとでヘルダーの不等式を用いて、次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\left\| |x|^{-b} (|u|^{p-1} u - |h_\varepsilon * u_\varepsilon|^{p-1} h_\varepsilon * u_\varepsilon) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq C \left\| |x|^{-b} (|u| + |h_\varepsilon * u_\varepsilon|)^{p-1} |u - h_\varepsilon * u_\varepsilon| \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq C \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^2(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))}.
\end{aligned}$$

また、ヤングの不等式より

$$\begin{aligned}
\|u - h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} &\leq \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} + \|h_\varepsilon * u - h_\varepsilon * u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \\
&\leq \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} A \leq & \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ & + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\ & \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \right). \end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned} \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq & \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ & + C \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ & + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\ & \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \right), \\ & 0 < T' \leq \min\{T, T_0\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

同様にして,

$$\begin{aligned} \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq & C \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ & + C \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ & + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\ & \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \right), \\ & 0 < T' \leq \min\{T, T_0\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

(4.41) と (4.42) より,

$$\begin{aligned} & \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ & \leq C \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ & \quad + C \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ & \quad + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \\ & \quad \times \left( \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \right), \quad 0 < T' \leq \min\{T, T_0\}. \end{aligned}$$

よって, 正定数  $T'$  を十分小さくとれば,

$$\begin{aligned} & \|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))} \\ & \leq C \|u_0 - h_\varepsilon * u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ & \quad + C \left\| |x|^{-b} |u|^{p-1} u - h_\varepsilon * (|x|^{-b} |u|^{p-1} u) \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I_{T'}; L^{\tilde{q}'}(\mathbf{R}^n))} \\ & \quad + CT'^\alpha \left( \|u\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; H^1(\mathbf{R}^n))}^{p-1} \right) \|u - h_\varepsilon * u\|_{L^r(I_{T'}; L^q(\mathbf{R}^n))}, \end{aligned}$$



$$0 < T' \leq \min\{T, T_0\}.$$

ここで,  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすれば, 右辺  $\rightarrow 0$  となり,

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_{T'}; L^2(\mathbf{R}^n))} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

を得る. この事実と (4.40), およびソボレフの埋蔵定理から

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^{\hat{p}}(\mathbf{R}^n)} \leq C \|u - u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \|\nabla(u - u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^a,$$

ただし,

$$\frac{1}{\hat{p}} = \frac{1}{2}(1-a) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)a, \quad 0 \leq a < 1$$

が成り立つことを合わせると,

$$\sup_{t \in I_{T'}} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbf{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad 2 \leq \hat{p} < 2 + \frac{4}{n-2}$$

が示される. □

補題 4.7 を用いて命題 4.6 を示す.

**命題 4.6 の証明.**  $t_0 \in I$  とする. ここで,  $u_0 = u(t_0)$  とした初期値問題 (2.35)–(2.36) を考える. 補題 4.7 より与えられる初期値問題 (2.35)–(2.36) の解を  $u_\varepsilon$  とすると, ある正定数  $T$  が存在して次が成立する:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I_T; H^1(\mathbf{R}^n))} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad (4.43)$$

$$\sup_{t \in I_T} \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbf{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad 2 \leq \hat{p} < 2 + \frac{4}{n-2}. \quad (4.44)$$

ただし,  $T$  は  $[t_0 - T, t_0 + T] \subset I$  となるように小さくとるものとし,  $I_T = (t_0 - T, t_0 + T)$  である. (2.35) に  $\overline{u_\varepsilon}$  を乗じ,  $x$  変数について積分し, 虚部をとると,

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|h_\varepsilon * u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad t \in I_T$$

を得る (2 章命題 2.11 の証明参照). ここで, 両辺  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると, (4.44) より

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad t \in I_T. \quad (4.45)$$

さらに, (2.35) に  $\partial \overline{u_\varepsilon} / \partial t$  を乗じ,  $x$  変数について積分し, 実部をとると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|) dx \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla h_\varepsilon * u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t_0)|) dx, \quad t \in I_T \end{aligned} \quad (4.46)$$

を得る (2 章命題 2.11 の証明参照).

いま,  $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, ソボレフの埋蔵定理とヤングの不等式, および

$$\|v - h_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

が成り立つことを用いて, 次が成立する:

$$\begin{aligned} \|v - h_\varepsilon * v\|_{L^{\tilde{p}}(\mathbf{R}^n)} &\leq C \|v - h_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \|\nabla(v - h_\varepsilon * v)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^a \\ &\leq C (\|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla h_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)})^a \|v - h_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-a} \\ &\leq C (\|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)})^a (\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)})^{1-a} \\ &= C \varepsilon^{1-a} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0). \end{aligned}$$

ただし,

$$\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{2}(1-a) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)a, \quad 0 \leq a < 1$$

より,

$$2 \leq \tilde{p} < 2 + \frac{4}{n-2}$$

である. このことに注意して, 次を考える:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx - \int_{\mathbf{R}^n} F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |F(|u(x, t)|) - F(|(h_\varepsilon * u)(x, t)|)| dx \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^n} |F(|(h_\varepsilon * u)(x, t)|) - F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|)| dx. \end{aligned}$$

右辺の第 1 項と第 2 項をそれぞれ  $A, B$  と書くことにする. ここで, 考えている非線形関数

$$f(x, z) = \lambda |x|^{-b} |z|^{p-1} z$$

に対して,

$$|F(|z_1|) - F(|z_2|)| \leq C |x|^{-b} (|z_1|^p + |z_2|^p) |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbf{C}$$

が成立することより, 条件

$$\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式を用いると、次の不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
A &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b} (|u(x, t)|^p + |(h_\varepsilon * u)(x, t)|^p) |u(x, t) - (h_\varepsilon * u)(x, t)| dx \\
&= C \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-bp/(p+1)} (|u(x, t)|^p + |(h_\varepsilon * u)(x, t)|^p) \cdot (|x|^{-b/(p+1)} |u(x, t) - (h_\varepsilon * u)(x, t)|) dx \\
&\leq C \left\| (|x|^{-bp/(p+1)} (|u(t)|^p + |(h_\varepsilon * u)(t)|^p)) \right\|_{L^{(p+1)/p}(\mathbf{R}^n)} \\
&\quad \times \left\| (|x|^{-b/(p+1)} (u(t) - (h_\varepsilon * u)(t))) \right\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \\
&\leq C \left( \left\| |x|^{-b/(p+1)} u(t) \right\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p + \left\| |x|^{-b/(p+1)} (h_\varepsilon * u)(t) \right\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \right) \\
&\quad \times \left\| |x|^{-b/(p+1)} (u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)) \right\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

ここで、重み付きハーディ型不等式より、

$$\left\| |x|^{-b/(p+1)} u \right\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \leq C \left\| |D_x|^s u \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

ただし、

$$-\frac{b}{p+1} + \frac{n}{p+1} = -s + \frac{n}{2}.$$

このとき、 $n, b, p$  の仮定より  $0 < s < 1$  であるから、さらに、

$$\left\| |D_x|^s u \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s$$

が成り立つ (補題 4.2 の証明参照). このこととヤングの不等式より、

$$\begin{aligned}
A &\leq C \left( \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s + \|(h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s \right) \\
&\quad \times \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla (u(t) - (h_\varepsilon * u)(t))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s \\
&\leq C \|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla (u(t) - (h_\varepsilon * u)(t))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s, \quad 0 < s < 1.
\end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
B &\leq C (\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}) \\
&\quad \times \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla (u(t) - u_\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s, \quad 0 < s < 1.
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx - \int_{\mathbf{R}^n} F(|(h_\varepsilon * u_\varepsilon)(x, t)|) dx \right| \\
&\leq C \left[ \|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|u(t) - (h_\varepsilon * u)(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla (u(t) - (h_\varepsilon * u)(t))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s \right. \\
&\quad \left. + (\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}) \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{1-s} \|\nabla (u(t) - u_\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^s \right] \\
&\rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad t \in I_T.
\end{aligned}$$

また, (4.43) と (4.44) より,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &\longrightarrow u(t) \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n), \quad t \in I_T, \\ \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}, \quad t \in I_T \end{aligned}$$

が成り立ち, また, ヤングの不等式より,

$$\|\nabla h_\varepsilon * u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \|\nabla u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

である. ゆえに, (4.46) の両辺で  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると, 次の不等式が成立する:

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(t_0)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t_0)|) dx, \quad t \in I_T.$$

すなわち,

$$E(u(t)) \leq E(u(t_0)), \quad t \in I_T. \quad (4.47)$$

ここで, あらかじめ  $T > 0$  を十分小さくとおき, 各  $t_1 \in I_T$  を初期時刻,  $u(t_1)$  を初期値とした初期値問題 (2.35)–(2.36) を考えたとき, 初期時刻  $t_1$  によらず同じ  $T$  で (4.43) と (4.44) が成立するようにしておく. ((4.43) により可能である). こうして上と同じ操作を行うと, 次の不等式が成立する:

$$E(u(t_0)) \leq E(u(t_1)), \quad t_0 \in I_T. \quad (4.48)$$

ゆえに, (4.47) と (4.48) を合わせると,

$$E(u(t)) = E(u(t_0)), \quad t \in I_T \quad (4.49)$$

を得る.

各  $t_0 \in I$  に対して, ある正定数  $T$  が存在して, 区間  $(t_0 - T, t_0 + T)$  上で (4.45) と (4.49) が成立することが示された. ゆえに,  $I$  上で (2.29) と (2.30) が成立する.  $\square$

解を時間大域的に延ばすために, さらに  $\lambda, b, p$  を

$$\lambda > 0, \quad 0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

または,

$$\lambda < 0, \quad 0 < b < \frac{4}{n + 2}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n}$$

とする. このとき,  $f$  に対して, 次の不等式が成立する:

$$(f6) \quad F(|z|) \geq -|x|^{-b} (L_1 |z|^{\hat{p}+1} + L_2 |z|^2), \quad z \in \mathbf{C}, \quad 1 + b \leq \hat{p} < 1 + \frac{4 - 2b}{n}.$$

ただし,  $L_1, L_2, \hat{p}$  は  $z$  に依存しない正定数である.

このとき, 次の時間大域解の存在定理を得る.

