中等数学教育における『原論』第Ⅲ巻の受容に関する研究

平成20年度

三重大学大学院教育学研究科
修士課程 教科教育専攻

澤　悦子

修士論文

中等数学教育における『原論』第Ⅲ巻の受容に関する研究

三重大学大学院　教育学研究科
教科教育専攻　数学教育専修

No. 207M022

澤　悦子

２００９年（平成２１年）２月１０日

目　次

序　章

本研究の目的及び方法

第１節　本研究の目的

古代の人間は、太陽や月などを観察して、「太陽は丸い」とか「月も丸い」などと意識してきたと言われている。歴史的にも、古代より農業社会では収穫の時期を知るために天文学が生まれ、それと並んで耕地の面積や収穫量の体積をはかるために幾何学が生まれるなど、天文学と幾何学は最も古い学問とされてきた。そしてその中において、例えばアルキメデスによる円の研究やプトレマイオスによるトレミーの定理など、円について多くの研究がなされてきた。つまり、古くから円について心惹かれ、研究に取り組んだ多くの数学者が存在したといえる。

ところで私も、小学生の頃、点対称であり線対称でもある円に美しさを感じた。そして、中学生になり、１年生で１点より等しい距離にある点の集合として円を学び、３年生で角に着目した円周角の定理を学ぶ中で、更なる円の神秘性や面白さを感じた。中でも特に、円周角の定理から内接する四角形の性質、接弦定理、方べきの定理へとつながっていくところに心惹かれた。

また、私は三重大学教育学部の４週間の教育実習において、第３学年「円の性質」について、合計12時間の授業を行った。以下、当時の学習指導案より単元の目標と指導計画を紹介したい。

目標　１．円の性質を理解する。

①円の弦、接線の性質を理解する。

②円と直線及び２円の位置関係を交点で分類し、半径と円の中心から直線までの距離の関係、２円の中心間の距離の関係を数量化し、考察することにより、それぞれの位置関係を理解する。

③円を角に着目してとらえることができ、円周角の定理から円に内接する四角形の定理、接弦定理を理解する。

２．数学的見方、考え方や思考する態度を養う。

①証明において、様々な方法を見つけていく態度を養う。

②自主的に問題を発展させ、解法及び解答を追求する態度を養う。

③論証により論理的に思考する態度を養う。

３．能力、技能を伸ばす。

①図形について見通しを持って論理的に考察できる能力を伸ばす。

②円周角の定理、円に内接する四角形の性質、接弦定理を互いに関連づけ一連のものという統合的な見方ができる。

③作図を通して、直観的な見方や考え方を伸ばし、問題解決に利用する能力を伸ばす。

④分類する、一般化する、単純化するなど、数学的な処理の仕方や考え方を身につける。

指導計画	円の弦の性質	１時間	
	円と直線の位置関係	２時間	
	２円の位置関係	２時間	
	内接円と外接円	１時間	
	円周角の定理とその逆	２時間	
	円に内接する四角形の定理	１時間	
	接弦定理	１時間	
	応用とまとめ	２時間	合計１２時間

上記のように、教育実習当時（昭和59年）は、かなりまとまった内容が扱われていた。しかし、学習指導要領が改訂され続けた結果、現行の学習指導要領では中学校３カ年で、円の学習に対して、わずか３～４時間しか当てられていないという状況になっている。すなわち以前は学んでいた「円の性質」の学習内容がほとんど高等学校へ移行され、現在は中学校第１学年で「円の弦」と「接線」についてふれ、第２学年で円周角の定理を簡単に学ぶのみである。

私は、「こんなに中学校での学習内容が削減されてもよいものか」と、大変疑問に思っている。なぜなら、円という教材について考えてみると、

１．子どもたちにとって円は身近な存在であるが、対称性の美しさ、性質の不思議さなど学習意欲を高める教材である。

２．「円の性質」は多くの定理や性質が関連し合ってその全体をなし、小学校や中学校での学習のまとめとなる教材である。また、総合問題も多く、それらに取り組むことで数学的見方や考え方を養い、また論証の力もつけられる教材である。

３．知識の統合や動点の考え方も行うことができ、パソコンの利用も有効な教材である。

４．接線の考え方は、高等学校で学習する極限の考え方にもつながり、また、円は弧度法の考え方の基礎ともなる教材である。

という特徴が挙げられる。

以上のように、今までの学習のまとめとしても、そして高等学校へつながる学習内容としても大切であると共に、子どもたちにとって興味、関心を持たせやすい教材でもあり、数学的見方、考え方を養うことや学んだことを応用する力を養う上でも多くの学びが得られると考える。

そこで、「円の性質」について“中等数学教育の幾何において、何が大切なのか、また大切にすべきなのか、そしてそのために何を学べばよいのか”を明らかにしたいと考えるに至った。

歴史的に概観すると、日本の中等教育において典型的な幾何学の教科書とされたのは、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書』であり、この教科書は、英国幾何学教授法改良協会（Association for the Improvement of Geometrical Teaching　略称　A.I.G.T.）が編纂した『幾何学教科書』を参考にして執筆されたものである。そして、A.I.G.T.の教科

書はユークリッド『原論』を改良する目的で編纂されたものと言われている。

そこで、円を扱っているユークリッド『原論』第Ⅲ巻を考察すると共に、日本ではどのように幾何の教科書が作られ、ユークリッド『原論』第Ⅲ巻が受け入れられたのかを明らかにしたいと考え、論文題目を“中等数学教育における『原論』第Ⅲ巻の受容に関する研究”と定めた。

第２節　本研究の方法

本研究は、第１節で述べたように、中等数学教育における『原論』第Ⅲ巻の受容に関して、歴史的に考究しようとするものである。したがって、歴史的な研究がほとんどそうであるように、本研究においても、使用した研究方法は主として文献に基づく実証的研究方法である。

文献といってもその量は膨大なものである。そこで、本研究においては、まず第１に A.I.G.T.が幾何学教科書の「円論」を編纂するにあたってその内容の対象としたユークリッド『原論』第Ⅲ巻について考察することとした。第Ⅲ巻で扱われている37個の命題すべてにわたって、一つひとつの命題についての証明を検討すると共に、各命題相互のつながりについても考察することとした。

第２にイギリスの幾何学教授法改良協会編纂“The Elements of Plane Geometry”略して『あそしえーしょん　初等平面幾何学』の内容と構造、そして、そのシラバスとして作られた“A Syllabus of Plane Geometry ”略して『平面幾何学教授條目』について考察することとした。なぜならば、歴史的に明治初期において初めて日本人により編纂された本格的な幾何学教科書として、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』が指摘されているが、菊池がこの教科書を編纂するにあたって参考にしたのがイギリスの幾何学教授法改良協会編纂“The Elements of Plane Geometry”略して『あそしえーしょん　初等平面幾何学』であるからである。

また、当時の産業革命以後のイギリス中等教育における幾何学教育についてや、なぜ幾何学教授法改良協会が設立されたのか、どのような活動を行ったのかなどについて考察することとした。

その中で、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、“中等数学教育の幾何学の教科書としてユークリッド『原論』をどのように改良しようとしたのか”について考察し、また、“教科書として何を大切にしたのか”について明らかにした。

第３に、明治初期の中等数学教育について考察し、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書』がどのようにして作られたのか、『初等幾何学教科書　平面幾何学』第二編（円）の内容と構造を考察することとした。

また、『初等幾何学教科書』と『あそしえーしょん　初等平面幾何学』について比較をするとともに、菊池が『初等幾何学教科書』を編纂するにあたってその主張の背景や注釈などをまとめた『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義』を読み解き、菊池の考えを検討することにより、“ユークリッド『原論』第Ⅲ巻がどのように受容されたのか”を明らかにした。

第１章

ユークリッド『原論』第Ⅲ巻の内容と構造

第１節　『原論』第Ⅲ巻の内容

ユークリッドについては、その生地も生没年も知られていない。プロクロスの『註釈』（「プロロゴスⅡ」）には、ユークリッドはプトレマイオス一世の治世（前317年ー前305年）に生き、プラトン派の人々よりは後代で、エラトステネスやアルキメデスよりは時代が早い、という記述が見られることから、彼は紀元前300年頃、アレクサンドリアで活動した数学者であったことがわかる。そして、『原論』という全13巻の書を編纂したということのほか、『光学』、『屈折光学』、『音楽原論』、『図形分割論』などの著書も著したようである。また、プトレマイオス一世から、

「『原論』を通してよりも、てっとり早く幾何学を学ぶ道はないのか？」

と聞かれて、「幾何学に王道はありません」と答えたという有名な伝承もプロクロスの証言（『註釈』「プロロゴスⅡ」）に由来している。

プロクロスの証言によれば、『原論』と称される書を初めて編んだのはキオスのヒッポクラテスであり、その後も、レオンやテウディオスによって『原論』が編纂されたようであるが、ユークリッドによる『原論』が出されるに至って、それ以前の『原論』はすべて失われ、残存していない。したがって、今日『原論』と言えば、それはユークリッドによるものを指すのである。

さて、この『原論』は定義、公準、公理に始まり、さまざまな定理を演繹的に導き出していくというスタイルをとっており、今日の数学の原型をなすものであると言ってもよい。そのため、『聖書』に次いで世界各国語に翻訳され、実に二千年以上にもわたって“数学の聖典”としての地位を占め続けたのであった。近代自然科学の金字塔とも言えるニュートンの有名な『自然哲学の数学的原理』（プリンキピア、1687年）などもこの『原論』を手本にして書かれたと言ってもよい。

全13巻に及ぶ『原論』の内容は多岐にわたっていて、平面幾何、幾何学的代数、比例論とその応用、数論、立体幾何、求積法、正多面体論に及んでいる。しかし、これらの内容が一人ユークリッドに帰せられるはずはなく、その多くがユークリッド以前になされた数学的探究の結果であることは疑いえない。つまり『原論』は紀元前600年頃からの約300年間にわたる数学的蓄積を整理し、１つの書として編纂したのだと考えられる。したがって、ユークリッドは独創的な数学者というよりは、有能な編纂者であったと言えよう。

本論文で扱う第Ⅲ巻は平面図形の１つである円とその性質に関する内容であり、「円論」とでも言うことができる。冒頭には11個の定義が置かれ、37個の命題群から構成されている。具体的には、円の中心と弦の関係、中心角と弧の関係、円の接線の諸性質、弓形に関する内容などが扱われている。また、円周角定理は命題20（同じ弧の上に立つ中心角は円周角の２倍）、命題21（同じ切片内の角は相等し）で証明されているし、内対角定理は命題22で、接弦定理は命題32で、方べきの定理は命題35でそれぞれ証明されている。この『原論』の内容を一覧表にすると下の表のようになる。

	第I巻	第II巻	第III巻	第IV巻	第V巻	第VI巻	第VII巻	第VIII巻	第IX巻	第X巻	第XI巻	第XII巻	第XIII巻
定義	23	2	11	7	18	4	23	0	0	第1群 4 第2群 6 第3群 6	28	0	0
公準	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
公理	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
命題	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18
内容概略	平面図形	平面図形（幾何学的代数）	平面図形（円論）	平面図形（内接・外接多角形）	一般比例論	比例理論の図形への応用	数論	数論	数論	無理量論	立体図形	求積論（取り尽くし法）	正多面体論
							無記号整数論						

以下に、『原論』第Ⅲ巻の定義及び命題とその証明を逐次見ていくことにする。

［定義］

1．等しい２円とは、その直径が等しいかまたはその半径が等しいものである。

2．円と会し、延長されて円を切らない直線は円に接するといわれる。

3．相会し、相交わらない円は相接するといわれる。

4．円において、弦は中心からそれらに下ろす垂線が等しいとき、中心から等距離にあるといわれる。

5．大きい垂線が下ろされる弦は、大きい距離にあるといわれる。

6．円の切片とは、弦と弧とにかこまれた図形である。

7．切片の角とは、弦と弧とにはさまれた角である。

8．切片内の角とは、切片の弧の上に１点がとられ、それから切片の底辺をなす弦の両端に線分が結ばれるとき、結ばれた２線分にはさまれた角である。

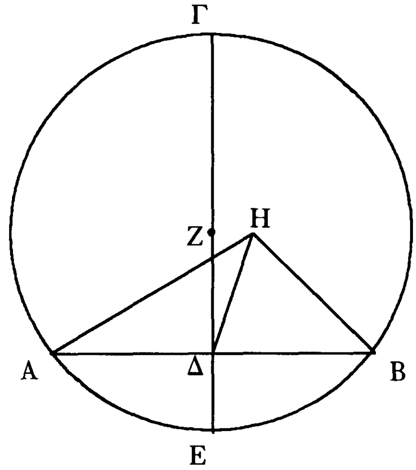
9．この切片内の角をはさむ２線分が弧を切り取るとき、角は弧の上に立つといわれる。

