

# IFSフラクタルの次元と測度に関する研究

平成 20 年 度

三重大学大学院教育学研究科  
修士課程 教科教育専攻

服 部 恵 美

修士論文

IFS フラクタルの次元と測度に関する研究

三重大学大学院教育学研究科

教科教育専攻 数学教育専修

207M023 服部 恵美

2009 年 2 月 13 日

## 序 文

$S = \{\phi_i\}$  がコンパクト距離空間  $X$  上で定義された縮小写像の族のとき,  $S$  の有限部分集合族  $\Lambda$  に対して, 極限集合 ( $S$ -不変集合)  $J_\Lambda$  が定義できる.  $J_\Lambda$  は, IFS フラクタルとよばれている. また,  $\text{HD}(J_\Lambda)$  で IFS フラクタルのハウスドルフ次元を表すとき, ハウスドルフ次元の集合  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq S\}$  を次元集合と呼ぶ. 次元集合は, 閉区間  $[0, \text{HD}(J_S)]$  の部分集合である.

私は, IFS フラクタルのハウスドルフ次元はどのように与えられるか, どのような性質を持つか, および次元集合が閉区間  $[0, \text{HD}(J_S)]$  で稠密になるのは  $S$  がどのような条件をみたす場合か,  $S$  がどのような条件をみたすとき次元集合は疎になるか, という問題に興味を持って研究を進めてきた.

無限を含む IFS フラクタルの次元と測度については, 詳細な研究結果が, 1996 年に, Mauldin と Urbański によって発表されている. 例えば彼らは, *pressure* 関数  $P_\Lambda(t)$  の値が 0 であれば, IFS フラクタルのハウスドルフ次元が  $t$  になること, 更に, *pressure* 関数の零点の存在と *t-conformal measure* の存在とが同値であること, 等を示した.

一方,  $S$  がどのような条件をみたすとき, 次元集合が区間で稠密であるか, あるいは疎であるか, という問題は, 2006 年に Kesseböhmer と Zhu によって初めて議論された. その中では, 上で述べたような, IFS フラクタルに関する Mauldin と Urbański の結果が重要な役割を果たす. 特に, 「連分数に展開したとき, 指定された有限個の項だけを持つ無理数の集合のハウスドルフ次元は, 単位区間に稠密に存在する」という Kesseböhmer と Zhu の結果は非常に興味深い.

本稿では, 上にあげた, Mauldin と Urbański の IFS フラクタルの次元と測度に関する研究, および Kesseböhmer と Zhu の次元集合の稠密性に関する研究を紹介するとともに, 次元集合の稠密性に関する次のような問題に対して, 新しい結果が得られたので報告する.

- ① 連分数展開に際し, 連続した  $n$  個の文字  $1, 2, \dots, n$  が不足している (現れない) ような無理数の系を考える. このような系における連分数展開で, 指定された有限個の項だけを持つ無理数の集合のハウスドルフ次元は, 適当な区間に稠密に存在するか, 否か.
- ② 連分数展開で 1 つの文字  $l$  が不足している (現れない) ような無理数の系を考える. この系では, 指定された有限個の項だけを持つ無理数の集合のハウスドルフ次元の分布はどうか.
- ③  $X$  が区間であり, 更に  $S$  が  $X$  上のアフィン変換 (一次関数) 族の場合, 次元集合が稠密になるときと, 疎になるときの  $S$  の条件はどのように与えられるか.

この論文の構成は、次の通りである。

1 章は、この論文全体をまとめたものである。

2 章では、Mauldin と Urbański の結果を一次元の場合に制限して紹介する。はじめに、彼らが  $S$  に条件として設けている cIFS とよばれる写像族の性質について述べる。そして、集合のハウスドルフ次元、パッキング次元、ボックス次元の定義をして、それらの性質をまとめる。更に、cIFS の *topological pressure* の定義と性質を述べ、*conformal measure* と *semiconformal measure* の定義と性質についても議論する。また、IFS フラクタルのハウスドルフ次元は、*pressure* 関数  $P(t)$  の値が 0 になる  $t$  によって与えられることを述べ、*t-measure* が存在するならば、ハウスドルフ次元は、 $t$  であることを示す。

3 章では、一般の IFS フラクタルの次元集合について、それが区間で稠密になるときと、疎になるときの  $S$  の条件を考える。次に、閉区間  $[0, 1]$  上の無理数の連分数展開を表記する cIFS に制限して、次元集合は区間においてどのように存在するかを議論する。そして、連分数に関する同様の問題について、自然数全体から連続して 1 から  $n$  までの数を取り除いた集合  $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$  の文字だけを使える場合に、次元集合は適当な区間に稠密に存在するか否か、また、自然数全体からある 1 つの数を取り除いた集合  $\mathbb{N} \setminus \{l\}$  の文字だけを使える場合に、次元集合の分布はどのようなになるかを述べる。

4 章では、 $X$  が区間であり、更に  $S$  が  $X$  上のアフィン変換 (一次関数) 族の場合を議論する。この場合、極限集合は、自己アフィンフラクタルとよばれる。この章では、自己アフィンフラクタルのハウスドルフ次元の持つ性質、次元集合が区間で稠密に存在するときと、疎になるときの  $S$  の条件を検討する。関数をアフィン変換に限ることで、次元集合が稠密になるとき、疎になるときの  $S$  の条件に対する明確な判定条件を与えることができた。

最後に、大学院で研究を進めるにあたり、御助言、御指導を下さいました石谷寛先生、玉城政和先生、三重大大学教育学部数学教室の先生方や鈴木事務官に厚く御礼申し上げます。特に、玉城政和先生には、多くの時間を割いて熱心に御指導していただき、感謝の気持ちで一杯であります。

# 目次

1	はじめに	1
1.1	連分数展開とハウスドルフ次元	1
1.2	Mauldin と Urbański の結果	2
1.3	Keseböhrer と Zhu の結果	4
1.4	自己アフィンフラクタルの次元	6
2	cIFS フラクタルの測度と次元	7
2.1	導入	7
2.2	cIFS とその性質	11
2.3	フラクタル次元	18
2.4	熱力学的定式化	24
2.5	<i>conformal measure</i> の存在と一意性	31
2.6	極限集合の次元	41
3	連分数展開とハウスドルフ次元	47
3.1	Keseböhrer と Zhu の結果	47
3.2	連分数展開の場合	52
3.3	使える文字に不足がある場合	58
4	自己アフィンフラクタル	63
4.1	自己アフィンフラクタルの性質	63
4.2	Absolutely Regular システムの次元集合	67
4.3	例	70

# 1 はじめに

この章では、本論文で議論することをまとめて紹介する.

1.2 節で Mauldin と Urbański の IFS フラクタルに関する結果を紹介する.

1.3 節で Kesseböhmer と Zhu の次元集合に関する結果を紹介する.

1.4 節で  $X$  が区間であり,  $\phi_i$  がすべてアフィン変換である場合の自己アフィンフラクタルの次元集合について新しく得られた結果を紹介する.

IFS フラクタルと呼ばれる集合のハウスドルフ次元が区間に稠密に存在するかどうかという問題は、次の節で述べるような、連分数展開と関連した典型的な話題がある.

## 1.1 連分数展開とハウスドルフ次元

$a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{N}$  とするとき

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

のように連分数展開される閉区間  $[0, 1]$  上の無理数を  $[a_1, a_2, a_3, \dots]$  で表すことにする.  $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$  に対して, 連分数展開したときに成分が  $\Lambda$  の要素である無理数の集合を  $J_\Lambda$  で表す. つまり

$$J_\Lambda := \{[a_1, a_2, a_3, \dots] : a_i \in \Lambda\} \quad (1.1)$$

と定める.  $\text{HD}(J_\Lambda)$  で集合  $J_\Lambda$  のハウスドルフ次元を表すとき, Jarník の結果 [5] によれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{HD}(J_{\{1, 2, \dots, n\}}) = 1$$

となる. 精密には,

$$\text{HD}(J_{\{1, 2, \dots, n\}}) = 1 - \frac{6}{\pi^2 n} - \frac{72 \log n}{\pi^4 n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となることが知られている [3].

ここで, 次のようなハウスドルフ次元の集合

$$\mathcal{C}_{CF} := \{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$$

と

$$\mathcal{D}_{CF} := \{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$$

を考える.

前者を完全次元集合, 後者を制限次元集合とよぶこともある. Jarník の結果から, 1 は  $\mathcal{D}_{CF}$  の集積点となるが, Kesseböhmer と Zhu は次の定理が成り立つことを証明した.

**定理 1.1** [6]  $\mathcal{D}_{CF}$  は  $[0, 1]$  で, 稠密になる. 特に

$$\mathcal{C}_{CF} = [0, 1]$$

が成り立つ.

**注意**  $\text{HD}(J_\Lambda) = 0$  とするには  $\Lambda = \{i\}$  (一点集合),  $\text{HD}(J_\Lambda) = 1$  とするには  $\Lambda = \mathbb{N}$  とすればよい.

Kesseböhmer と Zhu の論文では, 無限を含む IFS の極限集合 (IFS フラクタル) の次元と測度についての Mauldin と Urbański の結果 [8] が重要な役割を果たす. 次節では, それを紹介する.

## 1.2 Mauldin と Urbański の結果

以下,

$(X, \rho)$ : コンパクト距離空間,  $X \neq \emptyset$

$S = \{\phi_i : i \in \mathbb{N}\} : X$  から  $X$  への単射の族

とし, 更に  $S$  は次の条件をみたすとする.

$$\exists r \in (0, 1) \quad (s.t) \quad \rho(\phi_i(x), \phi_i(y)) \leq r\rho(x, y), \forall i \in \mathbb{N}, \forall x, y \in X$$

つまり,  $S$  は縮小写像の族であるが, 縮小率が一様である.

次に,  $\Lambda \subseteq \mathbb{N} (\Lambda \neq \emptyset, \#\Lambda \geq 2)$  に対して,

$$\Lambda^n := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_j \in \Lambda\}$$

$$\Lambda^* := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_j \in \Lambda, n \geq 1\}$$

$$\Lambda^\infty := \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots) : \lambda_j \in \Lambda\}$$

とおく. そして,  $\omega \in \mathbb{N}^\infty$  と  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\omega|_n := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad , \quad \phi_{\omega|_n} := \phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n}$$

と定める. すると,  $\{\phi_{\omega|_n}(X)\}$  は,  $X$  のコンパクト部分集合の非増加列であり, 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $\rho(\phi_{\omega|_n}(x), \phi_{\omega|_n}(y)) \leq r^n \rho(x, y)$  となるので,  $\bigcap_n \phi_{\omega|_n}(X)$  は, 一点集合である.

写像族  $\{\phi_i : i \in \Lambda\}$  に対する極限集合  $J_\Lambda$  を

$$J_\Lambda = \bigcup_{\omega \in \Lambda^\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_{\omega|_n}(X)$$

と定義する.

このとき,  $J_\Lambda = \bigcup_{i \in \Lambda} \phi_i(J_\Lambda)$  が成り立つ. 特に,  $\Lambda$  が有限集合ならば,  $J_\Lambda$  はコンパクト集合になる. この極限集合  $J_\Lambda$  は **IFS フラクタル**ともよばれる.

$S = \{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$  は, 次の条件をみたすときに *conformal* な IFS(cIFS) であるという.

(1)  $X$  は連結な  $\mathbb{R}^n$  の空でない部分集合で,  $U := \text{Int}_{\mathbb{R}^n}(X)$  に対して OSC をみたす.

すなわち,  $U \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(U)$  (右辺は互いに素) である.

(2) 「 $\exists \alpha, l \ (s.t) \ \forall x \in \partial X, \exists u_x; \text{Con}(x, u_x, \alpha, l) \subset \text{Int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ 」が成り立つ.

ここで  $\text{Con}(x, u_x, \alpha, l)$  は, 頂点  $x$ , 方向ベクトル  $u_x$ , 中心角  $\alpha$ , 高さ  $l$  の cone を表す.

(3)  $X \supseteq \exists V : \text{open connected} \ (s.t) \ \forall i \in \mathbb{N}, \phi_i \in C^1(V), \text{conformal}.$

(4) *Bounded distortion property*(BDP) が成り立つ. すなわち

$$\exists K \geq 1 \ (s.t) \ |\phi'_\omega(y)| \leq K |\phi'_\omega(x)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in V$$

ここで  $V$  は, (3) と同じものであり,  $|\cdot|$  は微分のノルムである.

以降,  $S = \{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$  は, cIFS であると仮定する.

$\Lambda \subseteq \mathbb{N} (\Lambda \neq \emptyset, \#\Lambda \geq 2)$  に対して,

$$\psi_\Lambda(t) = \sum_{\omega \in \Lambda^n} \|\phi'_\omega\|^t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{ただし, } \|\phi'_\omega\| = \sup_{x \in X} |\phi'_\omega(x)| \text{ とする.})$$

$$\theta_\Lambda = \inf\{t : \psi_\Lambda(t) < \infty\}$$

と定め,  $\{\phi_i : i \in \Lambda\}$  の *topological pressure*  $P_\Lambda$  を

$$P_\Lambda(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \Lambda^n} \|\phi'_\omega\|^t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

で定義する.  $P_\Lambda$  は,  $[0, \infty)$  において非増加であり,  $[\theta_\Lambda, \infty)$  において, 減少関数となる.

極限集合のハウスドルフ次元について, 次が成り立つ.

**定理 1.2** [8]

$$\text{HD}(J_\Lambda) = \inf\{t : P_\Lambda(t) \leq 0\} \geq \theta_\Lambda$$

が成り立つ. 更に

$$\text{HD}(J_\Lambda) = \sup\{\text{HD}(J_{\Lambda'}) : \Lambda' \subset \Lambda, \text{有限集合}\}$$

が成り立つ. 特に,  $P_\Lambda(t) = 0$  ならば,  $t$  は *pressure* の唯一の零点であり,  $t = \text{HD}(J_\Lambda)$  となる.

ここで, 次元集合  $\mathcal{C}_S = \{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$  と  $\mathcal{D}_S = \{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  を考える. すると, 定理 1.2 より, 次の系が成り立つことがわかる.



系 1.3 [6]  $\mathcal{D}_S \subset \mathcal{C}_S \subset \overline{\mathcal{D}_S}$  が成り立つ.

更に, 定理 1.2 を用いて, 次の系を導くことができる.

系 1.4 [8]  $\phi_i$  がすべてアフィン変換の場合,

$$\text{HD}(J_\Lambda) = \inf \left\{ s > 0 : \sum_{k \in \Lambda} |\phi'_k|^s \leq 1 \right\}$$

となる. 特に,  $\Lambda$  が有限集合であるならば,

$$\text{HD}(J_\Lambda) \text{ は, } \sum_{k \in \Lambda} |\phi'_k|^s = 1 \text{ となる唯一つの } s \text{ の値}$$

である.

### 1.3 Kesseböhmer と Zhu の結果

この節では, Kesseböhmer と Zhu の結果を紹介する. はじめに, 記号を定義する.

$\Lambda \subset \mathbb{N}$ , ( $\Lambda \neq \emptyset$ , 有限集合) に対して,

$$\Lambda^b := \Lambda \setminus \{\max \Lambda\}$$

$$\Lambda^{b\#} := (\Lambda \setminus \{\max \Lambda\}) \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots\}$$

とおく. また,

$$\lambda_\Lambda(t) := \exp(P_\Lambda(t))$$

とおく. Kesseböhmer と Zhu は次の定理が成り立つことを示した.

定理 1.5 [6]  $s \in [0, \text{HD}(J_\mathbb{N})]$  とする.  $\forall \Lambda \subset \mathbb{N}$ , 有限集合,  $\Lambda \neq \emptyset$  に対して,

$$P_{\Lambda^{b\#}}(s) \geq P_\Lambda(s)$$

が成り立つならば,  $\exists \Gamma_n \subset \mathbb{N}$ , 有限集合  $(s, t) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{HD}(J_{\Gamma_n}) = s$  となる.

従って,  $s$  がこの定理の仮定をみたすとき,  $s$  は  $\mathcal{D}_S$  の集積点になることがわかる.

ここで, *regular* と *absolutely regular* の定義をする.  $P_\Lambda(t) = 0$  となる解  $t$  が唯一つ存在するならば, cIFS  $\{\phi_i | i \in \Lambda\}$  は *regular* であるという.  $S$  の任意の部分集合が *regular* であるとき,  $S$  を *absolutely regular* であるという.  $S$  が *absolutely regular* であるとき,  $\lambda_\Lambda(s) = 1$  の唯一の解を  $s(\Lambda)$  で表す. cIFS は,  $\theta_\Lambda = 0$  であるときに限り, *absolutely regular* であることが知られている.

**定理 1.6** [6]  $S = \{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$  を *absolutely regular* である cIFS とする.

$\exists s_0 \in (0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$ ;  $\forall s \in (s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$ ,  $\forall \Lambda \subset \mathbb{N}$ , 有限集合,  $\Lambda \neq \emptyset$  に対して,

$$P_{\Lambda^{\#}}(s) < P_{\Lambda}(s)$$

となるならば,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) | \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  は,  $(s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$  で疎である.

ここまでの議論は, 一般の cIFS について成り立つ. 定理 1.1 のために,  $[0, 1]$  区間上の無理数の連分数展開を表記する  $S_{CF}$  を, 次の方法で与える. まず,  $i \in \mathbb{N}$  について

$$f_i(x) = \frac{1}{i+x}, \quad x \in [0, 1]$$

を与える.  $\{f_i | i \in \mathbb{N}\}$  は, BDP をみたさないから, 合成関数

$$f_i \circ f_j, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

に番号をふり直して

$$S_{CF} = \{\phi_i | i \in \mathbb{N}\}$$

とする. このように  $S_{CF}$  を定めても, 極限集合が同じ連分数展開の集合を表すことに変わりはない. 特に, Jarník の結果 [5] から

$$\text{HD}(J_{\mathbb{N}}) = 1$$

である.

$\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$  によって得られる連分数  $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \in \mathbb{Q}$  を

$$[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \frac{p_n(\omega)}{q_n(\omega)}$$

とおく. この連分数の分母  $q_n = q_n(\omega|_n)$  は, 次をみたすことが知られている.

$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_i = \omega_i q_{i-1} + q_{i-2}, \quad i \geq 1$$

$S_{CF}$  の *pressure* は, 次のように連分数の分母を用いて表すことができる.

**補題 1.7** [6]  $\forall \Lambda \subset \mathbb{N}$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$  に対して,

$$P_{\Lambda}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \Lambda^n} q_{2n}(\omega)^{-2s}$$

となる.

**定理 1.8** [6]  $\mathcal{S}_{CF}$  では, 定理 1.5 の仮定が  $\forall s \in [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  に対して成り立つ. 従って, 次元集合  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  は, 閉区間  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  で稠密になる.

更に, 連分数展開に際し, 使える文字が不足している (現れない) 場合, 次元集合について次の定理が成り立つことがわかった.

**定理 1.9** 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について, 次元集合  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}, \text{有限集合}\}$  は, 閉区間  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}})]$  で稠密になる.

**定理 1.10** 任意の  $l \in \mathbb{N}$  に対して, 次元集合  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{l\}, \text{有限集合}\}$  は, 閉区間  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{l\}})]$  で稠密になる.

## 1.4 自己アフィンフラクタルの次元

ここでは,  $X$  は閉区間であるとし, cIFSS について,  $\phi_i$  はすべてアフィン変換であり,  $|\phi'_i| > 0$  とする.

この場合, 極限集合を自己アフィンフラクタルとよぶ.

自己アフィンフラクタルの次元集合について, 次のような新しい結果が得られた.

**定理 1.11**

$$0 < \exists s_0 < \text{HD}(J_{\mathbb{N}}) \ (s.t) \ \sum_{k>m} |\phi'_k|^{s_0} \geq |\phi'_m|^{s_0}, \forall m \in \mathbb{N}$$

とする. このとき次元集合  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  は,  $[0, s_0]$  で稠密になる. さらに,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N}\} = [0, s_0]$  となる.

**定理 1.12**  $S$  は, *absolutely regular* であり,  $|\phi'_1| \geq |\phi'_2| \geq |\phi'_3| \geq \dots$  であるとする.

(i) 「 $\exists m \in \mathbb{N} \ (s.t) \ \sum_{k>m} |\phi'_k|^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m\}})} < |\phi'_m|^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m\}})}$ 」とする. このとき,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subseteq \mathbb{N}\} \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$  となる区間  $(\alpha, \beta) \subseteq [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  が存在する.

(ii)  $m > 2$  は,  $\sum_{k>m} |\phi'_k|^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m-1\}})} < |\phi'_{m-1}|^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m-1\}})}$  をみたすとする. このとき,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subseteq \mathbb{N}, m \notin \Lambda\} \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$  となる区間  $(\alpha, \beta) \subseteq [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m\}})]$  が存在する.

**定理 1.13**  $S$  は *absolutely regular* であり,

$$0 < \exists s_0 < \text{HD}(J_{\mathbb{N}}) \ (s.t) \ \sum_{k>m} |\phi'_k|^{s_0} < |\phi'_m|^{s_0}, \forall m \in \mathbb{N}$$

とする. このとき,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda} : \Lambda \subset \mathbb{N})\}$  は,  $[s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  で疎になる.

## 2 cIFS フラクタルの測度と次元

この章では, Mauldin と Urbański の結果 [8] を一次元の場合に制限して議論する. 2.1 節では, 記号の表記を定義し, 議論のための準備をする. 2.2 節で cIFS の定義を与え, BDP の性質と cIFS であることから導かれる  $S$  の性質を示す. 2.3 節では, ハウスドルフ次元, パッキング次元, ボックス次元の定義を行い, それらの性質を述べる. 2.4 節で  $S$  の *topological pressure* の定義をし, その性質を検討する. 2.5 節で *conformal measure* および *semiconformal measure* の定義を与え, 2.6 節で *conformal measure* と *semiconformal measure* の存在と一意性を示す. そして, 以上の結果を用いて, 2.7 節で, 極限集合のハウスドルフ次元がどのように得られるかを検討する.

### 2.1 導入

はじめに記号の定義をする.

$$X = [a, b](\mathbb{R} \text{ の閉区間}),$$

$$I = \{i_1, i_2, \dots\}, \#I \geq 2,$$

$$S = \{\phi_i : i \in I\} : X \text{ から } X \text{ への単射の族},$$

$$B(x, r) : [x - r, x + r] \text{ で表される閉区間}$$

$$\lambda : \mathbb{R} \text{ 上のルベーグ測度},$$

とし,  $S$  は

$$\exists r \in (0, 1) \quad (s.t) \quad \rho(\phi_i(x), \phi_i(y)) \leq r \rho(x, y), \forall i \in I, \forall x, y \in X \quad (2.1)$$

をみたすものとする. つまり,  $S$  は縮小写像の族であるが, 縮小率が一樣である.

$$I^n := \{(i_1, \dots, i_n) : i_j \in I\}$$

$$I^* := \{(i_1, \dots, i_n) : i_j \in I, n \geq 1\}$$

$$I^\infty := \{(i_1, i_2, \dots) : i_j \in I\}$$

とおく. そして,  $n \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcup_{k \geq n} I^k \cup I^\infty$  に対して,

$$\omega|_n := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad , \quad \phi_{\omega|_n} := \phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n}$$

と定める. すると,

$$\phi_{\omega|_n}(X) = \phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \dots \circ \phi_{\omega_{n-1}}(\phi_{\omega_n}(X)) \subseteq \phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \dots \circ \phi_{\omega_{n-1}}(X) = \phi_{\omega|_{n-1}}(X)$$

となるので,  $\{\phi_{\omega|_n}(X)\}$  は, コンパクト部分集合の非増加列であり, (2.1) より,

$$\text{diam}(\phi_{\omega|_n}(X)) \leq r^n \text{diam}(X) \quad (2.2)$$

となる. よって,  $\omega \in I^\infty$  のとき, 集合  $\bigcap_{n=1}^\infty \phi_{\omega|_n}(X)$  は一点集合である.

ここで,  $I^\infty$  には,  $\omega, \tau \in I^\infty$  に対して,

$$d(\omega, \tau) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\min\{|\omega_n - \tau_n|, 1\}}{2^n} \quad (2.3)$$

により定まる距離で位相を導入する. そして,  $\pi : I^\infty \rightarrow X$  を

$$\pi(\omega) = \bigcap_{n=1}^\infty \phi_{\omega|_n}(X)$$

により定めると, (2.2) から,  $\pi$  は連続関数になる.

次に,  $\sigma : I^\infty \rightarrow I^\infty$  を  $I^\infty$  における, 左へシフトとする. つまり,  $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \cdots$  に対して,

$$\sigma(\omega) = \omega_2 \omega_3 \cdots$$

と定める. すると,

$$\begin{aligned} \pi \circ \sigma(\omega) &= \bigcap_{n=1}^\infty \phi_{\sigma(\omega)|_n}(X) = \bigcap_{n=1}^\infty \phi_{\omega_2 \omega_3 \cdots \omega_{n+1}}(X) \\ &= \phi_{\omega_1}^{-1} \circ \phi_{\omega_1} \left( \bigcap_{n=1}^\infty \phi_{\omega_2 \omega_3 \cdots \omega_{n+1}}(X) \right) \\ &= \phi_{\omega_1}^{-1} \left( \bigcap_{n=1}^\infty \phi_{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \cdots \omega_{n+1}}(X) \right) \\ &= \phi_{\omega_1}^{-1} \circ \pi(\omega) \end{aligned}$$

となるので,

$$\pi \circ \sigma(\omega) = \phi_{\omega_1}^{-1} \circ \pi(\omega)$$

が成り立つことがわかる. この両辺で, 左から  $\phi_{\omega_1}$  を作用させると,  $\phi_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega))) = \pi(\omega)$  を得る. また,  $\pi(i\omega) = \bigcap_{n=0}^\infty \phi_{i\omega|_n}(X) = \phi_i(\bigcap_{n=0}^\infty \phi_{\omega|_n}(X)) = \phi_i(\pi(\omega))$  より,

$$\pi(i\omega) = \phi_i(\pi(\omega)), \quad \forall i \in I, \quad \forall \omega \in I^\infty \quad (2.4)$$

が成り立つ.

ここで,  $S$  に対する極限集合  $J$  を

$$\begin{aligned} J &= \pi(I^\infty) \\ &= \bigcup_{\omega \in I^\infty} \bigcap_{n=1}^\infty \phi_{\omega|_n}(X) \end{aligned}$$

によって定義する. (2.4) に注意すると,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} \phi_i(J) &= \bigcup_{i \in I} \phi_i(\pi(I^\infty)) = \bigcup_{i \in I} \phi_i\left(\bigcup_{\omega \in I^\infty} \pi(\omega)\right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\omega \in I^\infty} \phi_i(\pi(\omega)) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\omega \in I^\infty} \pi(i\omega) \\ &= \bigcup_{i\omega \in I^\infty} \pi(i\omega) = \pi(I^\infty) = J\end{aligned}$$

となる. よって,

$$J = \bigcup_{i \in I} \phi_i(J) \quad (2.5)$$

を得る.  $I$  が有限集合ならば,  $J$  はコンパクト集合になることが知られている [1].