**定理 4.8.**  $n \geq 3$  とし,

$$\lambda > 0, \quad 0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

または,

$$\lambda < 0, \quad 0 < b < \frac{4}{n + 2}, \quad 1 + b \leq p < 1 + \frac{4 - 2b}{n}$$

を仮定する. このとき, 任意の  $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, 定理 4.5 で得られた (4.1)–(4.2) の時間局所解  $u$  は時間大域的に一意に延長することができ,

$$u \in C_b(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R}^n)) \cap L^r((-T, T); L^q(\mathbf{R}^n)), \quad (4.50)$$

$$\nabla u \in L^r((-T, T); L^q(\mathbf{R}^n)), \quad 0 < T < \infty \quad (4.51)$$

を満たす. さらに, すべての  $t \in \mathbf{R}$  に対して, (2.29) と (2.30) が成立する. ただし,  $q$  は補題 4.3 によって得られる  $q$  で,  $r$  は,

$$\frac{2}{r} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$$

を満たすものとする.

**証明.** 定理 4.5 によって与えられる時間局所解を  $u$  とする. このとき, 命題 4.6 より, 解  $u$  が存在する時刻  $t$  に対しては, (2.29) と (2.30) が成立する.

いま, (2.30) と仮定から成立する不等式 (f6) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= E(u_0) - \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x, t)|) dx \\ &\leq E(u_0) + L_1 \| |x|^{-b/(\hat{p}+1)} u(t) \|_{L^{\hat{p}+1}(\mathbf{R}^n)}^{\hat{p}+1} + L_2 \| |x|^{-b/2} u(t) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

重み付きハーディ型不等式より,

$$\| |x|^{-b/(\hat{p}+1)} u \|_{L^{\hat{p}+1}(\mathbf{R}^n)}^{\hat{p}+1} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{(1-s)(\hat{p}+1)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{s(\hat{p}+1)}, \quad s = \frac{(\hat{p} - 1)n + 2b}{2(\hat{p} + 1)}.$$

仮定より,  $\hat{p} < 1 + \frac{4 - 2b}{n}$  であるので,

$$s(\hat{p} + 1) = \frac{(\hat{p} - 1)n + 2b}{2} < 2$$

である. また, ふたたび重み付きハーディ型不等式より,

$$\| |x|^{-b/2} u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{2(1-s)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{2s}, \quad s = \frac{b}{2}.$$

$n, b$  の仮定より,  $2s = b < 2$  である. よって, (2.29) と (4.52) より,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq l \quad (l \text{ は時間 } t \text{ に依存しない正定数})$$

を得る。したがって時間  $t$  に依存しないある正定数  $M$  が存在して、

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq M. \quad (4.53)$$

解  $u$  が存在する限り、(4.53) が成立するので、各  $t_0$  を初期時刻とし、 $u(t_0)$  を初期値として (4.1)–(4.2) を解くと、解は少なくとも閉区間

$$\left[ t_0 - \frac{1}{2}T, t_0 + \frac{1}{2}T \right]$$

上で一意的に存在する。このとき、(4.53) より  $T$  は初期時刻  $t_0$  に依存しないで一様にとることができる。ゆえに、定理 4.5 を繰り返し適用して、正の方向と負の方向に対してそれぞれ  $T/2$  ずつ解を一意的に延長していけば時間大域解を得る。また、(4.50) は (4.53) から従う。(4.51) は明らかである。  $\square$

#### 4.4 時間大域解の非存在

解が時間大域的に存在しない場合を考える。なお、 $t > 0$  の方向だけ考える。すなわち、 $[0, \infty)$  上で解が延長できるかどうかだけ問題にし、 $t < 0$  の方向ではどうなっているかは考えないことにする。

2 章と同じく、まずは保存量に関する補題から準備する。

**補題 4.9.**  $n \geq 3$  で、

$$\lambda < 0, \quad 0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + \frac{4-2b}{n} \leq p < 1 + \frac{4-2b}{n-2}$$

を仮定し、また、 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  かつ  $xu_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$  とする。 $I = [0, T)$  とし、関数  $u$  を  $I$  上の (4.1)–(4.2) の解とすると、 $u$  は次を満たす：

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx + 8t^2 E(u_0) \\ &\quad + \frac{4\lambda n}{p+1} \left( p-1 - \frac{4-2b}{n} \right) \int_0^t \int_0^s \| |x|^{-b/(p+1)} u(\tau) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \, d\tau \, ds, \quad t \in I. \end{aligned} \quad (4.54)$$

**証明.** ここでは簡単のため、解  $u$  が滑らかで、各  $t$  に対し  $|x| \rightarrow \infty$  のとき十分速く  $u(x, t) \rightarrow 0$  なることを仮定して、(4.54) を示すことにする。

まず、方程式 (4.1) に  $|x|^2 \bar{u}$  を乗じて、 $\mathbf{R}^n$  上で積分し、虚数部分をとると、

$$i \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} |x|^2 \bar{u} \, dx + \int_{\mathbf{R}^n} \Delta u |x|^2 \bar{u} \, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \lambda |x|^{-b} |u|^{p-1} u |x|^2 \bar{u} \, dx.$$

右辺は実数値をとる (2 章命題 2.11 の証明参照). 左辺については,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(u|x|^2\bar{u}) &= |x|^2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right), \\
\int_{\mathbf{R}^n} \Delta u |x|^2 \bar{u} \, dx &= - \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u \cdot \nabla (|x|^2 \bar{u}) \, dx \\
&= - \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u \cdot [(\nabla |x|^2) \bar{u} + |x|^2 \nabla \bar{u}] \, dx \\
&= -2 \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla u \, dx - \|x \nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2
\end{aligned}$$

であることに注意して,

$$\begin{aligned}
\text{Im(左辺)} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (u|x|^2\bar{u}) \, dx - 2 \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla u \, dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|xu\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - 2 \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla u \, dx
\end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\frac{d}{dt} \|xu\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = 4 \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla u \, dx.$$

ゆえに,

$$\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4 \int_0^t \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x,s) x \cdot \nabla u(x,s) \, dx \, ds \quad (4.55)$$

を得る.

一方, ガウスの発散定理より,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x,t) x \cdot \nabla u(x,t) \, dx &= \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u \, dx + \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} x \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \\
&= \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u \, dx + \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \nabla \cdot \left( x \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dx \\
&\quad - n \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx - \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} x \cdot \nabla \bar{u} \, dx \\
&= 2 \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u \, dx - n \text{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx.
\end{aligned}$$

ここで (4.1) より,  $\partial \bar{u} / \partial t = i(-\Delta \bar{u} + \lambda |x|^{-b} |u|^{p-1} \bar{u})$  であるから,

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} x \cdot \nabla u \, dx &= 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} i(-\Delta \bar{u} + \lambda |x|^{-b} |u|^{p-1} \bar{u}) x \cdot \nabla u \, dx \\
&= -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \Delta \bar{u} (x \cdot \nabla u) \, dx + 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \lambda |x|^{-b} |u|^{p-1} \bar{u} (x \cdot \nabla u) \, dx \\
&= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \nabla \bar{u} \cdot \nabla (x \cdot \nabla u) \, dx + 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\lambda}{p+1} |x|^{-b} x \cdot \nabla (|u|^{p+1}) \, dx \\
&= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} [\nabla u \cdot \nabla \bar{u} + \frac{1}{2} x \cdot \nabla (\nabla u \cdot \nabla \bar{u})] \, dx \\
&\quad - \frac{2\lambda(n-b)}{p+1} \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b} |u|^{p+1} \, dx \\
&= (2-n) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{2\lambda(n-b)}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}.
\end{aligned}$$

同様にして, (4.1) より,  $\partial u / \partial t = i(\Delta u - \lambda |x|^{-b} |u|^{p-1} u)$  であるから,

$$\begin{aligned}
n \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx &= n \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} i \bar{u} (\Delta u - \lambda |x|^{-b} |u|^{p-1} u) \, dx \\
&= n \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u} \Delta u \, dx - \lambda n \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b} |u|^{p+1} \, dx \\
&= -n \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda n \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}.
\end{aligned}$$

上の 3 つの等式を合わせると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x, t) x \cdot \nabla u(x, t) \, dx \\
= 2 \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{\lambda n (p-1 + \frac{2b}{n})}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}
\end{aligned}$$

を得る. この式の両辺を時間変数について積分すると,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}(x, s) x \cdot \nabla u(x, s) \, dx - \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx \\
= \int_0^s \left[ 2 \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{\lambda n (p-1 + \frac{2b}{n})}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u(\tau) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] d\tau.
\end{aligned}$$

これを, (4.55) と合わせると,

$$\begin{aligned}
\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx \\
&\quad + \int_0^t \int_0^s 4 \left[ 2 \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{\lambda n (p-1 + \frac{2b}{n})}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u(\tau) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] d\tau ds.
\end{aligned} \tag{4.56}$$



ここで、エネルギー等式 (2.30)–(2.32) を用いて、(4.56) の右辺から  $\|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2$  を消去すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= E(u_0) - \int_{\mathbf{R}^n} F(|u(x)|) dx \\ &= E(u_0) - \frac{\lambda}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(u_0) \\ &\quad + \frac{4\lambda n}{p+1} \left( p-1 - \frac{4-2b}{n} \right) \int_0^t \int_0^s \| |x|^{-b/(p+1)} u(\tau) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} d\tau ds, \quad t \in I\end{aligned}$$

を得る. □

**注意 4.10.** 補題 4.9 の証明では、解  $u$  が滑らかで、各  $t$  に対し  $|x| \rightarrow \infty$  のとき十分速く  $u(x, t) \rightarrow 0$  となることを仮定した. 厳密な証明については、文献 [10] を参照してほしい.

**定理 4.11.**  $n \geq 3$  で、

$$\lambda < 0, \quad 0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + \frac{4-2b}{n} \leq p < 1 + \frac{4-2b}{n-2}$$

を仮定する. また、 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$  かつ  $xu_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$  で、

$$E(u_0) < 0$$

を仮定する. このとき、定理 4.5 で与えられる初期値問題 (4.1)–(4.2) の時間局所解  $u$  は、存在区間を  $[0, \infty)$  全体に延長することはできない.