10. 円の扇形とは、円の中心において角がつくられるとき、角をはさむ２線分とそれによって切り取られる弧とにかこまれた図形である。

11. ２円の相似な切片とは等しい角を含むか、または、切片内の角が互いに等しいものである。

次に、命題とその証明を見てみよう。証明は現代的表記による。

命題Ⅲ－１



与えられた円の中心を見いだすこと。

与えられた円をＡＢΓとせよ。このとき 円ＡＢΓの中心を見いださなければならぬ。

円ＡＢΓをかく。（Ⅰ－公準３）
線分ＡＢをひく。（Ⅰ－公準１）
ＡΔ＝ＢΔ
となる点Δをとる。（Ⅰ－命題10）・・・①
ΔΓ⊥ＡＢとなるＡＢの垂線ΔΓをひく。（Ⅰ－命題11）
線分ΔΓを点Ｅまで延長する。（Ⅰ－公準２）
ΓＺ＝ＥＺとなる点Ｚをとる。（Ⅰ－命題10）
点Ｚは円ＡＢΓの中心である。

【証明】・・・背理法による

もし、点Ｚではなく点Ｈを円ＡＢΓの中心とする。
そして、ＨＡ、ＨΔ、ＨＢを結ぶと（Ⅰ－公準１）
ＡΔ＝ＢΔ・・・①より
ΔＨは共通（Ⅰ－公理７）
底辺ＨＡ＝底辺ＨＢ（Ⅰ－定義15）
∠ＡΔＨ＝∠ＨΔＢ（Ⅰ－命題８）
∠ＡΔＨ＝∠ＨΔＢ＝90°（Ⅰ－定義10）
一方、∠ＺΔＢ＝90°
したがって　∠ＺΔＢ＝∠ＨΔＢ
大きいもの（∠ＺΔＢ）が小さいもの（∠ＨΔＢ）に等しい。これは矛盾である。
したがって、点Ｈは円ＡＢΓの中心ではない。
同様にして、点Ｚ以外のいかなる点も円ＡＢΓの中心でない。
よって、点Ｚは円ＡＢΓの中心である。

系

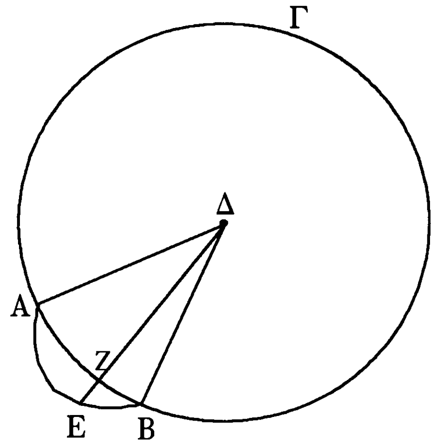
もし、円において直線（弦）が直線（弦）を直角に２等分するならば、円の中心は２等分線上にある。

Q．E．F．

命題Ⅲ－２

もし、円周上に任意の２点がとられるならば２点を結ぶ線分は円の内部におちるであろう。

ＡＢΓを円とし、円周上に任意の２点Ａ、Ｂがとられたとせよ。Ａ、Ｂ、を結ぶ線分は円の内部におちるであろうと主張する。



【証明】・・・背理法による

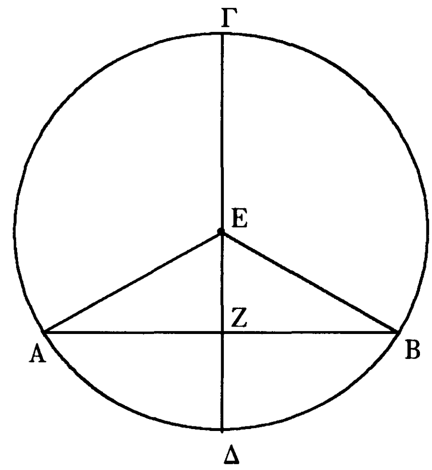
Ａ、Ｂを結ぶ線分が円の内部ではなく、円の外部におちるとし、
線分ＡＥＢを円の外部にとる。（Ｉ－公準１）
円ＡＢΓの中心Δをとる。（Ⅲ－命題１）
ΔＡ、ΔＢを結ぶ。（Ｉ－公準１）
ΔＺＥをひく。（Ｉ－公準１）
ΔＡ＝ΔＢ（Ｉ－定義15）
∠ΔＡＥ＝∠ΔＢＥ（Ｉ－命題５）・・・①
∠ΔＥＢ＞∠ΔＡＥ（Ｉ－命題16）・・・②
ゆえに
∠ΔＥＢ＞∠ΔＢＥ（①②より　Ｉ－公理１）
よって
ΔＢ＞ΔＥ（Ｉ－命題19）・・・③
一方
ΔＢ＝ΔＺ（Ｉ－定義15）・・・④
したがって
ΔＺ＞ΔＥ（③④より　Ｉ－公理１）
小さいもの（ΔＺ）がおおきいもの（ΔＥ）より大きいということになり矛盾である。
ゆえに
ＡＢを結ぶ線分は円の外部におちない。
同様にして
円周そのものの上にもおちない。
したがって、円の内部におちる。

よって、もし円周上に任意の２点がとられるならば、２点を結ぶ線分は円の内部におちるであろう。

命題Ⅲ－３

もし、円において中心を通る線分が中心を通らない弦を２等分するならば、それをまた直角に切る。そしてもし、直角に切るならば、それをまた２等分する。

ＡＢΓを円とし、それにおいて中心を通る線分ΓΔが中心を通らない弦ＡＢを点Ｚにおいて２等分するとせよ。
それをまた直角に切ると主張する。



【証明】

円ＡＢΓをかく。（Ⅰ－公準３）
中心Ｅを通る（Ⅲ－命題１）線分ΓΔをひく。（Ⅰ－公準１）
またＥＡ、ＥＢ、ＡＢを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
ΓΔとＡＢの交点をＺとし、今、ＡＺ＝ＢＺ（Ⅰ－命題10）・・・①　とすると
ＡＺ＝ＢＺ（①より）
ＺＥは共通（Ⅰ－公理７）
ＥＡ＝ＥＢ（Ⅰ－定義15）
ゆえに、∠ＡＺＥ＝∠ＢＺＥ（Ⅰ－命題８）
直線上に直線が立てられ接角を互いに等しくするので
∠ＡＺＥ＝∠ＢＺＥ＝90°（Ⅰ－定義10）
したがって、
中心を通るΓΔが中心を通らないＡＢを２等分するならば、それをまた直角に切る。

また、ΓΔがＡＢを直角に切るとせよ。　それをまた２等分する
すなわちＡＺはＺＢに等しいと主張する。

【証明】

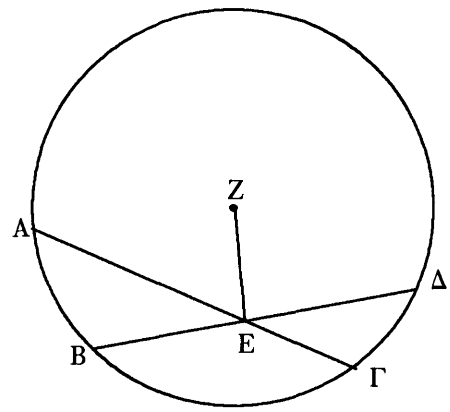
もし、∠ＡＺＥ＝∠ＢＺＥ＝90°とすると
ＥＡ＝ＥＢ（Ⅰ－定義15）
∠ＥＡＺ＝∠ＥＢＺ（Ⅰ－命題５）
ゆえに、ＡＺ＝ＢＺ（Ⅰ－命題26）
したがって、ΓΔがＡＢを直角に切るならば、それを２等分する。

よって、もし円において中心を通る弦が中心を通らない弦を２等分するならば、それをまた直角に切る。そして、もし直角に切るならば、それをまた２等分する。

命題Ⅲ－４

もし、円において中心を通らない弦が互いに交わるならば、互いに２等分しない。

ＡＢΓΔを円とし、それにおいて中心を通らない二つの弦ＡΓ、ＢΔがＥにおいて互いに交わるとせよ。 それらは互いに２等分しないと主張する。



【証明】・・・背理法による

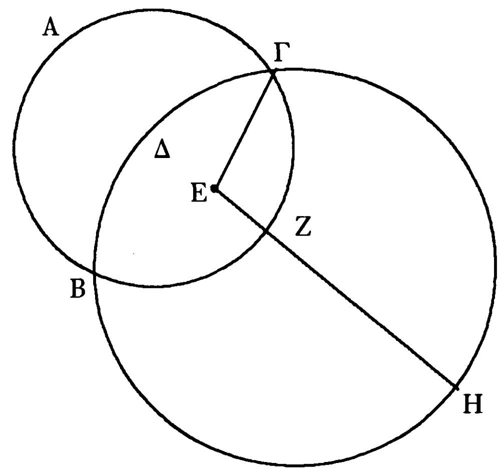
円ＡＢΓΔをかく。（Ⅰ－公準３）
弦ＡΓ、ＢΔをひく。（Ⅰ－公準１）
点Ｅを互いに交わる点とせよ。
仮に
ＡＥ＝ＥΓ
ＢＥ＝ＥΔ
とする。（Ⅰ－命題10）
円ＡＢΓΔの中心を点Ｚとし（Ⅲ－命題１）、ＺＥを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
中心を通る線分ＺＥが中心を通らない弦ＡΓを２等分するから
∠ＺＥＡ＝∠ＺＥΓ＝90°　（Ⅲ－命題３）・・・①
同様に
∠ＺＥＢ＝∠ＺＥΔ＝90°　（Ⅲ－命題３）・・・②
すなわち
∠ＺＥＡ＝∠ＺＥＢ＝90°　（①②より　Ⅰ－公理１　Ⅰ－公準４）
小さいもの（∠ＺＥＡ）が大きいもの（∠ＺＥＢ）に等しい。これは矛盾である。
ゆえに
ＡΓ、ＢΔは互いに２等分しない。

よって、もし円において中心を通らない二つの弦が互いに交わるならば、
互いに２等分しない。

命題Ⅲ－５

もし、二つの円が互いに交わるならば
それらは同じ中心をもたないであろう。

２円ＡＢΓ、ΓΔＨが点Ｂ、Γにおいて互いに交わるとせよ。それらは同じ中心をもたないであろうと主張する。



【証明】・・・背理法による

円ＡＢΓ、ΓΔＨをかく。（Ⅰ－公準３）
交点をＢ、Γとする。

今、仮に同じ中心をＥとする。（Ⅲ－命題１）
線分ＥΓ、ＥＨをひき（Ⅰ－公準１）、ＥＨと円ＡＢΓの交点をＺとする。

すると、
ＥΓ＝ＥＺ（Ⅰ－定義15　点Ｅは円ＡＢΓの中心）・・・①
一方　ＥΓ＝ＥＨ（Ⅰ－定義15　点Ｅは円ΓΔＨの中心）・・・②

①②よりＥＺ＝ＥＨ（Ⅰ－公理１）

すなわち
小さいもの（ＥＺ）が大きいもの（ＥＨ）に等しい。
これは矛盾である。

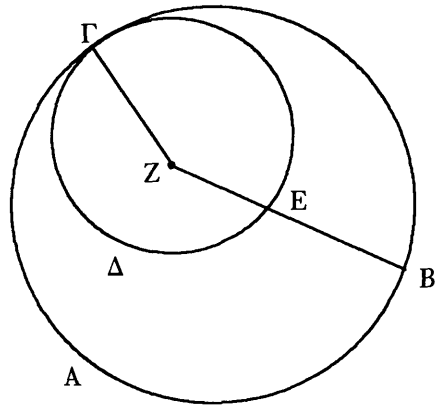
ゆえに
点Ｅは円ＡＢΓ、ΓΔＨの中心ではない。
つまり、それらは同じ中心をもたない。