**命題 2.1**  $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)$  となる.

[証明]  $J' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)$  とおく.

(i)  $J \subset J'$  を示す.

$\forall x \in J = \bigcup_{\omega \in I^\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_{\omega|_n}(X)$  をとる. すると,  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_{\omega|_n}(X)$  をみたす  $\omega \in I^\infty$  が存在する. これより, 任意の  $n \geq 1$  に対して,  $x \in \phi_{\omega|_n}(X)$  となるので,  $\omega|_n \in I^n$  に対して,  $x \in \phi_{\omega|_n}(X) \subset \bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)$  が成り立つ. よって,  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)$  となり,  $J \subset J'$  が成り立つ.

(ii)  $J' \subset J$  を示す.

$$K = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid i_1 \leq \omega_n \leq i_{k(n)}\}$$

とおく.  $\forall x \in J'$  をとると,  $\forall n$  について,  $x \in \phi_{\omega^n}(X)$  となる  $\omega^n \in I^n$  が存在するが, このような  $\omega^n$  の個数は有限個しかない. そこで,

$$\sigma(n) = \max\{k \mid x \in \phi_{\omega^n}(X), \omega^n = (\omega_1^n, \omega_2^n, \dots, \omega_{n-1}^n, i_k)\}$$

と定めると, Tychonoff の定理から,

$$I(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \{i_1, i_2, \dots, i_{\sigma(n)}\}$$

はコンパクト集合である.  $\{\omega^n\} \subseteq I(x)$  は, 収束する部分列を持つので, その極限を  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^{\nu(n)} = \omega$  とおく. すると, 距離の定義 (2.3) から, 任意の  $l'$  について,  $n$  を十分大きくとると,

$$d(\omega^{\nu(n)}, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\min\{|\omega_l^{\nu(n)} - \omega_l|, 1\}}{2^l} < \frac{1}{2^{l'}}$$

が成り立ち,  $\omega_1^{\nu(n)} = \omega_1, \omega_2^{\nu(n)} = \omega_2, \dots, \omega_{l'}^{\nu(n)} = \omega_{l'}$  かつ  $\nu(n) \geq l'$  とできる. よって,

$$x \in \phi_{\omega^{\nu(n)}|_{\nu(n)}}(X) \subset \phi_{\omega^{\nu(n)}|_{l'}}(X) = \phi_{\omega|_{l'}}(X)$$

となる.  $l'$  は任意なので,  $x \in \bigcap_{l' \geq 1} \phi_{\omega|_{l'}}(X) \subset \bigcup_{\omega \in I^\infty} \bigcap_{l' \geq 1} \phi_{\omega|_{l'}}(X)$  が成り立つので,  $x \in J$  となり,  $J' \subset J$  が成り立つ.

よって, (i), (ii) より,  $J = J'$  が成り立つ.  $\square$

ここで,

$$X(\infty) := \{x \mid \exists I' (\subseteq I, \text{無限集合}), \exists \{x_i\}, i \in I' \text{ (s.t.) } x_i \in \phi_i(X); x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i\}$$

とする.

**補題 2.2**  $I$  が無限集合,  $\lim_{i \in I} \text{diam}(\phi_i(X)) = 0$  であると,  $\bar{J} = J \cup \bigcup_{\omega \in I^*} \phi_\omega(X(\infty))$  となる.

[証明]  $X(\infty)$  は, 定義より,  $x_i \in \phi_i(X)$  である数列  $\{x_i\}$  の極限の集合だから,  $X(\infty) \subseteq \bar{J}$  である. よって,  $\forall i \in I$  に対して,

$$\phi_i(X(\infty)) \subseteq \phi_i(\bar{J}) = \overline{\phi_i(J)} \subseteq \bar{J}$$

となる. よって,

$$\bar{J} \supset J \cup \bigcup_{\omega \in I^*} \phi_\omega(X(\infty))$$

を得る.

次に,  $x \in \bar{J}$  とする. このとき,  $I^\infty$  の列  $\{\omega^n\}$  で,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(\omega^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k \geq 1} \phi_{\omega^n|_k}(X)$  となるものが存在する.

$\{\omega_1^n\}$  が無限列ならば, その無限部分列  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  で,  $x \in \phi_{\tau_k}(X)$  をみたすものが存在する. 従って,  $x \in X(\infty)$  となる.

そうでなければ,  $N_1 = \{n \geq 1 : \omega_1^n = u_1\}$  が無限集合となる  $u_1 \in I$  が存在する.

$n \in N_1$  に対して,  $\omega^n$  の 2 番目の要素の集合  $\{\omega_2^n\}$  が無限集合であるならば,

$$x \in \phi_{u_1}(\phi_{\tau_k}(X))$$

をみたす無限列,  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  が存在する. 従って  $x \in \phi_{u_1}(X(\infty))$  を得る.

そうでなければ,  $N_2 = \{n \in N_1 : \omega_2^n = u_2\}$  が無限集合である  $u_2 \in I$  が存在する.

この手続きを繰り返し, もし,  $\omega^n$  の  $n$  番目の要素が無限集合であるならば,

$$x \in \phi_{u_1 u_2 u_3 \dots u_n}(X(\infty))$$

となるので,  $x \in \bigcup_{\omega \in I^*} \phi_\omega(X(\infty))$  を得る. そうでなければ, (2.2) より,

$$\text{dist}(x, \phi_{u|_n}(X)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

となる  $u \in I^\infty$  がある. よって,  $x = \pi(u)$  なので,  $x = \pi(u) \in J$  がわかる.

以上より,

$$\bar{J} = J \cup \bigcup_{\omega \in I^*} \phi_\omega(X(\infty))$$

が成り立つ.  $\square$

## 2.2 cIFS とその性質

$S$  は,

$$\phi_i(U) \subset U, \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{かつ} \quad \phi_i(U) \cap \phi_j(U) = \emptyset (i \neq j)$$

をみたす開集合  $U \subset X$  が存在するときに,  $U$  に対して開集合条件 (*open set condition, OSC*) をみたすという.

$S = \{\phi_i : i \in I\}$  は, 次の条件をみたすときに, *conformal* な IFS(cIFS) であるという.

(2.6)  $X$  は,  $U := \text{Int}_{\mathbb{R}}(X)$  に対して *OSC* をみたす.

(2.7)  $X \subseteq \exists V$  *open connected* (s.t)  $\phi_i \in C^1(V)$ , かつ  $|\phi'_i(x)| > 0, \forall i \in I, \forall x \in V$ .

(2.8) *Bounded distortion property (BDP)* が成り立つ. すなわち

$$\exists K \geq 1 \quad (\text{s.t}) \quad |\phi'_\omega(y)| \leq K |\phi'_\omega(x)|, \forall \omega \in I^*, \forall x, y \in V$$

ここで  $V$  は,  $\text{dist}(X, \partial V) < \frac{1}{4} \text{diam}(X)$  をみたすものとする.

ノルム  $\|\cdot\|$  を  $\|\phi'_\omega\| = \sup_{x \in V} |\phi'_\omega(x)|$  と定義する. すると, BDP より,  $\forall x \in V$  に対して  $\|\phi'_\omega\| \leq K |\phi'_\omega(x)|$  をみたす  $K \geq 1$  が存在する.

**補題 2.3**  $0 < r \leq \text{dist}(X, \partial V)$  とする.  $\forall \omega \in I^*, \forall x, y \in V$  に対して, BDP について次の 5 つの性質が成り立つ.

(BDP.1)  $\forall B \subseteq V$  に対して,

$$\text{diam}(\phi_\omega(B)) \leq \|\phi'_\omega\| \text{diam}(B) \quad \text{かつ} \quad \phi_\omega(B(x, r)) \subset B(\phi_\omega(x), \|\phi'_\omega\| r)$$

が成り立つ.

(BDP.2)  $D \geq \text{diam}(V)$  と選ぶ. このとき

$$\text{diam}(\phi_\omega(V)) \leq D \|\phi'_\omega\|$$



が成り立つ.

(BDP.3)  $\phi_\omega(B(x, r)) \supset B(\phi_\omega(x), K^{-1}\|\phi'_\omega\| r)$  が成り立つ.

(BDP.4)  $\eta := \text{dist}(X, \partial V)$  とおく.  $D \geq K\eta^{-1}$  とすると,

$$\text{diam}(\phi_\omega(X)) \geq D^{-1}\|\phi'_\omega\|, \quad \phi_\omega(V) \supset B(\phi_\omega(x), D^{-1}\|\phi'_\omega\|)$$

が成り立つ.

(BDP.5)  $B'(x, r)$  を区間  $[x - r, x]$  または,  $[x, x + r]$  と定義する.  $D\|\phi'_\omega\| \geq \text{diam}(X)$  をみたす十分大きな  $D \geq 1$  に対して

$$\phi_\omega(\text{Int}(X)) \supset B'(\phi_\omega(x), D^{-1}\|\phi'_\omega\|) \supset B'(\phi_\omega(x), D^{-2}\text{diam}(X))$$

が成り立つ.

[証明]

・(BDP.1) を示す.

中間値の定理より,  $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$\frac{|\phi_\omega(x) - \phi_\omega(y)|}{|x - y|} \leq \|\phi'_\omega\| \quad \forall x, y \in V$$

となる. よって,  $V$  の任意の部分集合  $B$  に対して

$$\text{diam}(\phi_\omega(B)) \leq \|\phi'_\omega\| \text{diam}(B)$$

が成り立つ.

次に,  $y \in \phi_\omega(B(x, r))$  とする. すると,  $x' \in B(x, r)$  で,  $y = \phi_\omega(x')$  をみたすものが存在する. よって,

$$|y - \phi_\omega(x)| = |\phi_\omega(x') - \phi_\omega(x)| \leq \|\phi'_\omega\| |x' - x| \leq \|\phi'_\omega\| r$$

となるので,  $y \in B(\phi_\omega(x), \|\phi'_\omega\| r)$  を得る. ゆえに,

$$\phi_\omega(B(x, r)) \subset B(\phi_\omega(x), \|\phi'_\omega\| r)$$

となり, (BDP.1) が成り立つ.

・(BDP.2) を示す.

$D \geq \text{diam}(V)$  とすると, (BDP.1) より,

$$\text{diam}(\phi_\omega(V)) \leq \|\phi'_\omega\| \text{diam}(V) \leq D \|\phi'_\omega\|$$

を得る. よって, (BDP.2) が成り立つ.

・(BDP.3) を示す.

$x \in X, 0 < r \leq \text{dist}(X, \partial V)$  であるので,  $B(x, r) \subset V$  となる. また,  $\omega \in I^*$  に対して  $R \geq 0$  を  $B(\phi_\omega(x), R) \subset \phi_\omega(B(x, r))$  をみたす最大の半径とする. すると,  $\partial(B(\phi_\omega(x), R)) \cap \partial(\phi_\omega(B(x, r))) \neq \emptyset$  であり, BDP より

$$\exists K > 1 \quad (s.t) \quad K^{-1} \|\phi'_\omega\| \leq \inf_y |\phi'_\omega(y)|$$

かつ

$$\|(\phi_\omega^{-1})'\| = \frac{1}{\inf |\phi_\omega^{-1}|} \leq K \|\phi'_\omega\|^{-1}$$

となる. (BDP.1) より,

$$\phi_\omega^{-1}(B(\phi_\omega(x), R)) \subset B(x, \|(\phi_\omega^{-1})'\| R) \subset B(x, K \|\phi'_\omega\|^{-1} R)$$

を得る.  $R$  は,  $B(\phi_\omega(x), R) \subset \phi_\omega(B(x, r))$  となる最大の半径としたので, 上の包含関係より,  $K \|\phi'_\omega\|^{-1} R \geq r$  となる. よって,  $R \geq K^{-1} \|\phi'_\omega\| r$  であり,  $R$  の定義より

$$\phi_\omega(B(x, r)) \supset B(\phi_\omega(x), R) \supset B(\phi_\omega(x), K^{-1} \|\phi'_\omega\| r)$$

となるので,

$$\phi_\omega(B(x, r)) \supset B(\phi_\omega(x), K^{-1} \|\phi'_\omega\| r)$$

となり, (BDP.3) が成り立つ.

・(BDP.4) を示す.

(BDP. 3) の  $r$  として  $\eta$  をとると, 仮定より  $K^{-1} \eta \geq D^{-1}$  であるので,

$$\phi_\omega(V) \supset \phi_\omega(B(x, \eta)) \supset B(\phi_\omega(x), K^{-1} \|\phi'_\omega\| \eta) \supset B(\phi_\omega(x), D^{-1} \|\phi'_\omega\|)$$

を得る. また, 中間値の定理より,  $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$\inf_{x \in V} |\phi'_\omega(x)| \leq \frac{|\phi_\omega(x) - \phi_\omega(y)|}{|x - y|}, \quad \forall x, y \in V$$

となり,

$$\inf_{x \in V} |\phi'_\omega(x)| \leq \frac{\text{diam}(\phi_\omega(X))}{\text{diam}(X)}$$

が成り立つ. よって,

$$D^{-1} \|\phi'_\omega\| \leq K^{-1} \eta \|\phi'_\omega\| = (K^{-1} \|\phi'_\omega\|) \eta \leq \inf_{x \in V} |\phi'_\omega(x)| \eta \leq \frac{\text{diam}(\phi_\omega(X))}{\text{diam}(X)} \eta \leq \text{diam}(\phi_\omega(X))$$

となり, (BDP.4) が成り立つ.

・(BDP.5) を示す.

$D \geq 1$  を,  $D\|\phi'_\omega\| \geq \text{diam}(X)$  をみたすように十分大きくとると, (BDP.4) より,  $\text{diam}(\phi_\omega(X)) \geq D^{-1}\|\phi'_\omega\|$  を得る. よって,

$$\phi_\omega(\text{Int}(X)) \supset B' \left( \phi_\omega(x), \frac{D^{-1}\|\phi'_\omega\|}{2} \right)$$

となる. ここで,

$$(D')^{-1} = \min \left\{ \frac{D^{-1}}{2}, \frac{\|\phi'_\omega\|}{\text{diam}(X)} \right\}$$

とおくと,  $(D')^{-1}\|\phi'_\omega\| \geq (D')^{-2}\text{diam}(X)$  となり,

$$\phi_\omega(\text{Int}(X)) \supset B'(\phi_\omega(x), (D')^{-1}\|\phi'_\omega\|) \supset B'(\phi_\omega(x), (D')^{-2}\text{diam}(X))$$

を得る. よって, (BDP.5) が成り立つ.  $\square$

**補題 2.4** 次の 3 つの条件 (a), (b), (c) はそれぞれ, (BDP) が成立するための十分条件である.

$$(a) \quad \exists L \geq 1, \exists \alpha > 0 \quad (s.t.)$$

$$\|\phi'_i(y) - \phi'_i(x)\| \leq L \|(\phi'_i)^{-1}\|^{-1} |y - x|^\alpha, \quad \forall i \in I, \forall x, y \in V$$

$$(b) \quad \forall t > 0 \text{ に対して,}$$

$$M(t) = \sup_{i \in I} \sup \{ \|(\phi'_i)^{-1}\| \times ||\phi'_i(y)| - |\phi'_i(x)|| : |y - x| \leq t \} < \infty$$

となる. さらに,  $\sum(t) := \sum_{n \geq 0} M(s^n \cdot t)$  は収束し,  $\lim_{t \rightarrow 0} \sum(t) = 0$  となる.

$$(c) \quad V \text{ 上で定義される関数の族 } \{ \log |\phi'_\omega| : \omega \in I^* \} \text{ は, 同程度連続になる.}$$

実際に,  $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (\text{BDP})$  となる.

[証明]

・(a)  $\rightarrow$  (b) を示す.

$$\begin{aligned} M(t) &= \sup_{i \in I} \sup \{ \|(\phi'_i)^{-1}\| \times ||\phi'_i(y)| - |\phi'_i(x)|| : |y - x| \leq t \} \\ &\leq \sup_{i \in I} \sup \{ \|(\phi'_i)^{-1}\| \times L \times \|(\phi'_i)^{-1}\|^{-1} |y - x|^\alpha \} \\ &\leq Lt^\alpha \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\sum_{n \geq 0} M(s^n t) \leq Lt^\alpha \sum_{n \geq 0} s^{\alpha n} = Lt^\alpha (1 - s^\alpha)^{-1}$$

となる. ここで,  $s$  は, (2.1) で与えられる縮小率である. よって  $\lim_{t \rightarrow 0} \sum(t) = 0$  となり,

(a)  $\rightarrow$  (b) が成り立つ.

・(b)  $\rightarrow$  (c) を示す.

$\omega \in I^*$ ,  $n = |\omega|$  とする.  $z \in V$  と  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して,

$$z_k = \phi_{\omega_{n-k+1}} \circ \phi_{\omega_{n-k+2}} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n}(z), \quad z_0 = z$$

のように定める.  $\epsilon > 0$  を固定し,  $\delta > 0$  を  $\sum(\delta) < \epsilon$  となるように十分小さくとる.

$$\log |\phi'_\omega(y)| = \log |\phi'_{\omega_1}(\phi_{\omega_2 \dots \omega_n}(y)) \times \phi'_{\omega_2}(\phi_{\omega_3 \dots \omega_n}(y)) \times \dots \times \phi'_{\omega_n}(y)| = \sum_{j=1}^n \log(\phi'_{\omega_j}(y_{n-j}))$$

と表せることと,  $\log(1+x) \leq x$  より,  $|x-y| < \delta$  をみたす任意の  $x, y \in V$  に対して,

$$\begin{aligned} |\log(|\phi'_\omega(y)|) - \log(|\phi'_\omega(x)|)| &= \left| \sum_{j=1}^n \log(|\phi'_{\omega_j}(y_{n-j})|) - \sum_{j=1}^n \log(|\phi'_{\omega_j}(x_{n-j})|) \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n \log \frac{|\phi'_{\omega_j}(y_{n-j})|}{|\phi'_{\omega_j}(x_{n-j})|} \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \log \left( 1 + \frac{|\phi'_{\omega_j}(y_{n-j})| - |\phi'_{\omega_j}(x_{n-j})|}{|\phi'_{\omega_j}(x_{n-j})|} \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|(\phi'_\omega)^{-1}\| \times \left| |\phi'_{\omega_j}(y_{n-j})| - |\phi'_{\omega_j}(x_{n-j})| \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n M(s^{(n-j)}\delta) = \sum_{j=1}^n M(s^k\delta) < \epsilon \end{aligned}$$

となるので,  $\{\log |\phi'_\omega| : \omega \in I^*\}$  は, 同程度連続になる.

・(c)  $\rightarrow$  (BDP) を示す.

連続性より,  $\forall \omega \in I^*$  に対して,

$$\exists \delta > 0 \quad (s.t) \quad |y-x| \leq \delta, \quad |\log(|\phi'_\omega(y)|) - \log(|\phi'_\omega(x)|)| \leq 1$$

となる.  $X$  はコンパクト連結集合であるので, 中心が  $X$  の点であり, 半径が  $\frac{1}{2}\delta$  の円のチェーンで,  $X$  を覆うものが存在する. その円の個数を  $n$  個, 和集合を  $W$  とする. すると,  $x, y$  が  $W$  の点ならば,  $k \leq n+1$  に対して,  $z_1 = y, z_k = x$  かつ  $|z_{i+1} - z_i| < \delta, \forall i = 1, 2, \dots, k-1$  となる列  $\{z_i : i = 1, 2, \dots, k\}$  が存在する. ゆえに

$$\begin{aligned} &|\log(|\phi'_\omega(y)|) - \log(|\phi'_\omega(x)|)| \\ &= |\{\log(|\phi'_\omega(z_1)|) - \log(|\phi'_\omega(z_2)|)\} + \dots + \{\log(|\phi'_\omega(z_{k-1})|) - \log(|\phi'_\omega(z_k)|)\}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} |\log(|\phi'_\omega(z_i)|) - \log(|\phi'_\omega(z_{i+1})|)| \leq k-1 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\frac{|\phi'_\omega(y)|}{|\phi'_\omega(x)|} \leq e^{k-1} \leq e^n$$

となり, (BDP) が成り立つ.  $\square$

以降, cIFS について考える.

**補題 2.5**  $S$  が無限集合から成る cIFS ならば,

$$\sum_{i \in I} \|\phi'_i\| \leq K \quad \text{かつ} \quad \lim_{i \in I} \text{diam}(\phi_i(X)) = 0$$

となる.

[証明]  $\forall i \in I$  に対して, OSC と BDP より,

$$\begin{aligned} \lambda(\text{Int}(X)) &\geq \sum_{i \in I} \lambda(\text{Int}(\phi_i(X))) = \sum_{i \in I} \int_{\text{Int}(\phi_i(X))} 1 \, d\lambda(x) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\text{Int}(X)} |\phi'_i| \, d\lambda(y) \geq \sum_{i \in I} \int_{\text{Int}(X)} K^{-1} \cdot \|\phi'_i\| \, d\lambda(y) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\sum_{i \in I} \|\phi'_i\| \leq K$$

が成り立つ。また,  $\text{diam}(\phi_i(X)) \leq D \cdot \|\phi'_i\| \rightarrow 0$  より,

$$\lim_{i \in I} \text{diam}(\phi_i(X)) = 0$$

が成り立つ.  $\square$

$x \in X, n \geq 1$  に対して,  $\pi_n^{-1}(x) \subseteq \cup_{j \leq n} I^j$  は次の二つの条件をみたす集合とする.

(1)  $x \in \phi_\omega(X), \forall \omega \in \pi_n^{-1}(x).$

(2)  $\omega, \tau \in \pi_n^{-1}(x)$  が  $\omega = \tau|_{|\omega|}$  をみたせば,  $\tau = \omega.$

**補題 2.6**  $S$  は, cIFS であるとする.  $D \geq 1$  が  $D \|\phi'_\omega\| \geq \text{diam}(X)$  をみたす十分大きい数であるとき,  $\forall x \in X$  と  $\forall n \geq 1$  に対して,

$$\#\pi_n^{-1}(x) \leq 2D^2$$

となる。さらに,

$$\sup_{x \in X} \#\{i \in I : x \in \phi_i(X)\} \leq 2$$

が成り立つ。すなわち,  $S$  は一様に *pointwise finite* となる。

[証明]  $x \in X$  とする.  $B(x, \text{diam}(X)) \supseteq \text{Int}(X)$  より,  $\lambda(B(x, \text{diam}(X))) \geq \lambda(\text{Int}(X))$  であることと,  $\lambda(B(x, \text{diam}(X))) = 2 \text{diam}(X)$  より,

$$\begin{aligned} 2 \text{diam}(X) &= \lambda(B(x, \text{diam}(X))) \geq \lambda(\text{Int}(X)) \geq \sum_{\omega \in \pi_n^{-1}(x)} \lambda(\phi_\omega(\text{Int}(X))) \\ &\geq \sum_{\omega \in \pi_n^{-1}(x)} \lambda(B'(\phi_\omega(x), D^{-2} \text{diam}(X))) = D^{-2} \text{diam}(X) \# \pi_n^{-1}(x) \end{aligned}$$

となる. よって,  $\# \pi_n^{-1}(x) \leq 2 D^2$  を得る. また, (OSC) より

$$\sup_{x \in X} \# \{i \in I : x \in \phi_i(X)\} \leq 2$$

を得る.  $\square$

**補題 2.7**  $S$  が cIFS であるならば,  $\forall x \in X, \forall r > 0$  に対して,

$$\#\{\omega \in I^* \mid \exists n; \omega \in \pi_n^{-1}(x), B(x, r) \cap \phi_\omega(X) \neq \emptyset \text{ かつ } \text{diam}(\phi_\omega(X)) \geq r\} \leq D^2 + 1$$

となる. ここで,  $D \geq 1$  は,  $D \|\phi'_\omega\| \geq \text{diam}(X)$  をみたす十分大きい数である.

[証明]  $F := \{\omega \in I^* \mid \exists n; \omega \in \pi_n^{-1}(x), B(x, r) \cap \phi_\omega(X) \neq \emptyset \text{ かつ } \text{diam}(\phi_\omega(X)) \geq r\}$  とおく.  $\phi_\omega(x_\omega)$  を  $\phi_\omega(X) \cap B(x, r)$  の境界の点とする. (BDP.5) より,  $\forall \omega \in F$  に対して,

$$\phi_\omega(X) \supset B'(\phi_\omega(x_\omega), D^{-2}r)$$

となる. また,  $\phi_\omega(x_\omega)$  の定義より,

$$B'(\phi_\omega(x_\omega), D^{-2}r) \subset B'(x, (1 + D^{-2})r)$$

が成り立つ.

$\omega \neq \tau$  のとき,  $\phi_\omega(x_\omega) \cap \phi_\tau(x_\tau) = \emptyset$  となることと, 上の包含関係より,

$$\phi_\omega(X) \supset B'(\phi_\omega(x_\omega), D^{-2}r) \quad , \quad \phi_\tau(X) \supset B'(\phi_\tau(x_\tau), D^{-2}r)$$

であるので,

$$B'(\phi_\omega(x_\omega), D^{-2}r) \cap B'(\phi_\tau(x_\tau), D^{-2}r) = \emptyset$$

となり,  $\omega \in F$ ,  $B'(\phi_\omega(x_\omega), D^{-2}r)$  は互いに素になる. よって,

$$\begin{aligned} (1 + D^{-2})r &= \lambda(B'(x, (1 + D^{-2})r)) \\ &\geq \sum_{\omega \in F} \lambda(B'(\phi_\omega(x_\omega), D^{-2}r)) \\ &= D^{-2}r \# F \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\#F \leq \frac{(1 + D^{-2})r}{D^{-2}r} = D^2 + 1$$

となり,  $\#F \leq D^2 + 1$  が成り立つ.  $\square$

## 2.3 フラクタル次元

$U_i$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合とする.  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  かつ  $|U_i| \leq \delta, \forall i$  をみたす, 有限または可算集合  $\{U_i\}$  を  $E$  の  $\delta$ -被覆という.  $E \subset \mathbb{R}, \delta > 0$  に対して,

$$H_{\delta}^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ は, } E \text{ の } \delta\text{-被覆} \right\}$$

と定める. そして, その極限値を

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(E)$$

とおく. この  $H^s(E)$  を  $E$  の  $s$ -次元ハウスドルフ測度という.  $H^s(E)$  は, 正則なボレル測度であるので,

$$H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(E_i)$$

をみたす.  $E_i$  が互いに素であるときに, 等号が成り立つ.