**証明.** 背理法で示す.

初期値問題 (4.1)–(4.2) の解  $u$  が、 $[0, \infty)$  上に延長できると仮定する. このとき、補題 4.9 より、(4.54) がすべての  $t \in [0, \infty)$  に対して成立する. そこで、 $\lambda < 0$  かつ  $p \geq 1 + (4-2b)/n$  であることを使うと、

$$\begin{aligned}\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(u_0) \\ &\quad + \frac{4\lambda n}{p+1} \left( p-1 - \frac{4-2b}{n} \right) \int_0^t \int_0^s \| |x|^{-b/(p+1)} u(\tau) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} d\tau ds \\ &\leq \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(u_0), \quad t \in [0, \infty).\end{aligned}\tag{4.57}$$

仮定より  $E(u_0) < 0$  であるので,  $t$  の 2 次方程式

$$8E(u_0)t^2 + \left(4 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx\right) t + \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = 0$$

は, 正と負の根をもつ. 正の根を  $t_0$  とすると (4.57) より  $t > t_0$  に対して,

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &\leq \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t^2 E(u_0) \\ &< \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t_0 \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 dx + 8t_0^2 E(u_0) = 0 \end{aligned}$$

でなければならないが, これは明らかに矛盾である. したがって, 解  $u$  は時間  $t_0$  を超えて解として延長することはできない.  $\square$

#### 4.5 定在波解

本節以降では, 次のような非線形シュレディンガー方程式を考え, 定在波解の存在とその性質を調べる:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = -|x|^{-b}|u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4.58)$$

$\omega > 0$  に対して, 関数  $w(x)$  を次の非線形楕円型方程式の解とする:

$$-\Delta w + \omega w - |x|^{-b}|w|^{p-1}w = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad w \neq 0. \quad (4.59)$$

このとき,

$$v(x, t) = e^{i\omega t} w(x) \quad (4.60)$$

とおくと, 関数  $v(x, t)$  は方程式 (4.58) を満たす. 定在波解とは, (4.60) のような形に表される解のことである.

$n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2)$  のとき, 本章では,  $\omega > 0$  に対して, 汎関数  $S_\omega$  を次のように定める:

$$S_\omega(u) = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{2}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n). \quad (4.61)$$

**定理 4.12.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2)$ ,  $\omega > 0$  とする. このとき, 汎関数  $S_\omega$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  全体で定義され,  $H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$  上の汎関数とみると, すべての  $u \in H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$  に対してガトー微分  $dS_\omega(u, v)$  ( $v \in H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$ ) が存在する. さらに, このガトー微分は次のように表現できる:

$$\begin{aligned} dS_\omega(u, v) &= \partial_u S_\omega(u) v + \partial_{\bar{u}} S_\omega(u) \bar{v} \\ &= 2\operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u) v], \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

ここで、各  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して  $\partial_u S_\omega(u)$  と  $\partial_{\bar{u}} S_\omega(u)$  は、 $H^1(\mathbf{R}^n)$  から  $\mathbf{C}$  への有界線形作用素で次のようなものとする：

$$\begin{aligned}\partial_u S_\omega(u)v &= (\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u) - (v, |x|^{-b}|u|^{p-1}u), \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ \partial_{\bar{u}} S_\omega(u)v &= \overline{\partial_u S_\omega(u)\bar{v}}, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

証明.  $n, b, p$  の仮定から重み付きハーディ型不等式より、

$$\||x|^{-b/(p+1)}u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n) \quad (4.62)$$

が成り立つ。したがって、 $S_\omega$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  から  $\mathbf{R}$  への写像として定義されることがわかる。

さらに、 $u, v \in H_{\text{real}}^1(\mathbf{R}^n)$  とし、絶対値が十分小さな  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $S_\omega$  の定義より、

$$\begin{aligned}S_\omega(u+tv) - S_\omega(u) &= \|\nabla(u+tv)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega\|u+tv\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{2}{p+1}\||x|^{-b/(p+1)}(u+tv)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\quad - \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \omega\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{2}{p+1}\||x|^{-b/(p+1)}u\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= 2t \operatorname{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] + t^2 \left( \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right) \\ &\quad - \frac{2}{p+1} \int_{\mathbf{R}^n} \left[ \left( |x|^{-2b/(p+1)}|u+tv|^2 \right)^{(p+1)/2} - \left( |x|^{-2b/(p+1)}|u|^2 \right)^{(p+1)/2} \right] dx \\ &= 2t \operatorname{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] + t^2 \left( \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right) \\ &\quad - \frac{2}{p+1} \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)}|u+tv|^2 + (1-\theta)|x|^{-2b/(p+1)}|u|^2 \right]^{(p+1)/2} d\theta dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺第3項}) &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)}|u+tv|^2 + (1-\theta)|x|^{-2b/(p+1)}|u|^2 \right]^{(p-1)/2} d\theta \\ &\quad \times \left( |x|^{-2b/(p+1)}|u+tv|^2 - |x|^{-2b/(p+1)}|u|^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)}|u+tv|^2 + (1-\theta)|x|^{-2b/(p+1)}|u|^2 \right]^{(p-1)/2} d\theta \\ &\quad \times |x|^{-2b/(p+1)}(2t \operatorname{Re}(v\bar{u}) + t^2|v|^2) dx\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}I(t) &= 2 \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)}|u+tv|^2 + (1-\theta)|x|^{-2b/(p+1)}|u|^2 \right]^{(p-1)/2} d\theta |x|^{-2b/(p+1)} \operatorname{Re}(v\bar{u}) dx, \\ J(t) &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)}|u+tv|^2 + (1-\theta)|x|^{-2b/(p+1)}|u|^2 \right]^{(p-1)/2} d\theta |x|^{-2b/(p+1)}|v|^2 dx\end{aligned}$$

とにおいて,

$$\begin{aligned} S_\omega(u + tv) - S_\omega(u) \\ = 2t \operatorname{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] - tI(t) - t^2 J(t) + t^2 \left( \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

まず,  $J(t)$  を評価する.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)} |u + tv|^2 + (1 - \theta) |x|^{-2b/(p+1)} |u|^2 \right]^{(p-1)/2} d\theta \\ \leq C \left( |x|^{-b(p-1)/(p+1)} |u|^{p-1} + |x|^{-b(p-1)/(p+1)} |v|^{p-1} \right), \quad |t| < 1 \end{aligned}$$

であるから, 条件

$$\frac{p-1}{p+1} + \frac{2}{p+1} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式と (4.62) を用いて,

$$\begin{aligned} |J(t)| &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} \left( |x|^{-b(p-1)/(p+1)} |u|^{p-1} + |x|^{-b(p-1)/(p+1)} |v|^{p-1} \right) |x|^{-2b/(p+1)} |v|^2 dx \\ &\leq C \left( \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \| |x|^{-b/(p+1)} v \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \right) \| |x|^{-b/(p+1)} v \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &\leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \right) \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^2, \quad |t| < 1. \end{aligned} \quad (4.64)$$

$I(t)$  の評価については, まず次の2つが成立していることに注意する:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)} |u + tv|^2 + (1 - \theta) |x|^{-2b/(p+1)} |u|^2 \right]^{(p-1)/2} d\theta |x|^{-2b/(p+1)} \operatorname{Re}(v\bar{u}) \\ \longrightarrow |x|^{-b} |u|^{p-1} \operatorname{Re}(v\bar{u}) = \operatorname{Re}(v |x|^{-b} |u|^{p-1} \bar{u}), \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n \quad (t \rightarrow 0), \\ \left| \int_0^1 \left[ \theta |x|^{-2b/(p+1)} |u + tv|^2 + (1 - \theta) |x|^{-2b/(p+1)} |u|^2 \right]^{(p-1)/2} d\theta |x|^{-2b/(p+1)} \operatorname{Re}(v\bar{u}) \right| \\ \leq C (|x|^{-b} |u|^{p-1} + |x|^{-b} |v|^{p-1}) |u| |v|, \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n, \quad |t| < 1. \end{aligned}$$

このとき, 条件

$$\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式と (4.62) を用いて,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} (|x|^{-b} |u|^{p-1} + |x|^{-b} |v|^{p-1}) |u| |v| dx \\ = \int_{\mathbf{R}^n} \left( |x|^{-bp/(p+1)} |u|^p \cdot |x|^{-b/(p+1)} |v| + |x|^{-b/(p+1)} |u| \cdot |x|^{-bp/(p+1)} |v|^p \right) dx \\ \leq \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \| |x|^{-b/(p+1)} v \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \\ + \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \| |x|^{-b/(p+1)} v \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \\ \leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$C(|x|^{-b}|u|^{p-1} + |x|^{-b}|v|^{p-1})|u||v| \in L^1(\mathbf{R}^n)$$

となる. したがって, ルベークの収束定理より,

$$I(t) \longrightarrow 2 \int_{\mathbf{R}^n} \operatorname{Re}(v|x|^{-b}|u|^{p-1}\bar{u}) dx = 2 \operatorname{Re}(v, |x|^{-b}|u|^{p-1}u) \quad (t \rightarrow 0) \quad (4.65)$$

を得る.

以上 (4.64)–(4.65) より,

$$\begin{aligned} dS_\omega(u, v) &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbf{R}} \left[ 2 \operatorname{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u)] - I(t) - tJ(t) + t \left( \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right) \right] \\ &= 2 \operatorname{Re}[(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u) - (v, |x|^{-b}|u|^{p-1}u)] \\ &= 2 \operatorname{Re}[\partial_u S_\omega(u)v], \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

が示せた.

また, 各  $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$  に対して, 作用素  $\partial_u S_\omega(u)$ ,  $\partial_{\bar{u}} S_\omega(u) : H^1(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$  が線形作用素であることは明らか. 有界性については, シュワルツの不等式, 条件

$$\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p+1} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式, および (4.62) を用いて,

$$\begin{aligned} |\partial_u S_\omega(u)v| &\leq |(\nabla v, \nabla u)| + |\omega(v, u)| + |(v, |x|^{-b}|u|^{p-1}u)| \\ &\leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \omega\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \| |x|^{-b/(p+1)} v \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^p \\ &\leq C \left( \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right) \\ &\leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right) \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

同様にして,

$$|\partial_{\bar{u}} S_\omega(u)v| \leq C \left( \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^p \right) \|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad u, v \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

ゆえに,  $u$  をとめるごとに  $\partial_u S_\omega(u)$  と  $\partial_{\bar{u}} S_\omega(u)$  は,  $H^1(\mathbf{R}^n)$  から  $\mathbf{C}$  への有界線形作用素である.  $\square$

#### 4.6 定在波解の存在 ( $1 < p < 1 + (4 - 2b)/n$ の場合)

$H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列に関する補題から始める.

**補題 4.13.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $2 < q < 2 + (4 - 2b)/(n - 2)$  と仮定する. このとき,  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の任意の有界列  $\{v_m\}$  から適当に部分列  $\{v_{m_k}\}$  を選び, 列  $\{|x|^{-b/q} v_{m_k}\}$  が  $L_r^q(\mathbf{R}^n)$  における収束列となるようにできる.