よって、もし二つの円が互いに交わるならば、それらは同じ中心をもたない。

命題Ⅲ－６

もし、二つの円が互いに接するならばそれらは同じ中心をもたないであろう。

２円ＡＢΓ、ΓΔＥが点Γにおいて互いに接するとせよ。それらは同じ中心をもたないであろうと主張する。



【証明】・・・背理法による

円ＡＢΓ、ΓΔＥをかく。（Ｉ－公準３）

今、仮に同じ円の中心をＺとする。（Ⅲ－命題１）
線分ＺΓ、ＺＢをひき（Ｉ－公準１）、ＺＢと円ΓΔＥの交点をＥとする。

すると、
ＺΓ＝ＺＢ（Ｉ－定義15　点Ｚは円ＡＢΓの中心）・・・①
ＺΓ＝ＺＥ（Ｉ－定義15　点Ｚは円ΓΔＥの中心）・・・②

①②よりＺＢ＝ＺＥ（Ｉ－公理１）

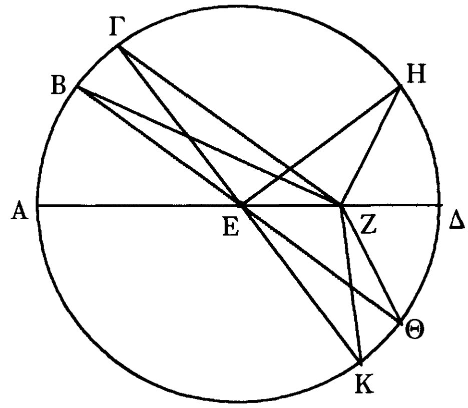
すなわち
小さいもの（ＺＥ）が大きいもの（ＺＢ）に等しい。
これは矛盾である。

ゆえに
点Ｚは円ＡＢΓ、ΓΔＥの中心ではない。

よって、もし二つの円が互いに接するならばそれらは同じ中心をもたないであろう。

命題Ⅲ－７

もし、円の直径上に円の中心でない１点がとられ、その点から円周に線分がひかれるならば、中心がその上にあるものが最も大きく、この直径の残りが最も小さく、他の線分のうち中心を通る線分に近いものが遠いものよりも常に大きく、そしてその点から円周へただ二つの等しい線分が最も小さい線分の両側にひかれるであろう。



ＡＢΓΔを円、ＡΔをその直径とし、ＡΔ上に円の中心でない点Ｚがとられ、円の中心をＥとし、Ｚから円ＡＢΓΔに線分ＺＢ、ＺΓ、ＺＨがひかれたとせよ。ＺＡが最も大きく、ＺΔが最も小さく、他の線分のうちＺＢはＺΓよりＺΓはＺＨより大きいと主張する。

【証明】

円ＡＢΓΔをかく。（Ｉ－公準３）　ＡΔを結び、円の直径とする。（Ｉ－公準１）
点Ｅを円の中心とする。（Ⅲ－命題１）ＡΔ上に円の中心でない点Ｚをとる。
そして、点Ｚから円ＡＢΓΔに線分ＺＢ、ＺΓ、ＺＨをひく。（Ｉ－公準１）
また、線分ＢＥ、ΓＥ、ＨＥをひく。（Ｉ－公準１）

すべての三角形において、２辺の和は残りの１辺より大きいので、
ＥＢ＋ＥＺ＞ＢＺ（Ｉ－命題20）・・・①
一方、ＡＥ＝ＢＥ（Ｉ－定義15）・・・②
①②より、
ＡＥ＋ＥＺ＞ＢＺ（Ｉ－公理１）
ＡＥ＋ＥＺ＝ＡＺだから、ＡＺ＞ＢＺ・・・③
また、ＢＥ＝ΓＥ（Ｉ－定義15）
ＺＥは共通
２辺ＢＥ、ＥＺは２辺ΓＥ、ＥＺに等しく・・・④
∠ＢＥＺ＞∠ΓＥＺ（Ｉ－公理８）・・・⑤
④⑤より
底辺ＢＺ＞底辺ΓＺ（Ｉ－命題24）・・・⑥
同様に、ΓＺ＞ＺＨ・・・⑦
また、ＨＺ＋ＺＥ＞ＥＨ（Ｉ－命題20）・・・⑧
ＥＨ＝ＥΔ（Ｉ－定義15）・・・⑨

⑧⑨より、

ＨＺ＋ＺＥ＞ＥΔ（Ｉ－公理１）

両辺からＥＺをひくと、ＨＺ＞ＺΔ（Ｉ－公理３）・・・⑩

③⑥⑦⑩より、

ＡＺ＞ＢＺ＞ΓＺ＞ＺＨ＞ＺΔ

ゆえに、ＡＺが最も大きく、ＺΔが最も小さい。

また、点Ｚから円ＡＢΓΔにただ二つの等しい線分が最も小さい線分ＺΔの両側にひかれるであろうと主張する。

線分ＥＺ上に、∠ＨＥＺ＝∠ＺＥΘとなる点Θを円周にとる。（Ｉ－命題23）

そして、ＺΘを結ぶ。（Ｉ－公準１）

ＨＥ＝ＥΘ（Ｉ－定義15）

ＥＺは共通だから

２辺ＨＥ、ＥＺは２辺ΘＥ、ＥＺに等しい。

そして、

∠ＨＥＺ＝∠ΘＥＺ

ゆえに、底辺ＺＨ＝底辺ＺΘ（Ｉ－命題４）

点Ｚから円周にＺＨに等しい他のいかなる線分もひかれないだろうと主張する。

仮にＺＨ＝ＺＫとなる線分ＺＫがひかれたとすると（Ｉ－公準１）、

ＺＫ＝ＺＨ

一方

ＺΘ＝ＺＨ

ゆえに

ＺＫ＝ＺΘ（Ｉ－公理１）

すなわち、中心を通る線分に近いものが遠いものに等しい。

これは矛盾である。

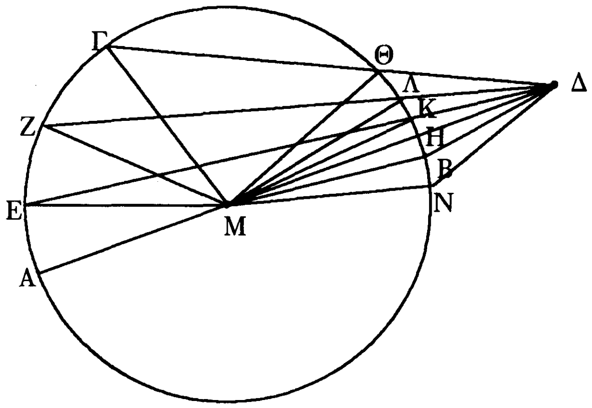
ゆえに、点Ｚから円周ＨＺに等しい他のいかなる線分もひかれないであろう。

したがって、ただ一つである。

よって、もし円の直径上に円の中心でない1点がとられ、その点から円周に線分がひかれるならば、中心がその上にあるものが最も大きく、この直径の残りが最も小さく、他の線分のうち中心を通る線分に近いものが遠いものよりも常に大きく、そしてその点から円周にただ二つの等しい線分が最も小さい線分の両側にひかれるであろう。

命題Ⅲ－８

もし円の外部に１点がとられ、その点から 円周にいくつかの線分がひかれ、そのうち 一つは中心を通り他は任意であるとすれば、 凹形の弧にひかれた線分のうち中心を通るものは最も大きく、他の線分のうち中心を通るものに近いものは遠いものより常に大きい、他方凸形の弧にひかれた線分うち、その点と直径との間のものが最も小さく、他の線分のうち最も小さいものに近いものは遠いものより常に小さく、そして、その点から円周にただ二つの等しい線分が最も小さい線分の両側にひかれるであろう。



ＡＢΓを円とし、円ＡＢΓの外部に点Δがとられ、それから線分ΔＡ、ΔＥ、ΔＺ、ΔΓがひかれ、ΔＡは中心を通るとせよ。凹形の弧ＡＥＺΓにひかれた線分のうち中心を通るΔＡが最も大きく、ΔＥはΔＺより、ΔＺはΔΓより大きく、他方凸形の弧ΘΛＫＨにひかれた線分のうちその点と直径ＡＨとの間のΔＨが最も小さく、最も小さい線分ΔＨに近いものが遠いものより常に小さい、すなわち、ΔＫはΔΛより、ΔΛはΔΘより小さいと主張する。

【証明】

円ＡＢΓをかく。（Ⅰ－公準３）
円の中心をＭとする。（Ⅲ－命題１）
円周上に、点Ａ、Ｅ、Ｚ、Γを図のようにとり、円ＡＢΓの外部に点Δをとる。
但し、ΔＡは円の中心Ｍを通るとする。
線分ΔＡ、ΔＥ、ΔＺ、ΔΓと凸形の弧との交点を点Ｈ、Ｋ、Λ、Θとする。
今、ＭＥ、ＭＺ、ＭΓ、ＭＫ、ＭΛ、ＭΘが結ばれたとすると（Ⅰ－公準１）、
ＡＭ＝ＥＭ（Ⅰ－定義15）
双方にＭΔを加えＡＭ＋ＭΔ＝ＥＭ＋ＭΔ
ＡＭ＋ＭΔ＝ＡΔだから、ＡΔ＝ＥＭ＋ＭΔ
ところが、
ＥＭ＋ＭΔ＞ＥΔ（Ⅰ－命題20）
ゆえに、ＡΔ＞ＥΔ・・・①

また、ＭＥ＝ＭＺ（Ｉ－定義15）
ＭΔは共通
ＥＭ＋ＭΔ＝ＺＭ＋ＭΔ・・・②
∠ＥＭΔ＞∠ＺＭΔ（Ｉ－公理８）・・・③
②③より、
底辺ＥΔ＞底辺ＺΔ（Ｉ－命題24）・・・④
同様にして、ＺΔ＞ΓΔ・・・⑤
ゆえに、①④⑤より、
ΔＡ＞ΔＥ＞ΔＺ＞ΔΓ
すなわち、ΔＡは最も大きく、ΔＥはΔＺよりΔＺはΔΓより大きい。

次に、ＭＫ＋ＫΔ＞ＭΔ（Ｉ－命題20）
ＭＫ＋ＫΔ＞ＭＨ＋ＨΔ（ＭΔ＝ＭＨ＋ＨΔより）
ＭＨ＝ＭＫ（Ｉ－定義15）
だから、
ＫΔ＞ＨΔ・・・⑥
三角形ＭΛΔの辺の一つＭΔの上に三角形の内部で交わる２線分ＭＫ、ＫΔがつくられたから、
ＭＫ＋ＫΔ＜ＭΛ＋ΛΔ（Ｉ－命題21）
ところが、
ＭＫ＝ＭΛ（Ｉ－定義15）
ゆえに、
ΔＫ＜ΔΛ・・・⑦
同様にして、ΔΛ＜ΔΘ・・・⑧
したがって、⑥⑦⑧より
ΔＨ＜ΔＫ＜ΔΛ＜ΔΘ
すなわち、ΔＨは最も小さく、ΔＫはΔΛよりΔΛはΔΘより小さい。

また、点Δから円周にただ二つの等しい線分が最も小さい線分ΔＨの両側にひかれるであろうと主張する。

線分ＭΔ上に、その上の点Ｍにおいて、
角ＫＭΔに等しい角ΔＭＢがつくられ（Ｉ－命題23）・・・⑨
ΔＢが結ばれたとすると（Ｉ－公準１）、
ＭＫ＝ＭＢ（Ｉ－定義15）
ＭΔは共通
∠ＫＭΔ＝∠ＢＭΔ（⑨より）
だから、底辺ΔＫ＝底辺ΔＢ（Ｉ－命題４）

点Δから円周にΔKに等しい他のいかなる線分もひかれないであろうと主張する

背理法による

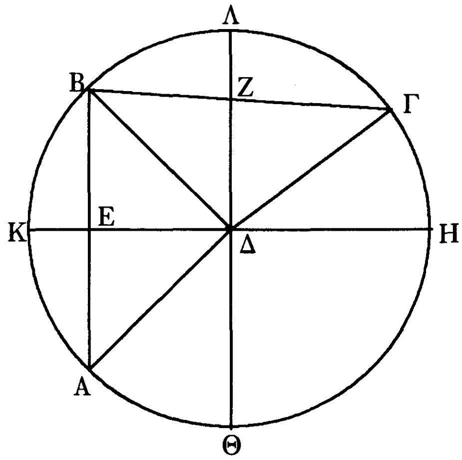
仮に、
ΔK＝ΔNとなるΔB以外の線分がひかれたとすると、
ΔK＝ΔN　ΔK＝ΔB
ゆえに、
ΔB＝ΔN
すなわち、最も近い線分（ΔH）に近いもの（ΔB）が遠いもの（ΔN）に等しい。
これは矛盾である。
それゆえ、点Δから円ABΓに最も小さいΔHの両側に二つより多い等しい線分はひかれないであろう。

よって、もし円の外部に1点がとられ、その点から円周にいくつかの線分がひかれ、そのうち一つは中心を通り他は任意であるとすれば、凹形の弧にひかれた線分のうち中心を通るものは最も大きく、他の線分のうち中心を通るものに近いものは遠いものより常に大きい、他方凸形の弧にひかれた線分のうちその点と直径との間のものが最も小さく、他の線分のうち、最も小さいものに近いものは遠いものより常に小さく、そしてその点から円周にただ二つの等しい線分が最も小さい線分の両側にひかれるであろう。