閉区間  $X$  の部分集合  $A$  に対し,  $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$  を中心が  $A$  の点である閉区間の族とする.

$$d(x_i, x_j) \geq r_i + r_j, r_i < \delta, r_j < \delta, i \neq j$$

をみたすとき,  $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$  を  $A$  の  $\delta$ -パッキングという.  $\delta > 0$  に対して,

$$P_{\delta}^s(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \{B_i\} \text{ は, } E \text{ の } \delta\text{-パッキング} \right\}$$

と定める. そして, その極限を

$$P_0^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P_{\delta}^s(E)$$

とおく. このように定義した  $P_0^s$  は測度にはならないので, さらに

$$P^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P_0^s(E_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

と定める. この  $P^s(E)$  を  $E$  の  $s$ -次元パッキング測度という.

$A$  のハウスドルフ次元  $\text{HD}(A)$  とパッキング次元  $\text{PD}(A)$  は,

$$\text{HD}(A) = \inf\{s : H^s(A) = 0\} = \sup\{s : H^s(A) = \infty\}$$

$$\text{PD}(A) = \inf\{s : P^s(A) = 0\} = \sup\{s : P^s(A) = \infty\}$$

で与えられる (この中辺と右辺は等しくなることが知られている).

ここで,  $N(A, r)$  を

$N(A, r)$  :  $A$  を覆うために必要な, 半径が  $r$  以下である閉区間の最小の個数とする. そして,  $A$  の下ボックス次元  $\underline{\text{BD}}(A)$  と上ボックス次元  $\overline{\text{BD}}(A)$  を

$$\underline{\text{BD}}(A) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(A, r)}{-\log r}, \quad \overline{\text{BD}}(A) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(A, r)}{-\log r}$$

と定義する. 下ボックス次元と上ボックス次元が一致するとき, その値を  $A$  のボックス次元といい,  $\text{BD}(A)$  と表す. つまり,

$$\text{BD}(A) = \underline{\text{BD}}(A) = \overline{\text{BD}}(A)$$

である. また,

$$\text{HD}(A) \leq \text{PD}(A) \leq \overline{\text{BD}}(A) \quad \text{かつ} \quad \text{HD}(A) \leq \underline{\text{BD}}(A) = \underline{\text{BD}}(\bar{A}) \leq \overline{\text{BD}}(A) = \overline{\text{BD}}(\bar{A})$$

が成り立つ.

$\nu$  を  $X$  におけるボレル確率測度,  $t > 0$  を実数とする. そして, 関数  $\rho_t : X \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  を

$$\rho_t(x, r) = \frac{\nu(B(x, r))}{r^t}$$

と定める.

**定理 2.8**  $X$  を閉区間,  $E$  を  $X$  のボレル部分集合,  $0 < c < \infty$  とする. このとき,

- (1)  $\limsup_{r \rightarrow 0} \rho_s(x, r) \geq c^{-1}, \forall x \in E$  が成り立つならば,  $H^s(E) \leq 8^s c \nu(\bar{E})$  となる.
- (2)  $\limsup_{r \rightarrow 0} \rho_s(x, r) \leq c^{-1}, \forall x \in E$  が成り立つならば,  $H^s(E) \geq c \nu(E)$  となる.
- (3)  $\liminf_{r \rightarrow 0} \rho_s(x, r) \geq c^{-1}, \forall x \in E$  が成り立つならば,  $P^s(E) \leq 2^s c \nu(\bar{E})$  となる.
- (4)  $\liminf_{r \rightarrow 0} \rho_s(x, r) \leq c^{-1}, \forall x \in E$  が成り立つならば,  $P^s(E) \geq 2^s c \nu(E)$  となる.

[証明]

(1) を示す.

仮定より,

$$\forall \epsilon > 0, \exists r \leq r_0 \quad (s.t) \quad \rho_s(x, r) \geq c^{-1} - \epsilon$$

が成り立つ.  $E$  を有界とし,  $\delta > 0, (\delta \leq r_0)$  を固定し,  $C$  と  $c'$  を

$$C := \{B(x, r) : x \in E, 0 < r \leq \delta \text{ かつ } \nu(B(x, r)) > (c')^{-1} r^s\}, \quad (c')^{-1} := c^{-1} - \epsilon$$



とおく.  $E \subset \cup_{B(x,r) \in \mathcal{C}} B(x,r)$  となる. このとき被覆定理より, 区間  $B_i \in \mathcal{C}$  の列で,  $B_i$  と同心かつ半径が  $B_i$  の 2 倍であり,  $\cup_{B(x,r) \in \mathcal{C}} B(x,r) \subset \cup_i \widetilde{B_i}(x,r)$  をみたす区間  $\widetilde{B_i}$  が存在する. よって,  $\{\widetilde{B_i}\}$  は,  $E$  の  $4\delta$ -被覆であり,  $\{B_i\}$  は互いに素であるので,

$$\begin{aligned} H_{4\delta}^s(E) &\leq \sum_i |\widetilde{B_i}|^s \leq 4^s \sum_i |B_i|^s \leq 8^s (c')^{-1} \sum_i \nu(B_i(x,r)) \\ &= 8^s (c')^{-1} \nu(\cup_i B_i(x,r)) \leq 8^s (c')^{-1} \nu(E_\delta) \leq 8^s c^{-1} \nu(E_\delta) \end{aligned}$$

を得る. よって,  $\delta \rightarrow 0$  とすると,  $H^s(E) \leq 8^s c^{-1} \nu(\bar{E}) < \infty$  が成り立つ.

・(2) を示す.

仮定より,

$$\forall \epsilon > 0, \exists r_0 > 0 \quad (s.t) \quad \sup_{r \leq r_0} \rho_s(x, r) \geq c^{-1} + \epsilon$$

が成り立つ.  $c'$  と  $E_\delta$  を  $\delta > 0, (\delta \leq r_0)$  に対して,

$$E_\delta := \{x \in E : \nu(B(x, r)) < c' r^s, 0 < \forall r \leq \delta\} \quad , \quad c' := c^{-1} + \epsilon$$

とおく.  $\{U_i\}$  を  $E_\delta$  の  $\delta$ -被覆とする. 各  $U_i$  は,  $E_\delta$  の点  $x$  を含み,  $x$  を中心とする半径が  $|U_i|$  である区間  $B$  は,  $U_i$  を含む.  $E_\delta$  の定義と  $U_i \subseteq B$  より,

$$\nu(U_i) \leq \nu(B) < c' |U_i|^s$$

となる. よって,

$$\nu(E_\delta) \leq \sum_i \{\nu(U_i) : U_i \text{ は } E_\delta \text{ を覆う}\} \leq c' \sum_i |U_i|^s$$

を得る.  $\{U_i\}$  は,  $E_\delta$  の  $\delta$ -被覆であるので,

$$\nu(E) \leq c' H_\delta^s(E_\delta) \leq c' H_\delta^s(E)$$

となる.  $c' \rightarrow c^{-1}, \delta \rightarrow 0$  とすると,  $E_\delta \rightarrow E$  かつ  $H^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E)$  であるので,

$$\nu(E) \leq c^{-1} H^s(E)$$

となる. よって,  $H^s(E) \geq c \nu(E)$  が成り立つ.

・(3) を示す.

仮定より,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{r^s} = \sup_{r_0} \inf_{r \leq r_0} \frac{\nu(B(x, r))}{r^s} \geq c^{-1}$$

である.

$$E_{\delta_0} := \{x \in E : \nu(B(x, r)) \geq (c')^{-1} r^s, 0 < \forall r \leq \delta_0\} \quad , \quad c' < c$$

とおき,  $B(x_i, r_i)$  を  $E_{\delta_0}$  の  $2\delta$ -パッキングとする ( $r_0 \geq \delta \geq r_i$ ).

$$\begin{aligned} \sum_i |B(x_i, r_i)|^s &= \sum_i |2r_i|^s \leq 2^s c' \sum_i \nu(B(x_i, r_i)) = 2^s c' \nu(\cup_i B(x_i, r_i)) \\ &\leq 2^s c' \nu(E_{\delta_0})^{2\delta} \leq 2^s c \nu(E_{\delta_0})^{2\delta} \end{aligned}$$

となる. ここで,  $(E_{\delta_0})^{2\delta}$  は,  $E_{\delta_0}$  を  $2\delta$  膨らませたものを表す. よって,  $P_\delta^s(E_{\delta_0}) \leq 2^s c \nu(E_{\delta_0})^{2\delta}$  より,  $\delta \rightarrow 0$  とすると,  $P_0^s(E_{\delta_0}) \leq 2^s c \nu(E_{\delta_0})$  を得る. さらに,  $\delta_0 \rightarrow 0$  とすると,  $P^s(\bar{E}) \leq 2^s c \nu(\bar{E})$  を得る. よって,  $E \subset \bar{E}$  より,

$$P^s(E) \leq 2^s c \nu(\bar{E}) < \infty$$

が成り立つ.

・(4) を示す.

仮定より,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{r^s} = \sup_{r_0} \inf_{r \leq r_0} \frac{\nu(B(x, r))}{r^s} \leq c^{-1}$$

である.  $r_0 \geq \delta > 0$  を固定し,

$$\mathcal{C} := \{B(x, r) : x \in E, 0 < r \leq \delta \text{ かつ } \nu(B(x, r)) < c^{-1} r^s\}$$

とおく.  $E \subset \cup_{B \in \mathcal{C}} B$  である. 被覆定理より,  $E \subset \cup_{i=1}^\infty B_i$  となるものが存在する. このとき,  $B_i$  は,  $E$  の  $2\delta$ -パッキングである. よって,

$$P_{2\delta}^s(E) \geq \sum_{i=1}^\infty |B_i|^s \geq 2^s c \sum_{i=1}^\infty \nu(B_i) = 2^s c \nu(\cup_{i=1}^\infty B_i) \geq 2^s c \nu(E)$$

となる. また,  $E \subset \cup_{i=1}^\infty E_i$  に対して,  $P_0^s(E) \leq \sum_{i=1}^\infty P_0^s(E_i)$  であるので,

$$P^s(E) = \inf \left\{ \sum_i P_0^s(E_i) : E \subset \cup_{i=1}^\infty E_i \right\} \geq P_0^s(E) \geq 2^s c \nu(E)$$

となる. よって,  $P^s(E) \geq 2^s c \nu(E)$  が成り立つ.  $\square$

**定理 2.9**  $S$  が IFS であり,  $\phi_i$  はすべて双リプシッツ写像であるとする. このとき極限集合は,

$$\text{PD}(J) = \overline{\text{BD}}(J) = \text{PD}(\bar{J}) = \overline{\text{BD}}(\bar{J})$$

となる.

[証明]

・ $\overline{\text{BD}}(J) \leq \text{PD}(J)$  を示す.

$t < s < \overline{\text{BD}}(J)$  ととる.  $\{Y_n : n \geq 1\}$  を  $J$  の任意の可算被覆とする.  $\pi : I^\infty \rightarrow X$ ,  $\pi(I^\infty) = J$  であるので,  $\pi(I^\infty) \subset \bigcup_{n \geq 1} Y_n$  より,  $I^\infty \subseteq \pi^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} Y_n)$  となり,  $\pi$  の定義域は,  $I^\infty$  なので,  $\pi^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} Y_n) = I^\infty$  となる. 定義より,  $\pi(\omega) = \bigcap_n \phi_{\omega|_n}(X)$  であり,  $I^\infty$  は完備なので,  $Y_q \subset J$  となる  $q \geq 1$  が存在し,

$$\exists \omega' \in I^* \quad (s.t) \quad \phi_{\omega'}(X) \subseteq Y_q$$

が成り立つ.  $\omega' = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  とし,  $\omega'$  に対して  $\mathcal{O} \subset I^\infty$ : 開集合 を

$$\mathcal{O} = \{\omega \in I^\infty \mid \omega_1 = i_1, \omega_2 = i_2, \dots, \omega_n = i_n\}$$

とおく. すると,  $\omega \in \mathcal{O}$  に対して  $\pi(\omega) \subset Y_q$  となり, これより  $\bigcup_{\omega \in \mathcal{O}} \pi(\omega) \subset Y_q$  を得る. よって,  $\phi_\omega(X) \subseteq \bigcup_{\omega \in \mathcal{O}} \pi(\omega)$  より  $\phi_\omega(J) \subset \phi_\omega(X) \subseteq \bigcup_{\omega \in \mathcal{O}} \pi(\omega) \subset \overline{Y_q}$  が成り立つ.

$\epsilon := s - t > 0$  とおく.  $M(J, r)$  を中心を  $J$  に持つ半径  $r$  の互いに疎である区間の最大個数とする.  $t < \overline{\text{BD}}(J)$  であるので,

$$\overline{\text{BD}}(J) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log M(J, r)}{-\log r} = \inf_{r_0} \sup_{r \leq r_0} \frac{\log M(J, r)}{-\log r} > t$$

となる. よって,  $\forall r_0$  に対して

$$\exists r \leq r_0 \quad (s.t) \quad \frac{\log M(J, r)}{-\log r} \geq t = s - \epsilon$$

が成り立ち,  $\log M(J, r) \geq -t \log r$  より,  $M(J, r) \geq r^{-t}$  となる. これより,

$$\sum_{j=1}^{M(J, r)} (2r)^t = (2r)^t M(J, r) \geq (2r)^t r^{-t} = 2^t$$

となり,

$$P_r^t(J) \geq 2^t > 0$$

を得る. また仮定より,  $\phi_\omega$  は, 双リプシッツ写像であるので,

$$P_r^t(J) = P_r^t(\phi_\omega(J)) \leq P_r^t(\overline{Y_q})$$

であることより,

$$P_r^t(Y_q) \geq 2^t$$

となり,

$$\sum_{n \geq 1} P_r^t(Y_n) \geq 2^t$$

が成り立つ。これより,

$$P^t(J) = \inf \left\{ \sum_i P_r^t(Y_i) : J \subset \cup_{i \geq 1} Y_i \right\} \geq 2^t$$

となり,  $PD(J) \geq t$  を得る. よって,  $PD(J) \geq \overline{BD}(J)$  が成り立つ.

・  $PD(J) \leq \overline{BD}(J)$  を示す.

$0 < \forall \alpha < \forall \beta < PD(J)$  をとる.

$M_r(E)$ :  $E$  の点を中心にもつ, 互いに疎である半径  $r > 0$  の閉区間の最大数とする.  $0 < \forall \delta < 1$  に対して,  $k(\delta)$  を

$$k(\delta) \geq -\log_2 \delta - 1 \text{ かつ } M_{2^{-k(\delta)-1}}(J) (2^{-k(\delta)-1})^\alpha \geq 2^{-\alpha}$$

をみたすように取ることができることを示す.

パッキング次元の定義から,  $J$  の  $\delta$ -パッキング  $\{B(x_j, r_j)\}_j$  で,

$$\sum_j (2r_j)^\beta > 2^\beta (2^{\beta-\alpha} - 1)^{-1}$$

をみたすものが存在する. 各  $k$  について,  $n_k$  を  $2^{-(k+1)} < r_j \leq 2^{-k}$  をみたす  $j$  の個数とする.

$$2^\beta (2^{\beta-\alpha} - 1)^{-1} < \sum_j (2r_j)^\beta \leq 2^\beta \sum_k n_k (2^{-k})^\beta$$

より,

$$\sum_k n_k (2^{-k})^\beta \geq (2^{\beta-\alpha} - 1)^{-1}$$

となる. また,

$$\sum_k (2^{-k})^{-\alpha} (2^{-k})^\beta = \sum_k (2^{-k})^{\beta-\alpha} = \frac{1}{2^{\beta-\alpha} - 1} = (2^{\beta-\alpha} - 1)^{-1}$$

なので, 自然数  $k(\delta)$  を  $n_{k(\delta)} > (2^{-k(\delta)})^{-\alpha}$  をみたすように取ることができる.  $\{B(x_j, r_j)\}_j$  は,  $J$  の  $\delta$ -パッキングであるので,  $r_j < \delta$  であり,  $2^{-(k(\delta)+1)} < r_j \leq 2^{-k(\delta)}$  をみたすので,  $\delta > 2^{-k(\delta)-1}$  となる. この対数を取ると  $k(\delta) > -\log_2 \delta - 1$  を得る. また,  $n_{k(\delta)} > (2^{-k(\delta)})^{-\alpha}$  より,  $M_{2^{-k(\delta)-1}}(J) \geq (2^{-k(\delta)})^{-\alpha}$  となり,  $M_{2^{-k(\delta)-1}}(J) \geq 2^{-\alpha} (2^{-k(\delta)-1})^{-\alpha}$  が成り立つので, これより,

$$M_{2^{-k(\delta)-1}}(J) (2^{-k(\delta)-1})^\alpha \geq 2^{-\alpha}$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned} \overline{BD}(J) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log M_{2^{-k(\delta)-1}}(J)}{-\log 2^{-k(\delta)-1}} \geq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha k(\delta) \log 2}{(k(\delta) + 1) \log 2} \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha k(\delta)}{k(\delta) + 1} = \alpha \end{aligned}$$

となるので,  $\text{PD}(J) \leq \overline{\text{BD}}(J)$  が成り立つ. よって,  $\text{PD}(J) = \overline{\text{BD}}(J)$  が成り立つ.

また,  $\text{PD}(J) \leq \text{PD}(\bar{J})$  である. 一方で  $\overline{\text{BD}}(J) = \overline{\text{BD}}(\bar{J})$  であることと,  $\text{PD}(J) \leq \overline{\text{BD}}(J)$  より,

$$\text{PD}(\bar{J}) \leq \overline{\text{BD}}(\bar{J}) = \overline{\text{BD}}(J) = \text{PD}(J)$$

となる. よって,  $\text{PD}(J) = \text{PD}(\bar{J})$  となり, この定理が成り立つ.  $\square$

## 2.4 熱力学的定式化

以降, しばらくは (OSC) と (2.7) をみたすことを特に仮定しない.

$t \geq 0$  に対して,

$$\psi(t) = \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^t$$

とおく.  $\theta = \theta_S = \inf\{t \geq 0 : \psi(t) < \infty\}$  とし,  $F(S)$  を  $\psi$  の値が有限となる区間とする. つまり,

$$F(S) = \begin{cases} (\theta, \infty), & \psi(\theta) = \infty, \\ [\theta, \infty), & \psi(\theta) < \infty. \end{cases}$$

**補題 2.10**  $\psi(t)$  は, 非増加である. また,  $[\theta, \infty)$  において減少かつ連続であり,  $F(S)$  において  $\log \psi(t)$  は, 凸関数になる. さらに,  $\psi(1) \leq K$  をみたし,  $\theta \leq 1$  となる.

[証明]

$$\lambda(\text{Int}(X)) \geq \sum_{i \in I} \lambda(\text{Int}(\phi_i(X))) = \sum_{i \in I} \int_{\text{Int}(X)} |\phi'_i| \, d\lambda \geq \sum_{i \in I} K^{-1} \|\phi'_i\| \lambda(\text{Int}(X))$$

であるので,

$$\psi(1) = \sum_{i \in I} \|\phi'_i\| \leq K < \infty$$

が成り立つ. よって,  $\theta \leq 1$  であることがわかる. また,  $\alpha, \beta$  を  $\frac{1}{\alpha}$  かつ  $\alpha + \beta = 1$  をみたす数とすると, Hölder の不等式より,

$$\begin{aligned} \log \psi(\alpha t + \beta d) &= \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^{\alpha t + \beta d} = \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^{\alpha t} \|\phi'_i\|^{\beta d} \\ &\leq \log \left\{ \left( \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^{\alpha t \times \frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \left( \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^{\beta d \times \frac{1}{\beta}} \right)^\beta \right\} \\ &= \log \left\{ \left( \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^t \right)^\alpha \left( \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^d \right)^\beta \right\} = \alpha \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^t + \beta \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^d \\ &= \alpha \log \psi(t) + \beta \log \psi(d) \end{aligned}$$

となるので,  $\log \psi(t)$  は, 凸関数になる.  $\forall \epsilon > 0$  に対して,  $\delta > 0$  を  $\delta \leq \frac{\epsilon}{\log K}$  となるようにとる. すると,  $|t - d| < \delta$  をみたす  $t, d \in F(S)$  に対して,

$$\begin{aligned} |\log \psi(t) - \log \psi(d)| &= \left| \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^t - \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\|^d \right| \\ &\leq \left| \log \left( \sum_{i \in I} \|\phi'_i\| \right)^t - \log \left( \sum_{i \in I} \|\phi'_i\| \right)^d \right| = \left| t \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\| - d \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\| \right| \\ &= \left| (t - d) \log \sum_{i \in I} \|\phi'_i\| \right| < |\delta \log K| \leq \epsilon \end{aligned}$$

となるので,  $\log \psi(t)$  は, 連続である.  $\square$

$n \geq 1$  に対して,

$$\psi_n(t) = \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} \psi_{k+n}(t) &= \sum_{\omega \in I^{k+n}} \|\phi'_\omega\|^t \\ &= \sum_{\omega \in I^{k+n}} \|\phi'_{\omega_1}(\phi_{\omega_2}, \dots, \phi_{\omega_{k+n}})\|^t \|\phi'_{\omega_2}(\phi_{\omega_3}, \dots, \phi_{\omega_{k+n}})\|^t \cdots \|\phi'_{\omega_n}(\phi_{\omega_{n+1}}, \dots, \phi_{\omega_{k+n}})\|^t \\ &\quad \times \|\phi'_{\omega_{n+1}}(\phi_{\omega_{n+2}}, \dots, \phi_{\omega_{k+n}})\|^t \|\phi'_{\omega_{n+2}}(\phi_{\omega_{n+3}}, \dots, \phi_{\omega_{k+n}})\|^t \cdots \|\phi'_{\omega_{k+n}}\|^t \\ &\leq \sum_{\omega^1 \in I^n} \|\phi'_{\omega_1^1}(\phi_{\omega_2^1}, \dots, \phi_{\omega_n^1})\|^t \cdots \|\phi'_{\omega_n^1}\|^t \sum_{\omega^2 \in I^k} \|\phi'_{\omega_1^2}(\phi_{\omega_2^2}, \dots, \phi_{\omega_k^2})\|^t \cdots \|\phi'_{\omega_k^2}\|^t \\ &= \psi_n(t) \psi_k(t) \end{aligned}$$

が成り立つ. また, (BDP) より

$$K \|\phi'_{\omega_i}(\phi_{\omega_{i+1}}, \dots, \phi_{\omega_{k+n}})\|^t \geq \|\phi'_{\omega_i}\|^t, \quad i \leq n$$

であるので, これより,

$$\psi_{k+n}(t) \geq K^{-kn} \psi_k(t) \psi_n(t)$$

を得る. よって,

$$K^{-kn} \psi_k(t) \psi_n(t) \leq \psi_{k+n}(t) \leq \psi_k(t) \psi_n(t)$$

が成り立つ. この不等式を繰り返して用いると  $\psi_n(t) \leq (\psi(t))^n$  となり,  $\log$  をとり  $\frac{1}{n}$  を掛けると

$$\frac{1}{n} \log \psi_n(t) \leq \log \psi(t)$$

を得る。これより、極限

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \psi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t$$

は常に存在し、 $\psi(t) < \infty$  であるときに有限になる。特に

$$\inf\{t : P(t) < \infty\} = \theta_S$$

である。さらに、(BDP) より  $\forall x \in V$  に対して、

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega(x)|^t$$

となる。 $P(t)$  を  $S$  の *topological pressure* という。

**補題 2.11**  $\inf\{t : P(t) < \infty\} = \theta_S$  が成り立つ。 $P(t)$  は、区間  $[0, \infty)$  で非増加、 $F(S)$  において減少である。また、 $F(S)$  において連続な凸関数である。さらに、 $I$  が有限集合でないときに限り、 $P(0) = \infty$  となる。

[証明]  $P(t)$  は、 $\psi_n(t)$  の極限関数であり、 $\psi_n(t)$  は、 $\psi(t)$  と同様の不等式をみたすので、補題 2.10 より、 $P(t)$  は、凸関数であることがわかる。したがって、 $P(t)$  は、 $F(S)$  で連続になる。さらに、 $I$  が有限集合でないならば、

$$P(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \psi_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in I^n} 1 = \infty$$

となる。  $\square$

ここで、*conformal measure* の定義をする。ボレル確率測度  $m$  は、 $m(J) = 1$  かつ、任意のボレル集合  $A \subset X$  に対して、

$$m(\phi_i(A)) = \int_A |\phi'_i|^t dm \quad (2.9)$$

かつ

$$m(\phi_i(X) \cap \phi_j(X)) = 0, \forall i, j \in I, i \neq j \quad (2.10)$$

を満たすときに、*t-conformal* であるという。このとき、

$$\begin{aligned} m(\phi_\omega(A)) &= m(\phi_{\omega_1}(\phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_n}(A))) \\ &= \int_A |\phi'_{\omega_1}(\phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_n}(A))|^t dm \\ &= \int_A |\phi'_{\omega_1}(\phi_{\omega_2} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_n}(A))|^t \times |\phi'_{\omega_2}(\phi_{\omega_3} \circ \cdots \circ \phi_{\omega_n}(A))|^t \times \cdots \times |\phi'_{\omega_n}(A)|^t dm \\ &= \int_A |\phi'_\omega|^t dm \end{aligned}$$

となる. また,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \tau = (\omega'_1, \dots, \omega'_n), \omega \neq \tau$  とすると,  $\omega_i \neq \omega'_i$  をみたす  $i \geq 1$  が存在するので,

$$\begin{aligned} m[\phi_\omega(X) \cap \phi_\tau(X)] &= m[(\phi_{\omega_1} \circ \phi_{\omega_2} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n})(X) \cap (\phi_{\omega'_1} \circ \phi_{\omega'_2} \circ \dots \circ \phi_{\omega'_n})(X)] \\ &\leq m[(\phi_{\omega_i} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n})(X) \cap (\phi_{\omega'_i} \circ \dots \circ \phi_{\omega'_n})(X)] \\ &= m[\phi_{\omega_i} \{ \phi_{\omega_{i+1}, \dots, \omega_n}(X) \} \cap \phi_{\omega'_i} \{ \phi_{\omega'_{i+1}, \dots, \omega'_n}(X) \}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. よって,  $X$  の任意のボレル部分集合  $A$  と  $\forall \omega \in I^*$  に対して,

$$m(\phi_\omega(A)) = \int_A |\phi'_\omega|^t dm \quad (2.11)$$

かつ

$$m(\phi_\omega(X) \cap \phi_\tau(X)) = 0, \forall \omega, \tau \in I^*, \omega \neq \tau \quad (2.12)$$

を得る. さらに, (BDP) より,  $m$  が  $\delta$ -conformal ならば

$$\begin{aligned} 1 &= m(J) = m(\cup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(J)) = \sum_{\omega \in I^n} m(\phi_\omega(J)) \\ &= \sum_{\omega \in I^n} \int_J |\phi'_\omega|^\delta dm \geq \sum_{\omega \in I^n} \int_J (K^{-1} \|\phi'_\omega\|)^\delta dm \\ &\geq \sum_{\omega \in I^n} K^{-\delta} |\phi'_\omega|^\delta \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_J 1 dm = m(J) = m(\cup_{\omega \in I^\infty} \cap_{n=1}^\infty \phi_{\omega|n}(X)) \\ &\leq m(\cup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)) = \int_X \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta dm \\ &\leq \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^\delta m(J) \end{aligned}$$