証明. 3章の補題 3.15 より,

$$\|v_{m_k}\|_{L^\infty(|x|>R)} \leq CR^{-(n-1)/2} \|v_{m_k}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad R > 0$$

が成り立つから, 条件

$$\frac{1}{\infty} + 1 = 1$$

のもとでヘルダーの不等式を用いて, 次の不等式が成立する:

$$\begin{aligned} \||x|^{-b/q} v_{m_k}\|_{L^q(|x|>R)} &= \left( \int_{|x|>R} |x|^{-b} |v_{m_k}|^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq R^{-b/q} \left( \int_{|x|>R} |v_{m_k}|^{q-2} |v_{m_k}|^2 dx \right)^{1/q} \\ &\leq R^{-b/q} \left( \|v_{m_k}\|_{L^\infty(|x|>R)}^{q-2} \|v_{m_k}\|_{L^2(|x|>R)}^2 \right)^{1/q} \\ &\leq CR^{-b/q} R^{-(n-1)(q-2)/(2q)} \|v_{m_k}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{(q-2)/q} \|v_{m_k}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{2/q} \\ &= CR^{-\{(n-1)(q-2)+2b\}/(2q)} \|v_{m_k}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}, \quad R > 0. \end{aligned}$$

したがって, 仮定  $n \geq 3$ ,  $q > 2$ ,  $b > 0$  により, 任意の  $\varepsilon$  に対して, 十分大きな  $R > 0$  をとれば,

$$\||x|^{-b/q} v_{m_k}\|_{L^q(|x|>R)} < \frac{\varepsilon}{4}$$

とできる.

一方, この  $R$  に対して, 条件

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$$

のもとでヘルダーの不等式を用いて,

$$\||x|^{-b/q} (v_{m_k} - v_{m_l})\|_{L^q(|x|\leq R)} \leq \||x|^{-b/q}\|_{L^{q_1}(|x|\leq R)} \|v_{m_k} - v_{m_l}\|_{L^{q_2}(|x|\leq R)}.$$

このとき,  $q$  の仮定より,  $\||x|^{-b/q}\|_{L^{q_1}(|x|\leq R)} < \infty$  かつ 列  $\{v_{m_k}\}$  は  $L^{q_2}(\mathbf{R}^n)$  における収束列となるような  $q_1, q_2$  をとることができる. なぜならば, 3章の補題 3.16 より,

$$-\frac{b}{q} q_1 + n - 1 > -1, \tag{4.66}$$

$$2 < q_2 < \frac{n+2}{n-2} + 1 \tag{4.67}$$

を満たす  $q_1, q_2$  がとれることが保証されればよい.  $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$  と (4.66) より,

$$\frac{1}{q_2} < \frac{n-b}{nq}.$$

(4.67) より,

$$\frac{n-2}{2n} < \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

したがって,

$$\frac{n-2}{2n} < \frac{n-b}{nq}$$

が成り立てばよいが, これは仮定  $2 < q < 2 + (4 - 2b)/(n - 2)$  より満たされる.

ゆえに, 次の関係が成立するような自然数  $N$  が存在する:

$$\| |x|^{-b/q} (v_{m_k} - v_{m_l}) \|_{L^q(|x| \leq R)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m_k, m_l \geq N).$$

これらのことから,

$$\begin{aligned} & \| |x|^{-b/q} (v_{m_k} - v_{m_l}) \|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \\ &= \| |x|^{-b/q} (v_{m_k} - v_{m_l}) \|_{L^q(|x| \leq R)} + \| |x|^{-b/q} (v_{m_k} - v_{m_l}) \|_{L^q(|x| > R)} \\ &\leq \| |x|^{-b/q} (v_{m_k} - v_{m_l}) \|_{L^q(|x| \leq R)} + \| |x|^{-b/q} v_{m_k} \|_{L^q(|x| > R)} + \| |x|^{-b/q} v_{m_l} \|_{L^q(|x| > R)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad (m_k, m_l \geq N). \end{aligned}$$

$\varepsilon$  は任意の正数であるので, この不等式は列  $\{|x|^{-b/q} v_{m_k}\}$  が  $L^q(\mathbf{R}^n)$  でのコーシー列であることを示している. ゆえに, 完備性により列  $\{|x|^{-b/q} v_{m_k}\}$  は  $L^q(\mathbf{R}^n)$  における収束列である.  $\square$

**注意 4.14.** 補題 4.13 で得られた部分列  $\{v_{m_k}\}$  に対して, さらに次のことが成り立っている:

$$\begin{aligned} v_{m_k} &\longrightarrow v \quad \text{in } L_r^{q_2}(\mathbf{R}^n) \quad (m_k \rightarrow \infty) \\ &\implies |x|^{-b/q} v_{m_k} \longrightarrow |x|^{-b/q} v \quad \text{in } L_r^q(\mathbf{R}^n) \quad (m_k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

ただし,  $q_2$  は補題 4.13 の証明の中に現れる  $q_2$  である.

実際に,

$$|x|^{-b/q} v_{m_k} \longrightarrow w \quad \text{in } L_r^q(\mathbf{R}^n) \quad (m_k \rightarrow \infty)$$

とすれば, 任意の  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  に対して,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b/q} v_{m_k} \varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^n} w \varphi dx.$$

一方, 条件

$$\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q'_2} = 1$$

のもとでヘルダーの不等式を用いて,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b/q} v_{m_k} \varphi dx - \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b/q} v \varphi dx \right| &= \left| \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b/q} (v_{m_k} - v) \varphi dx \right| \\ &\leq \|v_{m_k} - v\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)} \| |x|^{-b/q} \varphi \|_{L^{q'_2}(\mathbf{R}^n)} \end{aligned}$$

ここで, 補題 4.13 の証明より

$$\frac{1}{q_2} + \frac{b}{nq} < \frac{1}{q}$$

であったから,  $q$  の仮定より,

$$\frac{1}{q_2} + \frac{b}{nq} < 1$$

となることに注意すれば, 次の不等式

$$-\frac{b}{q} q'_2 + n - 1 > -1$$

すなわち,

$$\frac{b}{nq} < \frac{1}{q'_2} = 1 - \frac{1}{q_2}$$

は常に満たされる. したがって,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b/q} v_{m_k} \varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b/q} v \varphi dx \quad (m_k \rightarrow \infty).$$

極限の一意性から,

$$\int_{\mathbf{R}^n} w \varphi dx = \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b/q} v \varphi dx$$

ゆえに,

$$w = |x|^{-b/q} v \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n.$$

定在波解の存在を変分法的手法で示すために, ふたたび 3 章で考えた最小化問題 (3.20), すなわち (3.21) を用いる. ただし,  $S_\omega$  の定義式は (4.61) であり,  $E$  は方程式 (4.58) のエネルギー汎関数である.

まず, 方程式 (4.59) の解の存在を示すために必要な補題を準備する.

**補題 4.15.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 < p < 1 + (4 - 2b)/n$  とする. 正数  $\alpha$  に対して,  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の列  $\{u_m\}$  は,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$$

を満たすものと仮定する. このとき,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) \geq c_\alpha$$

が成立する.



**証明.**  $\liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) = +\infty$  のときは明らかに成立するので,  $\liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) < +\infty$  として背理法で示す. もし, 補題 4.15 が成立しないとすると, ある正定数  $\varepsilon_0$  と列  $\{u_m\}$  の部分列  $\{u_{m_k}\}$  を適当に選ぶことにより, 任意の  $m_k$  に対して,

$$E(u_{m_k}) \leq c_\alpha - \varepsilon_0 \quad (4.68)$$

となるようにできる (補題 3.18 の証明参照). ここで,

$$u_{m_k}^\lambda = (1 + \lambda)u_{m_k}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{\alpha}}{\|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}} - 1$$

とおけば,

$$\|u_{m_k}^\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \alpha$$

となり,  $u_{m_k}^\lambda \in K_\alpha$  であることに注意する. 一方, 重み付きハーディ型不等式を用いて,

$$\||x|^{-b/(p+1)}u_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \leq C\|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p-2b\}/2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n(p-1)+2b\}/2}$$

が成り立つことから,

$$\begin{aligned} E(u_{m_k}) &= \frac{1}{2}\|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1}\||x|^{-b/(p+1)}u_{m_k}\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - C\|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p-2b\}/2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n(p-1)+2b\}/2}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

$p$  の仮定から  $\{n(p-1)+2b\}/2 < 2$  となるので, (4.68) と (4.69) より列  $\{\|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\}$  は有界となることがわかる. よって, 列  $\{u_{m_k}\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  で有界である. ゆえに,

$$\|u_{m_k} - u_{m_k}^\lambda\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} = \left| \frac{\sqrt{\alpha}}{\|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}} - 1 \right| \|u_{m_k}\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty)$$

を得る. したがって, 自然数  $N$  を適当に選べば, (4.68) より,

$$E(u_{m_k}^\lambda) \leq E(u_{m_k}) + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \leq c_\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \quad (m_k \geq N).$$

これは,  $c_\alpha$  の定義式に矛盾する. したがって補題 4.15 が証明された.  $\square$

**補題 4.16.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 < p < 1 + (4 - 2b)/n$  とする. 任意の  $\alpha > 0$  に対して,  $c_\alpha$  は有限な負の値をとると仮定する. さらに, 正定数  $\alpha$  と  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の列  $\{u_m\}$  に対して, 次が満たされているとする:

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\longrightarrow \sqrt{\alpha} \quad (m \rightarrow \infty), \\ E(u_m) &\longrightarrow c_\alpha \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

このとき, 列  $\{u_m\}$  のある部分列  $\{u_{m_k}\}$  と  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の元  $w$  が存在して, 次が成立する:

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\longrightarrow w \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n) \quad (m_k \rightarrow \infty), \\ c_\alpha &= E(w), \quad \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

さらに, ある  $\omega > 0$  に対して, 関数  $w$  は方程式 (4.59) の弱解となっている.

**証明.** 証明を4つのステップに分ける.

(ステップ1) 列  $\{\|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\}$  は有界であり,  $p$  の仮定より  $\{n(p-1)+2b\}/2 < 2$  であることと (4.69) から, 列  $\{u_m\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  における有界列であることがわかる. ゆえに, 補題 4.13 と注意 4.14 より,

$$\begin{aligned} \exists \{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}, \quad \exists w \in H_r^1(\mathbf{R}^n); \\ u_{m_k} \longrightarrow w \quad \text{weakly in } H_r^1(\mathbf{R}^n), \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$|x|^{-b/(p+1)} u_{m_k} \longrightarrow |x|^{-b/(p+1)} w \quad \text{in } L^{p+1}(\mathbf{R}^n). \quad (4.71)$$

が成り立つ. (4.70) と (4.71) より, 次も成立する:

$$\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}, \quad (4.72)$$

$$\|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow \beta \quad (\beta \geq 0). \quad (4.73)$$

ここで,  $w \neq 0$  であることを背理法によって示す. もし  $w = 0$  とすると, (4.71) と (4.73) より,

$$\begin{aligned} E(u_{m_k}) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 \quad (m_k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

一方,  $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$  であるから, 仮定より,

$$E(u_{m_k}) \longrightarrow c_\alpha \quad (m_k \rightarrow \infty). \quad (4.74)$$

したがって,

$$c_\alpha = \frac{1}{2} \beta^2 \geq 0$$

でなければならない. これは,  $c_\alpha$  が負の値をとるという仮定に矛盾する. したがって,  $w \neq 0$  が示せた.