命題Ⅲ－９

もし、円の内部に1点がとられ、その点から円に二つより多い等しい線分がひかれるならば、とられた点は円の中心である。

ＡＢΓを円、Δをその内部の点とし、Δから円ＡＢΓに二つより多い等しい線分ΔＡ、ΔＢΔΓがひかれたとせよ。点Δは円ＡＢΓの中心であると主張する。



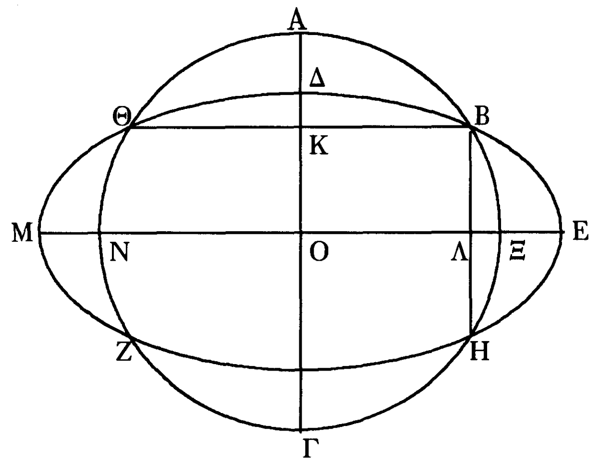
【証明】

円ＡＢΓをかく。（Ｉ－公準３）
その内部に点Δをとり、
Δから円ＡＢΓに二つより多い等しい線分ΔＡ、ΔＢ、ΔΓをひく。（Ｉ－公準１）
また、ＡＢ、ＢΓを結び（Ｉ－公準１）、
ＡＢ、ＢΓをそれぞれ２等分する。
点Ｅ、Ｚをとる。（Ｉ－命題10）・・・①
ＥΔ、ＺΔを結び（Ｉ－公準１）、
それぞれを延長し円との交点を点Ｈ、Ｋ、Θ、Λとする。（Ｉ－公準２）
すると
ＡＥ＝ＥＢ（①より）・・・②
ＥΔは共通・・・③
ΔＡ＝ΔＢ（Ｉ－定義15）・・・④
②③④より、
三角形ＡＥΔ≡三角形ＢＥΔ（Ｉ－命題８）
だから、∠ＡＥΔ＝∠ＢＥΔ＝90°（Ｉ－定義10）
したがって、ＨＫはＡＢを直角に２等分する。
もし円において直線が直線を直角に２等分するならば円の中心は分割する直線上にあるから（Ⅲ－命題１　系）、円の中心はＨＫの上にある。
同様に、円ＡＢΓの中心はΘΛの上にもある。
そして、弦ＨＫ、ΘΛは点Δ以外の点を共有しないので、
点Δは円ＡＢΓの中心である。

よって、もし円の内部に一点がとられ、その点から円に二つより多い等しい線分がひかれるならば、とられた点は円の中心である。

命題Ⅲ－１０

円は円と二つより多くの点で交わらない。



【証明】・・・背理法による

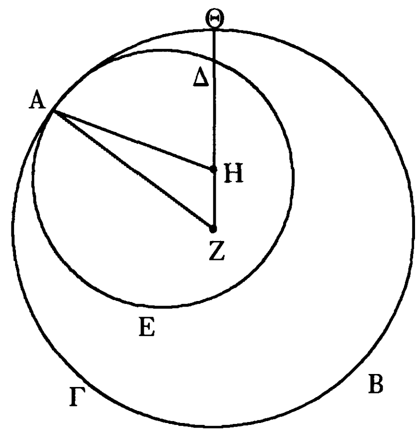
もし、可能ならば円ＡＢΓ、円ΔＥＺと二つより多くの点Ｂ、Ｈ、Ｚ、Θで交わるとし、図のようにかく。（Ｉ－公準３）
ＢΘ、ＢＨを結び（Ｉ－公準１）、
点Ｋ、Λで２等分されたとする。（Ｉ－命題10）
そして、
Ｋ、ΛからＢΘ、ＢＨに直角にＫΓ、ΛＭをひく。（Ｉ－命題11）
そして、
点Ａ、Ｅまで延長する。（Ｉ－公準２）
（円ＡＢΓ、円ΔＥＺまで延長して交わった点をＡ、Ｅとする。）
すると、
円ＡＢΓにおいて弦ＡΓが弦ＢΘを直角に２等分するから、
円ＡＢΓの中心はＡΓ上にある。（Ⅲ－命題１　系）
また、
同じ円ＡＢΓにおいて弦ＮΞが弦ＢＨを直角に２等分するから、
円ＡＢΓの中心はＮΞ上にある。（Ⅲ－命題１　系）
しかも、弦ＡΓ、ＮΞはＯ以外のいかなる点でも交わらない。
ゆえに、
点Ｏは円ＡＢΓの中心である。
同様にして、
点Ｏは円ΔＥＺの中心でもある。
すなわち、
互いに交わる二つの円ＡＢΓ、ΔＥＺが同じ中心をもつ。
これは、Ⅲ－命題５に矛盾である。

よって、円は円と二つより多くの点で交わらない。

命題Ⅲ－１１

もし、二つの円が内側で互いに接し、それらの中心がとられるならば、それらの中心を結ぶ線分は延長されて円の接点におちるであろう。

２円ＡＢΓ、ＡΔＥが内側で点Ａにおいて接するとし、円ＡＢΓの中心Ｚと円ＡΔＥの中心Ｈとがとられたとせよ。Ｈ、Ｚを結ぶ線分は延長されてＡにおちるであろうと主張する。



【証明】・・・背理法による

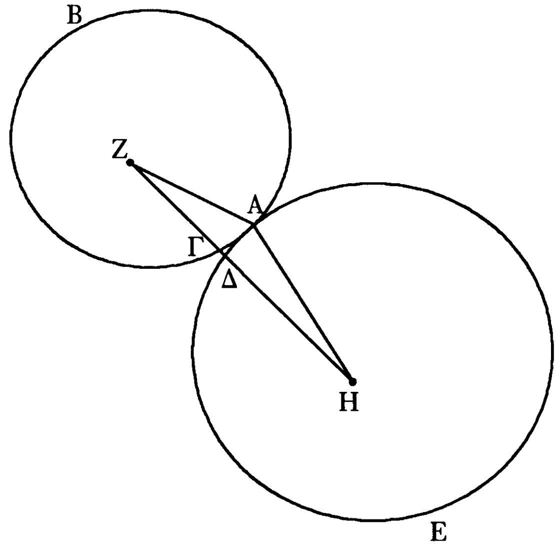
内側で互いに接する２円ＡＢΓ、ＡΔＥをかく。（Ｉ－公準３）
点Ａを接点とする。
円ＡＢΓの中心をＺ、円ＡΔＥの中心をＨとする。（Ⅲ－命題１　Ⅲ－命題６）
中心Ｈ、Ｚを結ぶ線分をとり（Ｉ－公準１）、
延長して円ＡΔＥ、円ＡＢΓとの交点をΔ、Θとする。（Ｉ－公準２）
また、ＡＺ、ＡＨを結ぶ。（Ｉ－公準１）
ＡＨ＋ＨＺ＞ＺＡ（Ｉ－命題20）
ＺＡ＝ＺΘ（Ｉ－定義15）
だから、ＡＨ＋ＨＺ＞ＺΘ
つまり、ＡＨ＋ＨＺ＞ＺＨ＋ＨΘ
双方よりＺＨをひくとＡＨ＞ＨΘ・・・①
ところが、
ＡＨ＝ＨΔ（Ｉ－定義15）・・・②
ゆえに、①②より、
ＨΔ＞ＨΘ
すなわち、小さいもの（ＨΔ）が大きいもの（ＨΘ）より大きい。
これは矛盾である。
したがって、Ｚ、Θを結ぶ線分は外部におちないであろう。
ゆえにＡにおいて接点におちるであろう。

よって、もし二つの円が内側で互いに接し、それらの中心がとられるならば、それらの中心を結ぶ線分は延長されて円の接点におちるであろう。

命題Ⅲ－１２

もし、二つの円が外側で互いに接するならば、それらの中心を結ぶ線分は接点を通るであろう。

２円ＡＢΓ、ＡΔＥが外側で点Ａにおいて互いに接するとし、ＡＢΓの中心Ｚ、ＡΔＥの中心Ｈがとられたとせよ。Ｚ、Ｈを結ぶ線分はＡにおける接点を通るであろうと主張する。



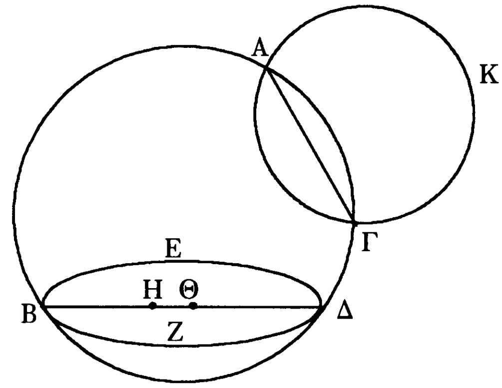
【証明】・・・背理法による

外側で点Ａにおいて互いに接する２円ＡＢΓ、ＡΔＥをかく。（Ｉ－公準３）
円ＡＢΓ、ＡΔＥの中心をＺ、Ｈとする。（Ⅲ－命題１　Ⅲ－命題６）
もし、可能ならばＺΓΔＨのように、中心Ｚ、Ｈを結ぶ線分がひけたとし、
ＡＺ、ＡＨが結ばれたとする。（Ｉ－公準１）
すると
ＺＡ＝ＺΓ（Ｉ－定義15）・・・①
同様に
ＨＡ＝ＨΔ（Ｉ－定義15）・・・②
①②より
ＺＡ＋ＡＨ＝ＺΓ＋ＨΔ（Ｉ－公理２）・・・③
一方
ＺΓ＋ＨΔ＜ＺＨ（Ｉ－公理８）・・・④
③④より
ＺＡ＋ＡＨ＜ＺＨ・・・⑤
ところが、
ＺＡ＋ＡＨ＞ＺＨ（Ｉ－命題20）・・・⑥
⑤⑥は矛盾である。
したがって、Ｚ、Ｈを結ぶ線分は点Ａにおける接点を通らないことはないだろう。
すなわち、接点を通るであろう。

よって、もし二つの円が外側で互いに接するならば、それらの中心を結ぶ線分は接点を通るであろう。

命題Ⅲ－１３

円は円と、内側で接するにせよ外側で接するにせよ、一つより多くの点においては、接しない。

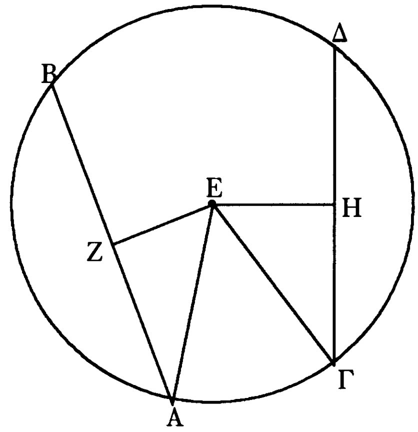


【証明】・・・背理法による

仮に、点Δ、点Bで内側に接する円ＡＢΓΔ
と円ＥＢＺΔがけたとし（Ｉ－公準３）、その中心をＨ、Θとする。
（Ⅲ－命題１　Ⅲ－命題６）
ＨΘを結び（Ｉ－公準１）、延長すると（Ｉ－公準２）その線分ＨΘは接点Ｂ、Δにおちる。（Ⅲ－命題11）
点Ｈは円ＡＢΓΔの中心より
ＢＨ＝ＨΔ（Ｉ－定義15）・・・①
また、ＨΔ＞ΘΔ（Ｉ－公理８）・・・②
①②より、ＢＨ＞ΘΔ・・・③
一方、ＢΘ＞ＢＨ（Ｉ－公理８）・・・④
③④より、ＢΘ＞ΘΔ・・・⑤
しかし、点Θは円ＥＢＺΔの中心でもあるので
ＢΘ＝ΘΔ（Ｉ－定義15）・・・⑥
⑤⑥は矛盾である。
したがって、接点はただ一つである。
すなわち円は円と内側で一つより多くの点で接することはない。
次に
２点Ａ、Γで外側に接する円ＡΓＫと円ＡＢΓΔがかけたとし（Ｉ－公準３）、
Ａ、Γが結ばれたとする。（Ｉ－公準１）
そうすれば、円ＡＢΓΔ、ＡΓＫの双方の円周上に任意の２点Ａ、Γがとられたから２点を結ぶ線分は双方の内部におちるであろう。（Ⅲ－命題２）
ところが、Ⅲ－定義３より、これは矛盾である。
（ＡΓは円ＡＢΓΔの内部におちるとＡΓＫの外部におちる。）
したがって、円は円と外側で一つより多くの点では接しない。
すなわち、円は円と内側で接するにせよ外側で接するにせよ一つより多くの点においては接しない。