より,  $1 \leq \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^\delta$  が成り立つことと,  $K|\phi'_\omega| \geq \|\phi'_\omega\|$  より,

$$\sum_{\omega \in I^n} (K|\phi'_\omega|)^\delta \geq \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^\delta \geq 1$$

となり,  $\sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta \geq K^{-\delta}$  が成り立つ. よって,  $m$  が  $\delta$ -conformal ならば,

$$K^{-\delta} \leq \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta \leq K^\delta \quad (2.13)$$



が成り立つ。

次に, (OSC) と (2.7) を仮定せず, *semiconformal measure* を定義し, その基本的な性質を示す。次に, (OSC) と (2.7) を仮定して, *conformal measure* が存在することを示し, 基本的な性質を示す。

$\delta \in F(S)$  とし, すべての有限関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,

$$\mathcal{L}_\delta(f)(x) = \sum_{i=I} |\phi'_i(x)|^\delta f(\phi_i(x))$$

とおく。  $\mathcal{L}_\delta$  は, 連続関数  $C(X)$  級であり,  $\delta \in F(S)$  であるので, ノルムは,  $\psi(\delta)$  により有限になる。ここで,  $\mathcal{L}_\delta^* : C(X)^* \rightarrow C(X)^*$  によって, *dual operator* を定義する。

**補題 2.12**  $t \geq 0$  とする。  $m$  が *conformal measure* ならば,  $t \in F(S)$  かつ  $P(t) = 0$  であり, さらに  $\mathcal{L}_\delta^*(m) = m$  となる。

[証明]  $m$  が *conformal measure* ならば, (2.13) より,  $K^{-\delta} \leq \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^t \leq K^\delta < \infty$  が成り立つので,  $t \in F(S)$  となる。また,

$$P(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log K^\delta, \quad P(t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log K^{-\delta}$$

より,  $P(t) = 0$  となる。また,

$$\begin{aligned} m(\phi_i(A)) &= \int_A |\phi'_i|^t dm \\ &= \int_X 1_{\phi_i(A)} dm = \int_X |\phi'_i|^t 1_A dm \end{aligned}$$

となり,  $x \in \phi_i(A)$  ならば,  $\phi_i^{-1}(x) \in A$  となるので,

$$\int_X 1_{\phi_i(A)} dm = \int_X 1_A \circ \phi_i^{-1} dm = \int_X |\phi'_i|^t 1_A dm$$

となる。よって,  $\int_X g \circ \phi_i^{-1} dm = \int_X |\phi'_i|^t g dm$  となり,  $g = f \circ \phi_i$  とすると,

$$\int_X |\phi'_i|^t f \circ \phi_i dm = \int_X (f \circ \phi_i) \circ \phi_i^{-1} dm \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} \int_{\phi_j(X)} 1_A \circ \phi_i^{-1} dm &= \int_{\phi_j(X)} 1_{\phi_i(A)} dm = \int 1_{\phi_i(A)} 1_{\phi_j(X)} dm = m(\phi_i(A) \cap \phi_j(X)) \\ &= \begin{cases} m(\phi_i(A)), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

となる. また,  $m(\phi_i(A)) = \int_X 1_{\phi_i(A)} dm = \int_X 1_A \circ \phi_i^{-1} dm$  より,  $\int_{\phi_i(X)} 1_A \circ \phi_i^{-1} dm = \int_X 1_A \circ \phi_i^{-1} dm$  となる.  $1_A = f \circ \phi_i$  とすると,

$$\int_X (f \circ \phi_i) \circ \phi_i^{-1} dm = \int_{\phi_i(X)} (f \circ \phi_i) \circ \phi_i^{-1} dm = \int_{\phi_i(X)} f dm$$

となる. よって, ①より

$$\int_X |\phi'_i|^t f \circ \phi_i dm = \int_X (f \circ \phi_i) \circ \phi_i^{-1} dm = \int_{\phi_i(X)} f dm$$

となる. よって,  $f \in C(X)$  に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^* m(f) &= \int \mathcal{L}_t(f) dm = \int \sum_{i \in I} |\phi'_i|^t (f \circ \phi_i) dm \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\phi_i(X)} f dm = \int_{\cup \phi_i(X)} f dm = \int f dm = m(f) \end{aligned}$$

となる.  $\square$

この補題より,  $m$  が  $\delta$ -conformal measure ならば,  $\mathcal{L}_\delta^*(m) = m$  となる  $\mathcal{L}_\delta^*$  の不動点が存在することがわかる.  $\mathcal{L}_\delta^*$  の不動点を  $\delta$ -semiconformal measures という. 以降,  $\mathcal{L}_\delta$  を  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}_\delta^*$  を  $\mathcal{L}^*$  と表す. このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(f)(x) &= \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))(x) = \sum_{i \in I} |\phi'_i| (\mathcal{L}(f) \circ \phi_i)(x) = \sum_{i \in I} |\phi'_i| \sum_{j \in I} |\phi'_j(\phi_i(x))| (f \circ \phi_j)(\phi_i(x)) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} |\phi'_i| |\phi'_j(\phi_i(x))| (f \circ (\phi_j \circ \phi_i)(x)) = \sum_{\omega \in I^2} |\phi'_\omega(x)| (f \circ \phi_\omega)(x) \end{aligned}$$

となる. これを繰り返すと,

$$\mathcal{L}^n(f)(x) = \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega(x)| f \circ \phi_\omega(x)$$

が成り立つ.

**補題 2.13**  $\delta$ -semiconformal measure は,  $P(\delta) = 0$  であるときに限り存在する. さらに,  $m$  が  $\delta$ -semiconformal measure ならば,  $m(J) = 1$  となる.

[証明]  $\delta$ -semiconformal measure が存在すると仮定する. それを  $m$  とおく. すると,  $\forall n \geq 1$  に対して

$$1 = \int 1_X dm = \int \mathcal{L}^n(1_X) dm = \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta dm$$

となる. また (BDP) より,

$$1 \leq \int \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^\delta dm = \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^\delta \leq K^\delta$$

となる。よって、

$$P(\delta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log K^\delta = 0 \quad , \quad P(\delta) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 1 = 0$$

となるので、 $P(\delta) = 0$  となる。

次に、 $P(\delta) = 0$  とする。そして、 $C(X)^*$  上の連続写像  $\nu \rightarrow \mathcal{L}^*(\nu)/\mathcal{L}^*(\nu)(1)$  を与える。この写像は、Schauder-Tichonov の定理より不動点を持つ。それを  $m$  とする。すると、 $m = \mathcal{L}^*(m)/\mathcal{L}^*(m)(1)$  となり、 $\lambda = \mathcal{L}^*(m)(1)$  とおくと、 $\mathcal{L}^*(m) = \lambda m$  が成り立つ。このとき、 $\lambda = 1$  となることを示す。

$\forall n \geq 1$  に対して、 $(\mathcal{L}^*)^n(m) = \lambda^n m$  であるので、

$$\int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta dm = \lambda^n \int 1 dm = \lambda^n$$

となる。また、 $P(\delta) = 0$  であるので、(BDP) より  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in X$  に対して、 $n$  を十分大きくとると、

$$e^{-\epsilon n} \leq \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta \leq e^{\epsilon n}$$

が成り立つので、

$$e^{-\epsilon n} \leq \lambda^n \leq e^{\epsilon n}$$

となる。よって、 $\lambda = 1$  となり、 $\mathcal{L}^*(m) = m$  となるので、 $m$  は  $\mathcal{L}^*(m)$  の不動点となる。

次に、 $m$  を  $\delta$ -semiconformal measure または、同値なものとする。すると、すべての連続関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$\int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta dm = \int f dm \quad (2.14)$$

であるので、 $\forall \omega \in I^n$  と  $X$  のすべてのボレル部分集合  $A$  に対して

$$\begin{aligned} m(\phi_\omega(A)) &= \int \mathcal{L}_\delta(\phi_\omega(A)) = \int \sum_{\tau \in I^n} |\phi'_\tau|^\delta (1_{\phi_\omega(A)} \circ \phi_\tau) dm \\ &\geq \int |\phi'_\omega|^\delta (1_{\phi_\omega(A)} \circ \phi_\omega) dm = \int_A |\phi'_\omega|^\delta dm \end{aligned} \quad (2.15)$$

が成り立つ。各  $n \geq 1$  に対して、 $X_n = \cup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)$  とおく。すると、 $\forall \omega \in I^n$  に対して  $1_{X_n} \circ \phi_\omega$  となる。すると (2.14) より

$$m(X_n) = \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta (1_{X_n} \circ \phi_\omega) dm = \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta dm = \int 1 dm = 1$$

となる。よって、

$$m(J) = m(\cap_{n=1}^\infty \cup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)) = m(\cap_{n=1}^\infty X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(X_n) = 1$$

が成り立つ。  $\square$

## 2.5 conformal measure の存在と一意性

次に,  $I^\infty$  上に測度を与える.  $\omega \in I^*$  に対して

$$[\omega] = \{\tau \in I^\infty : \tau|_{|\omega|} = \omega\}$$

とおく.

**補題 2.14**  $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$\mu([\omega]) = \int |\phi'_\omega|^\delta dm$$

となる,  $I^\infty$  上の唯一のボレル確率測度  $\mu$  が存在する.

[証明] (2.14) より,  $\forall n \geq 1$  に対して  $\sum_{\omega \in I^n} \int |\phi'_\omega|^\delta dm = 1$  が成り立つので,  $I^n$  上の測度を

$$\mu_n([\omega]) = \int |\phi'_\omega|^\delta dm$$

とおく. すると,  $\forall \omega \in I^n$  に対して

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}([\omega]) &= \sum_{i \in I} \mu_{n+1}([\omega i]) = \sum_{i \in I} \int |\phi'_{\omega i}|^\delta dm \\ &= \int \sum_{i \in I} (|\phi'_\omega| \circ \phi_i)^\delta |\phi'_i|^\delta dm = \int |\phi'_\omega|^\delta dm = \mu_n([\omega]) \end{aligned}$$

となる. よって, Kolmogorov の拡張定理 (カラテオドリの拡張定理) より,  $I^\infty$  上の確率測度  $\mu$  で  $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$\mu([\omega]) = \mu_{|\omega|}([\omega]) = \int |\phi'_\omega|^\delta dm$$

をみたすものが存在する.  $\square$

**系 2.15**  $R \subset I^*$  は次の二つの条件をみたすものとする.

- (1)  $J \subseteq \bigcup_{\omega \in R} \phi_\omega(X)$ .
- (2)  $\omega, \tau \in R$  が  $\omega = \tau|_{|\omega|}$  をみたせば,  $\tau = \omega$ .

とする. このとき,

$$1 \leq \sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^\delta \leq K^\delta \quad (2.16)$$

が成り立つ.

[証明]  $J \subset \cup_{\omega \in R} \phi_\omega(X)$  より,

$$\begin{aligned} 1 &= m(J) \leq m(\cup_{\omega \in R} \phi_\omega(X)) = \sum_{\omega \in R} m(\phi_\omega(X)) = \sum_{\omega \in R} \int_{\phi_\omega(X)} 1 \, dm \\ &= \sum_{\omega \in R} \int |\phi'_\omega|^\delta \, dm \leq \sum_{\omega \in R} \int \|\phi'_\omega\|^\delta \, dm = \sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^\delta \int 1 \, dm = \sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^\delta \end{aligned}$$

となる. よって,  $1 \leq \sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^\delta$  が成り立つ. また,  $\mu(R) \leq 1$ ,  $\mu(R) = \sum_{\omega \in R} \mu([\omega])$  より,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{\omega \in R} \mu([\omega]) = \sum_{\omega \in R} \mu|_{[\omega]}([\omega]) = \sum_{\omega \in R} \int |\phi'_\omega|^\delta \, dm \\ &\geq \sum_{\omega \in R} \int (K^{-1} \|\phi'_\omega\|)^\delta \, dm = \sum_{\omega \in R} K^{-\delta} \|\phi'_\omega\|^\delta \int 1 \, dm = K^{-\delta} \sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^\delta \end{aligned}$$

となり,  $\sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^\delta \leq K^\delta$  が成り立つ. よって,  $1 \leq \sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^\delta \leq K^\delta$  となる.  $\square$

**補題 2.16**  $m$  は, *semiconformal measure* とする. このとき  $\forall A \subset J$  に対して

$$m(A) = \mu \circ \pi^{-1}(A)$$

が成り立つ.

[証明]  $J \supset \forall A$  (閉区間) とする.  $\forall n \geq 1$  に対して

$$A_n = \{\omega \in I^n : \phi_\omega(X) \cap A \neq \emptyset\}$$

とおく.  $A_n$  は, コンパクト集合である. (2.14) を特性関数  $1_A$  に適用すると,  $\forall n \geq 1$  に対して

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{\omega \in I^n} \int |\phi'_\omega(x)|^\delta (1_A \circ \phi_\omega) \, dm = \sum_{\omega \in A_n} \int |\phi'_\omega(x)|^\delta (1_A \circ \phi_\omega) \, dm \\ &\leq \sum_{\omega \in A_n} \int |\phi'_\omega(x)|^\delta \, dm = \sum_{\omega \in A_n} \mu([\omega]) = \mu(\cup_{\omega \in A_n} [\omega]) \end{aligned}$$

となる.  $\forall \omega \in \cap_{n \geq 1} \cup_{\omega \in A_n} [\omega]$  をとる. すると,

$$\exists \omega_n \in A_n \quad (s.t) \quad \omega \in [\omega_n], \forall n$$

となる. ここで,  $x = \pi(\omega)$  とおくと,  $\forall n$  に対して,  $x \in \phi_{\omega_n}(X)$  となる. また,  $\forall n$  に対して,  $\omega_n \in A_n$  であるので,  $x \in \phi_{\omega_n}(X) \cap A \subset A$  となり,  $\pi(\omega) \in A$  より,  $\omega \in \pi^{-1}(A)$  となる. よって,

$$\cap_{n \geq 1} \cup_{\omega \in A_n} [\omega] \subset \pi^{-1}(A)$$

となる。ゆえに、

$$m(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{\omega \in A_n} [\omega]) \leq \mu(\pi^{-1}(A))$$

を得る。ここで、 $m(A) < \mu(\pi^{-1}(A))$  と仮定する。すると、 $1 - m(A) > 1 - \mu(\pi^{-1}(A))$  となる。また、 $1 - m(A) = m(A^c)$  かつ  $1 - \mu(\pi^{-1}(A)) = \mu(\pi^{-1}(A^c))$  であるので、 $m(A^c) > \mu(\pi^{-1}(A^c))$  となり、仮定に矛盾する。よって、 $m(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$  が成り立つ。  $\square$

ここで、 $\mu$  と同値な確率測度が唯一存在することを示す。

$$\begin{aligned} \frac{\mu([\omega\tau])/\mu(\tau)}{\mu([\omega\rho])/\mu(\rho)} &= \frac{\mu([\omega\tau])}{\mu(\tau)} \times \frac{\mu(\rho)}{\mu([\omega\rho])} = \frac{\int |\phi'_{\omega\tau}|^\delta dm}{\int |\phi'_\tau|^\delta dm} \times \frac{\int |\phi'_\rho|^\delta dm}{\int |\phi'_{\omega\rho}|^\delta dm} \\ &\leq \frac{\|\phi'_\omega\|^\delta \int |\phi'_\tau|^\delta dm}{\int |\phi'_\tau|^\delta dm} \times \frac{\int |\phi'_\rho|^\delta dm}{K^{-\delta} \|\phi'_\omega\|^\delta \int |\phi'_\rho|^\delta dm} \leq K^\delta \end{aligned}$$

より、

$$\frac{\mu([\omega\tau])/\mu(\tau)}{\mu([\omega\rho])/\mu(\rho)} \leq K^\delta$$

となることに注意する。

**定理 2.17**  $\mu$  について連続かつ *ergodic* であり  $\sigma$  で不変な測度  $\mu^*$  が唯一存在する。さらに、 $\mu^*$  と  $\mu$  は、*equivalent* であり、

$$K^{-\delta} \leq \frac{d\mu^*}{d\mu} \leq K^\delta$$

をみtas。

[証明]  $\mathcal{L}$  を実数列の Banach 空間上で定義される Banach 極限とする。Kolmogorov の拡張定理より、 $I^*$  上で定義される関数は、 $\mu^*([\omega]) = \mathcal{L}((\mu(\sigma^{-n}([\omega])))$  となり、 $I^\infty$  上の  $\sigma$  で不変な確率測度に拡張できる。 $I^\infty$  上の測度を  $\mu^*$  で表す。(2.16) より、 $\omega \in I^*$  と  $\forall n \geq 0$  に対して

$$\begin{aligned} \mu(\sigma^{-n}([\omega])) &= \sum_{\tau \in I^n} \mu([\tau\omega]) = \sum_{\tau \in I^n} \int |\phi'_{\tau\omega}|^\delta dm \geq \sum_{\tau \in I^n} K^{-\delta} \|\phi'_\tau\|^\delta \int |\phi'_\omega|^\delta dm \\ &= K^{-\delta} \int |\phi'_\omega|^\delta dm \sum_{\tau \in I^n} \|\phi'_\tau\|^\delta \geq K^{-\delta} \mu([\omega]) \mu(I^\infty) = K^{-\delta} \mu([\omega]) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \mu(\sigma^{-n}([\omega])) &= \sum_{\tau \in I^n} \mu([\tau\omega]) = \sum_{\tau \in I^n} \int |\phi'_{\tau\omega}|^\delta dm \\ &\leq \sum_{\tau \in I^n} \|\phi'_\tau\|^\delta \int |\phi'_\omega|^\delta dm = \int |\phi'_\omega|^\delta dm \sum_{\tau \in I^n} \|\phi'_\tau\|^\delta \leq K^\delta \mu([\omega]) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$K^{-\delta} \mu([\omega]) \leq \mu^*([\omega]) \leq K^{\delta} \mu([\omega])$$

となることがわかり, この不等式は,  $I^*$  上のすべての Borel 部分集合に拡張できる.

$\mu^*$  が, ergodic になることを示す.  $A = \{\tau \in I^\infty \mid \tau|_n \in B\}$ ,  $B \subset I^n$  とおく.  $A \subset I^\infty$  であり,  $\mu(A) > 0$  をみtas. そして,  $A \subset \cup\{\tau\} : \tau \in Z\}$  かつ  $\sum_{\tau \in Z} \mu([\omega\tau]) \leq 2\mu(\omega A)$  をみtas  $Z \subset I^*$  をとる. ここで,  $\omega A = \{\omega\rho : \rho \in A\}$  である. すると,

$$\begin{aligned} \mu(\sigma^{-n}(A) \cap [\omega]) &= \mu(\omega A) \geq \frac{1}{2} \sum_{\tau \in Z} \mu([\omega\tau]) = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in Z} \int |\phi'_{\tau\omega}|^{\delta} dm \\ &\geq \frac{1}{2} K^{-\delta} \|\phi'_{\omega}\|^{\delta} \sum_{\tau \in Z} \int |\phi'_{\tau}|^{\delta} dm \geq \frac{1}{2} K^{-\delta} \int |\phi'_{\omega}|^{\delta} dm \sum_{\tau \in Z} \mu([\tau]) \\ &= \frac{1}{2} K^{-\delta} \mu([\omega]) \mu(\cup\{\tau\} : \tau \in Z\}) \geq \frac{1}{2} K^{-\delta} \mu(A) \mu([\omega]) \quad (2.17) \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \mu(\sigma^{-n}(I^\infty \setminus A) \cap [\omega]) &= \mu([\omega] \setminus \sigma^{-n}(A) \cap [\omega]) = \mu([\omega]) - \mu(\sigma^{-n}(A) \cap [\omega]) \\ &\leq \mu([\omega]) - \frac{1}{2} K^{-\delta} \mu(A) \mu([\omega]) = (1 - (2K^{\delta})^{-1} \mu(A)) \mu([\omega]) \end{aligned}$$

となる. ゆえに,  $\mu(A) < 1$  であるすべてのボレル集合  $A \subset I^\infty$  と  $\forall n \geq 0, \forall \omega \in I^n$  に対して

$$\mu(\sigma^{-n}(A) \cap [\omega]) \leq (1 - (2K^{\delta})^{-1} (1 - \mu(A))) \mu([\omega]) \quad (2.18)$$

を得る. ここで,  $\sigma^{-1}(A) = A$  かつ  $0 < \mu(A) < 1$  と仮定する.  $\gamma = 1 - (2K^{\delta})^{-1} (1 - \mu(A))$  とおくと,  $0 < \mu(A) < 1$  より

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - (2K^{\delta})^{-1} (1 - \mu(A)) = 1 - (2K^{\delta})^{-1} + (2K^{\delta})^{-1} \mu(A) > 1 - (2K^{\delta})^{-1} > 0 \\ \gamma &= 1 - (2K^{\delta})^{-1} + (2K^{\delta})^{-1} \mu(A) < 1 - (2K^{\delta})^{-1} + (2K^{\delta})^{-1} = 1 \end{aligned}$$

であるので,  $0 < \gamma < 1$  をみtas. (2.18) より,  $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$\mu(A \cap [\omega]) = \mu(\sigma^{-|\omega|}(A) \cap [\omega]) \leq \gamma \mu([\omega])$$

を得る.  $\eta > 1$  を  $\gamma\eta < 1$  をみtasように十分小さく取り,  $R \subset I^*$  で  $A \subset \cup\{[\omega] : \omega \in R\}$  かつ  $\mu(\cup\{[\omega] : \omega \in R\}) \leq \eta \mu(A)$  をみtasものを選ぶ. すると,

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \sum_{\omega \in R} \mu(A \cap [\omega]) \leq \sum_{\omega \in R} \gamma \mu([\omega]) \\ &= \gamma \mu(\cup\{[\omega] : \omega \in R\}) \leq \gamma \eta \mu(A) < \mu(A) \end{aligned}$$

となり, 矛盾する. これより,  $\mu(A) = 0$  または,  $\mu(A) = 1$  となるので,  $\mu$  は, ergodic であることがわかり,  $\mu^*$  は,  $\mu$  に関して絶対連続であるので,  $\mu^*$  は, ergodic になる.  $\square$

**定理 2.18**  $\delta$ -semiconformal measure は、ただ一つ存在する.

[証明]  $m$  を  $\delta$ -semiconformal measure とし、その単一性を示す.

$m_1$  をもう一つの  $\delta$ -semiconformal measure とし、 $\mu_1$  を補題 2.14 より得られる確率測度とする. すると、 $\int dm = \int dm_1$  より

$$\mu_1([\omega]) = \int |\phi'_\omega|^\delta dm_1 \leq \|\phi'_\omega\|^\delta \int dm_1 = \|\phi'_\omega\|^\delta \int dm \leq K^\delta \int |\phi'_\omega|^\delta dm = K^\delta \mu([\omega])$$

かつ

$$\begin{aligned} \mu_1([\omega]) &= \int |\phi'_\omega|^\delta dm_1 \geq K^{-\delta} \|\phi'_\omega\|^\delta \int dm_1 \\ &= K^{-\delta} \|\phi'_\omega\|^\delta \int dm \geq K^{-\delta} \int |\phi'_\omega|^\delta dm = K^{-\delta} \mu([\omega]) \end{aligned}$$

であるので、 $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$K^{-\delta} \leq \frac{\mu_1([\omega])}{\mu([\omega])} \leq K^\delta$$

となる. これより、 $\mu([\omega]) = 0$  ならば、 $\mu_1([\omega]) = 0$  かつ  $\mu_1([\omega]) = 0$  ならば  $\mu([\omega]) = 0$  が成り立つので、 $\mu_1$  と  $\mu$  は、equivalent である. よって、Radon-Nikodym 導関数  $\rho$  は、 $K^{-\delta} \leq \rho \leq K^\delta$  をみたす. また、

$$\mu([\sigma(\omega)]) = \int |\phi'_{\sigma(\omega)}|^\delta dm$$

かつ

$$\mu([\omega]) = \int |\phi'_\omega|^\delta dm = \int \left| \phi_{\omega_1}(\phi_{\sigma(\omega)}(x)) \right|' \times |\phi'_{\sigma(\omega)}(x)|^\delta dm(x)$$

を得る. よって、

$$\begin{aligned} \inf \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)}(X) \} \mu([\sigma(\omega)]) &\leq \mu([\omega]) \\ &\leq \sup \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)}(X) \} \mu([\sigma(\omega)]) \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\phi'_{\omega_1}$  は、連続関数であるので、 $\forall \omega \in I^\infty$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu([\omega|_n])}{\mu([\sigma(\omega)|_{n-1}])} = |\phi'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|^\delta \quad (2.19)$$

となり、 $\mu_1$  に対しても同様の等式が成り立つ.  $\mu(A) = 1$  かつ  $\omega \in A$  に対して、 $\rho(\omega)$  が存在するような  $A \subset I^\infty$  が存在するとする.  $\mu(A) = 1$  であることと、 $\mu$  は  $\sigma$  で不変あることより、



$\mu(\sigma^{-n}(A)) = 1$  となる.  $\omega \in \sigma^{-1}(A)$  より,  $\sigma(\omega) \in A$  となるので, このとき  $\rho(\sigma(\omega))$  も存在することがわかる. よって, (2.19) より

$$\begin{aligned}\rho(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_1([\omega|_n])}{\mu([\omega|_n])} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mu_1([\omega|_n])}{\mu_1([\sigma(\omega)|_{n-1}])} \times \frac{\mu_1([\sigma(\omega)|_{n-1}])}{\mu([\sigma(\omega)|_{n-1}])} \times \frac{\mu([\sigma(\omega)|_{n-1}])}{\mu([\omega|_n])} \right] \\ &= |\phi'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|^\delta \times \rho(\sigma(\omega)) \times |\phi'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|^{-\delta} = \rho(\sigma(\omega))\end{aligned}$$

となる.

$c := \int \rho d\mu$  とする.  $A_n = \{\rho \leq c - \frac{1}{n}\}$  とおく.  $\mu(A_n) = 1$  と仮定すると

$$c = \int \rho d\mu = \int_{A_n} \rho d\mu \leq \int_{A_n} \left(c - \frac{1}{n}\right) d\mu = c - \frac{1}{n}$$

となり, 矛盾する. よって,  $\mu$  は *ergodic* であるので,  $\mu(A_n) = 0$  となる.