(ステップ2)  $\gamma = \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$  とおくと, (4.72) より  $\gamma \leq \alpha$  である. このステップでは,  $\gamma = \alpha$  かつ  $u_{m_k} \rightarrow w$  in  $L^2(\mathbf{R}^n)$  であることを示す. まず,  $\gamma = \alpha$  を背理法によって示す.  $\gamma < \alpha$  と仮定する. このとき,

$$\tilde{u}_{m_k} = u_{m_k} - w$$

とおくと, (4.70) と (4.71) より,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m_k} &\longrightarrow 0 \quad \text{weakly in } H^1(\mathbf{R}^n), \\ |x|^{-b/(p+1)} \tilde{u}_{m_k} &\longrightarrow 0 \quad \text{in } L^{p+1}(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}_{m_k}, w) &\longrightarrow (0, w) = 0 \quad (m_k \rightarrow \infty), \\
\|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|\tilde{u}_{m_k} + w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\
&= \|\tilde{u}_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 2\operatorname{Re}(\tilde{u}_{m_k}, w) \\
&\longrightarrow \alpha \quad (m_k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\|\tilde{u}_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \longrightarrow \alpha - \gamma \quad (m_k \rightarrow \infty) \quad (4.75)$$

を得る. ここで, 3 章 (3.30) に対して, 次が成立することに注意しておく:

$$\| |x|^{-b/(p+1)} u_\lambda \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = \lambda^{\eta(p+1)-n+b} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}. \quad (4.76)$$

いま, (3.30) で  $\eta = (2-b)/(p-1)$  とおくと, (3.31)–(3.32) と (4.76) より,  $\lambda > 0$  に対して,

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^{\frac{4-n(p-1)-2b}{p-1}} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\
E(u_\lambda) &= \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{p-1}} E(u).
\end{aligned}$$

ゆえに,  $0 < \gamma < \alpha$  なる  $\gamma$  に対して,

$$\lambda = \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{p-1}{4-n(p-1)-2b}}$$

とおくと,

$$\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \frac{\gamma}{\alpha} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \quad E(u_\lambda) = \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{4-n(p-1)-2b}} E(u)$$

であるから,  $c_\alpha$  の定義式より

$$c_\gamma = \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{4-n(p-1)-2b}} c_\alpha$$

が結論される. ここで,  $\gamma$  を  $\alpha - \gamma$  で置き換えると,

$$c_{\alpha-\gamma} = \left( \frac{\alpha-\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{4-n(p-1)-2b}} c_\alpha$$

を得る. もし,  $q > 1$  ならば,  $s > 0$  に対して  $s^q$  は下に凸な関数であるので,

$$\theta^q + (1-\theta)^q < 1 \quad (0 < \theta < 1)$$

が成立することに注意すると,  $p$  の仮定より  $\{n+2-(n-2)p-2b\}/\{4-n(p-1)-2b\} > 1$  であることと, 仮定より  $c_\alpha < 0$  であることから,

$$c_\gamma + c_{\alpha-\gamma} = \left[ \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{4-n(p-1)-2b}} + \left( \frac{\alpha-\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{4-n(p-1)-2b}} \right] c_\alpha > c_\alpha \quad (0 < \gamma < \alpha). \quad (4.77)$$

一方,

$$\begin{aligned}
E(u_{m_k}) &= E(\tilde{u}_{m_k} + w) \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \operatorname{Re}(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) \\
&\quad + \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} (\tilde{u}_{m_k} + w) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\
&= E(\tilde{u}_{m_k}) + E(w) + \operatorname{Re}(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) \\
&\quad - \frac{1}{p+1} \left[ \| |x|^{-b/(p+1)} (\tilde{u}_{m_k} + w) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right. \\
&\quad \left. - \| |x|^{-b/(p+1)} \tilde{u}_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} - \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right]
\end{aligned}$$

と変形して,

$$\begin{aligned}
E(u_{m_k}) &= E(\tilde{u}_{m_k}) + E(w) + A(\tilde{u}_{m_k}, w) \\
A(\tilde{u}_{m_k}, w) &= \operatorname{Re}(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) \\
&\quad - \frac{1}{p+1} \left[ \| |x|^{-b/(p+1)} (\tilde{u}_{m_k} + w) \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right. \\
&\quad \left. - \| |x|^{-b/(p+1)} \tilde{u}_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} - \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right]
\end{aligned} \tag{4.78}$$

とする. このとき,  $(\nabla \tilde{u}_{m_k}, \nabla w) \rightarrow 0$  ( $m_k \rightarrow \infty$ ) であるから, 次が成立する:

$$A(\tilde{u}_{m_k}, w) \rightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty).$$

この事実, および (4.75) と補題 4.15 より, (4.78) の両辺において,  $m_k \rightarrow \infty$  のときの下極限をとると

$$\begin{aligned}
c_\alpha &= \liminf_{m_k \rightarrow \infty} E(u_{m_k}) \\
&\geq \liminf_{m_k \rightarrow \infty} E(\tilde{u}_{m_k}) + E(w) + \liminf_{m_k \rightarrow \infty} A(\tilde{u}_{m_k}, w) \\
&\geq c_{\alpha-\gamma} + c_\gamma
\end{aligned}$$

を得る. これは, (4.77) に矛盾する. したがって,  $\gamma = \alpha$  と結論される. さらに, このことと (4.70) より,

$$\|u_{m_k} - w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \|u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - 2 \operatorname{Re}(u_{m_k}, w) + \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \rightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty).$$

ゆえに,

$$u_{m_k} \rightarrow w \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^n).$$

(ステップ3) このステップでは,  $c_\alpha = E(w)$ ,  $u_{m_k} \rightarrow w$  in  $H^1(\mathbf{R}^n)$ であることを示す. (4.70), (4.71), (4.74) から,

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \lim_{m_k \rightarrow \infty} E(u_{m_k}) \\ &\geq \frac{1}{2} \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \| |x|^{-b/(p+1)} u_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= E(w). \end{aligned}$$

ところで, ステップ2 より  $\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$  であるので,  $c_\alpha$  の定義式より,

$$c_\alpha = E(w)$$

でなければならない. これより, ふたたび (4.71) と (4.74) から次を得る:

$$\begin{aligned} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= 2 \lim_{m_k \rightarrow \infty} \left[ E(u_{m_k}) + \frac{1}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= 2 \left( c_\alpha + \frac{1}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right) \\ &= 2 \left( E(w) + \frac{1}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right) \\ &= \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

したがって, (4.70) から,

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{m_k} - \nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - 2 \operatorname{Re}(\nabla u_{m_k}, \nabla w) + \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &\rightarrow 0 \quad (m_k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

よって, ステップ2 で得た  $\|u_{m_k} - w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \rightarrow 0$  ( $m_k \rightarrow \infty$ ) と合わせて

$$u_{m_k} \rightarrow w \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n)$$

が結論される.

(ステップ4) ある  $\omega > 0$  に対して, 関数  $w$  が方程式 (4.59) の弱解となっていることを示す. そのために,

$$\begin{aligned} T(u) &= \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ K &= \{v \in H^1(\mathbf{R}^n); T(v) = \alpha\} \end{aligned}$$

とおけば, これまでの議論から,  $w \in H^1(\mathbf{R}^n)$  は,  $w \in K$  で  $E$  の  $K$  上の極値点であり,  $\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \alpha \neq 0$  である. したがって, 定理 3.11(ii) を適用すると,

$$\begin{aligned} \partial_w E(w)v - \lambda \partial_w T(w)v &= 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \\ \lambda &= \frac{\operatorname{Re}[\partial_w E(w)w]}{\operatorname{Re}[\partial_w T(w)w]}. \end{aligned}$$

したがって、次を得る:

$$(\nabla v, \nabla w) - (v, |x|^{-b}|w|^{p-1}w) - 2\lambda(v, w) = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n),$$

$$2\lambda = \frac{\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \| |x|^{-b/(p+1)}w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}}{\|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2}.$$

ところで,

$$0 > c_\alpha = E(w) = \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1}\| |x|^{-b/(p+1)}w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}$$

であるから,

$$\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \| |x|^{-b/(p+1)}w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < \frac{1-p}{p+1}\| |x|^{-b/(p+1)}w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0.$$

よって,  $\lambda < 0$  でなければならない. そこで,  $\omega = -2\lambda$  とおくと, 関数  $w$  は方程式

$$(\nabla v, \nabla w) + \omega(v, w) - (v, |x|^{-b}|w|^{p-1}w) = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

を満たす. これで, 補題 4.16 の証明はすべて完結した. □

それでは, いよいよ補題 4.16 を使って定在波解の存在を証明しよう.

**定理 4.17.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 < p < 1 + (4 - 2b)/n$  とする. 任意の  $\alpha > 0$  に対して,  $0 > c_\alpha > -\infty$  であり,  $c_\alpha$  を達成する  $w \in K_\alpha \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する. この関数  $w$  は, ある  $\omega > 0$  に対して方程式 (4.59) の弱解となっている.

**証明.** 最初に,  $c_\alpha$  が有限な負の値となることを示す.  $u \in K_\alpha$  であるように  $u$  を選び, (3.30) で  $\eta = n/2$  とおくと, (3.31)–(3.32) と (4.76) から, 任意の  $\lambda > 0$  に対して,

$$E(u_\lambda) = \lambda^2 \left[ \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{\lambda^{\frac{n}{2}(p-1)-2+b}}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)}u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right],$$

$$\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \alpha$$

を得る. 仮定より,  $p < 1 + (4 - 2b)/n$  であるので,  $\lambda$  を

$$0 < \lambda < \left( \frac{2}{p+1} \frac{\| |x|^{-b/(p+1)}u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}}{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2} \right)^{1/\{2-b-\frac{n}{2}(p-1)\}}$$

ととれば,  $u_\lambda \in K_\alpha$  かつ  $E(u_\lambda) < 0$  となる. したがって,  $c_\alpha < 0$  である.