よって、円は円と内側で接するにせよ外側で接するにせよ一つより多くの点においては接しない。

命題Ⅲ－１４



円において、等しい弦は中心から等距離にあり、中心から等距離にある弦はまた互いに等しい。

ＡＢΓΔを円、ＡＢ、ΓΔをそれにおける等しい弦とせよ。ＡＢ、ΓΔは中心から等距離にあると主張する。

【証明】

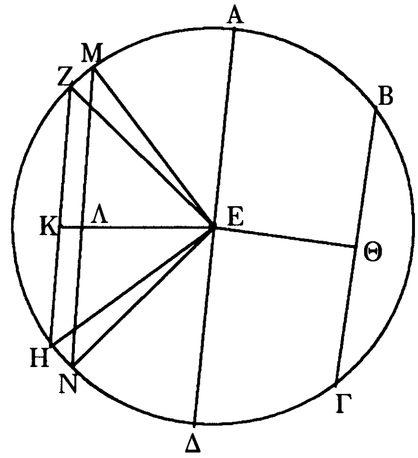
円ＡＢΓΔをかく。（Ｉ－公準３）
ＡＢ＝ΓΔとなる弦ＡＢ、ΓΔをひく。（Ｉ－命題２）・・・①
円ＡＢΓΔの中心Ｅをとり（Ⅲ－命題１）、
ＥからＡＢ、ΓΔに垂線ＥＺ、ＥＨをひく。（Ｉ－命題12）
ＥＡとＥΓを結ぶ（Ｉ－公準１）
Ⅲ－命題３より、
中心を通る線分ＥＺが中心を通らない線分ＡＢを直角に切るので、
それをまた２等分するといえる。
ゆえに、ＡＺ＝ＺＢ　　ＡＢ＝２ＡＺ
同じ理由で、ΓΔ＝２ΓＨ
①より、ＡＢ＝ΓΔ　だから
２ＡＺ＝２ΓＨ（Ｉ－公理１）
ＡＺ＝ΓＨ（Ｉ－公理６）・・・②
また、ＡＥ＝ＥΓ（Ｉ－定義15）・・・③
だから
ＡＥ上の正方形＝ＥΓ上の正方形（Ｉ－命題46）・・・④
ところが
∠ＥＺＡ＝90°より
ＡＺ上の正方形＋ＥＺ上の正方形＝ＡＥ上の正方形（Ｉ－命題47）・・・⑤
同様に
∠ＥＨΓ＝90°より
ΓＨ上の正方形＋ＥＨ上の正方形＝ＥΓ上の正方形（Ｉ－命題47）・・・⑥
④⑤⑥より
ＡＺ上の正方形＋ＥＺ上の正方形＝ΓＨ上の正方形＋ＥＨ上の正方形
また②より
ＡＺ＝ΓＨだから
ＡＺ上の正方形＝ΓＨ上の正方形（Ｉ－命題46）

双方からひくと
ＥＺ上の正方形＝ＥＨ上の正方形（Ｉ－公理３）
したがって
ＥＺ＝ＥＨ（Ｉ－公理７）
Ⅲ－定義４より、
円において弦ＡＢ、ΓΔは中心からひかれた垂線ＥＺ、ＥＨが等しいので、ＡＢ、ΓΔは中心から等距離にあるといえる。

次に
弦ＡＢ、ΓΔが中心から等距離にあるとすると（ＥＺ＝ＥＨとすると）・・・⑦
同じ作図がなされて
Ⅲ－命題３より、
中心を通る弦ＥＺは中心を通らない線分ＡＢを直角に切るので、
ＡＺ＝ＺＢ　　ＡＢ＝２ＡＺ・・・⑧
同様に
ΓΔ＝２ΓＨ・・・⑨
そして
ＡＥ＝ΓＥ（Ｉ－定義15）だから
ＡＥ上の正方形＝ΓＥ上の正方形（Ｉ－命題46)・・・⑩
ところが
ＥＺ上の正方形＋ＺＡ上の正方形＝ＡＥ上の正方形（Ｉ－命題47)・・・⑪
ＥＨ上の正方形＋ＨΓ上の正方形＝ΓＥ上の正方形（Ｉ－命題47)・・・⑫
⑩⑪⑫より
ＥＺ上の正方形＋ＺＡ上の正方形＝ＥＨ上の正方形＋ＨΓ上の正方形
また⑦よりＥＺ＝ＥＨだから
ＥＺ上の正方形＝ＥＨ上の正方形（Ｉ－命題46)
双方からひくと
ＺＡ上の正方形＝ＨΓ上の正方形（Ｉ－公理３）
したがって
ＺＡ＝ＨΓ　２ＡＺ＝２ΓＨ（Ｉ－公理５）
⑧⑨より
ＡＢ＝ΓΔ（Ｉ－公理７）

よって、円において等しい弦は中心から等距離にあり、中心から等距離にある弦はまた互いに等しいといえる。

命題Ⅲ－１５



円において直径は最も大きく、他の弦のうち中心に近いものは遠いものより常に大きい。

ＡＢΓΔを円、ＡΔをその直径、Ｅを中心とし、ＢΓは直径ＡΔに近く、ＺＨは遠いとせよ。ＡΔは最も大きく、ＢΓはＺＨより大きいと主張する。

【証明】

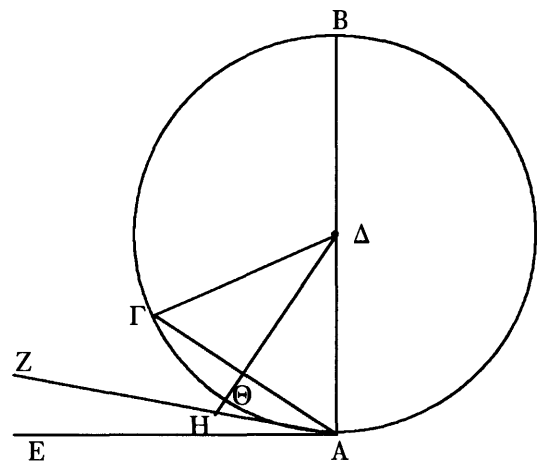
円ＡＢΓΔをかく。（Ｉ－公準３）
ＡΔを直径、点Ｅを中心とする。（Ⅲ－命題１）
今、図のように線分ＢΓ、ＺＨをひく。（Ｉ－公準１）
《今、ＢΓは直径ＡΔに近く、ＺＨは遠いとする。》
中心ＥからＢΓ、ＺＨに垂線ＥΘ、ＥＫをひく。（Ｉ－命題12）
ＢΓは中心に近く、ＺＨは遠いから、
ＥＫ＞ＥΘ（Ⅲ－定義５）
ＥΛ＝ＥΘ（Ｉ－命題２）とする点Λをとり、
Λを通りＥＫに直角にΛＭをひき（Ｉ－命題11）、
Ｎまで延長し（Ｉ－公準２）、ＭＥ、ＥＮ、ＺＥ、ＥＨを結ぶ。（Ｉ－公準１）
ＥΘ＝ＥΛよりＢΓ＝ＭＮ（Ⅲ－命題14）・・・①
ＡＥ＝ＥＭ（Ｉ－定義15）・・・②
ＥΔ＝ＥＮ（Ｉ－定義15）・・・③
②③より、ＡΔ＝ＡＥ＋ＥΔ＝ＭＥ＋ＥＮ（Ｉ－公理２）・・・④
ところが、ＭＥ＋ＥＮ＞ＭＮ（Ｉ－命題20）・・・⑤
①④⑤より、ＡΔ＞ＢΓ
また、ＭＥ＝ＺＥ（Ｉ－定義15）・・・⑥
ＥＮ＝ＥＨ（Ｉ－定義15）・・・⑦
∠ＭＥＮ＞∠ＺＥＨ（Ｉ－公理８）・・・⑧
⑥⑦⑧より、底辺ＭＮ＞底辺ＺＨ（Ｉ－命題24）
①より、ＭＮ＝ＢΓ
ゆえに、ＢΓ＞ＺＨ
したがって、ＡΔ＞ＢΓ＞ＺＨ

よって、円において直径は最も大きく、他の弦のうち中心に近いものは遠いものより常に大きい。

命題Ⅲ－１６

円の直径に、その端から直角にひかれた直線は、円の外部におちるであろうそして、この直線と弧との間に他の直線はひかれないであろう。また、半円の角はすべての鋭角の直線角より大きく、残りの角はすべての鋭角より小さい。

ＡＢΓをΔを中心とし、ＡＢを直径とする円とせよ。ＡＢに対してその端Ａから直角にひかれた直線は、円の外部におちるであろうと主張する



【証明】・・・背理法による

円ＡＢΓをかく。（Ｉ－公準３）
円ＡＢΓの中心をΔとし（Ⅲ－命題１）、
弦ＡＢを直径とする。（Ｉ－公準１）
点Ａから直角に直線ＥＡをひく。（Ｉ－命題11）・・・①
直線ＥＡが円の内部におちるとし（今、直線ＥＡを直線ΓＡとする）、
ΔΓを結ぶと（Ｉ－公準１）、
ΔＡ＝ΔΓ（Ｉ－定義15）
だから、∠ΔＡΓ＝∠ＡΓΔ（Ｉ－命題５）
ところが①より、∠ΔＡΓ＝90°
だから、∠ΔＡΓ＝∠ＡΓΔ＝90°
三角形ＡΓΔにおいて２角ΔＡΓ、ＡΓΔの和が２直角に等しい。
これは、Ｉ－命題17に矛盾である。
すなわち、点ＡからＢＡに直角にひかれた直線は円の内部におちない。
つまり、点Ａでのみ交わる。（接する。）
したがって、点ＡからＢＡに直角にひかれた直線は、円の外部におちる。

そこで、図のようにＡＥとなるようにする。
今、直線ＡＥと弧ΓΘＡとの間に直線ＺＡがひかれたと仮定し、
点ΔからＺＡに垂線ΔＨがひかれたとする。（Ｉ－命題12）・・・②
また、ΔＨと円ＡＢΓの交点をΘとする。
②より、∠ＡＨΔ＝90°・・・③

また、∠ΔＡＨ＜∠ΔＡＥ＝90° （Ⅰ－公理８）・・・④
③④より、∠ΔＡＨ＜∠ＡＨΔ（Ⅰ－公準４）
だから、ΔＡ＞ΔＨ（Ⅰ－命題19）・・・⑤
ところが、ΔＡ＝ΔΘ（Ⅰ－定義15）・・・⑥
⑤⑥より、ΔΘ＞ΔＨ
すなわち、小さいもの（ΔΘ）が大きいものより大きい。
これは、矛盾である。
ゆえに、直線と弧との間に他の直線はひかれないであろう。

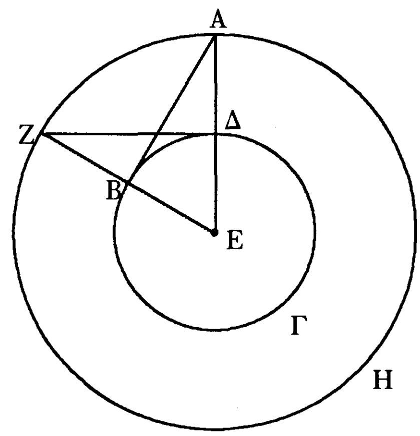
また、、もし、弦ＢＡと弧ΓΘＡとにはさまれた半円の角よりも大きい何らかの直線角と弧ΓΘＡと直線ＡＥとにはさまれた残りの角よりも小さい何らかの直線角とがあるならば、弧ΓΘＡと直線ＡＥとの間に直線がひかれるであろう。
ところが、かかる直線はひかれない。
それゆえ、弦ＢＡと弧ΓΘＡとにはさまれた角より大きい鋭角の直線角はないし、また、弧ΓΘＡと直線ＡＥとにはさまれた角よりも小さい角もない。