次に,  $A'_n = \{\rho \geq c + \frac{1}{n}\}$  とおく.  $\mu(A'_n) = 1$  と仮定すると

$$c = \int \rho d\mu = \int_{A'_n} \rho d\mu \geq \int_{A'_n} \left(c + \frac{1}{n}\right) d\mu = c + \frac{1}{n}$$

となり, 矛盾する. よって,  $\mu(A'_n) = 0$  となる. これより,  $\mu(c - \frac{1}{n} < \rho < c + \frac{1}{n}) = 1$  となるので

$$\mu(\rho = c) = \bigcap_n \mu\left(c - \frac{1}{n} < \rho < c + \frac{1}{n}\right) = 1$$

を得る.  $\rho = c$  について,

$$1 = \mu(I^\infty) = \int \rho d\mu = \int c d\mu = c \int d\mu = c$$

となるので,  $c = 1$  つまり  $\rho = 1$  となり,  $\mu_1 = \mu$  が成り立つ. また,  $m = \mu \circ \pi^{-1}$ ,  $m_1 = \mu_1 \circ \pi^{-1}$  より,  $m = m_1$  が成り立つ.  $\square$

**補題 2.19**  $X$  上のボレル確率測度  $\nu$  が  $\delta$ -conformal measure である必要十分条件は,  $P(\delta) = 0$  かつ  $\forall \omega \in I^*$  と  $X$  のすべてのボレル部分集合  $A$  に対して,

$$\nu(\phi_\omega(A)) \geq \int_A |\phi'_\omega|^\delta d\nu$$

が成り立つことである.

[証明]  $\nu$  を  $\delta$ -conformal measure であるとする. すると, conformal measure の定義より,

$$\nu(\phi_\omega(A)) = \int_A |\phi'_\omega|^\delta d\nu$$

であり, 補題 2.12 より  $P(\delta) = 0$  が成り立つ.

次に,  $P(\delta) = 0$  かつ  $\forall \omega \in I^*$  と  $X$  のすべてのボレル部分集合  $A$  に対して,

$$\nu(\phi_\omega(A)) \geq \int_A |\phi'_\omega|^\delta d\nu$$

が成り立つと仮定する. また,  $\nu(\phi_\rho(X) \cap \phi_\tau(X)) > 0$  と仮定する.  $\rho, \tau \in I^q$  に対して

$$E = \phi_\rho(X) \cap \phi_\tau(X) \quad , \quad E_n = \bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(E), \forall n \geq 1$$

とおく.  $E_n$  は,  $\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n = \emptyset$  をみたす. 仮定より,

$$\nu(A) \geq \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta 1_A(\phi_\omega) d\nu$$

が成り立つので, BDP より

$$\begin{aligned} \nu(E_n) &\geq \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta 1_{E_n}(\phi_\omega) d\nu = \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta 1_{\bigcup_{\tau \in I^n} \phi_\tau(E)}(\phi_\omega) d\nu \\ &\geq \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta 1_{\phi_\omega(E)}(\phi_\omega) d\nu = \int \sum_{\omega \in I^n} |\phi'_\omega|^\delta 1_E d\nu \\ &\geq K^{-\delta} \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^\delta \int 1_E d\nu = K^{-\delta} \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^\delta \nu(E) \geq K^{-\delta} \nu(E) > 0 \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\nu(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n) \geq K^{-\delta} \nu(E) > 0$$

となり, これは  $\nu(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n) = \nu(\emptyset) = 0$  であることに矛盾する. よって,

$$\nu(\phi_\rho(X) \cap \phi_\tau(X)) = 0 \tag{2.20}$$

となる. (2.5) より,  $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$\begin{aligned} \nu(\phi_\omega(X \setminus J) \cap J) &= \nu(\bigcup_{\tau \in I^{|\omega|}} \phi_\omega(X \setminus J) \cap \phi_\tau(J)) \\ &\leq \sum_{\tau \in I^{|\omega|}} \nu(\phi_\omega(X \setminus J) \cap \phi_\tau(J)) = 0 \end{aligned}$$

を得る. よって,  $E'_n = \bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X \setminus J)$  とおくと,  $\nu(J \cap \bigcup_{n \geq 1} E'_n) = 0$  となる. また,

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E'_n &= \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty (\bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X \setminus J)) \\ &\subset \bigcap_{k=1}^\infty (\bigcup_{n=k}^\infty \bigcup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)) = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{\omega \in I^k} \phi_\omega(X) = J \end{aligned}$$

となるので,  $\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E'_n \subset J$  より,

$$(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E'_n) \cap (\bigcup_{n \geq 1} E'_n) \subset J \cap (\bigcup_{n \geq 1} E'_n)$$

が成り立つ. ここで,  $(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E'_n) \cap (\cup_{n \geq 1} E'_n) = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E'_n$  かつ  $\nu(J \cap (\cup_{n \geq 1} E'_n)) = 0$  より,  $\nu(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E'_n) = 0$  が成り立つ. よって,  $\nu(X \setminus J) = 0$  となり,  $\nu(J) = 1$  を得る.

次に,  $\delta$ -semiconformal measure である  $m$  は,  $\delta$ -conformal measure になることを示す.  $m$  を  $\delta$ -semiconformal measure であるとする, (2.15) より,

$$m(\phi_{\omega}(A)) \geq \int_A |\phi_{\omega}|^{\delta} dm$$

が成り立ち, 定理 2.13 より,  $P(\delta) = 0$  となる. さらに, (2.20), (2.15), 補題 2.14 より,  $n \geq 1$  に対して

$$1 = m(X) = m(\cup_{\omega \in I^n} \phi_{\omega}(X)) = \sum_{\omega \in I^n} m(\phi_{\omega}(X)) \geq \sum_{\omega \in I^n} \int |\phi'_{\omega}|^{\delta} dm = 1$$

となる. よって,  $\forall \omega \in I^n$  に対して

$$m(\phi_{\omega}(X)) = \int |\phi'_{\omega}|^{\delta} dm$$

を得る. ここで, 任意のボレル部分集合  $A$  に対して,  $X$  上の確率測度  $m_1$  と  $m_2$  を

$$m_1(A) = \int_A |\phi'_{\omega}|^{\delta} dm, \quad m_2 = m(\phi_{\omega}(A))$$

とおく. すると,

$$m_1(X) = m_2(X), \quad m_1(A) \leq m_2(A)$$

となるので,  $m_1 = m_2$  が成り立つ. よって,  $m$  は  $\delta$ -conformal measure であることがわかる.

すると, 測度  $\nu$  について,  $m$  が conformal measure であることと, (BDP) より  $\forall \omega \in I^*$  に対して,

$$m(\phi_{\omega}(X)) = \int_X |\phi'_{\omega}|^{\delta} dm \leq \int_X \|\phi'_{\omega}\|^{\delta} dm = \|\phi'_{\omega}\|^{\delta} \int_X dm = \|\phi'_{\omega}\|^{\delta}$$

かつ

$$m(\phi_{\omega}(X)) = \int_X |\phi'_{\omega}|^{\delta} dm \geq K^{-\delta} \int_X \|\phi'_{\omega}\|^{\delta} dm = K^{-\delta} \|\phi'_{\omega}\|^{\delta} \int_X dm = K^{-\delta} \|\phi'_{\omega}\|^{\delta}$$

となるので,

$$K^{-\delta} \|\phi'_{\omega}\|^{\delta} \leq m(\phi_{\omega}(X)) \leq \|\phi'_{\omega}\|^{\delta}$$

が成り立つ. また,  $\nu$  の定義より,

$$\nu(\phi_{\omega}(X)) \geq \int_X |\phi'_{\omega}|^{\delta} d\nu \geq K^{-\delta} \int_X \|\phi'_{\omega}\|^{\delta} d\nu = K^{-\delta} \|\phi'_{\omega}\|^{\delta}$$

であるので,  $\|\phi'_\omega\|^\delta \leq K^\delta \nu(\phi_\omega(X))$  となる. よって,  $m(\phi_\omega(X)) \leq K^\delta \nu(\phi_\omega(X))$  が成り立ち,  $\nu(\phi_\omega(X)) = 0$  ならば,  $m(\phi_\omega(X)) = 0$  が成り立つので,  $m \ll \nu$  となる. よって, Radon-Nikodym の定理より, Radon-Nikodym 導関数  $\rho = \frac{dm}{d\nu} \leq K^\delta$  が存在する. このとき, 補題 2.18 の証明の中で示したように,  $\mu$  での測度が 1 であり,  $\rho \circ \pi(\omega)$  と  $\rho \circ \pi(\sigma(\omega))$  の両方が定義できるような  $\omega \in I^\infty$  が存在する.  $A := \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X)$  とおくと,

$$\begin{aligned} m[\phi_{\omega|_n}(X)] &= m[\phi_{\omega_1}(\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X))] = \int_A |\phi'_{\omega_1}|^\delta dm \\ &\geq \inf \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X) \} \int_A dm \\ &= \inf \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X) \} m[\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X)] \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} m[\phi_{\omega|_n}(X)] &= m[\phi_{\omega_1}(\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X))] = \int_A |\phi'_{\omega_1}|^\delta dm \\ &\leq \sup \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X) \} \int_A dm \\ &= \sup \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X) \} m[\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X)] \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m[\phi_{\omega|_n}(X)]}{m[\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X)]} = |\phi'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|^\delta$$

となる. また,  $\nu$  については,

$$\begin{aligned} \nu[\phi_{\omega|_n}(X)] &\geq \int_A |\phi'_{\omega_1}|^\delta d\nu \geq \inf \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X) \} \int_A d\nu \\ &= \inf \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X) \} \nu[\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X)] \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu[\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X)]}{\nu[\phi_{\omega|_n}(X)]} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\inf \{ |\phi'_{\omega_1}(x)|^\delta : x \in \phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X) \}} = \frac{1}{|\phi'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|^\delta}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \rho \circ \pi(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(\phi_{\omega|_n}(X))}{\nu(\phi_{\omega|_n}(X))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{m(\phi_{\omega|_n}(X))}{m(\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X))} \times \frac{m(\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X))}{\nu(\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X))} \times \frac{\nu(\phi_{\sigma(\omega)|_{n-1}}(X))}{\nu(\phi_{\omega|_n}(X))} \right] \\ &\leq |\phi'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|^\delta \times \rho(\pi(\sigma(\omega))) \times |\phi'_{\omega_1}(\pi(\sigma(\omega)))|^{-\delta} = \rho(\pi(\sigma(\omega))) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、Birkhoff のエルゴード定理より、 $\rho \circ \pi(\omega) \in J$  は、 $\mu$  のほとんど至るところで一定になり、 $\mu = m \circ \pi$  より、 $\rho : J \rightarrow [0, \infty)$  も  $m$  のほとんど至るところで一定である。この値を  $\rho$  とおく。

$$J' = \{x \mid \frac{dm}{d\nu} = \rho\}$$

とし、

$$\rho'(x) = \begin{cases} \rho, & x \in J', \\ 0, & x \notin J'. \end{cases}$$

とおく。すると、

$$\rho \nu(J') = \int_{J'} \rho d\nu = \int_{J'} dm = 1$$

となり、 $\nu(J') \leq 1$  より

$$\rho = \frac{1}{\nu(J')} \geq 1$$

となることがわかる。 $\rho = 1$  となることを示す。

$\rho > 1$  と仮定する。 $Z = \{x \in J' : \rho'(x) = 0\}$  とおく。すると、

$$\begin{aligned} 1 &= m(J') = m(Z) + m(J' \setminus Z) = \int_Z 0 d\nu + \int_{J' \setminus Z} \rho d\nu \\ &= \int_{J' \setminus Z} \rho d\nu = \rho \nu(J' \setminus Z) = \rho \{\nu(J') - \nu(Z)\} = \rho - \rho \nu(Z) \end{aligned}$$

であるので、 $\nu(Z) = 1 - \frac{1}{\rho} > 0$  となる。次に  $\forall \omega \in I^*$  に対して

$$\nu((J' \setminus Z) \cap \phi_\omega(Z)) = 0 \quad (2.21)$$

となることを示す。ある  $\omega \in I^*$  に対して  $\nu((J' \setminus Z) \cap \phi_\omega(Z)) > 0$  となるとする。すると、

$$m(\phi_\omega(Z)) \geq m((J' \setminus Z) \cap \phi_\omega(Z)) = \nu((J' \setminus Z) \cap \phi_\omega(Z)) \times \rho > 0$$

となり、 $m$  は conformal measure であるので、

$$m(\phi_\omega(Z)) = \int_Z |\phi'_\omega|^\delta \leq K^\delta \|\phi'_\omega\|^\delta \int_Z 1 dm = K^\delta \|\phi'_\omega\|^\delta m(Z)$$

となるので、 $m(Z) > 0$  が成り立つ。確率測度  $\nu|_Z$  を

$$\nu|_Z(A) = \frac{\nu(A \cap Z)}{\nu(Z)}$$

と定義すると、

$$\int_{A \cap Z} |\phi'_\omega|^\delta d\nu \leq \nu(\phi_\omega(A \cap Z)) = \nu(Z \cap \phi_\omega(A \cap Z)) \leq \nu(Z \cap \phi_\omega(A)) = \nu|_Z(\phi_\omega(A))$$

となり,  $\nu$  と同じ仮定をみたすので,  $m$  は  $\nu|_Z$  に関して絶対連続になる. すると  $\frac{\nu|_Z(Z^c)}{\nu(Z)} = 0$  より,  $m(Z^c) = 0$  となる. よって,  $m(Z) = 1$  となるので,  $Z$  の定義より,  $\rho$  はほとんど至るところで  $\rho = 0$  となる. しかし, これは,  $m$  が確率測度であることに矛盾する. ゆえに,  $\rho = 1$  となることがわかり,  $m = \nu$  となる. よって,  $\nu$  は *conformal measure* である.  $\square$

この補題より, 次の系を得る.

**系 2.20**  $m$  が  $\delta$ -semiconformal measure であるならば,  $m$  は  $\delta$ -conformal measure になる. さらに,  $x \in J$  は  $\omega \in I^\infty$  に対して  $x = \pi(\omega)$  となり,  $\pi^{-1}(x)$  は一点集合になる.

**補題 2.21**  $\delta$ -conformal measure は,  $P(\delta) = 0$  のときに限り存在する.

[証明] 補題 2.12 より,  $\delta$ -conformal measure が存在するならば,  $P(\delta) = 0$  となる. 逆に,  $P(\delta) = 0$  ならば, 定理 2.13 より  $\delta$ -semiconformal measure が存在し, 系 2.20 より,  $\delta$ -semiconformal measure は,  $\delta$ -conformal measure になる. よって, 補題が成り立つ.  $\square$

## 2.6 極限集合の次元

cIFS  $S$  に対して, 極限集合  $J$  のハウスドルフ次元  $\text{HD}(J)$  を  $h$  または  $h_S$  で表す. cIFS  $S$  は,  $\delta$ -conformal measure が存在するとき, つまり,  $P(\delta) = 0$  となる解  $\delta$  が存在するときに *regular* であるという.

**補題 2.22**  $\{S = \phi_i : i \in I \text{ 有限集合}\}$  は, *regular* になる. さらに  $\forall x \in J$  と  $0 < 2r < \text{diam}(X)$  に対して

$$c^{-1} \leq \frac{m(B(x, r))}{r^\delta} \leq c$$

をみたす  $c \geq 1$  が存在する. 特に,  $P(\delta) = 0$  ならば,  $0 < H_\delta(J), P_\delta(J) < \infty, \delta = h$  となる.

[証明]  $0 \leq P(t) \leq \log \sharp(I) < \infty$  であるので, *regular* になる. また,  $I$  は有限集合であるという仮定より,  $\xi = \inf\{\|\phi'_i\| : i \in I\}$  は, 正の値になる.  $x = \pi(\omega), \omega \in I^\infty, 0 < 2r < \text{diam}(X)$  とし,  $n \geq 0$  を  $\phi_{\omega|_n}(X) \subset B(x, r)$  をみたす最小の整数とする. すると, (2.15) と (BDP) より,

$$m(B(x, r)) \geq m(\phi_{\omega|_n}(X)) \geq \int_X \left| \phi'_{\omega|_n}(X) \right|^\delta dm \geq K^{-\delta} \|\phi'_{\omega|_n}\|^\delta$$

が成り立つ.  $n$  の取り方より,  $\phi_{\omega|_{n-1}}$  は,  $B(x, r)$  には含まれない. すると, (BDP) より,

$$\|\phi'_{\omega|_n}\| = \|\phi'_{\omega|_{n-1}}\| \cdot \|\phi'_{\omega_n}\| \geq \|\phi'_{\omega|_{n-1}}\| \cdot |\phi'_{\omega_n}(x)| \geq \|\phi'_{\omega|_{n-1}}\| K^{-1} \|\phi'_{\omega_n}\|$$

が成り立つ。また、 $D \geq \text{diam}(V)$  とすると、(BDP.2) より

$$r \leq \text{diam}(\phi_{\omega|_{n-1}}(X)) \leq \text{diam}(\phi_{\omega|_{n-1}}(V)) \leq D \|\phi'_{\omega|_{n-1}}\| \leq DK \frac{\|\phi'_{\omega|_n}\|}{\|\phi'_{\omega_n}\|} \leq DK \xi^{-1} \|\phi'_{\omega_n}\|$$

となる。よって、 $\|\phi'_{\omega_n}\| \geq r D^{-1} K^{-1} \xi$  より、

$$m(B(x, r)) \geq K^{-\delta} \|\phi'_{\omega_n}\|^\delta \geq (DK^2 \xi^{-1})^{-\delta} r^\delta$$

を得る。よって、 $\frac{m(B(x, r))}{r^\delta} \geq (DK^2 \xi^{-1})^{-\delta}$  が成り立つので、定理 2.8(1),(3) より、 $H_\delta(J) < \infty$  かつ  $P_\delta(J) < \infty$  が成り立つ。

ここで、 $Z$  を次をみたす  $\omega \in I^*$  で、長さが最小のものの集合とする。

$$\phi_\omega(X) \cap B(x, r) \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad \phi_\omega(X) \subset B(x, 2r)$$

すると、 $\text{diam}(\phi_{\omega|_{|Z|-1}}(X)) \geq r$  となる。 $R = \{\omega|_{|Z|-1} : \omega \in Z\}$  とおく。 $R$  は、有限集合であることに注意し、 $R$  の有限集合部分集合  $R^*$  を  $R$  の各要素が、 $R^*$  の要素の拡張になっているように定義する。 $\tau \in R^*$  を固定し、 $i \in I$  を  $\tau i \in Z$  をみたすようにとる。 $\tau i \in Z$  より、 $\phi_{\tau i}(X) \subset B(x, 2r)$  であるので、

$$\text{diam}(\phi_{\tau i}(X)) \leq \text{diam}(B(x, 2r)) = 4r$$

となる。また、

$$\|\phi'_{\tau i}\| = \|\phi'_\tau\| \cdot \|\phi'_i\| \geq \|\phi'_\tau\| \cdot |\phi'_i| \geq K^{-1} \|\phi'_\tau\| \cdot \|\phi'_i\|$$

をみたすことと、(BDP.2) より、 $\text{diam}(\phi_\tau(X)) \leq \text{diam}(\phi_\tau(V)) \leq D \|\phi'_\tau\|$  となり、 $\|\phi'_i\| \geq \xi$  であるので

$$D^{-1} K^{-1} \|\phi'_\tau\| \cdot \|\phi'_i\| \geq D^{-2} K^{-1} \xi \text{diam}(\phi_\tau(X))$$

となることより、

$$\begin{aligned} 4r &\geq \text{diam}(\phi_{\tau i}(X)) \geq D^{-1} \|\phi'_{\tau i}\| \geq D^{-1} K^{-1} \|\phi'_\tau\| \cdot \|\phi'_i\| \\ &\geq D^{-2} K^{-1} \xi \text{diam}(\phi_\tau(X)) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\text{diam}(\phi_\tau(X)) \leq 4K D^2 \xi^{-1} r \quad \text{かつ} \quad \bigcup_{\tau \in R^*} \phi_\tau(\text{Int}(X)) \subset B(x, (1 + 4K D^2 \xi^{-1}) r)$$

となる。一方で、 $r \leq \text{diam}(\phi_\tau(X)) \leq D \|\phi'_\tau\|$  であり、

$$\lambda(\phi_\tau(\text{Int}(X))) = 2 \text{diam}(\phi_\tau(\text{Int}(X))) \geq 2 D^{-1} \|\phi'_\tau\| \geq 2 D^{-2} r$$

となることより,

$$\lambda(\phi_\tau(V)) \geq \lambda(B(\phi_\tau(x), D^{-1} \|\phi'_\tau\|)) = 2 D^{-1} \|\phi'_\tau\| \geq 2 D^{-2} r$$

を得る. これより

$$2(1 + 4 K D^2 \xi^{-1}) r = \lambda(B(x, (1 + 4 K D^2 \xi^{-1}) r)) \geq \#R^* 2 D^{-1} \text{diam}(X)^{-1} r \eta$$

となる. よって,

$$\#R^* \leq D \text{diam}(X) \eta^{-1} (1 + 4 K D^2 \xi^{-1})$$

が成り立つ.  $R^*$  の定義より,

$$\pi^{-1}(B(x, r)) \subset \cup\{[\tau] : \tau \in R^*\}$$

となる. これより,  $\|\phi'_\tau\| \leq 4 D K \xi^{-1} r$  であり, 補題 2.16 より,

$$\begin{aligned} m(B(x, r)) &= \mu \circ \pi^{-1}(B(x, r)) \leq \sum_{\tau \in R^*} \mu([\tau]) = \sum_{\tau \in R^*} \int |\phi'_\tau|^\delta dm \leq \sum_{\tau \in R^*} \|\phi'_\tau\| \int dm \\ &= \sum_{\tau \in R^*} \|\phi'_\tau\| \leq \sum_{\tau \in R^*} (4 D K \xi^{-1} r)^\delta \leq \#R^* (4 D K \xi^{-1})^\delta r^\delta \end{aligned}$$

となる. よって, 定理 2.8(2),(4) より,  $0 < H_\delta(J)$  から  $\text{HD}(J) \geq \delta$  かつ  $H_\delta(J) < \infty$  から  $\text{HD}(J) \leq \delta$  となるので,  $\text{HD}(J) = \delta$  を得る. よって, 補題が成り立つ.  $\square$

$$\xi = \inf\{t \geq 0 : P(t) < 0\}$$

$\text{Fin}(I) : I$  の有限部分集合の族

とおく.

**定理 2.23**

$$\text{HD}(J) = \xi = \sup\{h_F : F \in \text{Fin}(I)\} \geq \theta$$

が成り立つ. さらに,  $P(t) = 0$  ならば,  $t$  は関数  $P(t)$  が 0 となる唯一の点であり,  $t = \text{HD}(J)$  となる.

[証明]  $t > \xi$ ,  $D \geq \text{diam}(V)$  とする.  $P(t) < 0$  より, 十分大きな  $n$  に対して  $\sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t \leq 1$  であるので,

$$\sum_{\omega \in I^n} \text{diam}(\phi_\omega(X))^t \leq D^t \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t \leq D^t$$

となる.  $\cup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)$  は,  $J$  の被覆であり, その直径は  $n \rightarrow 0$  とすると, 0 に収束する. このことより,  $H_t(J) = 0$  を得る. よって,  $\text{HD}(J) \leq \xi$  となる.



ここで,  $\eta = \sup\{h_F : F \in \text{Fin}(I)\}$ ,  $\forall t > \eta$  とおく. 補題 2.22 と (2.16) より,

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t &= \sup_{T \in \text{Fin}(I)} \sum_{\omega \in T^n} \|\phi'_\omega\|^t \leq \sup_{T \in \text{Fin}(I)} \left\{ \sum_{\omega \in T^n} \|\phi'_\omega\|^{h_T} s^{n(t-h_T)} \right\} \\ &\leq s^{(t-\eta)n} \sup_{T \in \text{Fin}(I)} \left\{ \sum_{\omega \in T^n} \|\phi'_\omega\|^{h_T} \right\} \leq s^{(t-\eta)n} \sup_{T \in \text{Fin}(I)} K^{h_T} \leq s^{(t-\eta)n} K^\eta \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} P(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( s^{(t-\eta)n} K^\eta \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log s^{(t-\eta)} + \frac{1}{n} \log K^\eta \right) = (t - \eta) \log s < 0 \end{aligned}$$

となり  $t \geq \xi$  となるので,  $\eta \geq \xi$  が成り立つ.  $\eta$  の定義より,  $\eta \leq \text{HD}(J)$  が成り立ち,  $\text{HD}(J) \leq \xi$  となることを示したので,  $\eta \geq \xi$  かつ  $\eta \leq \text{HD}(J) \leq \xi$  となり, これより  $\eta = \xi$  が成り立つ. よって,  $\text{HD}(J) \leq \xi$  かつ  $\xi = \eta \leq \text{HD}(J)$  より  $\xi = \text{HD}(J)$  が成り立つ.

$\xi = \inf\{t \geq 0 : P(t) < 0\}$ ,  $\theta = \inf\{t \geq 0 : P(t) < \infty\}$  より,  $\theta \leq \xi$  であり,  $P(t)$  は,  $(\theta, \infty)$  において, 連続な減少関数なので,  $P(t) = 0$  ならば,  $t$  は関数  $P(t)$  が 0 となる唯一の点であり,  $t = \text{HD}(J)$  となる.  $\square$

**系 2.24**  $S$  がすべてアフィン変換の場合,

$$\text{HD}(J) = \inf \left\{ t \geq 0 : \sum_{i \in I} \|\phi_i\|^t < 1 \right\}$$

となる.

[証明]  $\eta = \inf\{t \geq 0 : \sum_{i \in I} \|\phi_i\|^t < 1\}$  とおく.

$\forall t \geq \eta$  とすると,

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 1 = 0$$

となるので,  $\text{HD}(J) \leq t$  となる. よって,  $\text{HD}(J) \leq \eta$

次に,  $\forall t > \text{HD}(J)$  とすると, 有限集合  $F$  に対して,  $h_F < t$  が成り立ち

$$1 = \sum_{i \in F} \|\phi'_i\|^{h_F} \geq \sum_{i \in F} \|\phi'_i\|^t$$

が成り立つ. これより,  $1 \geq \sum_{i \in F} \|\phi'_i\|^t$  であるので,  $t \geq \eta$  となり,  $\text{HD}(J) \geq \eta$  を得る. よって,  $\text{HD}(J) = \eta = \inf\{t \geq 0 : \sum_{i \in I} \|\phi_i\|^t < 1\}$  となる.  $\square$

定理 2.11, 補題 2.21, 定理 2.23 より, 次の定理を得る.

**定理 2.25** (a)  $t$ -semiconformal measure が存在するならば,  $t = h$  である.

(b)  $t$ -semiconformal measure は,  $t$ -conformal measure である.

(c) 高々一つの  $h$ -conformal measure が存在する.

(d)  $S$  が regular  $\Leftrightarrow P(h) = 0$

(e)  $S$  が regular  $\Leftrightarrow$  ある  $t > 0$  に対して  $P(t) = 0$

**定理 2.26**  $S$  が regular である cIFS ならば,  $t \geq 0$  に対して, 次の 3 つは, 同値になる.

(a)  $t = h$  は,  $J$  のハウスドルフ次元である.