一方,  $p < 1 + (4 - 2b)/n$ , すなわち  $\{n(p-1) + 2b\}/2 < 2$  であることと (4.69) から, 次の関係が結論される:

$$0 > c_\alpha \geq \inf_{s>0} \left[ \frac{1}{2}s^2 - C\alpha^{\{n+2-(n-2)p-2b\}/4} s^{\{n(p-1)+2b\}/2} \right] > -\infty.$$

ゆえに、 $c_\alpha$  は有限な負の値となる。

次に、後半の主張を示す。 $c_\alpha$  の定義式より、 $K_\alpha$  の元の列  $\{u_m\}$  で、

$$\begin{aligned} E(u_m) &\longrightarrow c_\alpha \quad (m \rightarrow \infty), \\ c_\alpha &\leq E(u_m) \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

を満たすものがとれる。列  $\{u_m\}$  の各元の対称減少再配分  $u_m^*$  を考えると、補題 3.12 より、

$$\|u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}$$

であるから、

$$\{u_m^*\} \subset K_\alpha \cap H_r^1(\mathbf{R}^n).$$

また、

$$\||x|^{-b/q} u^*\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} = \||x|^{-b/q} u\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \quad (1 \leq q < \infty)$$

が成立していることに注意すれば、

$$\begin{aligned} c_\alpha \leq E(u_m^*) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \||x|^{-b/(p+1)} u_m^*\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{1}{p+1} \||x|^{-b/(p+1)} u_m\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= E(u_m) \end{aligned}$$

であるから、

$$E(u_m^*) \longrightarrow c_\alpha \quad (m \rightarrow \infty).$$

ゆえに、列  $\{u_m^*\}$  は補題 4.16 の仮定をすべて満たすので、補題 4.16 より、列  $\{u_m^*\}$  の部分列  $\{u_{m_k}^*\}$  と  $w \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在して次が成立するようにできる：

$$\begin{aligned} u_{m_k}^* &\longrightarrow w \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n) \quad (m_k \rightarrow \infty), \\ c_\alpha &= E(w), \quad \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

すなわち、 $c_\alpha$  を達成する  $w \in K_\alpha \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する。さらに、補題 4.16 の後半より、ある  $\omega > 0$  に対して、関数  $w \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$  は方程式 (4.59) の弱解となる。□

#### 4.7 定在波解の存在と不安定性 $(1 + (4 - 2b)/n < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2))$ の場合)

本節では、

$$n \geq 3, \quad 0 < b < 2, \quad 1 + \frac{4 - 2b}{n} < p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

のときの、定在波解の存在を示す。なお、その不安定性は、初期値問題の一意可解性の仮定から、

$$n \geq 3, \quad 0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + \frac{4 - 2b}{n} < p < 1 + \frac{4 - 2b}{n - 2}$$

のときに示されることになる。

まず、定在波解の存在証明から始めるために、 $H^1(\mathbf{R}^n)$  上の汎関数  $T$  を次のように定める：

$$T(u) = 2\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)+2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

これは、本章の (4.56) における右辺の時間積分の中に、被積分関数として現れるものであることに注意しておく。 $\omega > 0$  に対して、次のような最小化問題を考える：

$$c_\omega = \inf_{u \in K} S_\omega(u). \quad (4.79)$$

ただし、

$$K = \{u \in H^1(\mathbf{R}^n); u \neq 0, T(u) = 0\}$$

とする。このとき、この最小化問題を考えることは、次の最小化問題を考えることと同じである：

$$\begin{aligned} c_\omega &= \inf_{u \in K} J_\omega(u), \\ J_\omega(u) &= \frac{n(p-1)+2b-4}{n(p-1)+2b} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2. \end{aligned} \quad (4.80)$$

いま  $p > 1 + (4-2b)/n$  を仮定しているので、 $J_\omega(u)$  の定義式における右辺の第 1 項の係数は正となる。したがって、 $c_\omega$  は有限な非負の値をとる。

**定理 4.18.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 + (4-2b)/n < p < 1 + (4-2b)/(n-2)$ ,  $\omega > 0$  とする。このとき、 $c_\omega > 0$  であり、 $c_\omega$  を達成する最小化問題 (4.80) (あるいは (4.79)) の解  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が存在する。また、関数  $w$  は方程式 (4.59) の弱解となっている。

**証明.** 2つのステップに分けて進める。

(ステップ 1)  $c_\omega$  を達成する (4.80) の解  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の存在を示す。

$c_\omega$  の定義より  $m \in \mathbf{N}$  に対して、次が成り立つ：

$$\exists \{u_m\} \subset K; J_\omega(u_m) \longrightarrow c_\omega \quad (m \rightarrow \infty).$$

このとき、汎関数  $J_\omega$  の定義より、列  $\{u_m\}$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列となる。そこで、列  $\{u_m\}$  の各元の対称減少再配分  $u_m^*$  を考えると、補題 3.12 より、次を満たすような  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列  $\{u_m^*\}$  がとれる：

$$\begin{aligned} \|u_m^*\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} &= \|u_m\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}, \quad 2 \leq q < 2 + \frac{4-2b}{n-2}, \\ \| |x|^{-b/q} u_m^* \|_{L^q(\mathbf{R}^n)} &= \| |x|^{-b/q} u_m \|_{L^q(\mathbf{R}^n)}, \quad 2 \leq q < 2 + \frac{4-2b}{n-2}, \\ \|\nabla u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \|\nabla u_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}$$

したがって、

$$T(u_m^*) \leq T(u_m) = 0 \quad (m \geq 1)$$



となる．もし  $T(u_m^*) = 0$  であるときは  $v_m = u_m^*$  とおく．もし  $T(u_m^*) < 0$  ならば

$$T(\lambda u_m^*) = 2\lambda^2 \|\nabla u_m^*\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p+1} \frac{n(p-1) + 2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u_m^* \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0$$

となるような  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) を選び,  $v_m = \lambda u_m^*$  とおく．実際,  $p+1 > 2$  であることから, このような  $p$  はただ一つ存在する．こうして得られた列  $\{v_m\}$  に対しては,

$$v_m \in K \quad (m \geq 1).$$

また,

$$\begin{aligned} J_\omega(v_m) &= \lambda^2 J_\omega(u_m^*) \quad (0 < \lambda \leq 1), \\ J_\omega(u_m^*) &\leq J_\omega(u_m) \end{aligned}$$

であるから,

$$c_\omega \leq J_\omega(v_m) \leq J_\omega(u_m^*) \leq J_\omega(u_m) \quad (m \geq 1)$$

が満たされている．したがって, 列  $\{v_m\}$  は  $H_r^1(\mathbf{R}^n)$  の有界列であり,

$$J_\omega(v_m) \longrightarrow c_\omega \quad (m \rightarrow \infty)$$

が成立する．さらに, 補題 4.13 と注意 4.14 を用いれば, 次が成立する:

$$\begin{aligned} \exists \{v_{m_k}\} \subset \{v_m\}, \quad \exists w \in H_r^1(\mathbf{R}^n); \\ v_{m_k} \longrightarrow w \quad \text{weakly in } H_r^1(\mathbf{R}^n), \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$|x|^{-b/(p+1)} v_{m_k} \longrightarrow |x|^{-b/(p+1)} w \quad \text{in } L^{p+1}(\mathbf{R}^n). \tag{4.82}$$

次に,  $w \in K$  かつ  $c_\omega = J_\omega(w)$  であることを示す．まず (4.81) より,

$$\begin{aligned} c_\omega &= \lim_{m_k \rightarrow \infty} J_\omega(v_{m_k}) \\ &\geq \frac{n(p-1) + 2b - 4}{n(p-1) + 2b} \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &\geq \frac{n(p-1) + 2b - 4}{n(p-1) + 2b} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = J_\omega(w). \end{aligned} \tag{4.83}$$

一方,  $T(v_{m_k}) = 0$  であるから,

$$\begin{aligned} T(w) &= 2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1) + 2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\leq 2 \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1) + 2b}{p+1} \lim_{m_k \rightarrow \infty} \| |x|^{-b/(p+1)} v_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= \liminf_{m_k \rightarrow \infty} \left( 2\|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1) + 2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} v_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $T(w) = 0$ であることを背理法で示す。もし、 $T(w) < 0$ とすると、

$$2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 < \frac{n(p-1)+2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}$$

であるから、 $w \neq 0$ となる。よって、

$$T(\lambda w) = 2\lambda^2 \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p+1} \frac{n(p-1)+2b}{p+1} \|w\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0$$

となるように $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ )を選べば、 $\lambda w \in K$ であり、 $0 < \lambda < 1$ と(4.83)より、

$$J_\omega(\lambda w) = \lambda^2 J_\omega(w) < J_\omega(w) \leq c_\omega$$

となる。これは、 $c_\omega$ の定義式に矛盾する。したがって、 $T(w) = 0$ でなければならない。 $w \in K$ であることをいうためには、あと $w \neq 0$ であることを示せばよい。そこで、 $v_{m_k} \in K$ であることと重み付きハーディ型の不等式を用いて、

$$\begin{aligned} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \frac{n(p-1)+2b}{2(p+1)} \| |x|^{-b/(p+1)} v_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\leq C \|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p-2b\}/2} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n(p-1)+2b\}/2} \end{aligned}$$

いま、 $v_{m_k} \neq 0$ であるので、上の不等式の両辺を $\|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$ で割ると、

$$1 \leq C \|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n+2-(n-2)p-2b\}/2} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{\{n(p-1)+2b-4\}/2} \quad (4.84)$$

ただし、右辺の定数 $C$ は $m_k$ にはよらない。もし、 $w = 0$ とすると(4.82)より、

$$\begin{aligned} \|\nabla v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \frac{n(p-1)+2b}{2(p+1)} \| |x|^{-b/(p+1)} v_{m_k} \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &\rightarrow \frac{n(p-1)+2b}{2(p+1)} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= 0 \quad (m_k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。列 $\{v_{m_k}\}$ は $H_r^1(\mathbf{R}^n)$ での有界列であるので、列 $\{\|v_{m_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\}$ は有界となる。ここで、 $p$ の仮定から $\{n(p-1)+2b-4\}/2 > 0$ であることに注意して、不等式(4.84)の両辺において $m_k \rightarrow \infty$ のときの極限を考えると、右辺 $\rightarrow 0$ となり矛盾が生じる。したがって、 $w \neq 0$ が示された。以上より、 $w \in K$ が結論される。さらに、(4.83)と $c_\omega$ の定義より、

$$c_\omega = J_\omega(w) > 0$$

を得る。

(ステップ2) ステップ1で求めた $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$ が方程式(4.59)の弱解になっていることを示す。