よって、半円の角はすべての鋭角の直線角より大きく、残りの角はすべての鋭角より小さい。

系
これから、次のことが明らかである。
すなわち、円の直径にその端から直角にひかれた直線は円に接する。

Ⅲ－定義２
円と会し延長されて円を切らない直線は円に接するといわれる。

命題Ⅲ－１７



与えられた点から与えられた円に接線をひくこと。

与えられた点をA、与えられた円をＢΓΔとせよ。このとき、点Aから円ＢΓΔに接線をひかなければならぬ。

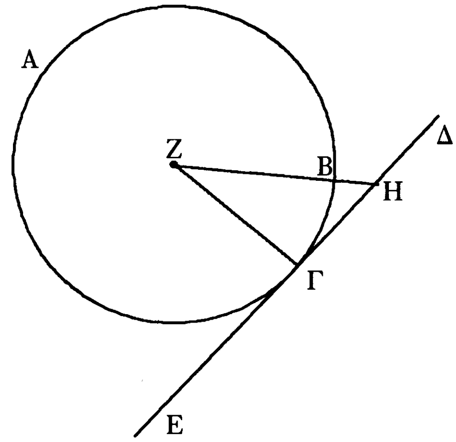
円ＢΓΔをかく。（Ⅰ－公準３）
円外に点Aをとり、また円の中心Eをとる。（Ⅲ－命題１）
ＡＥを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
点Eを中心としＥＡを半径として円ＡＺＨをかく。（Ⅰ－公準３）
ＡＥと円ＢΓΔとの交点をΔとし、
ΔからＥＡに直角にΔＺをひく。（Ⅰ－命題11）・・・①
（点Ｚは、円ＡＺＨとΔからＥＡに直角にひいた線分との交点とする。）
ＥＺ、ＡＢを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
（点Ｂは、ＺＥと円ＢΓΔの交点である。）

ＡＢが求める接線であると主張する。

【証明】

Eは円ＢΓΔ、ＡＺＨの中心だから
ＥＡ＝ＥＺ（Ⅰ－定義15）・・・②
ＥＢ＝ＥΔ（Ⅰ－定義15）・・・③
また、∠ＡＥＢ＝∠ＺＥΔ（Ⅰ－公理７）・・・④
②③④より、底辺ＡＢ＝底辺ＺΔ（Ⅰ－命題４）
三角形ΔＥＺ≡三角形ＥＢＡ（Ⅰ－命題４）
残りの角も残りの角に等しいので
∠ＥＺΔ＝∠ＥＡＢ
∠ＥΔＺ＝∠ＥＢＡ・・・⑤
ところが、①より、∠ＥΔＺ＝90°
だから、⑤より、∠ＥΔＺ＝∠ＥＢＡ＝90°
そして、ＥＢは円の半径であるので延長させると直径といえ、
円の直径にその端（点Ｂ）から直角（∠ＥＢＡ）にひかれた直線（ＡＢ）は円に接するといえる。（Ⅲ－命題16　系）
よって、ＡＢは円ＢΓΔに接する。　　　Q．E．F．

命題Ⅲ－１８



もし直線が円に接し、中心から接点に線分が結ばれるならば、結ばれた線分は接線に垂直であろう。

円ＡＢΓに直線ΔＥが点Γにおいて接するとし、円ＡＢΓの中心Ｚがとられ、ＺからΓにＺΓが結ばれたとせよ。ＺΓはΔＥに垂直であると主張する。

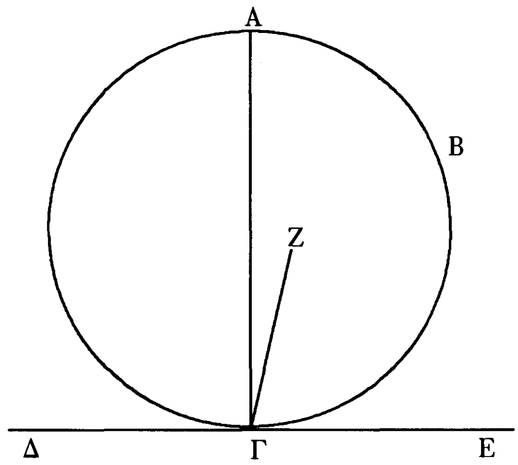
【証明】・・・背理法による

円ＡＢΓをかく。（Ｉ－公準３）
直線ΔＥが点Γにおいて円ＡＢΓに接するとし（Ⅲ－命題16）、
円ＡＢΓの中心Ｚをとり（Ⅲ－命題１）、
ＺΓを結ぶ。（Ｉ－公準１）
∠ＺΓΔ＝90°でないとし、
中心ＺからΔＥに垂線ＺＨをひくと（Ｉ－命題11）、
∠ＺＨΓ＝90°だから
∠ＺΓＨ＜90°（Ｉ－命題17）
三角形の大きい辺は大きい角に対するので、
ＺΓ＞ＺＨ（Ｉ－命題19）・・・①
ところが
ＺΓ＝ＺＢ（Ｉ－定義15）・・・②
ゆえに、①②より、
ＺＢ＞ＺＨ
すなわち、小さいもの（ＺＢ）が大きいもの（ＺＨ）より大きい。
これは、矛盾である。

したがって、∠ＺＨΓ＝90°ではなく、ＺＨはΔＨに垂直でない。

よって、もし直線が円に接し中心から接点に線分が結ばれるならば、結ばれた線分は接線に垂直であろう。

命題Ⅲ－１９



もし直線が円に接し、接点から接線に直角に直線がひかれるならば、円の中心はひかれた直線上にあるであろう。

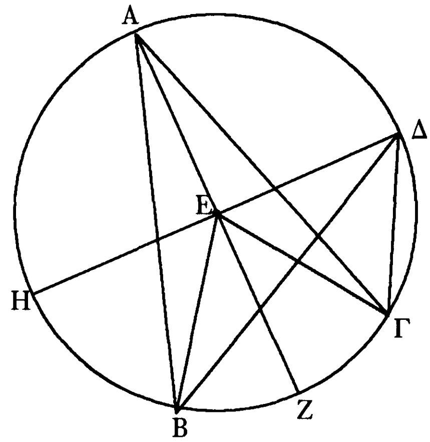
直線ΔＥが点Γにおいて円ＡＢΓに接するとし、ΓからΔＥに直角にΓＡがひかれたとせよ。円の中心はＡΓ上にあると主張する。

【証明】・・・背理法による

円ＡＢΓをかく。（Ｉ－公準３）
点Γにおいて、円ＡＢΓに接する直線ΔＥをひく。（Ⅲ－命題16）
点ΓからΔＥに直角にΓＡをひく。（Ｉ－命題11）・・・①
円の中心がＡΓ上にないとし、ＡΓ上以外に円の中心Ｚを考え（Ⅲ－命題１）、
ΓＺを結ぶ。（Ｉ－公準１）
Ⅲ－命題18より中心から接点ΓへＺΓが結ばれたので、
∠ＺΓＥ＝90°
ところが、①より
∠ＡΓＥ＝90°
ゆえに、
∠ＺΓＥ＝∠ＡΓＥ＝90°　（Ｉ－公準４）
すなわち、小さいもの（∠ＺΓＥ）が大きいもの（∠ＡΓＥ）に等しい。
これは、矛盾である。
したがって、点Ｚは円ＡＢΓの中心ではない。
同様にして、ＡΓ上以外のいかなる点もそうでないといえる。

よって、もし直線が円に接し、接点から接線に直角に直線がひかれるならば、
円の中心はひかれた直線上にあるであろう。

命題Ⅲ－２０



円において角が同じ弧を底辺とするとき、中心角は円周角の２倍である。

ＡＢΓを円とし、ＢＥΓをその中心角、ＢＡΓを円周角とし、それらが同じ弧ＢΓを底辺とするとせよ。角ＢＥΓは角ＢＡΓの２倍であると主張する。

【証明】

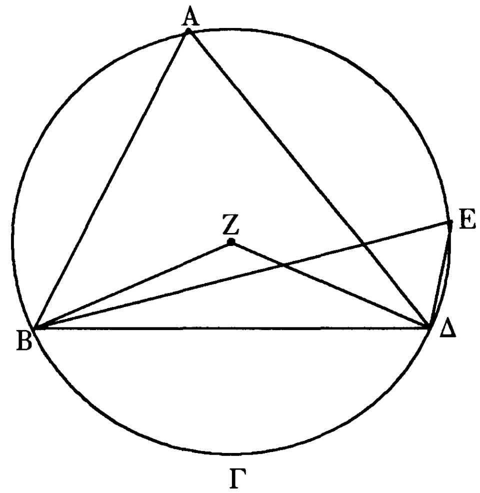
円ＡＢΓをかく。（Ｉ－公準３）
中心Ｅをとり（Ⅲ－命題１）、ＥＢ、ＥΓを結び（Ｉ－公準１）、
中心角ＢＥΓをつくる。
また、ＡＢ、ＡΓを結び（Ｉ－公準１）、円周角ＢＡΓをつくる。
次に、ＡＥを結び（Ｉ－公準１）、Ｚまで延長する。（Ｉ－公準２）
ＥＡ＝ＥＢ（Ｉ－定義15）より、
∠ＥＡＢ＝∠ＥＢＡ（Ｉ－命題５）・・・①
①より、∠ＥＡＢ＋∠ＥＢＡ＝２∠ＥＡＢ・・・②
一方∠ＢＥＺ＝∠ＥＡＢ＋ＥＢＡ（Ｉ－命題32）・・・③
②③より、∠ＢＥＺ＝２∠ＥＡＢ・・・④
同様に、∠ＺＥΓ＝２∠ＥＡΓ・・・⑤
④＋⑤より、
∠ＢＥΓ＝∠ＢＥＺ＋∠ＺＥΓ＝２（∠ＥＡＢ＋∠ＥＡΓ）＝２∠ＢＡΓ
（Ｉ－公理２）
ゆえに、∠ＢＥΓ＝２∠ＢＡΓ・・・⑥
次に、図のように円周上にΔをとり、先と同じように円周角ＢΔΓをつくり、
ΔＥが結ばれ（Ｉ－公準１）、Ｈまで延長されたとする。（Ｉ－公準２）
先と同様にして
∠ＨＥΓ＝２∠ＥΔΓ・・・⑦
∠ＨＥＢ＝２∠ＥΔＢ・・・⑧
⑦－⑧より
∠ＢＥΓ＝∠ＨＥΓ－∠ＨＥＢ＝２（∠ＥΔΓ－∠ＥΔＢ）＝２∠ＢΔΓ
ゆえに、∠ＢＥΓ＝２∠ＢΔΓ・・・⑨　　（Ｉ－公理３）

よって、⑥⑨より円において角が同じ弧を底辺とするとき、中心角は円周角の２倍である。

命題Ⅲ－２１

円において同じ切片内の角は互いに等しい。

ＡＢΓΔを円とし、ＢＡΔ、ＢＥΔを同じ切片ＢＡＥΔ内の角とせよ。角ＢＡΔ、ＢＥΔは互いに等しいと主張する。



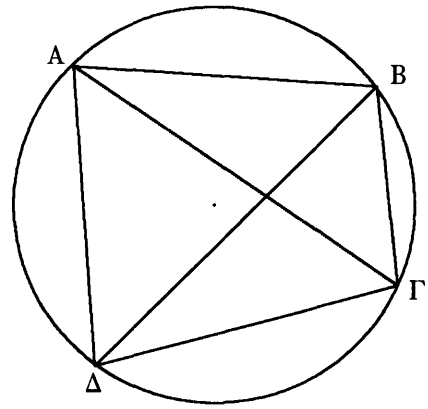
【証明】

円ＡＢΓΔをかき（Ｉ－公準３）、中心をＺとする。（Ⅲ－命題１）
ＢＺ、ＺΔを結び（Ｉ－公準１）、弧ＢΔに対する中心角∠ＢＺΔをつくる。
また、ＡＢ、ＡΔを結び（Ｉ－公準１）、弧ＢΔに対する円周角∠ＢＡΔをつくる。

Ⅲ－命題20より、
∠ＢＺΔと∠ＢＡΔは同じ弧ＢΓΔを底辺とするから、
∠ＢＺΔ＝２∠ＢＡΔ・・・①
同様に、
点Ｅを弧ＢＡΔ上にとり、
弧ＢΔに対する中心角∠ＢＺΔ、円周角∠ＢＥΔをつくると、
Ⅲ－命題20より、
∠ＢＺΔ＝２∠ＢＥΔ・・・②
①②より
２∠ＢＡΔ＝２∠ＢＥΔ（Ｉ－公理１）
ゆえに
∠ＢＡΔ＝∠ＢＥΔ（Ｉ－公理６）

よって、円において同じ切片内の角は互いに等しい。（Ⅲ－定義８）

命題Ⅲ－２２



円に内接する四角形の対角の和は２直角に等しい。

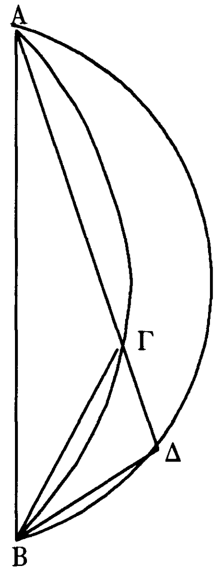
ＡＢΓΔを円とし、ＡＢΓΔをそれに内接する四辺形とせよ。対角の和は２直角に等しいと主張する。