(b)  $t$  は,  $\forall n \geq 1$  に対して

$$1 \leq \psi_n(t) \leq K$$

をみたす, 唯一つの数である.

(c)  $t$  は,  $\forall n \geq 1$  に対して

$$\underline{\psi}_n(t) \leq 1 \leq \psi_n(t)$$

をみたす, 唯一つの数である. ここで,

$$\underline{\psi}_n(t) = \sum_{\omega \in I^n} \inf |\phi'_\omega|^t, \quad \inf |\phi'_\omega| = \inf \{ |\phi'_\omega(x)| : x \in X \}$$

である.

[証明]  $(a) \rightarrow (b)$  を示す.

$t = h$  ならば,  $P(t) = 0$  であり, 定理 2.25 より  $t$ -conformal measure が存在する. よって, 補題 2.14 より  $\mu$  が存在し, (2.16) より  $1 \leq \sum_{\omega \in R} \|\phi'_\omega\|^t \leq \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t$  であることと,

$$\begin{aligned} 1 &= m(J) = m(\cup_{\omega \in I^n} \phi_\omega(X)) = \sum_{\omega \in I^n} m(\phi_\omega(X)) \\ &= \sum_{\omega \in I^n} \int_X |\phi'_\omega|^t dm \geq \sum_{\omega \in I^n} \int_X K^{-t} \|\phi'_\omega\|^t dm = K^{-t} \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t \end{aligned}$$

となるので,

$$1 \leq \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t \leq K^t$$

が成り立つ.

$(a) \rightarrow (c)$  を示す.

同様に,  $t = h$  ならば, 定理 2.25 より  $t$ -conformal measure と  $\mu$  が存在し,

$$\begin{aligned} 1 &= m(J) = \sum_{\omega \in I^n} \int_X |\phi'_\omega|^t dm \geq \sum_{\omega \in I^n} \int_X \inf |\phi'_\omega|^t dm \\ &= \sum_{\omega \in I^n} \inf |\phi'_\omega|^t \int_X dm = \underline{\psi}_n(t) \end{aligned}$$

が成り立つ. (a) を仮定したとき,  $1 \leq \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t$  となることは示したので,

$$\psi_n(t) \leq 1 \leq \sum_{\omega \in I^n} \|\phi'_\omega\|^t$$

が成り立つ.

・(b)  $\rightarrow$  (a) を示す.

(b) の仮定より,

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \psi_n(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log K^d = 0$$

かつ

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \psi_n(t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 1 = 0$$

であるので,  $P(t) = 0$  である. よって, (b)  $\rightarrow$  (a) が成り立つ.

・(c)  $\rightarrow$  (a) を示す.

(c) の仮定より,

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \psi_n(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 1 = 0$$

かつ

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \psi_n(t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 1 = 0$$

であるので,  $P(t) = 0$  である. よって, (c)  $\rightarrow$  (a) が成り立つ.  $\square$

### 3 連分数展開とハウスドルフ次元

Kesseböhmer と Zhu は、次元集合が稠密になるときと、疎になるときの  $S$  の条件を検討した。そして「単純正則連分数に展開したとき、指定された有限個の項だけを持つ無理数の集合のハウスドルフ次元は、単位区間に稠密に存在する」ということを証明した。この章では、Kesseböhmer と Zhu の結果を紹介し、証明する。3.1 節は、一般の cIFS の次元集合についての議論であり、3.2 節では、 $[0, 1]$  区間上の無理数の連分数展開を表記する cIFS に制限してこの問題を議論する。そして、3.3 節では、①連分数展開に際し、連続した  $n$  個の文字  $1, 2, \dots, n$  が不足している (現れない) ような無理数の系を考える。このような系における連分数展開で、指定された有限個の項だけを持つ無理数の集合のハウスドルフ次元は、適当な区間に稠密に存在するか、否か。②連分数展開で 1 つの文字  $n$  が不足している (現れない) ような無理数の系を考える。この系では、指定された有限個の項だけを持つ無理数の集合のハウスドルフ次元の分布はどうか、という問題に対して、新しい結果が得られたので報告する。

#### 3.1 Kesseböhmer と Zhu の結果

$S = \{\phi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  は、cIFS であるとし、 $\Lambda \subset \mathbb{N}$ , ( $\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\#\Lambda \geq 2$ , 有限集合) に対して、

$$\Lambda^b := \Lambda \setminus \{\max \Lambda\}$$

$$\Lambda^{b\sharp} := (\Lambda \setminus \{\max \Lambda\}) \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots\}$$

とおく。また、 $\lambda_\Lambda$  を次のようにおく。

$$\lambda_\Lambda(t) := \exp(P_\Lambda(t))$$

**補題 3.1**  $\nu_m \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ) であり、次をみたす数列が存在する。

$\forall s > 0$  と  $\Lambda \subset \mathbb{N}$ , ( $\Lambda \neq \emptyset$ , 有限集合) に対して、

$$\lambda_\Lambda(s) - \lambda_{\Lambda^b}^b(s) \leq \nu_{\max \Lambda}$$

となる。

[証明] OSC より、次が成り立つことがわかる。

$$\|\phi'_i\| =: \rho_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty$$

ここで、 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$  は、ちょうど  $r := n - j$  個、 $m$  を含むものとし、 $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j \leq n$  は、 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n_i\}_{i=1}^j$  に対して、 $\omega_k = m$  をみたすとする (ただし、 $m, n \geq 2$ )。このとき、BDP より、

$$\|\phi'_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}\| \leq (K\rho_m)^r \|\phi'_{\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_j}}\|$$

を得る。そして、次のような数列を定義する。

$$\epsilon_n := \left| P_{\Lambda^b}(s) - \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in (\Lambda^b)^n} \|\phi'_\omega\|^s \right|$$

pressure の性質より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$  となる。よって,

$$\begin{aligned} \lambda_\Lambda(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\omega \in \Lambda^n} \|\phi'_\omega\|^s \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (K\rho_m)^{js} \sum_{\omega \in (\Lambda^b)^{n-j}} \|\phi'_\omega\|^s \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (K\rho_m)^{js} \lambda_{\Lambda^b}(s)^{n-j} e^{n \frac{(n-j)}{n} \epsilon_{n-j}} \right)^{\frac{1}{n}} = (K\rho_m)^s + \lambda_{\Lambda^b}(s) \end{aligned}$$

となる。最後の等式は,  $\epsilon_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  より,

$$\max_{1 \leq j \leq n} \frac{(n-j)}{n} \epsilon_{n-j} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

となることから得られる。よって,  $\nu_n := (K\rho_n)^s$  とおくと, この補題が成り立つ。  $\square$

**定理 3.2**  $s \in [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  とする。  $\forall \Lambda \subset \mathbb{N}$ , 有限集合,  $\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\max \Lambda \geq 3$  に対して,

$$P_{\Lambda^{\#}}(s) \geq P_\Lambda(s)$$

が成り立つならば,  $\exists \Gamma_n \subset \mathbb{N}$ , 有限集合 (s.t)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{HD}(J_{\Gamma_n}) = s$  となる。

[証明]  $s = 0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})$  ならば, 明らかに成り立つ。  $s \in (0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$  をとり, 固定する。以下,

- (1)  $\max \Lambda_n < \Lambda_{n+1}$
- (2)  $\Lambda_n^b \subset \Lambda_{n+1}^b$
- (3)  $\lambda_{\Lambda_n}(s) > 1 > \lambda_{\Lambda_n^b}(s)$

をみたす, 単調増加な  $\mathbb{N}$  の有限部分集合の列  $\{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$  を定める。

まず, 定理 2.23 より  $s < \text{HD}(J_{\mathbb{N}}) = \sup_n \text{HD}(J_{\{1,2,\dots,n\}})$  であるので,

$$\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,k_1-1\}}) \leq s < \text{HD}(J_{\{1,2,\dots,k_1\}})$$

をみたす  $k_1$  が存在する。よって  $P_{\{1,2,\dots,k_1\}}(s) > 1$  より,  $\lambda_{\{1,2,\dots,k_1\}}(s) > 1$  となる。よって, 次のような  $k_1$  をとることができる。

$$k_1 := \min\{m \geq 1 : \lambda_{\{1,2,\dots,m\}}(s) > 1\}$$

この  $k_1$  に対して,  $\Lambda_1$  を

$$\Lambda_1 := \{1, 2, \dots, k_1\}$$

とおく. これを繰り返して,  $k_n$  と  $\Lambda_n$  を定義できたとすると,

$$\lambda_{\Lambda_n^b \cup \{k_{n+1}, k_{n+2}, \dots\}}(s) = \lambda_{\Lambda_n^b}(s) > 1$$

となるので,

$$k_{n+1} := \min \left\{ m \geq 1 : \lambda_{\Lambda_n^b \cup \{k_{n+1}, k_{n+2}, \dots, k_{n+m}\}}(s) > 1 \right\}$$

を定義することができる. この  $k_{n+1}$  に対して,

$$\Lambda_{n+1} := \Lambda_n^b \cup \{k_{n+1}, k_{n+2}, \dots, k_{n+k_{n+1}}\}$$

とおく. このようにつくった  $\{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$  は, 上の 3 つの条件をみたす. また,

$$0 \leq 1 - \lambda_{\Lambda_n^b}(s) \leq \lambda_{\Lambda_n}(s) - \lambda_{\Lambda_n^b}(s) \longrightarrow 0$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\Lambda_n}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\Lambda_n^b}(s) = 1$$

となることがわかる. 次に,  $s_n$  を  $\lambda_{\Lambda_n^b}(s_n) = 1$  をみたす数とする. そして,

$$\begin{aligned} \Lambda_s &:= \bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n^b \\ \text{HD}(J_{\Lambda_s}) &= \text{HD}\left(J_{\bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n^b}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: s_0 \end{aligned}$$

とおく.

(i)  $s < s_0$  のとき

このとき,  $n$  を十分大きくとると,  $s < s_n$  とできる. すると

$$\lambda_{\Lambda_n^b}(s) > \lambda_{\Lambda_n^b}(s_n) = 1$$

となり, これは  $\lambda_{\Lambda_n^b}(s) < 1$  に矛盾する. よって,  $s \geq s_0$  であることがわかる.

(ii)  $s > s_0$  のとき

$$\lambda_{\Lambda_n^b}(s) < \lambda_{\Lambda_s}(s) < \lambda_{\Lambda_s}(s_0) = 1$$

となり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\Lambda_n^b}(s) < 1$  となる. これは,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\Lambda_n^b}(s) = 1$  に矛盾する. よって,  $s \leq s_0$  となる.

(i), (ii) より,  $s = s_0$  が成り立つので,

$$\text{HD}(J_{\Lambda_s}) = s$$

を得る.  $\square$

この定理, および証明により, 次の結果が得られる.

**系 3.3** 定理 3.2 の仮定をみたす  $s \in [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  は,  $\mathcal{D}_S$  の集積点であり,  $s \in \mathcal{C}_S$ .

ここで, *regular* と *absolutely regular* の定義をする.  $P_{\Lambda}(t) = 0$  となる解  $t$  が存在するならば, cIFS  $\{\phi_i \mid i \in \Lambda\}$  は *regular* であるという.  $S$  の任意の部分集合が *regular* であるとき,  $S$  を *absolutely regular* であるという.  $S$  が *absolutely regular* であるとき,  $\lambda_{\Lambda}(s) = 1$  の唯一の解を  $s(\Lambda)$  で表す. cIFS は,  $\theta_{\Lambda} = 0$  であるときに限り, *absolutely regular* であることが知られている.

**定理 3.4**  $S = \{\phi_i : X \rightarrow X : i \in \mathbb{N}\}$  を *absolutely regular* である cIFS とする.

$\exists s_0 \in (0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})) ; \forall s \in (s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})), \forall \Lambda \subset \mathbb{N}$ , 有限集合,  $\Lambda \neq \emptyset$  に対して,

$$P_{\Lambda^{\sharp}}(s) < P_{\Lambda}(s)$$

となるならば,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) \mid \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  は,  $(s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$  で疎である.

[証明]  $(a, b)$  を  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  の任意の開区間とする.  $(a, b) \cap \mathcal{D}_S = \emptyset$  ならば,  $(a, b)$  で疎になるので, この場合, 明らかに定義が成り立つ. よって,  $(a, b) \cap \mathcal{D}_S \neq \emptyset$  であるとする. このとき,  $\exists \alpha \in (a, b) \cap \mathcal{D}_S$  であり, この  $\alpha$  に対して,  $\lambda_{\Lambda_0}(\alpha) = 1$  となる  $\Lambda_0 \subseteq \mathbb{N}$  が存在する. 補題 3.1 より, 十分大きな  $m$  を  $\Lambda := \Lambda_0 \cup \{m\}$  に対して,  $s(\Lambda) \in (a, b) \cap \mathcal{D}_S$  をみたすように選ぶことができる. また仮定より,

$$\lambda_{\Lambda^{\sharp}}(s(\Lambda)) < \lambda_{\Lambda}(s(\Lambda)) = 1$$

となる.  $\forall \tilde{\Lambda} \subset \mathbb{N}$  をとり,

$$k_{\Delta} := \min \left\{ k \in \Lambda \Delta \tilde{\Lambda} \right\}$$

と定義する.

(i)  $k_{\Delta} = m$  のとき

このとき,  $\min \left\{ k \in \tilde{\Lambda} \setminus \Lambda_0 \right\} \geq m+1$  である. よって,  $\tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda^{\sharp}$  となる. ゆえに

$$\lambda_{\tilde{\Lambda}}(s(\Lambda)) \leq \lambda_{\Lambda^{\sharp}}(s(\Lambda)) \leq \lambda_{\Lambda}(s(\Lambda)) = 1$$

となり,  $s(\tilde{\Lambda}) \leq s(\Lambda^{\sharp}) \leq s(\Lambda)$  が成り立つ. よって, このとき  $s(\tilde{\Lambda})$  は, 区間  $(s(\Lambda^{\sharp}), s(\Lambda))$  の左側に存在する.

(ii)  $k_{\Delta} > m$  のとき

$$\min \left\{ k \in \Lambda \Delta \tilde{\Lambda} \right\} = \min \left\{ k \in (\Lambda_0 \cup \{m\}) \Delta \tilde{\Lambda} \right\} > m$$

より,  $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$  となっている. ゆえに

$$1 = \lambda_{\Lambda}(s(\Lambda)) \leq \lambda_{\tilde{\Lambda}}(s(\Lambda))$$

となり,  $s(\Lambda) < s(\tilde{\Lambda})$  が成り立つ. よって, このとき  $s(\tilde{\Lambda})$  は, 区間  $(s(\Lambda^{b\sharp}), s(\Lambda))$  の右側に存在する.

(iii)  $k_\Delta \in \Lambda \cap \{1, \dots, m-1\}$  のとき

$\Lambda_C := \Lambda \cap \{1, \dots, k_\Delta\}$  とおく.

$$\begin{aligned} \Lambda_C^{b\sharp} &= \{\Lambda \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\}^b \\ &\quad \cup \{\max\{\Lambda \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 1, \max\{\Lambda \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 2, \dots\} \end{aligned}$$

このとき,  $\tilde{\Lambda}$  は  $k_\Delta$  を含まない. もし,  $\exists \omega \in \tilde{\Lambda}, \omega \notin \{\Lambda \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\}^b$  ならば,  $k_\Delta$  の取り方に矛盾するので,  $\tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda_C^{b\sharp}$  となることがわかる. また,

$$\Lambda_C = \Lambda \cap \{1, \dots, k_\Delta\} \subseteq \{\Lambda_0 \cup \{m\}\} \cap \{1, \dots, m-1\} = \Lambda_0 = \Lambda^b$$

であるので,

$$\lambda_{\tilde{\Lambda}}[s(\Lambda^b)] \leq \lambda_{\Lambda_C^{b\sharp}}[s(\Lambda^b)] < \lambda_{\Lambda_C}[s(\Lambda^b)] \leq \lambda_{\Lambda^b}[s(\Lambda^b)] = 1$$

となり,  $s(\tilde{\Lambda}) < s(\Lambda^b) < s(\Lambda^{b\sharp})$  が成り立つ. よって, このとき  $s(\tilde{\Lambda})$  は, 区間  $(s(\Lambda^{b\sharp}), s(\Lambda))$  の左側に存在する.

(iv)  $k_\Delta \in \tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, m-1\}$  のとき

$\Lambda_D := \tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}$  とおく.

$$\begin{aligned} \Lambda_D^{b\sharp} &= \{\tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\}^b \\ &\quad \cup \{\max\{\tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 1, \max\{\tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 2, \dots\} \\ &= \{\tilde{\Lambda}^b \cap \{1, \dots, k_\Delta - 1\}\} \\ &\quad \cup \{\max\{\tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 1, \max\{\tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 2, \dots\} \end{aligned}$$

このとき,  $k_\Delta$  の定義より,  $\Lambda$  は  $k_\Delta$  を含まず  $\tilde{\Lambda}^b \cap \{1, \dots, k_\Delta - 1\}$  に含まれるか, それ以降の  $\{\max\{\tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 1, \max\{\tilde{\Lambda} \cap \{1, \dots, k_\Delta\}\} + 2, \dots\}$  に含まれる. よって,  $\Lambda \subseteq \Lambda_D^{b\sharp}$  かつ  $\Lambda_D \subseteq \tilde{\Lambda}$  であるので,

$$\lambda_\Lambda[s(\tilde{\Lambda})] \leq \lambda_{\Lambda_D^{b\sharp}}[s(\tilde{\Lambda})] < \lambda_{\Lambda_D}(s(\tilde{\Lambda})) \leq \lambda_{\tilde{\Lambda}}[s(\tilde{\Lambda})] = 1$$

となり,  $s(\Lambda) < s(\tilde{\Lambda})$  が成り立つ. よって, このとき  $s(\tilde{\Lambda})$  は, 区間  $(s(\Lambda^{b\sharp}), s(\Lambda))$  の右側に存在する.

以上より,  $\lambda_{\Lambda^{b\sharp}}(s) < \lambda_\Lambda(s)$  であるとき, ハウスドルフ次元が稠密に存在しない区間  $(s(\Lambda^{b\sharp}), s(\Lambda))$  が存在する.  $\square$



## 3.2 連分数展開の場合

ここまでの議論は、一般の cIFS について成り立つ。定理 1.1 のために、 $[0, 1]$  区間上の無理数の連分数展開を表記する、 $\mathcal{S}_{CF}$  を次の方法で与える。まず、 $i \in \mathbb{N}$  について

$$f_i(x) = \frac{1}{i+x} \quad , \quad x \in [0, 1]$$

を与える。 $\{f_i | i \in \mathbb{N}\}$  は、BDP をみたさないから、合成関数

$$f_i \circ f_j \quad , \quad i, j \in \mathbb{N}$$

に番号をふり直して

$$\mathcal{S}_{CF} = \{\phi_i | i \in \mathbb{N}\}$$

とする。このように  $\mathcal{S}_{CF}$  を定めても、極限集合が同じ連分数展開の集合を表すことに変わりはない。特に、Jarník の結果 [5] から

$$\text{HD}(J_{\mathbb{N}}) = 1$$

である。

$\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$  によって得られる連分数  $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \in \mathbb{Q}$  を

$$[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \frac{p_n(\omega)}{q_n(\omega)}$$

とおく。この連分数の分母  $q_n = q_n(\omega|_n)$  は、次をみたすことが知られている。

$$q_{-1} = 0 \quad , \quad q_0 = 1 \quad , \quad q_i = \omega_i q_{i-1} + q_{i-2} \quad , \quad i \geq 1$$

$\mathcal{S}_{CF}$  の pressure は、次のように中間近似分数の分母を用いて表すことができる。

**補題 3.5**  $\forall \Lambda \subset \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}$  に対して、

$$P_{\Lambda}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \Lambda^n} q_{2n}(\omega)^{-2s}$$

となる。

[証明] はじめに、 $\omega \in \Lambda^n$  に対して、

$$\begin{aligned} \phi'_{\omega}(x) &= \phi'_{\omega_1, \dots, \omega_n}(x) = \frac{1}{[q_{2n}(\omega) + x q_{2n-1}(\omega)]^2} \\ &= \frac{1}{q_{2n}(\omega)^2 \left[1 + x \left(\frac{q_{2n-1}(\omega)}{q_{2n}(\omega)}\right)\right]^2} \end{aligned}$$

となることを示す.  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  に対して,

$$\phi_\omega(x) = \phi_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}(x) = (f_{\omega_1^1} \circ f_{\omega_1^2}) \circ (f_{\omega_2^1} \circ f_{\omega_2^2}) \circ \dots \circ (f_{\omega_n^1} \circ f_{\omega_n^2})$$

とおく.

•  $n = 1$  のとき

$$\begin{aligned} \phi'_{\omega_1}(x) &= f'_{\omega_1^1}(f_{\omega_1^2}(x)) = \left( \frac{1}{\omega_1^1 + \frac{1}{\omega_1^2 + x}} \right)' \\ &= \frac{1}{(\omega_1^1 \omega_1^2 + \omega_1^1 x + 1)^2} = \frac{1}{\{(\omega_1^1 \omega_1^2 + 1) + \omega_1^1 x\}^2} \\ &= \frac{1}{[q_2(\omega) + x q_1(\omega)]^2} = \frac{1}{q_2(\omega)^2 \left[ 1 + x \left( \frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)} \right) \right]^2} \end{aligned}$$

となり, 成り立つ.

•  $n = k$  のとき

$$\phi'_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k}(x) = \frac{1}{[q_{2k}(\omega) + x q_{2k-1}(\omega)]^2}$$

が成り立つと仮定する.

•  $n = k + 1$  のとき

$q_{2(k+1)-1}(\omega) = \omega_{k+1}^1 q_{2k}(\omega) + q_{2k-1}(\omega)$ ,  $q_{2(k+1)}(\omega) = \omega_{k+1}^1 q_{2(k+1)-1}(\omega) + q_{2k}(\omega)$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \phi'_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}}(x) &= \phi'_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k}(\phi_{k+1}(x)) \\ &= \frac{1}{\left[ q_{2k}(\omega) + \frac{1}{\omega_{k+1}^1 + \frac{1}{\omega_{k+1}^2 + x}} q_{2k-1}(\omega) \right]^2} \times \frac{1}{(\omega_{k+1}^1 \omega_{k+1}^2 + \omega_{k+1}^1 x + 1)^2} \\ &= \frac{1}{\left[ q_{2k}(\omega) + \frac{\omega_{k+1}^2 + x}{\omega_{k+1}^1 \omega_{k+1}^2 + \omega_{k+1}^1 x + 1} q_{2k-1}(\omega) \right]^2} \times \frac{1}{(\omega_{k+1}^1 \omega_{k+1}^2 + \omega_{k+1}^1 x + 1)^2} \\ &= \frac{1}{\left\{ (\omega_{k+1}^1 \omega_{k+1}^2 q_{2k}(\omega) + q_{2k}(\omega) + \omega_{k+1}^2 q_{2k-1}(\omega)) + x (\omega_{k+1}^1 q_{2k}(\omega) + q_{2k-1}(\omega)) \right\}^2} \\ &= \frac{1}{\left\{ (\omega_{k+1}^2 q_{2k+1}(\omega) + q_{2k}(\omega)) + x (\omega_{k+1}^1 q_{2k}(\omega) + q_{2k-1}(\omega)) \right\}^2} \\ &= \frac{1}{[q_{2(k+1)}(\omega) + x q_{2(k+1)-1}(\omega)]^2} = \frac{1}{q_{2(k+1)}^2(\omega) \left[ 1 + x \frac{q_{2(k+1)-1}(\omega)}{q_{2(k+1)}(\omega)} \right]^2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} P_{\Lambda}(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \Lambda^n} \left\| \frac{1}{q_{2n}(\omega)^2 [1 + x(\frac{q_{2n-1}(\omega)}{q_{2n}(\omega)})]^2} \right\|^s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \Lambda^n} \|q_{2n}(\omega)^{-2s}\| \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。  $\square$

**補題 3.6**  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$  は、ちょうど  $r := n - j$  個、 $m$  を含むものとし、 $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j \leq n$  は、 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n_i\}_{i=1}^j$  に対して、 $\omega_k = m$  をみたとする (ただし、 $m, n \geq 2$ )。  $\omega$  から  $m$  を取り除いたものを  $\omega' := (\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_j})$  とおく。このとき

$$\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2s} \leq \frac{q_n(\omega)}{q_j(\omega')} \leq (m+1)^r$$

が成り立つ。

**[証明]**  $r = 1$  のとき、成り立つことを示す。  $1 \leq l \leq n$  に対して、 $\omega_l = m$  とする。

$$q_k := q_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

$$q'_{k-1} := q_{k-1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l-1}, \omega_{l+1}, \dots, \omega_k), \quad l+1 \leq k \leq n$$

とおく。  $m - (\frac{m}{2} + 1) = \frac{m}{2} - 1 > 0$  より、  $m \geq \frac{m+2}{2}$ 、  $\frac{q_l}{q_{l-1}} = m + \frac{q_{l-2}}{q_{l-1}} \geq m$  であるので、

$$\frac{m+2}{2} \leq m \leq \frac{q_l}{q_{l-1}} = \frac{mq_{l-1} + q_{l-2}}{q_{l-1}} = m + \frac{q_{l-2}}{q_{l-1}} \leq m+1$$

となる。さらに、  $q_{k+1} = \omega_{k+1}q_k + q_{k-1}$  であるので、

$$\begin{aligned} \frac{q_{l+1}}{q'_l} &= \frac{\omega_{l+1}q_l + q_{l-1}}{\omega_{l+1}q_{l-1} + q_{l-2}} = \frac{(m\omega_{l+1} + 1)q_{l-1} + \omega_{l+1}q_{l-2}}{\omega_{l+1}q_{l-1} + q_{l-2}} \\ &= 1 + \frac{((m-1)\omega_{l+1} + 1)q_{l-1} + (\omega_{l+1} - 1)q_{l-2}}{\omega_{l+1}q_{l-1} + q_{l-2}} \\ &\leq 1 + \frac{((m-1)\omega_{l+1} + 1)q_{l-1} + (\omega_{l+1} - 1)q_{l-1}}{\omega_{l+1}q_{l-1}} = m+1 \end{aligned}$$

を得る。下からの評価についても、

$$\begin{aligned} \frac{q_{l+1}}{q'_l} &= 1 + \frac{((m-1)\omega_{l+1} + 1)q_{l-1} + (\omega_{l+1} - 1)q_{l-2}}{\omega_{l+1}q_{l-1} + q_{l-2}} \\ &\geq 1 + \frac{((m-1)\omega_{l+1} + 1)q_{l-1}}{(\omega_{l+1} + 1)q_{l-1}} \geq 1 + \frac{(m-1) + 1}{2} \\ &= \frac{m+2}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\frac{m+2}{2} \leq \frac{q_n}{q'_{n-1}} \leq m+1$$

が成り立つ。

・  $r = k$  のとき

$$\left(\frac{m+2}{2}\right)^k \leq \frac{q_n(\omega)}{q_{n-k}(\omega')} \leq (m+1)^k$$

が成り立つと仮定する。

・  $r = k+1$  のとき

$k$  回、 $m$  をキャンセルしたあとは、 $r = 1$  のときと同じになる。そこで、 $l = n - (k+1)$  とし、 $\omega''$  は  $n - r + 1$  個の要素からなるものとする、

$$\begin{aligned} \frac{q_n(\omega)}{q_{n-(k+1)}(\omega')} &= \frac{q_n(\omega)}{q_{n-k}(\omega'')} \times \frac{q_{n-k}(\omega'')}{q_{n-(k+1)}(\omega')} \\ &\leq (m+1)^k \times (m+1) \\ &= (m+1)^{k+1} \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} \frac{q_n(\omega)}{q_{n-(k+1)}(\omega')} &= \frac{q_n(\omega)}{q_{n-k}(\omega'')} \times \frac{q_{n-k}(\omega'')}{q_{n-(k+1)}(\omega')} \\ &\geq \left(\frac{m+2}{2}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

となる。よって、 $r = k+1$  のときも成り立つので、帰納法により

$$\left(\frac{m+2}{2}\right)^r \leq \frac{q_n(\omega)}{q_j(\omega')} \leq (m+1)^r$$

が成り立つ。  $\square$

**補題 3.7**  $m \geq 2, \forall \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{m\}$ , 有限集合 とする。このとき

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{2s} \leq P_{\Lambda \cup \{m\}}(s) - P_{\Lambda}(s) \leq \left(\frac{2}{m+2}\right)^{2s}$$

が成り立つ。

[証明]  $\Lambda' := \Lambda \cup \{m\}$  とおく. 補題 3.1 で定めた数列  $\{\epsilon_n\}$  を用いる.

$$\epsilon_n := \left| P_\Lambda(s) - \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in (\Lambda)^n} q_{2n}(\omega)^{-2s} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

すると, 補題 3.5 と補題 3.6 より,

$$\begin{aligned} \lambda_{\Lambda'}(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\omega \in (\Lambda')^n} (q_{2n}(\omega))^{-2s} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (m+1)^{-2js} \sum_{\omega \in \Lambda^{n-j}} (q_{2n-j}(\omega))^{-2s} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (m+1)^{-2js} \lambda_\Lambda(s)^{2n-j} e^{-2n \frac{(2n-j)}{2n} \epsilon_{2n-j}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{(m+1)^{2s}} + \lambda_\Lambda(s) \end{aligned}$$

を得る. 同様に上からの評価についても

$$\begin{aligned} \lambda_{\Lambda'} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \left( \frac{m+2}{2} \right)^{-2js} \lambda_\Lambda(s)^{2n-j} e^{2n \frac{(2n-j)}{2n} \epsilon_{2n-j}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{2^{2s}}{(m+2)^{2s}} + \lambda_\Lambda(s) \end{aligned}$$

を得る. よって,

$$\left( \frac{1}{m+1} \right)^{2s} \leq P_{\Lambda \cup \{m\}}(s) - P_\Lambda(s) \leq \left( \frac{2}{m+2} \right)^{2s}$$

が成り立つ.  $\square$

**定理 3.8**  $\mathcal{S}_{CF}$  では, 定理 3.2 の仮定が  $\forall s \in [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  に対して成り立つ.