ステップ 1 で求めた関数  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  は、最小化問題 (4.79) の解であるから、 $w \in K$  は  $S_\omega$  の  $K$  上の極値点である。よって定理 3.11(ii) を適用すると次の関係式を得る：

$$\partial_w S_\omega(w)v - \lambda \partial_w T(w)v = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n), \quad (4.85)$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{Re}[\partial_w S_\omega(w)w]}{\operatorname{Re}[\partial_w T(w)w]}. \quad (4.86)$$

このとき、

$$\partial_u T(u)v = 2(\nabla v, \nabla u) - \frac{n(p-1) + 2b}{2}(v, |x|^{-b}|u|^{p-1}u)$$

である。ここで、 $w \in K$  より、

$$2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1) + 2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0 \quad (4.87)$$

であるので、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\partial_w T(w)w] &= 2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1) + 2b}{2} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \\ &= -\frac{n(p-1) \left(p-1 + \frac{2b}{n}\right)}{2(p+1)} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0. \end{aligned}$$

したがって、 $w$  は  $\operatorname{Re}[\partial_w T(w)w] \neq 0$  となる  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の元であり定理 3.11(ii) の仮定はすべて満たされていることに注意しよう。

次に、 $\lambda = 0$  であることを示す。関数  $w$  に対して、 $\eta = (2-b)/(p-1)$  とした (3.30) によって与えられる関数を  $w_\lambda$  とする。このとき、(3.31)–(3.32) と (4.76) より、

$$\begin{aligned} \|w_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^{\frac{4-n(p-1)-2b}{p-1}} \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|\nabla w_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{p-1}} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|w_\lambda\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} &= \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{p-1}} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}. \end{aligned}$$

よって、

$$T(w_\lambda) = \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{p-1}} T(w) = 0, \quad \lambda > 0$$

となり、すべての  $\lambda > 0$  に対して、 $w_\lambda \in K$  となる。 $w$  は  $J_\omega$  の  $K$  上での最小値を達成する関数であるので、

$$J_\omega(w_\lambda) \geq J_\omega(w), \quad \lambda > 0$$

でなければならない。したがって、次の関係式を得る:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d}{d\lambda} J_\omega(w_\lambda) \right|_{\lambda=1} \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left[ \lambda^{\frac{n+2-(n-2)p-2b}{p-1}} \frac{n(p-1)+2b-4}{n(p-1)+2b} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \lambda^{\frac{4-n(p-1)-2b}{p-1}} \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right] \Big|_{\lambda=1} \\
&= \frac{n(p-1)+2b-4}{n(p-1)+2b} \frac{n+2-(n-2)p-2b}{p-1} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{4-n(p-1)-2b}{p-1} \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

この関係式と (4.87) より,

$$\begin{aligned}
\omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \frac{n+2-(n-2)p-2b}{n(p-1)+2b} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\
\| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} &= \frac{2(p+1)}{n(p-1)+2b} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

これらを用いて,

$$\partial_w S_\omega(w)w = 0$$

が示される。したがって、(4.86) から  $\lambda = 0$  が結論できる。

$\lambda = 0$  が示せたので、(4.85) から,

$$\partial_w S_\omega(w)v = 0, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^n)$$

を得る。これは、関数  $w \in K \cap H_r^1(\mathbf{R}^n)$  が方程式 (4.2) の弱解であることを示している。  $\square$

定理 4.18 で求めた方程式 (4.59) の解から、(4.60) によってつくられる方程式 (4.58) の定在波解  $v$  が不安定であることを示す。その証明の前に、補題を 3 つ準備しておく。

**補題 4.19.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 + (4-2b)/n < p < 1 + (4-2b)/(n-2)$ ,  $\omega > 0$  とし、関数  $u$  は,

$$T(u) < 0,$$

$$S_\omega(u) < c_\omega$$

を満たすような任意の  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の元とする。このとき、次の不等式が成立する:

$$T(u) \leq S_\omega(u) - c_\omega.$$

証明.  $\lambda > 0$  とする. 関数  $u$  に対して,  $\eta = n/2$  とした (3.30) によって与えられる関数を  $u_\lambda$  とする. このとき, (3.31)–(3.32) と (4.76) より,

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \|\nabla u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \lambda^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2, \\ \| |x|^{-b/(p+1)} u_\lambda \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} &= \lambda^{\{n(p-1)+2b\}/2} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \end{aligned}$$

であるから, 次が成立する:

$$T(u_\lambda) = \lambda^2 \left[ 2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{\{n(p-1)+2b-4\}/2} \frac{n(p-1)+2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right], \quad (4.88)$$

$$S_\omega(u_\lambda) = \lambda^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{\{n(p-1)+2b\}/2} \frac{2}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}. \quad (4.89)$$

仮定より,  $T(u) < 0$ ,  $n(p-1)+2b-4 > 0$  であることと (4.88) から,

$$\begin{aligned} 0 < \lambda^* < 1, \quad T(u_{\lambda^*}) &= 0, \\ T(u_\lambda) < 0 \quad (\lambda^* < \lambda \leq 1) \end{aligned}$$

を満たす定数  $\lambda^*$  がただ 1 つ存在することがわかる. 一方,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} S_\omega(u_\lambda) &= 2\lambda \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{n(p-1)+2b}{p+1} \lambda^{\{n(p-1)+2b-2\}/2} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}, \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} S_\omega(u_\lambda) &= 2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\ &\quad - \frac{\{n(p-1)+2b\}\{n(p-1)+2b-2\}}{2(p+1)} \lambda^{\{n(p-1)+2b-4\}/2} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \end{aligned}$$

である. ここで,  $h(\lambda) = S_\omega(u_\lambda)$  とおくと,

$$h'(1) = T(u). \quad (4.90)$$

$p$  の仮定から,  $\{n(p-1)+2b-2\}/2 > 1$  であるので,  $\lambda^* \leq \lambda \leq 1$  のとき  $T(u_\lambda) \leq 0$  より,

$$h''(\lambda) \leq \left[ 1 - \frac{n(p-1)+2b-2}{2} \right] \frac{n(p-1)+2b}{p+1} \lambda^{\{n(p-1)+2b-4\}/2} \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0. \quad (4.91)$$

したがって, テイラーの定理より, ある定数  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) に対して, 次式が成立する:

$$h(\lambda^*) = h(1) + (\lambda^* - 1)h'(1) + \frac{1}{2}(\lambda^* - 1)^2 h''(1 + \theta(\lambda^* - 1)).$$

ゆえに, (4.90) と (4.91) より,

$$S_\omega(u_{\lambda^*}) \leq S_\omega(u) + (\lambda^* - 1)T(u).$$

$u_{\lambda^*} \in K$  であるので,  $c_\omega \leq S_\omega(u_{\lambda^*})$  と  $0 < \lambda^* < 1$  に注意すると,

$$\begin{aligned} T(u) &\leq \frac{1}{1-\lambda^*} \{S_\omega(u) - S_\omega(u_{\lambda^*})\} \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda^*} \{S_\omega(u) - c_\omega\} \\ &\leq S_\omega(u) - c_\omega \end{aligned}$$

が結論される. □

**補題 4.20.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 + (4-2b)/n < p < 1 + (4-2b)/(n-2)$ ,  $\omega > 0$  とする. ここで,  $d < c_\omega$  であるような実数  $d$  に対して,

$$A_d = \{u \in H^1(\mathbf{R}^n); T(u) < 0, S_\omega(u) \leq d\}$$

とおく.  $0 < T \leq +\infty$  とし, 初期時刻  $t = 0$  で  $u_0 \in A_d$  を初期値とする方程式 (4.58) の解  $u$  が時間区間  $[0, T)$  上で存在し,

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap L^r([0, T); L^q(\mathbf{R}^n)), \\ \nabla u &\in L^r((0, T'); L^q(\mathbf{R}^n)), \quad 0 < T' < T \end{aligned}$$

を満たすものとする. ただし,  $q$  は補題 4.3 によって得られる  $q$  で,  $r$  は

$$\frac{2}{r} = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$$

を満たす定数である. このとき, 次が成立する:

$$u(t) \in A_d, \quad t \in [0, T).$$

証明は, 3 章補題 3.27 と同じのため省略する.

**補題 4.21.**  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 < p < 1 + (4-2b)/(n-2)$ ,  $\omega > 0$  とする. このとき, 方程式 (4.59) の球対称な弱解  $u$  は, ある正定数  $a$  に対して,

$$e^{a|x|}u \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

を満たす.

**証明.** 補題 3.15 より,

$$u(r) \longrightarrow 0 \quad (r = |x| \rightarrow \infty)$$

であるから,

$$v = u \exp \left( \frac{a|x|}{1 + \varepsilon|x|} \right), \quad a, \varepsilon > 0$$

とおけば,  $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$  である.  $u$  は方程式 (4.59) の弱解であるから, この  $v$  に対して, 次が成立する:

$$(\nabla v, \nabla u) + \omega(v, u) - (v, |x|^{-b}|u|^{p-1}u) = 0.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \omega\left(u \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right), u\right) &= \left(u \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right), |x|^{-b}|u|^{p-1}u\right) - \left(\nabla\left[u \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right)\right], \nabla u\right) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{-b}|u|^{p+1} \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right) dx - \left(\nabla\left[u \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right)\right], \nabla u\right). \end{aligned}$$

ここで, 右辺の第1項と第2項をそれぞれ  $A, B$  と書くことにする. 補題 3.15 より, 正定数  $K$  に対して,  $|x| > K$  のとき,

$$\begin{aligned} |u|^{p-1} &\leq \|u\|_{L^\infty(|x|>K)}^{p-1} \\ &\leq \left(CK^{-(n-1)/2}\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}\right)^{p-1} \\ &= CK^{-(n-1)(p-1)/2}\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^{p-1} \end{aligned}$$

であるから,  $-(n-1)(p-1)/2 < 0$  に注意すれば, 十分大きな  $K$  に対して,

$$|u|^{p-1} \leq \omega$$

とできる. したがって, 十分大きな  $K$  に対して, 次が成立する:

$$\begin{aligned} A &= \int_{|x|\leq K} |x|^{-b}|u|^{p+1} \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right) dx + \int_{|x|>K} |x|^{-b}|u|^{p-1}|u|^2 \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right) dx \\ &\leq \int_{|x|\leq K} |x|^{-b}|u|^{p+1} \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right) dx + \omega K^{-b} \int_{|x|>K} |u|^2 \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right) dx. \end{aligned} \quad (4.92)$$