【証明】

円ＡＢΓΔをかく。（Ｉ－公準３）
ＡＢ、ＢΓ、ΓΔ、ΔＡ、ＡΓ、ＢΔを結ぶ。（Ｉ－公準１）
三角形ＡＢΓにおいて、
∠ΓＡＢ＋∠ＡＢΓ＋∠ＢΓＡ＝180°　（Ｉ－命題32）・・・①
一方、同じ切片内にある角だから、
∠ΓＡＢ＝∠ＢΔΓ（Ⅲ－命題21）
同様に、
∠ＡΓＢ＝∠ＡΔＢ（Ⅲ－命題21）
ゆえに、
∠ＡΔΓ＝∠ＢΔΓ＋∠ＡΔＢ＝∠ΓＡＢ＋∠ＡΓＢ
双方に∠ＡＢΓを加えると、
∠ＡＢΓ＋∠ＡΔΓ＝∠ＡＢΓ＋∠ΓＡＢ＋∠ＡΓＢ（Ｉ－公理２）
①より、
∠ΓＡＢ＋∠ＡＢΓ＋∠ＢΓＡ＝180°
だから、
∠ＡＢΓ＋∠ＡΔΓ＝180°
同様に、
∠ＢＡΔ＋∠ΔΓＢ＝180°

よって、円に内接する四辺形の対角の和は２直角に等しい。

命題Ⅲ－２３



同じ線分の上に同じ側に円の相似で不等な二つの切片はつくられ得ない。

【証明】・・・背理法による

同じ線分ＡＢ上に同じ側に円の相似で不等な
二つの切片ＡΓＢ、ＡΔＢがつくられたとし、
（Ｉ－公準１　公準３　Ⅲ－定義６　定義11）
ＡΓΔがひかれ、ΓＢ、ΔＢを結ぶとする。（Ｉ－公準１）

図のように仮定できるのは、Ⅲ－命題10により、 円は円と二つより多くの点で交わらないといえるからである。

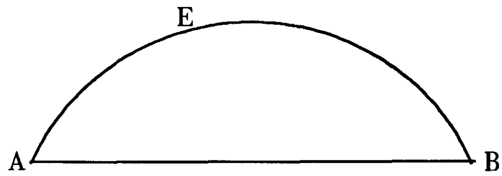
切片ＡΓＢは切片ＡΔＢに相似であるから、Ⅲ－定義11により、
切片内の角が互いに等しい。
したがって、
∠ＡΓＢ＝∠ＡΔＢ
ところが、
外角は内対角のいずれよりも大きいので（Ｉ－命題16)、
これは矛盾である。

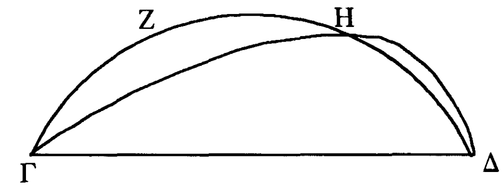
よって、
同じ線分の上に同じ側に円の相似で不等な二つの切片はつくられ得ない。

命題Ⅲ－２４

等しい線分上にある、円の相似な切片は互いに等しい。

ＡＥＢ、ΓＺΔを等しい線分ＡＢ、ΓΔ上にある円の相似な切片とせよ。切片ＡＥＢは切片ΓＺΔに等しいと主張する。





【証明】・・・背理法による

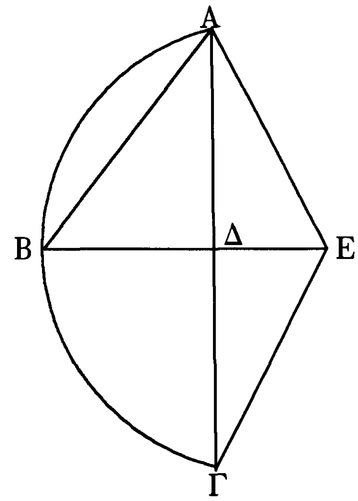
ＡＥＢ、ΓＺΔを等しい線分（Ｉ－命題２）ＡＢ、ΓΔ上にある円の相似な切片とする。（Ｉ－公準１　公準３　Ⅲ－定義６　定義11）
切片ＡＥＢがΓＺΔの上に重ねられ、
点ＡがΓの上に線分ＡＢがΓΔの上におかれるとき、
ＡＢ＝ΓΔ　より、
点Ｂも点Δの上に重なるであろう。
また、ＡＢがΓΔの上に重なるとき、切片ＡＥＢもΓＺΔに重なるであろう。
なぜならば、
線分ＡＢがΓΔの上に重なるが、
切片ＡＥＢはΓＺΔの上に重ならないならば、
ΓＺΔの内部におちるか外部におちるか、
またはΓＨΔのようにずれるであろう。
ΓＺΔの内部におちるか、外部におちるかはⅢ－命題23に矛盾する。
また、
ΓＨΔ（図のように）ずれるとすると、
円が円と二つより多くの点で交わることになり、
Ⅲ－命題10に矛盾する。
したがって、
ＡＢがΓΔの上に重ねられるとき切片ＡＥＢはΓＺΔの上に重なり等しい。

よって、等しい線分上にある円の相似な切片は互いに等しい。

命題Ⅲ－２５

円の切片が与えられたとき、その切片を含む完全な円を描くこと。

ＡＢΓを円の与えられた切片とせよ。このとき切片ＡＢΓを含む完全な円を描かなければならぬ。



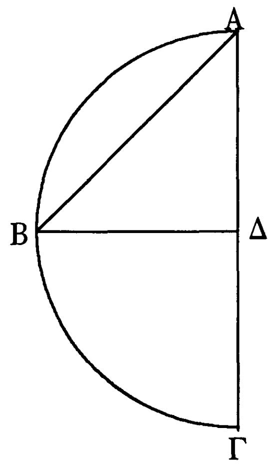
【証明】

切片ＡＢΓをつくる。（Ｉ－公準１　公準３）
ＡΓを２等分し、その中点をΔとする。（Ｉ－命題10）・・・①
点ΔからＡΓに直角にΔＢをひく。（Ｉ－命題11）・・・②
ＡＢを結ぶ。（Ｉ－公準１）

（１）　∠ＡＢΔ＞∠ＢＡΔのとき

線分ＡＢ上にその上の点Ａにおいて∠ＡＢΔに
等しい大きさの角∠ＢＡＥをつくる。（Ｉ－命題23）
ΔＢをＥまで延長し（Ｉ－公準２）、ＥΓを結ぶ（Ｉ－公準１）
すると、∠ＡＢＥ＝∠ＢＡＥより
ＥＡ＝ＥＢ（Ｉ－命題６）・・・③
また①より、
ＡΔ＝ΓΔ　　ΔＥ＝ΔＥ（Ｉ－公理７）
②より、
∠ＡΔＥ＝∠ΓΔＥ＝90°
底辺ＡＥ＝底辺ΓＥ（Ｉ－命題４）・・④
ゆえに③④より、
ＡＥ＝ＢＥ＝ΓＥ
それゆえ、Ｅを中心とし、
ＡＥ、ＥＢ、ＥΓの一つを半径として円が描かれれば、
残りの点をも通り完全な円が描かれるであろう。（Ⅲ－命題９）
ゆえに、円の切片が与えられたとき完全な円が描かれた。
そして、中心Ｅが切片の外部にあるから（∠ＡＥΓ＜180°）
切片ＡＢΓは半円より小さいことは明らかである。

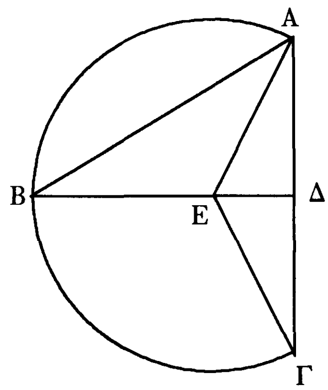
（2）同様に、∠ＡＢΔ＝∠ＢＡΔのとき



Ｉ－命題６よりΔＡ＝ΔＢ・・・⑤
①よりΔＡ＝ΔΓ・・・⑥
⑤⑥よりΔＡ＝ΔＢ＝ΔΓ
したがってⅢ－命題９よりΔは完結された円の中心であり、
ＡＢΓは明らかに半円になるだろう。
それゆえΔを中心とし（Ⅲ－命題９）、
ΔＡ、ΔＢ、ΔΓの一つを半径として円が描かれれば、
残りの点をも通り完全な円が描かれるであろう。

（3）　∠ＡＢΔ＜∠ＢＡΔのとき

線分ＡＢ上にその上の点Ａにおいて、
∠ＡＢΔに等しい大きさの∠ＢＡＥをつくる。（Ｉ－命題23）
∠ＡＢＥ＝∠ＢＡＥより、
ＥＡ＝ＥＢ（Ｉ－命題６）・・・⑦
ΓＥを結ぶ。（Ｉ－公準１）
また①より、
ＡΔ＝ΓΔ
ΔＥ＝ΔＥ（Ｉ－公理７）
②より、
∠ＡΔＥ＝∠ΓΔＥ＝90°
底辺ＡＥ＝底辺ΓＥ（Ｉ－命題４）・・・⑧
⑦⑧より、
ＡＥ＝ΓＥ＝ＢＥ
それゆえ、Ｅを中心とし（Ⅲ－命題９）、
ＡＥ、ＥＢ、ＥΓの一つを半径として円が描かれれば、
残りの点をも通り完全な円が描かれるであろう。
そして、切片ＡＢΓは明らかに半円より大きい。

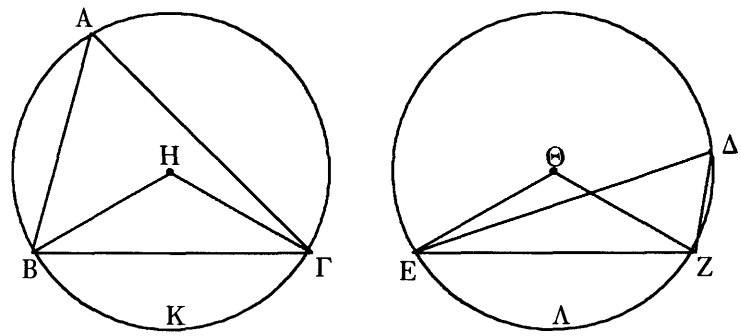


よって、円の切片が与えられたとき、その切片を含む完全な円が描かれた。

Q．E．F．

命題Ⅲ－２６

等しい円において等しい角は、中心角も円周角も等しい弧の上に立つ。



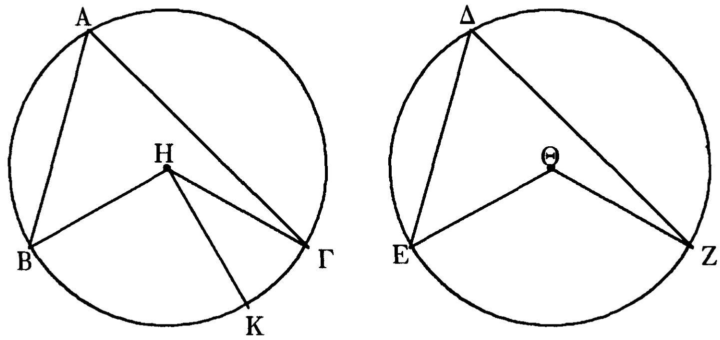
ＡＢΓ、ΔＥＺは等しい円とし、それらにおいて　角ＢＨΓ、ＥΘＺを等しい中心角、角ＢＡΓ、ＥΔＺを等しい円周角とせよ。弧ＢＫΓは、弧ＥΛＺに等しいと主張する。

【証明】

等しい円ＡＢΓ、ΔＥＺをかく。（Ⅰ－命題３　Ⅲ－定義１）・・・①
ＢΓ、ＥＺを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
円ＡＢΓ、ΔＥＺの中心をＨ、Θとし（Ⅲ－命題１）、
∠ＢＨΓ＝∠ＥΘＺ（中心角）・・・②
となるように、等しい角をつくる。（Ⅰ－命題23）
①より、
円ＡＢΓ、ΔＥＺは等しいので、半径は等しく、
ＢＨ＝ＨΓ＝ＥΘ＝ΘＺ（Ⅰ－定義15、Ⅲ－定義１）
②より
∠ＢＨΓ＝∠ＥΘＺ
だから、底辺ＢΓ＝底辺ＥＺ（Ⅰ－命題４）・・・③
また、Ⅲ－命題20と②より、
∠ＢＡΓ＝∠ＥΔＺ・・・④
だから、切片ＢＡΓは切片ＥΔＺに相似である。（Ⅲ－定義11）・・・⑤
等しい弦の上にある円の相似な切片は互いに等しいので、
③⑤より、
切片ＢＡΓはＥΔＺに等しい。（Ⅲ－命題24）
①より、
円ＡＢΓ全体も円ΔＥＺ全体に等しいので、
残りの弧ＢＫΓは弧ＥΛＺに等しい。（Ⅰ－公理３）