従って,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  は,  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  で稠密になる.

[証明]  $\forall s \in (0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$  をとり,  $\forall \Lambda \subseteq \mathbb{N}$ ,  $\max \Lambda \geq 2$  とする.

$$\Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda\}, \Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda + 1\}, \Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda + 2\}, \dots$$

であるので, 補題 3.7 より,  $\forall k \geq 1$  に対して

$$\left\{ \frac{1}{(\max \Lambda + k) + 1} \right\}^{2s} \leq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + k\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b}(s)$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\Lambda^b\#}(s) &\geq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k\}}(s) \\
 &= \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k-1\}}(s) \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k-1\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k-2\}}(s) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b}(s) \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b}(s) \\
 &\geq \sum_{j=\max \Lambda + 1}^k \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s)
 \end{aligned}$$

となる.  $k \rightarrow \infty$  とすると,

$$\lambda_{\Lambda^b\#}(s) \geq \sum_{j=\max \Lambda + 1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s) \quad \dots (*)$$

が成り立つ.

(i)  $s \leq \frac{1}{2}$  のとき

(\*) の右辺は,  $\infty$  になる. よって, このとき

$$\lambda_{\Lambda^b\#}(s) \geq \lambda_{\Lambda}(s)$$

が成り立つ.

(ii)  $\frac{1}{2} < s \leq \text{HD}(J_{\mathbb{N}})$  のとき

$$(\max \Lambda + 2) - (2^{2s} \times (2s - 1)) = \max \Lambda + 2 - 2^{1+2s} \times s + 2^{2s} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで,  $f(s) = -2^{1+2s} \times s + 2^{2s}$  とおく.

$$\begin{aligned}
 f'(s) &= -2^{1+2s} - \log 2^{2+2s} + \log 2^{1+2s} = -2^{1+2s} + \log \frac{1}{2^{2^{1+2s}}}} \\
 &= -2^{1+2s} - \log 2^{2^{1+2s}} < 0
 \end{aligned}$$

となるので,  $f(s)$  は単調減少である.

よって,  $\textcircled{1} \geq \max \Lambda + 2 - 4 = \max \Lambda - 2 \geq 0$  より,  $\max \Lambda + 2 \geq 2^{2s}(2s - 1) > 0$  となる.

これより,

$$\begin{aligned}
 (*) &\geq \lambda_{\Lambda^b}(s) + \int_{\max \Lambda + 1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^{2s}} dx = \lambda_{\Lambda^b}(s) + \frac{1}{2s-1} (\max \Lambda + 2)^{1-2s} \\
 &= \lambda_{\Lambda^b}(s) + \frac{\max \Lambda + 2}{2s-1} (\max \Lambda + 2)^{-2s} \geq \lambda_{\Lambda^b}(s) + \frac{2^{2s}}{(\max \Lambda + 2)^{2s}} \\
 &\geq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda\}}(s) \\
 &= \lambda_{\Lambda}(s)
 \end{aligned}$$

を得る．ゆえに， $\forall s \in (0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$  に対して，

$$\lambda_{\Lambda^{\#}}(s) \geq \lambda_{\Lambda}(s)$$

が成り立ち，補題 3.3 より， $s$  は  $\mathcal{D}_S$  の集積点になる．よって， $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  は， $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  で稠密になる．  $\square$

### 3.3 使える文字に不足がある場合

**定理 3.9** 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について， $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}, \text{有限集合}\}$  は，区間  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}})]$  で稠密になる．

[証明]  $\forall s \in (0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}}))$  をとり， $\forall \Lambda \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$  とする．このとき， $\max \Lambda > n$  かつ，

$$\Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda\}, \Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda + 1\}, \Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda + 2\}, \dots$$

であるので，補題 3.7 より， $\forall k \geq 1$  に対して

$$\left\{ \frac{1}{(\max \Lambda + k) + 1} \right\}^{2s} \leq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + k\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b}(s)$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \lambda_{\Lambda^{\#}}(s) &\geq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k\}}(s) \\ &= \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k-1\}}(s) \\ &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k-1\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k-2\}}(s) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b}(s) \\ &\quad + \lambda_{\Lambda^b}(s) \\ &\geq \sum_{j=\max \Lambda + 1}^k \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s) \end{aligned}$$

となる． $k \rightarrow \infty$  とすると，

$$\lambda_{\Lambda^{\#}}(s) \geq \sum_{j=\max \Lambda + 1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s) \quad \dots (*)$$

が成り立つので， $\Lambda \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$  とした場合も，定理 3.8 と同様に

$$\lambda_{\Lambda^{\#}}(s) \geq \lambda_{\Lambda}(s)$$

をみたす. ゆえに補題 3.3 より, この  $s$  は  $\mathcal{D}_S$  の集積点になる.

よって,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}, \text{有限集合}\}$  は,  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}})]$  で稠密である.  $\square$

**定理 3.10** 任意の  $l \in \mathbb{N}$  について,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{l\}, \text{有限集合}\}$  は,  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{l\}})]$  で稠密になる.

[証明]  $\forall s \in [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{l\}})]$  をとる.  $\forall \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{l\}, \max \Lambda \geq 3$  とする.

$$\phi_1 = f_2 \circ f_3, \quad \phi_2 = f_4 \circ f_5, \quad \phi_3 = f_6 \circ f_7$$

と定義すると,

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_1 \in \{1, 2, 3\}} \|\phi'_{\omega_1}\|^{\frac{1}{2}} &= \|f'_2(f_3(x))\|^{\frac{1}{2}} + \|f'_4(f_5(x))\|^{\frac{1}{2}} + \|f'_6(f_7(x))\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f'_2(x)\|^{\frac{1}{2}} \|f'_3(x)\|^{\frac{1}{2}} + \|f'_4(x)\|^{\frac{1}{2}} \|f'_5(x)\|^{\frac{1}{2}} + \|f'_6(x)\|^{\frac{1}{2}} \|f'_7(x)\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \frac{1}{(2+x)^2} \right\|^{\frac{1}{2}} \times \left\| \frac{1}{(3+x)^2} \right\|^{\frac{1}{2}} + \left\| \frac{1}{(4+x)^2} \right\|^{\frac{1}{2}} \times \left\| \frac{1}{(5+x)^2} \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{(6+x)^2} \right\|^{\frac{1}{2}} \times \left\| \frac{1}{(7+x)^2} \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{101}{420} \\ &< 1 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} P_{\{1, 2, 3\}}(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \{1, 2, 3\}} \|\phi'_\omega\|^s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \sum_{\omega_1 \in \{1, 2, 3\}} \|\phi'_{\omega_1}\|^s \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \sum_{\omega_1 \in \{1, 2, 3\}} \|\phi'_{\omega_1}\|^s < 1 \end{aligned}$$

を得る. よって,  $\mathcal{S}_{CF}$  において, 定理 3.2 の証明の  $k_1$  を  $k_1 > 3$  としてとることができるので,  $\max \Lambda \geq 3$  と仮定できる. また,

$$\Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda\}, \Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda + 1\}, \Lambda^b \subseteq \mathbb{N} \setminus \{\max \Lambda + 2\}, \dots$$

であるので, 補題 3.7 より,  $\forall k \geq 1$  に対して

$$\left\{ \frac{1}{(\max \Lambda + k) + 1} \right\}^{2s} \leq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + k\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b}(s)$$



となる.

•  $l < \max \Lambda + 1$  のとき

$l = 1$  のとき同様に,

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\Lambda^{\#}}(s) &\geq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k\}}(s) \\
 &= \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \dots, k-1\}}(s) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b}(s) \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b}(s) \\
 &\geq \sum_{j=\max \Lambda + 1}^k \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s)
 \end{aligned}$$

となる.  $k \rightarrow \infty$  とすると,

$$\lambda_{\Lambda^{\#}}(s) \geq \sum_{j=\max \Lambda + 1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s)$$

が成り立つので,  $\Lambda \subseteq \mathbb{N} \setminus \{l\}$  とした場合も, 定理 3.8 と同様に

$$\lambda_{\Lambda^{\#}}(s) \geq \lambda_{\Lambda}(s)$$

をみたす.

•  $k > l \geq \max \Lambda + 1$  のとき

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\Lambda^{\#}}(s) &\geq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-1, l+1, \dots, k\}}(s) \\
 &= \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-1, l+1, \dots, k\}}(s) \\
 &\quad - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-1, l+1, \dots, k-1\}}(s) \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-1, l+1, \dots, k-1\}}(s) \\
 &\quad - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-1, l+1, \dots, k-2\}}(s) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-1, l+1\}}(s) \\
 &\quad - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-1\}}(s) \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-2, l-1\}}(s) \\
 &\quad - \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1, \max \Lambda + 2, \dots, l-2\}}(s) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda + 1\}}(s) - \lambda_{\Lambda^b}(s) \\
 &\quad + \lambda_{\Lambda^b}(s) \\
 &\geq \sum_{j=\max \Lambda + 1, j \neq l}^k \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s)
 \end{aligned}$$

となる.  $k \rightarrow \infty$  とすると,

$$\lambda_{\Lambda^{\flat\sharp}}(s) \geq \sum_{j=\max \Lambda+1, j \neq l}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s) \quad \dots (\star\star)$$

となる.

(i)  $s \leq \frac{1}{2}$  のとき

( $\star\star$ ) の右辺は,  $\infty$  になる. よって, このとき

$$\lambda_{\Lambda^{\flat\sharp}}(s) \geq \lambda_{\Lambda}(s)$$

が成り立つ.

(ii)  $\frac{1}{2} < s \leq \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{l\}})$  のとき

$x := \max \Lambda + 2 \geq 5$  に対して,

$$h(s) := \frac{x}{2^{2s}(2s-1)}$$

$$g(s) := 1 + \left\{ \frac{x}{l+2} \right\}^{2s-1} - \left\{ \frac{x}{l+1} \right\}^{2s-1}$$

$$f_x(s) := h(s) \circ g(s)$$

とおく. 定理 3.8 の証明で示したように,  $h(s)$  は単調減少であり,  $h(1) \geq 0$  となる. また,

$$g'(s) = 2 \left( \frac{1}{l+2} \right)^{2s-1} \times \log \left( \frac{1}{l+2} \right) - 2 \left( \frac{1}{l+1} \right)^{2s-1} \times \log \left( \frac{1}{l+1} \right) < 0$$

より,  $g(s)$  も単調減少であり,  $x \geq 5$  より

$$g(1) = \frac{l^2 + 2l + 2 - x}{(l+1)(l+2)} \geq \frac{l^2 + 2l + 1}{(l+1)(l+2)} = \frac{l+1}{l+2} > 0$$

となる. よって,  $f_x(s)$  も単調減少であり,  $x \geq 5$  より

$$\begin{aligned} f_x(s) &\geq f_x(1) = \frac{x}{4} \left( 1 + \frac{x}{l+2} - \frac{x}{l+1} \right) = \frac{x}{4} \times \frac{l^2 + 3l + 2 - x}{(l+1)(l+2)} \\ &\geq \frac{x}{4} \times \frac{l^2 + 2l + 1}{(l+1)(l+2)} = \frac{x}{4} \times \frac{(l+1)}{(l+2)} \geq 1 \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}
\lambda_{\Lambda^b \#}(s) &\geq \sum_{j=\max \Lambda+1, j \neq l}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2s}} + \lambda_{\Lambda^b}(s) \\
&\geq \lambda_{\Lambda^b}(s) + \int_{\max \Lambda+1}^l \frac{1}{(x+1)^{2s}} dx + \int_{l+1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^{2s}} dx \\
&= \lambda_{\Lambda^b}(s) + \left[ \frac{1}{-2s+1} (x+1)^{-2s+1} \right]_{\max \Lambda+1}^l + \left[ \frac{1}{-2s+1} (x+1)^{-2s+1} \right]_{l+1}^{\infty} \\
&= \lambda_{\Lambda^b}(s) - \frac{1}{2s-1} \frac{1}{(l+1)^{2s-1}} + \frac{1}{2s-1} \frac{1}{(\max \Lambda+2)^{2s-1}} + \frac{1}{2s-1} \frac{1}{(l+2)^{2s-1}} \\
&\geq \lambda_{\Lambda^b}(s) + \frac{1}{2s-1} \frac{1}{(\max \Lambda+2)^{2s-1}} = \lambda_{\Lambda^b}(s) + \frac{(\max \Lambda+2)}{2s-1} (\max \Lambda+2)^{-2s} \\
&\geq \lambda_{\Lambda^b}(s) + \frac{2^{2s}}{(\max \Lambda+2)^{-2s}} \geq \lambda_{\Lambda^b \cup \{\max \Lambda\}}(s) = \lambda_{\Lambda}(s)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに補題 3.3 よりこの  $s$  は  $\mathcal{D}_S$  の集積点になる。よって、

$$\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{l\}, \text{有限集合}\}$$

は、 $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{l\}})]$  で稠密である。  $\square$

## 4 自己アフィンフラクタル

この章では、 $X$  が区間であり、更に  $S$  が  $X$  上のアフィン変換族の場合、次元集合が稠密になるときと、疎になるときの  $S$  の条件を検討する。4.1 節では、自己アフィンフラクタルの性質を示し、4.2 節では、absolutely regular システムの次元集合の性質を検討する。4.3 節では、 $S$  が  $|\phi'_k| = \alpha \times r^{-k}$ ,  $\alpha$ : 定数,  $r > 1$  のような例を考える。そして、 $r$  が大きくなるごとに、次元集合が稠密である区間は狭くなり、一方で、次元集合が疎である区間は広がることを示す。

### 4.1 自己アフィンフラクタルの性質

これから、 $X$  を閉区間であるとし、IFS  $S = \{\phi_i | i \in \mathbb{N}\}$  は、次をみたすものとする。

- (1)  $S$  は、 $U = \text{Int}(X)$  に対して、*open set condition*(OSC) をみたす。つまり、 $U \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(U)$  が成り立つ。ただし、右辺は互いに素とする。
- (2)  $\phi_i$  はすべてアフィン変換であり、 $|\phi'_i| > 0$  である。

この場合、極限集合を自己アフィンフラクタルとよぶ。系 2.24 から次が成り立つ。

**定理 4.1** 自己アフィンフラクタル  $J_\Lambda$  のハウスドルフ次元は、

$$\text{HD}(J_\Lambda) = \inf\{s > 0 : \sum_{k \in \Lambda} |\phi'_k|^s \leq 1\}$$

で与えられる。特に、 $\Lambda$  が有限集合であるならば、

$$\text{HD}(J_\Lambda) \text{ は、} \sum_{k \in \Lambda} |\phi'_k|^s = 1 \text{ となる唯一つの } s \text{ の値}$$

である。

以下、 $a_k = |\phi'_k|$  とおく。すると、(1) と (2) より、 $\sum_k a_k \leq 1$  かつ  $a_k > 0$  を得る。

$\Lambda \subset \mathbb{N}$  を空でない集合とし、 $s \geq 0$  に対して

$$\mu_\Lambda(s) = \sum_{k \in \Lambda} a_k^s$$

とおく。 $\mu_\Lambda(s)$  は、 $s$  に対して非増加である。また、

$$\theta_\Lambda = \inf\{s > 0 : \mu_\Lambda(s) < \infty\}$$

および

$$F(\Lambda) = \begin{cases} (\theta_\Lambda, \infty) & , \quad \mu_\Lambda(\theta_\Lambda) = \infty, \\ [\theta_\Lambda, \infty) & , \quad \mu_\Lambda(\theta_\Lambda) < \infty. \end{cases}$$

と定めると,  $\mu_\Lambda$  は,  $F(\Lambda)$  において, 連続かつ減少である凸関数になる. 特に,  $\Lambda$  が有限集合であるならば,  $\mu_\Lambda(s)$  は,  $s$  に対して連続で減少な凸関数になる.

極限集合のハウスドルフ次元は, 次のように与えられる.

$$\text{HD}(J_\Lambda) = \inf\{s > 0 : \mu_\Lambda(s) \leq 1\} \quad (4.1)$$

これより,  $\sum_k a_k \leq 1$  であるので,  $\mu_\mathbb{N}(1) \leq 1$  となる. ゆえに,  $\forall \Lambda \subseteq \mathbb{N}$  に対して,  $\text{HD}(J_\Lambda) \leq 1$  となる.

**命題 4.2**  $\Lambda, \Lambda' \subseteq \mathbb{N}$  とする.

(i)  $\text{HD}(J_\Lambda) > 0$  かつ  $\exists s_0 > 0$  (s.t)  $s_0 < \forall s < \text{HD}(J_\Lambda), \mu_\Lambda(s) \leq \mu_{\Lambda'}(s)$

ならば,  $\text{HD}(J_\Lambda) \leq \text{HD}(J_{\Lambda'})$  となる.

(ii)  $\exists s_0 > \text{HD}(J_{\Lambda'})$  (s.t)  $\text{HD}(J_{\Lambda'}) < \forall s < s_0, \mu_\Lambda(s) \leq \mu_{\Lambda'}(s)$

ならば,  $\text{HD}(J_\Lambda) \leq \text{HD}(J_{\Lambda'})$  となる.

[証明] (i) を示す.  $s$  を  $s_0 < s < \text{HD}(J_\Lambda)$  をみたすようにとる. すると, (4.1) より,  $\mu_\Lambda(s) > 1$  を得る. これより,  $\mu_{\Lambda'}(s) > 1$  となり, 再び (4.1) より,  $\text{HD}(J_{\Lambda'}) > s$  を得る. よって,  $\text{HD}(J_\Lambda) < \text{HD}(J_{\Lambda'})$  が成り立つ. 同様に, (ii) が成り立つことが示される.  $\square$

**命題 4.3**  $\Lambda \subseteq \Lambda'$  ならば,  $\text{HD}(J_\Lambda) \leq \text{HD}(J_{\Lambda'})$  である. さらに,  $\Lambda$  が有限集合かつ  $\Lambda \neq \Lambda'$  であるならば,  $\text{HD}(J_\Lambda) < \text{HD}(J_{\Lambda'})$  となる.

[証明]  $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \mathbb{N}$  とする. このとき,

$$\mu_\Lambda(s) = \sum_{k \in \Lambda} a_k^s \leq \sum_{k \in \Lambda'} a_k^s = \mu_{\Lambda'}(s)$$

となるので, 命題 4.2 より,  $\text{HD}(J_\Lambda) \leq \text{HD}(J_{\Lambda'})$  が成り立つ. 次に,  $\Lambda$  が有限集合であると仮定する.  $\text{HD}(J_\Lambda)$  は,  $\mu_\Lambda(s) = 1$  をみたす唯一の解であり,  $\Lambda \neq \Lambda'$  であるので,  $\text{HD}(J_\Lambda) < \text{HD}(J_{\Lambda'})$  が成り立つ.  $\square$

**命題 4.4**  $\{\Lambda_n\}$  を正の整数の集合の非減少列であるとする. するとこのとき

$$\text{HD}(J_{\cup_n \Lambda_n}) = \sup_n \text{HD}(J_{\Lambda_n})$$

を得る. その結果,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$  で稠密になる.

[証明]  $\{\Lambda_n\}$  が正の整数の集合の非減少列であるならば,  $\mu_{\cup_n \Lambda_n}$  は,

$$\mu_{\cup_n \Lambda_n}(s) = \sup_n \mu_{\Lambda_n}(s)$$

をみたす. (4.1) より,  $\text{HD}(J_{\cup_n \Lambda_n}) = \sup_n \text{HD}(J_{\Lambda_n})$  となり,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$  で稠密であることがわかる.  $\square$

**命題 4.5**  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は、孤立点を持たない。

[証明]  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  を有限集合とし、 $\Gamma_n = \Lambda \cup \{\max \Lambda + n\}$  とおく。すると、

$$\mu_\Lambda(s) = \inf_n \mu_{\Gamma_n}(s)$$

をみだし、(4.1) より、この命題が成り立つ。  $\square$

ここで、 $m \in \mathbb{N}$  に対して、

$$\Lambda_m = \{1, 2, \dots, m\}, \quad \Omega_m = \mathbb{N} \setminus \{m\}$$

と定義する。また、 $\Lambda_0 = \emptyset, \Omega_0 = \mathbb{N}$  かつ  $\mu_\emptyset = 0$  とする。すると、命題 4.3 から、次が成り立つことがわかる。

**補題 4.6**

$$\text{HD}(J_{\Lambda_0}) < \text{HD}(J_{\Lambda_1}) < \text{HD}(J_{\Lambda_2}) < \text{HD}(J_{\Lambda_3}) < \dots$$

となる。

[証明]  $\forall i \geq 0$  に対して、 $\Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}$  をみだす。よって、命題 4.3 より、 $\forall i \geq 0$  に対して、 $\text{HD}(J_{\Lambda_i}) \leq \text{HD}(J_{\Lambda_{i+1}})$  が成り立つ。  $\square$

**補題 4.7**  $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$  かつ  $k \in \Gamma, l \in \mathbb{N}$  とする。  $a_k \geq a_l$  ならば、

$$\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_k}) \leq \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_l})$$

となる。

[証明]  $a_k \geq a_l, k \in \Gamma, l \in \mathbb{N}$  とする。このとき、 $0 \leq \forall s \leq 1$  に対して、

$$\mu_{\Gamma \cap \Omega_k}(s) \leq \mu_{\Gamma \cap \Omega_l}(s)$$

が成り立つ。よって、命題 4.2 より、 $\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_k}) \leq \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_l})$  が成り立つ。  $\square$

**命題 4.8**

$$0 < \exists s < \text{HD}(J_{\mathbb{N}}) \quad (s.t) \quad \sum_{k>m} a_k^s \geq a_m^s, \forall m \in \mathbb{N}$$

とする。このとき、正の整数の有限集合の非減少列  $\{\Gamma_n\}$  で、 $\sup_n \text{HD}(J_{\Gamma_n}) = s$  をみだすものが存在する。

[証明] はじめに、正の整数の有限集合の非減少列  $\{\Gamma_n\}$  と、増加列  $\{m_n\}$  で、

$$\mu_{\Gamma_n}(s) \leq 1 < \mu_{\Gamma_n \cup \{m_n\}}(s), \forall n \in \mathbb{N} \quad \dots (*)$$

をみたすものを構成する.  $s < \text{HD}(J_{\mathbb{N}})$  であるので, (4.1) より,  $\mu_{\mathbb{N}}(s) > 1$  となる. よって,

$$m_1 = \min\{m \geq 2 : \mu_{\{1,2,\dots,m\}}(s) > 1\}$$

を定義することができる. そして,

$$\Gamma_1 = \{1, 2, \dots, m_1 - 1\}$$

とおく.  $\Gamma_n$  と  $m_n$  が与えられたとすると, 仮定により,

$$\mu_{\Gamma_n \cup \{m_n+1, m_n+2, \dots\}}(s) = \mu_{\Gamma_n}(s) + \sum_{k > m_n} a_k^s \geq \mu_{\Gamma_n}(s) + a_{m_n}^s = \mu_{\Gamma_n \cup \{m_n\}}(s) > 1$$

が成り立つ. よって, 次のように  $m_{n+1}$  と  $\Gamma_{n+1}$  を定義することができる.

$$m_{n+1} = \min\{m \geq m_n + 1 : \mu_{\Gamma_n \cup \{m_n+1, m_n+2, \dots, m\}}(s) > 1\}$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n, & m_{n+1} = m_n + 1 \text{ のとき} \\ \Gamma_n \cup \{m_n + 1, m_n + 2, \dots, m_{n+1} - 1\}, & m_{n+1} > m_n + 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$\Gamma_n$  と  $m_n$  は,  $(*)$  をみたす. よって,  $0 \leq 1 - \mu_{\Gamma_n}(s) \leq a_{m_n}^s \rightarrow 0$  となり,  $\sup_n \mu_{\Gamma_n}(s) = 1$  が成り立つ.