また, シュワルツの不等式より,

$$\begin{aligned} &\left|\left(u \nabla \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right), \nabla u\right)\right| \\ &\leq a \left|\left(\frac{u}{(1+\varepsilon|x|)^2} \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right), \nabla u\right)\right| \\ &\leq a \left\|\frac{u}{(1+\varepsilon|x|)^2} \exp\left(\frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)}\right)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \left\|\nabla u \exp\left(\frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)}\right)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} B &= \left(u \nabla \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right), \nabla u\right) + \left(\nabla u \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right), \nabla u\right) \\ &\geq -a \left\|\frac{u}{(1+\varepsilon|x|)^2} \exp\left(\frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)}\right)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \left\|\nabla u \exp\left(\frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)}\right)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\quad + \left(\nabla u \exp\left(\frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|}\right), \nabla u\right). \end{aligned} \quad (4.93)$$

(4.92) と (4.93) より,

$$\begin{aligned}
& \omega \left( u \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right), u \right) \\
& \leq \int_{|x| \leq K} |x|^{-b} |u|^{p+1} \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right) dx + \omega K^{-b} \int_{|x| > K} |u|^2 \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right) dx \\
& \quad + a \left\| \frac{u}{(1+\varepsilon|x|)^2} \exp \left( \frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)} \right) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \left\| \nabla u \exp \left( \frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)} \right) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\
& \quad - \left( \nabla u \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right), \nabla u \right) \\
& \leq \int_{|x| \leq K} |x|^{-b} |u|^{p+1} \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right) dx + \omega K^{-b} \int_{|x| > K} |u|^2 \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right) dx \\
& \quad + a \left( \frac{a}{4} \left\| \frac{u}{(1+\varepsilon|x|)^2} \exp \left( \frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)} \right) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \frac{1}{a} \left\| \nabla u \exp \left( \frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)} \right) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \right) \\
& \quad - \left( \nabla u \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right), \nabla u \right) \\
& = \int_{|x| \leq K} |x|^{-b} |u|^{p+1} \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right) dx + \omega K^{-b} \int_{|x| > K} |u|^2 \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right) dx \\
& \quad + \frac{a^2}{4} \left\| \frac{u}{(1+\varepsilon|x|)^2} \exp \left( \frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)} \right) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

ここで, 2 番目の不等式では,  $\alpha\beta \leq (\alpha^2 + \beta^2)/2$  より,

$$\alpha\beta = \left( \sqrt{\frac{a}{2}} \alpha \right) \left( \sqrt{\frac{2}{a}} \beta \right) \leq \frac{a}{4} \alpha^2 + \frac{1}{a} \beta^2$$

が成り立つことを用いた. したがって,

$$\begin{aligned}
& \omega \left( u \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right), u \right) - \omega K^{-b} \left( u \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right), u \right) \\
& \quad - \frac{a^2}{4} \left\| \frac{u}{(1+\varepsilon|x|)^2} \exp \left( \frac{a|x|}{2(1+\varepsilon|x|)} \right) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \\
& \leq \int_{|x| \leq K} |x|^{-b} |u|^{p+1} \exp \left( \frac{a|x|}{1+\varepsilon|x|} \right) dx. \tag{4.94}
\end{aligned}$$

不等式 (4.94) の両辺において  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると,

$$\begin{aligned}
\left\{ (1 - K^{-b})\omega - \frac{a^2}{4} \right\} (ue^{a|x|}, u) & \leq \int_{|x| \leq K} |x|^{-b} |u|^{p+1} e^{a|x|} dx \\
& \leq \int_{|x| \leq K} |x|^{-b} |u|^{p+1} e^{aK} dx \\
& \leq C \| |x|^{-b/(p+1)} u \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}.
\end{aligned}$$



仮定より, 右辺は  $u$  の  $H^1(\mathbf{R}^n)$  ノルムで評価される. ゆえに,  $(1 - K^{-b})\omega - a^2/4 > 0$  となるくらい十分小さく  $a > 0$  を選べば,

$$e^{a|x|}u \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

を得る. □

**定理 4.22.**  $n \geq 3$  で,

$$0 < b < \frac{4}{n}, \quad 1 + \frac{4-2b}{n} < p < 1 + \frac{4-2b}{n-2}$$

を仮定し,  $\omega > 0$  とする. このとき, 方程式 (4.58) の定在波解  $v$  は定義 3.21(ii) の意味で不安定である.

**証明.** 方程式 (4.58) の定在波解  $v$  の不安定性を証明するためには,  $v(0)$  の任意の近傍から, 方程式 (4.58) の解が有限時間内に爆発するような初期値が必ずとり出せることを示せばよい.

$d < c_\omega$  とし,  $u_0 \in A_d$  かつ  $xu_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$  とする. ただし,  $H^1(\mathbf{R}^n)$  の部分集合  $A_d$  は, 補題 4.20 の中で定義されているようなものとする. 初期時刻  $t = 0$  で初期条件  $u(0) = u_0$  を満たす方程式 (4.58) の解を  $u(x, t)$  と書く. このとき, 解  $u(t)$  が時間区間  $[0, \infty)$  上全体に延長できないことを背理法で示す. もし, 解  $u(t)$  が  $[0, \infty)$  上で存在したと仮定すると, 補題 4.9 より,

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 &= \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx \\ &\quad + 4 \int_0^t \int_0^s T(u(\tau)) \, d\tau ds, \quad t \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (4.95)$$

を得る (もっと正確には (4.56) 参照).  $u_0 \in A_d$  の仮定から, 補題 4.20 より,

$$u(t) \in A_d, \quad t \in [0, \infty).$$

よって, 補題 4.19 より,

$$T(u(t)) \leq S_\omega(u(t)) - c_\omega \leq d - c_\omega$$

が成立する. これと, (4.95) を合わせると,

$$\|xu(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 \leq \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + 4t \operatorname{Im} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{u}_0 x \cdot \nabla u_0 \, dx + 2(d - c_\omega)t^2, \quad t \in [0, \infty).$$

ところが,  $d - c_\omega < 0$  であるから, この不等式の右辺は十分大きな  $t > 0$  に対して負の値をとる. しかし, 左辺は非負の値しかとらないので, これは矛盾. したがって, 解  $u(t)$  は  $[0, \infty)$  上全体に延長できない. すなわち, ある正定数  $T$  に対して,

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \infty$$

が成立している.

次に, 関数  $w$  を最小化問題 (4.79) の解であるとする. ここで,

$$w_\lambda(x) = \lambda w(x), \quad \lambda > 0$$

とおく．関数  $w$  は (4.59) の弱解であるので，

$$\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} = 0$$

を満たすことから，

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} S_\omega(w_\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \lambda^2 \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \lambda^2 \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \frac{2}{p+1} \lambda^{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= 2\lambda \left[ \|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \omega \|w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p-1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= 2\lambda(1 - \lambda^{p-1}) \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1}. \end{aligned}$$

よって，次が成立する：

$$\frac{d}{d\lambda} S_\omega(w_\lambda) < 0, \quad \lambda > 1.$$

ゆえに， $d_\lambda = S_\omega(w_\lambda)$  とおくと，

$$d_\lambda < d_\lambda|_{\lambda=1} = S_\omega(w) = c_\omega, \quad \lambda > 1.$$

また， $T(w) = 0$  であるから， $\lambda > 1$  のとき，

$$\begin{aligned} T(w_\lambda) &= \lambda^2 \left[ 2\|\nabla w\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 - \lambda^{p-1} \frac{n(p-1) + 2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} \right] \\ &= \lambda^2(1 - \lambda^{p-1}) \frac{n(p-1) + 2b}{p+1} \| |x|^{-b/(p+1)} w \|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^n)}^{p+1} < 0. \end{aligned}$$

すなわち， $\lambda > 1$  のとき， $d_\lambda < c_\omega$  に対して，

$$w_\lambda \in A_{d_\lambda} = \{u \in H^1(\mathbf{R}^n); T(u) < 0, S_\omega(u) \leq d_\lambda\}$$

である．

一方，明らかに，

$$w_\lambda \longrightarrow w \text{ in } H^1(\mathbf{R}^n) \quad (\lambda \rightarrow 1).$$

したがって，任意の  $\varepsilon > 0$  に対して，

$$\|w_\lambda - w\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon, \quad w_\lambda \in A_{d_\lambda}$$

となるように， $\lambda(> 1)$  をとることができる．さらに，この  $w_\lambda$  に対して，命題 4.21 により，

$$xw_\lambda \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

も成り立つことがわかる．したがって， $t = 0$  で  $u(0) = w_\lambda$  を満たす方程式 (4.58) の解は，前半の議論より，有限時間内で  $H^1(\mathbf{R}^n)$  ノルムが無限大に発散する．これは，方程式 (4.58) の定在波解  $v$  が安定でない，すなわち不安定であることを示している．  $\square$

**注意 4.23.** 文献 [7] には,  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 2$ ,  $1 + (4 - 2b)/n < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2)$  で方程式 (4.58) の定在波解が不安定であると結論されているが, 本論文の方法では, 初期値問題の時間局所的な一意可解性を保証するための仮定より,  $n \geq 3$ ,  $0 < b < 4/n$ ,  $1 + (4 - 2b)/n < p < 1 + (4 - 2b)/(n - 2)$  となる.  $4/n \leq b < 2$  を埋めるためには, 初期値問題の時間局所的な一意可解性を証明する他の方法を考える必要があるだろう.

## 謝辞

本論文を作成するにあたり，2年間ご指導下さいました石谷寛先生，肥田野久二男先生，三重大学教育学部数学教室の教職員の方々に厚く御礼申し上げます．特に，肥田野久二男先生には，多くの時間を割いて勉強不足の筆者を辛抱強く指導していただき，感謝の気持ちで一杯であります．

## 参考文献

- [1] 猪狩惺, 実解析入門, 岩波書店, 1996 年.
- [2] 垣田高夫, シュワルツ超関数入門, 日本評論社, 1985 年.
- [3] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版株式会社, 1980 年.
- [4] 堤誉志雄, 偏微分方程式論, 培風館, 2004 年.
- [5] 谷島賢二, ルベーク積分と関数解析, 朝倉書店, 2002 年.
- [6] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Commun. Math. Phys., **85**, 549-561 (1982).
- [7] R. Fukuizumi and M. Ohta, Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities, J. Math. Kyoto Univ., **45**, 145-158 (2005).
- [8] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré Physique Théorique, **46**, 113-129 (1987).
- [9] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of  $\Delta u - u + u^p = 0$  in  $\mathbf{R}^n$ , Arch. Ration. Mech. Anal., **105**, 234-266 (1989).
- [10] Y. Tsutsumi, Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations, Nonlinear Anal., **11**, 1143-1154 (1987).