次に,  $\sup_n \text{HD}(J_{\Gamma_n}) = s$  となることを示す. 任意の  $n$  に対して,  $\mu_{\Gamma_n}(s) \leq 1$  であるので, (4.1) より,  $\sup_n \text{HD}(J_{\Gamma_n}) \leq s$  となることがわかる.  $\sup_n \text{HD}(J_{\Gamma_n}) < s$  と仮定し,  $\Gamma = \cup_n \Gamma_n$  とおく. すると, 命題 4.4 より,  $\text{HD}(J_{\Gamma}) = \sup_n \text{HD}(J_{\Gamma_n})$  となる.  $\mu_{\Gamma}$  は,  $F(\Gamma)$  において, 減少関数であり,  $\text{HD}(J_{\Gamma}) < s$  より,  $\mu_{\Gamma}(s) < 1$  を得る. 一方で, 任意の  $n$  について  $\mu_{\Gamma_n}(s) < \mu_{\Gamma}(s) < 1$  であり, このことは,  $\sup_n \mu_{\Gamma_n}(s) = 1$  であることに矛盾する. よって,  $\sup_n \text{HD}(J_{\Gamma_n}) = s$  が成り立つ.  $\square$

#### 定理 4.9

$$0 < \exists s_0 < \text{HD}(J_{\mathbb{N}}) \quad (s.t) \quad \sum_{k > m} a_k^{s_0} \geq a_m^{s_0}, \forall m \in \mathbb{N}$$

とする. このとき次元集合  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N}, \text{有限集合}\}$  は,  $[0, s_0]$  で稠密になる.

さらに,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N}\} = [0, s_0]$  となる.

[証明] 任意の  $m$  に対して,  $\sum_{k > m} a_k^{s_0} \geq a_m^{s_0}$  が成り立つと仮定する. すると,  $0 < \forall s \leq s_0$  と  $\forall m \in \mathbb{N}$  に対して  $\sum_{k > m} a_k^s \geq a_m^s$  をみたし, 命題 4.8 より, 次元集合は,  $[0, s_0]$  で稠密になる. また, 命題 4.4 より,  $\{\text{HD}(J_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{N}\} = [0, s_0]$  が成り立つ.  $\square$

## 4.2 Absolutely Regular システムの次元集合

この節では,  $S = \{\phi_k : k \in \mathbb{N}\}$  は absolutely regular であると仮定する. つまり,  $\forall \Lambda \subseteq \mathbb{N}$  に対して,  $\mu_\Lambda(s) = 1$  であるときに限り  $\text{HD}(J_\Lambda) = s$  となる.

**補題 4.10**  $\Lambda \subseteq \mathbb{N}, \alpha > 0, \mu_\Lambda(\alpha) < 1$  とする. すると,

$$\text{HD}(J_\Lambda) < \alpha$$

となる.

[証明]  $\mu$  は単調減少であることと, ハウスドルフ次元は,  $\mu_\Lambda(s) = 1$  の解  $s$  であることより,  $\mu_\Lambda(\alpha) < 1$  ならば,  $\text{HD}(J_\Lambda) < \alpha$  となる.  $\square$

**命題 4.11**  $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$  とする.  $l$  は,  $a_l = \min\{a_k : k \in \Gamma \cap \Lambda_l\}$  かつ

$$\sum_{k>l, k \in \Gamma} a_k^{\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})} < a_l^{\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})}$$

をみたすとする. このとき

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \Gamma\} \cap (\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_l}), \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})) = \emptyset$$

となる.

[証明] 仮定より,

$$\begin{aligned} \mu_{\Gamma \cap \Omega_l}(\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})) &= \mu_{\Lambda_{l-1} \cap \Gamma}(\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})) + \sum_{k>l, k \in \Gamma} a_k^{\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})} \\ &< \mu_{\Lambda_{l-1} \cap \Gamma}(\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})) + a_l^{\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})} \\ &= \mu_{\Gamma \cap \Lambda_l}(\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})) = 1 \end{aligned}$$

となる. よって, 補題 4.10 より,  $\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_l}) < \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})$  が成り立つ.

次に,  $\Lambda \subseteq \Gamma$  とする.  $[\Gamma \cap \Lambda_l] \subseteq \Lambda$  ならば,  $\text{HD}(J_\Lambda) \geq \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l})$  となる. よって,  $\text{HD}(J_\Lambda) \notin (\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_l}), \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l}))$  が成り立つ.  $[\Gamma \cap \Lambda_l] \subsetneq \Lambda$  ならば,

$$\exists j \in \Gamma \cap \Lambda_l \quad (s.t) \quad \Lambda \subseteq [\Gamma \cap \Omega_j]$$

となる. よって, このとき  $\text{HD}(J_\Lambda) \leq \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_j})$  が成り立つ. 一方で, 補題 4.7 より,  $\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_j}) \leq \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_l})$  となるので, この場合も

$$\text{HD}(J_\Lambda) \notin (\text{HD}(J_{\Gamma \cap \Omega_l}), \text{HD}(J_{\Gamma \cap \Lambda_l}))$$

が成り立つことがわかる. よって, この定理が成り立つ.  $\square$



**定理 4.12**  $S$  は, *absolutely regular* であり,  $|\phi'_1| \geq |\phi'_2| \geq |\phi'_3| \geq \dots$  であるとする.

$$(i) \quad \exists m \in \mathbb{N} \ (s.t) \quad \sum_{k>m} a_k^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m\}})} < a_m^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m\}})}$$

とする. このとき,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \mathbb{N}\} \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$  となる区間  $(\alpha, \beta) \subseteq [0, \text{HD}(J_\mathbb{N})]$  が存在する.

(ii)  $m > 2$  は,

$$\sum_{k>m} a_k^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m-1\}})} < a_{m-1}^{\text{HD}(J_{\{1,2,\dots,m-1\}})}$$

をみたすとする. このとき,

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \mathbb{N}, m \notin \Lambda\} \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$$

となる区間  $(\alpha, \beta) \subseteq [0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m\}})]$  が存在する.

[証明]

・(i) を示す.

命題 4.11 において,  $\Gamma = \mathbb{N}, l = m$  とおくと成り立つことがわかる.

・(ii) を示す.

同様に命題 4.11 において,  $\Gamma = \mathbb{N} \setminus \{m\}, l = m - 1$  とおくと成り立つことがわかる.

□

**命題 4.13**

$$\exists \Lambda_0 \subseteq \mathbb{N} \text{ 有限集合}, \exists m_0 \in \mathbb{N} \ (s.t) \quad m_0 \leq \max \Lambda_0$$

かつ

$$\sum_{k>m} a_k^{\text{HD}(J_{\Lambda_0})} < a_m^{\text{HD}(J_{\Lambda_0})} \quad , \quad \forall m \in \Lambda_0, \forall m \geq m_0$$

をみたすならば,

$$\exists \{\alpha_n\}, \exists \{\beta_n\} \ (s.t) \quad \beta_{n+1} < \alpha_n < \beta_n, \inf_n \alpha_n = \text{HD}(J_{\Lambda_0})$$

かつ

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \Lambda_0 \text{ または } \min[\Lambda \setminus \Lambda_0] \geq m_0\} \cap (\alpha_n, \beta_n) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立つ.

[証明]  $n_0 = \max \Lambda_0, n = 1, 2, \dots$  に対して,

$$\Gamma_n = \Lambda_0 \cup \{n_0 + n\}, \quad \Gamma'_n = \Lambda_0 \cup \{n_0 + n + 1, n_0 + n + 2, \dots\}$$

とおき,  $\beta_n = \text{HD}(J_{\Gamma_n})$ ,  $\alpha_n = \text{HD}(J_{\Gamma'_n})$  とおく. このとき,  $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma'_n$  であるので, まず  $\beta_{n+1} < \alpha_n$  を得る. また,  $\text{HD}(J_{\Gamma_n}) > \text{HD}(J_{\Gamma_0})$  であるので,

$$\begin{aligned} \mu_{\Gamma'_n}(\text{HD}(J_{\Gamma_n})) &= \mu_{\Lambda_0}(\text{HD}(J_{\Gamma_n})) + \sum_{k>n_0+n} a_k^{\text{HD}(J_{\Gamma_n})} \\ &< \mu_{\Lambda_0}(\text{HD}(J_{\Gamma_n})) + a_{n_0+n}^{\text{HD}(J_{\Gamma_n})} = \mu_{\Gamma_n}(\text{HD}(J_{\Gamma_n})) = 1 \end{aligned}$$

となるので, 補題 4.10 より,

$$\alpha_n = \text{HD}(J_{\Gamma'_n}) < \text{HD}(J_{\Gamma_n}) = \beta_n$$

を得る. また,  $\inf_n \mu_{\Gamma_n} = \mu_{\Gamma_0}$  であることより,

$$\inf_n \alpha_n = \text{HD}(J_{\Lambda_0})$$

が成り立つ.

次に 2 つ目の主張を示す.  $\Lambda \subseteq \Lambda_0$  ならば,  $\alpha_n > \text{HD}(J_{\Lambda_0})$  であるので,  $\forall n$  に対して  $\text{HD}(J_{\Lambda}) \notin (\alpha_n, \beta_n)$  が成り立つ.  $\forall n$  と  $[\Lambda \setminus \Lambda_0] \geq m_0$  をみたす  $\forall \Lambda \subseteq \mathbb{N}$  に対して,  $\text{HD}(J_{\Lambda}) \notin (\alpha_n, \beta_n)$  が成り立つことを示す.  $n$  とこのような  $\Lambda$  を固定する.

$\Gamma_n \subseteq \Lambda$  ならば,  $\text{HD}(J_{\Lambda}) \notin (\alpha_n, \beta_n)$  が成り立つ. そうでなければ,

$$j = \min\{k \in \Gamma_n \cup \Lambda : k \notin \Gamma_n \text{ または } k \notin \Lambda\}$$

とおく. すると,  $\Gamma_n \cap \Lambda_{j-1} = \Lambda \cap \Lambda_{j-1}$  となり,  $\max \Gamma_n = n_0 + n$  かつ  $\Gamma_n \subsetneq \Lambda$  であるので,  $j \leq n_0 + n$  を得る.

$j = n_0 + n$  ならば,  $n_0 + n \notin \Lambda$  であるので,  $\text{HD}(J_{\Lambda}) < \text{HD}(J_{\Gamma'_n})$  となり,

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda}(\text{HD}(J_{\Gamma'_n})) &= \mu_{\Lambda \cap \Lambda_{n_0+n-1}}(\text{HD}(J_{\Gamma'_n})) = \mu_{\Lambda \cap \{n_0+n+1, n_0+n+2, \dots\}}(\text{HD}(J_{\Gamma'_n})) \\ &< \mu_{\Lambda \cap \Lambda_{n_0+n-1}}(\text{HD}(J_{\Gamma'_n})) + \sum_{k>n_0+n} a_k^{\text{HD}(J_{\Gamma'_n})} \\ &= \mu_{\Lambda_0}(\text{HD}(J_{\Gamma'_n})) + \sum_{k>n_0+n} a_k^{\text{HD}(J_{\Gamma'_n})} = \mu_{\Gamma'_n}(\text{HD}(J_{\Gamma'_n})) = 1 \end{aligned}$$

を得る. ゆえに  $\text{HD}(J_{\Lambda}) < \text{HD}(J_{\Gamma'_n}) = \alpha_n$  が成り立つ.

$j < n_0 + n$  かつ  $j \notin \Lambda$  ならば,  $j \in \Lambda_0$  となり, 同様に

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda}(\text{HD}(J_{\Lambda_0})) &= \mu_{\Lambda \cap \Lambda_{j-1}}(\text{HD}(J_{\Lambda_0})) + \mu_{\Lambda \cap \{j+1, j+2, \dots\}}(\text{HD}(J_{\Lambda_0})) \\ &< \mu_{\Lambda_0 \cap \Lambda_{j-1}}(\text{HD}(J_{\Lambda_0})) + a_j^{\text{HD}(J_{\Lambda_0})} \leq \mu_{\Lambda_0}(\text{HD}(J_{\Lambda_0})) = 1 \end{aligned}$$

を得る. よって,  $\text{HD}(J_{\Lambda}) < \text{HD}(J_{\Lambda_0}) < \alpha_n$  が成り立つ.

最後に,  $j < n_0 + n$  かつ  $j \in \Lambda$  とする. このとき,  $j \notin \Lambda_0$ ,  $j \geq m_0$  となり

$$\begin{aligned} \mu_{\Gamma_n}(\text{HD}(J_{\Lambda})) &= \mu_{\Gamma_n \cap \Lambda_{j-1}}(\text{HD}(J_{\Lambda})) + \mu_{\Gamma_n \cap \{j+1, j+2, \dots\}}(\text{HD}(J_{\Lambda})) \\ &< \mu_{\Lambda \cap \Lambda_{j-1}}(\text{HD}(J_{\Lambda})) + a_j^{\text{HD}(J_{\Lambda})} \leq \mu_{\Lambda}(\text{HD}(J_{\Lambda})) = 1 \end{aligned}$$

を得る. よって,  $\text{HD}(J_\Lambda) > \text{HD}(J_{\Gamma_n}) = \beta_n$  となり, この命題が成り立つことがわかる.  
□

**定理 4.14**  $S$  は *absolutely regular* であり,

$$0 < \exists s_0 < \text{HD}(J_{\mathbb{N}}) \text{ (s.t.) } \sum_{k>m} a_k^{s_0} < a_m^{s_0}, \forall m \in \mathbb{N}$$

とする. このとき,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$  は,  $[s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  で疎になる.

[証明]

$$\exists \Lambda \text{ (s.t.) } \text{HD}(J_\Lambda) \in (s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$$

とする. すると, 命題 4.4 より, 有限集合  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  で  $\text{HD}(J_{\Lambda_0}) \in (s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}}))$  をみたすものが存在する. つまり,

$$\sum_{k>m} a_k^{\text{HD}(J_{\Lambda_0})} < a_m^{\text{HD}(J_{\Lambda_0})}, \forall m \in \mathbb{N}$$

が成り立つ. 命題 4.13 より,  $\beta_{n+1} < \alpha_n < \beta_n$ ,  $\inf_n \alpha_n = \text{HD}(J_{\Lambda_0})$  かつ

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\} \cap (\alpha_n, \beta_n) = \emptyset$$

が任意の  $n$  について成り立つような 2 つの列  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$  が存在する.

よって, 次元集合  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$  は,  $[s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N}})]$  で疎である. □

### 4.3 例

次のような, 単位区間におけるアフィン変換の集合  $S = \{\phi_k = a_k x + b_k : k \in \mathbb{N}\}$  を考える.  $r > 1$  に対して

$$\begin{cases} a_k = (r-1)r^{-k}, & k = 1, 2, \dots, \\ b_1 = 0, & b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}, k = 2, 3, \dots. \end{cases}$$

とおく. すると,  $0 < \forall s < 1$  に対して

$$\sum_{k \geq 1} a_k^s = (r-1)^s \sum_{k \geq 1} r^{-sk} = (r-1)^s \frac{1}{r^s - 1}$$

が成り立つ. よって,  $S$  は *absolutely regular* であり,  $\sum_k a_k = 1$  であるので,  $\text{HD}(J_{\mathbb{N}}) = 1$  であることがわかる. 同様に,  $0 < \forall s < 1$  に対して

$$\sum_{k>m} a_k^s = (r-1)^s \frac{r^{-sm}}{r^s - 1} = \frac{1}{r^s - 1} a_m^s$$

が成り立つ。

**主張 1**  $1 < r \leq 2$  ならば,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は,  $[0, 1]$  で稠密になる。

[証明]  $1 < r \leq 2$  ならば,  $\forall m$  に対して,

$$\sum_{k>m} a_k = (r-1) \frac{r^{-m}}{r-1} \geq a_m$$

となる。定理 4.9 の仮定が,  $s_0 = 1$  に対して成り立つので,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は,  $[0, 1]$  で稠密になる。  $\square$

**主張 2**  $r > 2$  ならば,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は,  $[0, \log_r 2]$  において稠密に存在し,  $[\log_r 2, 1]$  で疎になる。

[証明]  $r > 2$  とする。  $\forall m \in \mathbb{N}$  に対して

$$\sum_{k>m} a_k^{\log_r 2} = a_m^{\log_r 2}$$

であるので, 定理 4.9 より,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は,  $[0, \log_r 2]$  で稠密になる。一方で,  $\forall s \in (\log_r 2, 1)$  に対しては,

$$\sum_{k>m} a_k^s < a_m^s, \forall m \in \mathbb{N}$$

となる。よって, 定理 4.14 より,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}\}$  は,  $[\log_r 2, 1]$  で疎になる。  $\square$

**主張 3**  $1 < r \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ならば,  $\forall m \in \mathbb{N}$  に対して,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m \notin \Lambda\}$  は,  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m\}})]$  で稠密になる。

[証明]  $1 < r \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ならば,  $1+r-r^2 \geq 0$  が成り立つ。  $\forall m \in \mathbb{N}$  をとり, 固定する。このとき,  $\forall l \in \mathbb{N}, l \neq m$  に対して,  $\sum_{k>l, k \neq m} a_k \geq a_l$  となることを示す。

・  $l > m$  のとき

主張 1 と同様に,

$$\sum_{k>l, k \neq m} a_k = \sum_{k>l} a_k = (r-1) \frac{r^{-l}}{r-1} \geq a_l$$

となり,  $\sum_{k>l, k \neq m} a_k \geq a_l$  が成り立つ。

・  $l = m-1$  のとき

このとき

$$\begin{aligned} \sum_{k>l, k \neq m} a_k &= \sum_{k>m} a_k = (r-1) \frac{r^{-m}}{r-1} = (r-1) r^{-(m-1)} \frac{r^{-1}}{r-1} \\ &\geq (r-1) r^{-(m-1)} = a_{m-1} = a_l \end{aligned}$$

となり,  $\sum_{k>l, k \neq m} a_k \geq a_l$  が成り立つ.

・  $l < m-1$  のとき

このとき

$$\begin{aligned} \sum_{k>l, k \neq m} a_k &= \sum_{k>m} a_k + \sum_{k=l+1}^{m-1} a_k = (r-1) \frac{r^{-m}}{r-1} + (r-1) \sum_{k=l+1}^{m-1} r^{-k} \\ &\geq (r-1) r^{-(l+2)} + (r-1) r^{-(l+1)} = (r-1) r^{-l-2} (1+r) \\ &\geq (r-1) r^{-l-2} r^2 = (r-1) r^{-l} = a_l \end{aligned}$$

となり,  $\sum_{k>l, k \neq m} a_k \geq a_l$  が成り立つ.

よって, 定理 4.9 より,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m \notin \Lambda\}$  は,  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m\}})]$  で稠密になる.  $\square$

**主張 4**  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < r \leq 2$  のとき,  $s_0 = \log_r \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  とする.

このとき  $\forall m \in \mathbb{N}$  に対して,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m \notin \Lambda\}$  は  $[0, s_0]$  で稠密になる.

一方で, 十分大きな  $m \in \mathbb{N}$  に対しては,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m \notin \Lambda\} \cap I = \emptyset$  をみたす区間  $I \subseteq [s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m\}})]$  が存在する.

[証明]  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < r \leq 2$  とし,  $0 < s_0 < 1$  を  $1 + r^{s_0} - r^{2s_0} = 0$  をみたすようにとる. すると,  $0 < s < s_0$  に対して,  $1 + r^s - r^{2s} > 0$  が成り立つ. よって, 主張 3 と同様に  $\forall m \in \mathbb{N}$  に対して  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m \notin \Lambda\}$  は,  $[0, s_0]$  で稠密になる.

次に,  $m_0$  を  $\forall m \geq m_0$  に対して,  $\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}}) > s_0$  をみたすようにとる. すると,  $\forall m \geq m_0$  に対して

$$\sum_{k>m} a_k^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} < a_{m-1}^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})}$$

となる. よって, 定理 4.12(ii) より,  $\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m \notin \Lambda\} \cap I = \emptyset$  をみたす区間  $I \subseteq [s_0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m\}})]$  が存在する.  $\square$

次の主張のために,  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して,

$$1 < r_n < 2, \quad r_n^n (r_n - 1) = 1$$

をみたす数  $r_n$  を考える. このような数  $r_n$  が存在し,  $r_{n+1} < r_n$  となることは次のようにして示される.

$$f_n(r) = r^{n+1} - r^n - 1 \text{ とおく.}$$

$$f_n(1) = -1 < 0, \quad f_n(2) = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n - 1 > 0$$

より,  $1 < r_n < 2$  で  $f_n(r_n) = 0$  をみたすものが存在する. また,  $1 < r < 2$  において

$$f'_n(r) = (n+1)r^n - nr^{n-1} = r^{n-1}\{(n+1)r - n\} > 0$$

となるので,  $f_n(r)$  は  $1 < r < 2$  において単調増加である. よって,  $f_n(r) = 0$  の解  $r_n$  は,  $1 < r < 2$  において唯一つ存在する.  $f_{n-1}(r) = 0$  の解を  $r_{n-1}$  とおく.  $f_n(r_n) = 0$  であり,

$$f_n(r_{n-1}) = r_{n-1}^{n+1} - r_{n-1}^n - 1 = r_{n-1}(r_{n-1}^n - r_{n-1}^{n-1}) - 1 = r_{n-1} - 1 > 0$$

となるので,  $f_n(r)$  が単調増加であることより,  $r_n < r_{n-1}$  が成り立つ.

特に,  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  である.

**主張 5**  $n$  を正の整数,  $r_n$  を  $r_n^n(r_n - 1) = 1$ ,  $1 < r_n < 2$  をみたす実数とする.

(1)  $1 < r \leq r_n$  ならば,  $\forall m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m_1, m_2, \dots, m_n \notin \Lambda\}$$

は,  $[0, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_n\}})]$  で稠密になる.

(2)  $r_n < r \leq 2$  ならば,  $\forall m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m_1, m_2, \dots, m_n \notin \Lambda\}$$

は,  $[0, \log_r r_n]$  で稠密になる.

(3)  $r_n < r \leq 2$  ならば, 十分大きな  $m \in \mathbb{N}$  に対しては,

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \mathbb{N}, m, \dots, m+n-1 \notin \Lambda\} \cap I = \emptyset$$

をみたす区間  $I \subseteq [\log_r r_n, \text{HD}(J_{\mathbb{N} \setminus \{m, \dots, m+n-1\}})]$  が存在する.

[証明]  $n = 1$  のときは, 主張 3 および主張 4 で示したので,  $n \geq 2$  とする.

・(1) を示す.

$r_n^n(r_n - 1) = 1$  より,  $1 < \forall r \leq r_n$  に対して,  $r^n(r - 1) \leq 1$  となる.

$\forall m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N} (m_1 < m_2 < \dots < m_n)$  を固定し,  $\forall l \in \mathbb{N} \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  をとる. このとき,  $\sum_{k>l, k \neq m_1, \dots, m_n} a_k \geq a_l$  となることを示す.

$$\begin{aligned} \sum_{k>l, k \neq m_1, \dots, m_n} a_k &\geq \sum_{k>l+n} a_k = (r-1) \times \frac{r^{-(l+n)}}{r-1} = (r-1) r^{-l} \frac{1}{r^n(r-1)} \\ &\geq (r-1) r^{-l} = a_l \end{aligned}$$

となるので, 定理 4.9 より, (1) が成り立つ.

・(2) を示す.

$s_0 = \log_r r_n$  とおく.  $s_0$  は,  $r^{ns_0}(r^{s_0} - 1) = 1$  をみたし,  $0 < \forall s < s_0$  に対して,  $1 + r^{ns} - r^{(n+1)s} > 0$  が成り立つ. よって, (1) と同様に  $\sum_{k>l, k \neq m_1, \dots, m_n} a_k \geq a_l$  が成り立ち, 定理 4.9 より

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \mathbb{N} \text{ 有限集合}, m_1, m_2, \dots, m_n \notin \Lambda\}$$

は,  $[0, \log_r r_n]$  で稠密になる.

・ (3) を示す.

$m_0$  を  $\text{HD}(J_{\Lambda_{m_0-1}}) > s_0$  をみたすようにとる. このとき,  $m \geq m_0$  であれば,

$$\sum_{k>m, k \neq m+1, \dots, m+n-1} a_k^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} < a_{m-1}^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})}$$

となることを示す.

$1 = r^{ns_0}(r^{s_0} - 1)$  であり,  $\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}}) > s_0$  より,  $1 < r^{n \times \text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})}(r^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} - 1)$  であるので,

$$\begin{aligned} & \sum_{k>m, k \neq m+1, \dots, m+n-1} a_k^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} \\ &= \sum_{k \geq m+n} a_k^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} \\ &= (r-1)^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} \times \frac{r^{-\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}}) \times (m+n-1)}}{r^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} - 1} \\ &= (r-1)^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} \times r^{-\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}}) \times (m-1)} \times \frac{r^{-n \times \text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})}}{r^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} - 1} \\ &< (r-1)^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} \times r^{-\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}}) \times (m-1)} = a_{m-1}^{\text{HD}(J_{\Lambda_{m-1}})} \end{aligned}$$

となる. よって, 定理 4.12 (ii) より,

$$\{\text{HD}(J_\Lambda) : \Lambda \subseteq \mathbb{N}, m, \dots, m+n-1 \notin \Lambda\} \cap I = \emptyset$$

をみたす区間が存在する. ゆえに (2) が成り立つ.

以上より, この主張が成り立つ.  $\square$

## 参考文献

- [1] K. J. Falconer, Fractal Geometry, *John Wiley & Sons* (1990).
- [2] K. J. Falconer, TECHNIQUES IN FRACTAL GEOMETRY, *John Wiley & Sons* (1997).
- [3] D. Hensley, Continued Fraction Cantor Set, Hausdorff Dimension, and Functional Analysis, *J. Number Theory*, **40** (1990) pp. 336 – 358.
- [4] J. E. Hutchinson, Fractal and self similarity, *Indiana. Univ. Math. J.*, **30**(5) (1981) pp. 713 – 747.
- [5] V. Jarník, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximation, *Prace Mat.-Fiz.* **36** (1928) pp. 91 – 106.
- [6] M. Kesseböhmer and S. Zhu, Dimension sets for infinite IFSs : the Texan Conjecture, *J. Number Theory*, **116** (2006) pp. 230 – 246.
- [7] R. D. Mauldin and S. C, Williams, Random recursive constructions: Asymptotic geometric and topological propertyies, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **259** (1986) pp. 325 – 346.
- [8] R. D. Mauldin and M, Urbański, Dimension and measures in infinite iterated function systems, *Proc. London. Math. Soc.*, (3) **73** (1996) pp. 105 – 154.
- [9] P. A. P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49** (1946) pp. 15 – 23.