よって、等しい円において等しい角は中心角も円周角も等しい弧の上に立つ。

命題Ⅲ－２７



等しい円において等しい弧の上に立つ角は、中心角も円周角も互いに等しい。

等しい円ＡＢΓ、ΔＥＺにおいて等しい弧ＢΓ、ＥＺ上に中心Ｈ、Θにおいて角ＢＨΓ、ＥΘＺが、円周において角ＢＡΓ、ＥΔＺが立つとせよ。角ＢＨΓは角ＥΘＺに等しく、角ＢＡΓは角ＥΔＺに等しいと主張する。

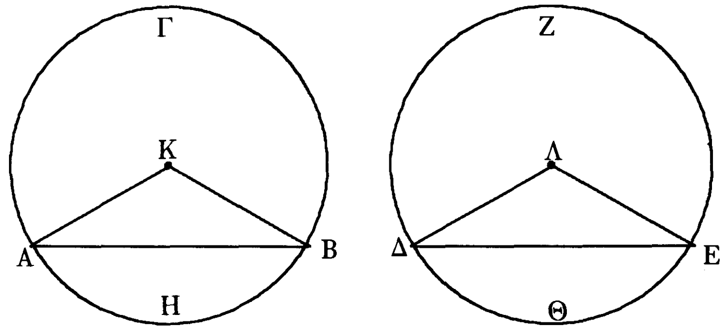
【証明】・・・背理法による

等しい円ＡＢΓ、ΔＥＺをかく。（Ｉ－公準３　Ⅲ－定義１）
円ＡＢΓ、ΔＥＺの中心をＨ、Θとし（Ⅲ－命題１）、等しい弧ＢΓ、ＥＺとなるように点Ｂ、Γ、Ｅ、Ｚをとる。（Ⅲ－命題26）・・・①
ＡＢ、ＡΓ、ＨＢ、ＨΓ、ΔＥ、ΔＺ、ΘＥ、ΘＺを結び（Ｉ－公準１）、
中心角ＢＨΓ、ＥΘＺ、円周角ＢＡΓ、ＥΔＺをつくる。
∠ＢＨΓ＞∠ＥΘＺとし、線分ＢＨ上にその上の点Ｈにおいて、
∠ＥΘＺ＝∠ＢＨＫとなる∠ＢＨＫをつくる。（Ｉ－命題23）
Ⅲ－命題26より、
弧ＢＫ＝弧ＥＺ・・・②
ところが、①より、
弧ＢΓ＝弧ＥＺ・・・③
②③より、弧ＢＫ＝弧ＢΓ（Ｉ－公理１）
したがって、小さいもの（弧ＢＫ）が大きいもの（弧ＢΓ）に等しい。
これは、矛盾である。
ゆえに、∠ＢＨΓ＝∠ＥΘＺ・・・④
また、∠ＢＡΓ＝$\frac{1}{2}$∠ＢＨΓ
∠ＥΔＺ＝$\frac{1}{2}$∠ＥΘＺ（Ⅲ－命題20）
④より、∠ＢＨΓ＝∠ＥΘＺだから、
∠ＢＡΓ＝∠ＥΔＺ（Ｉ－公理６）・・・⑤

よって、④⑤より、等しい円において等しい弧の上に立つ角は、中心角も円周角も互いに等しい。

命題Ⅲ－２８

等しい円において、等しい弦は等しい弧を切り取る。すなわち、切り取られた大きい弧は大きい弧に、小さい弧は小さい弧に、等しい。



ＡＢΓ、ΔＥＺを等しい円とし、それらの円においてＡＢ、ΔＥを等しい弦とし、これが大きい弧ＡΓＢ、ΔＺＥと小さい弧ＡＨＢ、ΔΘＥを切り取るとせよ。大きい弧ＡΓＢは大きい弧ΔＥＺに、小さい弧ＡＨＢは小さい弧ΔΘＥに等しいと主張する。

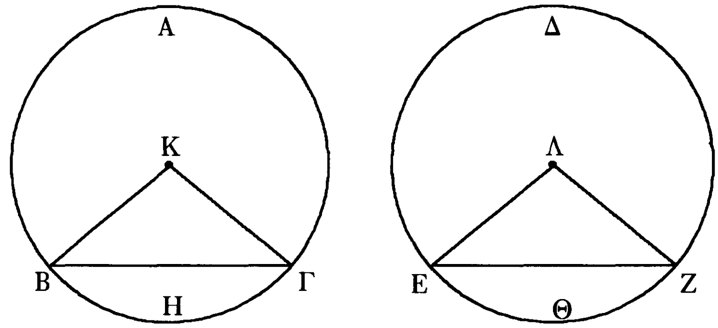
【証明】

等しい円ＡＢΓ、ΔＥＺをかく。（Ⅰ－公準３　Ⅲ－定義１）・・・①
それらの円において、
ＡＢ＝ΔＥとなる弦をかく。（Ⅰ－公準１、Ⅰ－命題２）・・・②
それぞれの円の中心Ｋ、Λをとり（Ⅲ－命題１）、
ＡＫ、ＫＢ、ΔΛ、ΛＥを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
①より、二つの円は等しいから、
ＡＫ＝ΔΛ＝ＫＢ＝ΛＥ
また、②より、
底辺ＡＢ＝底辺ΔＥ
ゆえに、
∠ＡＫＢ＝∠ΔΛＥ（Ⅰ－命題８）
Ⅲ－命題26より、等しい角は、中心においてあるとき、等しい弧の上に立つので、
弧ＡＨＢ＝弧ΔΘＥ・・・③
また、
円ＡＢΓ全体＝円ΔＥＺ全体・・・④
④－③より、残りの弧も等しく、
弧ＡΓＢ＝弧ΔＺＥ（Ⅰ－公理３）

よって、等しい円において等しい弦は等しい弧を切り取る。切り取られた大きい弧は大きい弧に小さい弧は小さい弧に等しい。

命題Ⅲ－２９

等しい円において、等しい弧には等しい弦が対する。



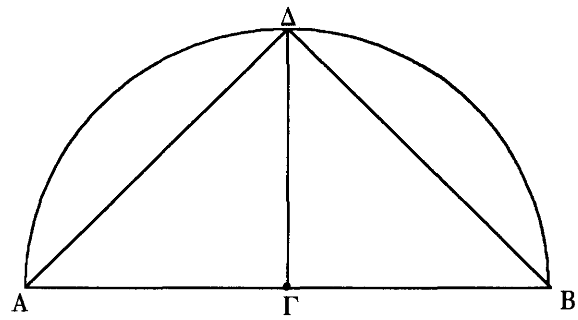
ＡＢΓ、ΔＥＺを等しい円とし、それらにおいて等しい弧ＢＨΓ、ＥΘＺが切り取られ、弦ＢΓ、ＥＺが結ばれたとせよ。ＢΓはＥＺに等しいと主張する。

【証明】

等しい円ＡＢΓ、ΔＥＺをかく。（Ⅰ－公準３　Ⅲ－定義１）
等しい弧ＢＨΓ、ＥΘＺを切り取り（Ⅲ－命題26）、
弦ＢΓ、ＥＺを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
円ＡＢΓ、ΔＥＺの中心をとり（Ⅲ－命題１）、
ＢＫ、ＫΓ、ＥΛ、ΛＺを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
弧ＢＨΓ＝弧ＥΘＺより、
∠ＢＫΓ＝∠ＥΛＺ（Ⅲ－命題27）・・・①
円の半径は等しく、
ＢＫ＝ＫΓ（Ⅰ－定義15）
ＥΛ＝ΛＺ（Ⅰ－定義15）
しかも、
円ＡＢΓ、ΔＥＺは等しいので、
ＢＫ＝ＫΓ＝ＥΛ＝ΛＺ（Ⅲ－定義１）
ゆえに、
２辺ＢＫ、ＫΓは２辺ＥΛ、ΛＺに等しく、
しかも等しい角をはさむ。（①より）
したがって、
底辺ＢΓ＝底辺ＥＺ（Ⅰ－命題４）

よって、等しい円において等しい弧には等しい弦が対する。

命題Ⅲ－３０



与えられた弧を２等分すること。

与えられた弧をＡΔＢとせよ。 このとき、弧ＡΔＢを２等分し なければならぬ。

弧ＡΔＢをかき（Ⅰ－公準３）、ＡＢを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
ＡＢを２等分し（Ⅰ－命題10）・・・①
その点Γから、
弦ＡＢに直角にΓΔをひく。（Ⅰ－命題11）・・・②

点Δが弧ＡΔＢを２等分する点となる。

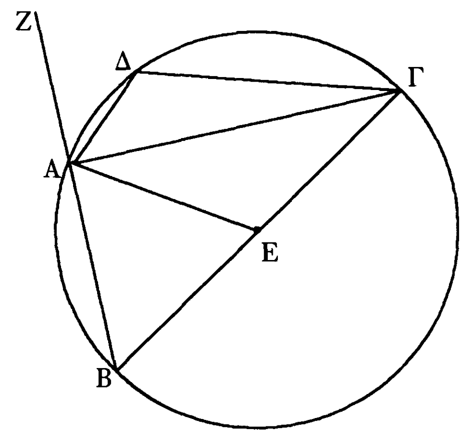
【証明】

ＡΔ、ΔＢを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
①より、
ＡΓ＝ΓＢ
ΓΔは共通
だから、２辺ＡΓ、ΓΔは２辺ＢΓ、ΓΔに等しい。
また、
∠ＡΓΔ＝∠ＢΓΔ＝90°　（②より）
ゆえに、
底辺ＡΔ＝底辺ΔＢ（Ⅰ－命題４）
Ⅲ－命題28より、
等しい弦は等しい弧を切り取るので、
すなわち、切り取られた大きい弧は大きい弧に小さい弧は小さい弧に等しい。
そして、弧ＡΔ、弧ΔＢの双方は半円より小さく、
小さい弧は小さい弧に等しいので、
弧ＡΔ＝弧ΔＢと言える。

よって、与えられた弧は点Δにおいて２等分された。

Ｑ．Ｅ．Ｆ．

命題Ⅲ－３１



円において半円内の角は直角であり、半円より大きい切片内の角は直角より小さく、より小さい切片内の角は直角より大きい。また、半円より大きい切片の角は直角より大きく、より小さい切片の角は直角より小さい。

ＡＢΓΔを円とし、ＢΓをその直径、Ｅを中心とし、ＢＡ、ＡΓ、ＡΔ、ΔΓが結ばれたとせよ。半円ＢＡΓ内の角ＢＡΓは直角であり、半円より大きい切片ＡＢΓ内の角ＡＢΓは直角より小さく、半円より小さい切片ＡΔΓ内の角ＡΔΓは直角より大きいと主張する。

【証明】

円ＡＢΓΔをかく。（Ｉ－公準３）
直径ＢΓ、中心Ｅをとり（Ⅲ－命題１）、
ＢＡ、ＡΓ、ＡΔ、ΔΓ、ＡＥを結ぶ。（Ｉ－公準１）
ＢＡをＺまで延長する。（Ｉ－公準２）
ＢＥ＝ＥＡ（Ｉ－定義15）
∠ＡＢＥ＝∠ＢＡＥ（Ｉ－命題５）・・・①
同様に、
ΓＥ＝ＥＡ（Ｉ－定義15）
∠ＡΓＥ＝∠ΓＡＥ（Ｉ－命題５）・・・②
①②より、
∠ＢＡΓ＝∠ＢＡＥ＋∠ΓＡＥ
　　　＝∠ＡＢＥ＋∠ＡΓＥ
　　　＝∠ＡＢΓ＋∠ＡΓＢ
ところが、
∠ＺＡΓ＝∠ＡＢΓ＋∠ＡΓＢ（Ｉ－命題32）
ゆえに、
∠ＢＡΓ＝ＺＡΓ（Ｉ－公理１）
したがって、
∠ＢＡΓ＝∠ＺＡΓ＝∠90°（Ｉ－定義10）・・・③

よって、半円ＢＡΓ内の角ＢＡΓは直角である。

次に、三角形ＡＢΓにおいて、
∠ＡＢΓ＋∠ＢＡΓ＜180°　（Ⅰ－命題17）
③より、
∠ＢＡΓ＝90°
だから、
∠ＡＢΓ＜90°　・・・④
そして、
∠ＡＢΓは半円より大きい切片ＡＢΓ内の角である。

次に、円に内接する四角形ＡＢΓΔより、
∠ＡＢΓ＋∠ＡΔΓ＝180°　（Ⅲ－命題22）
④より、
∠ＡＢΓ＜90°
だから、
∠ＡΔΓ＞90°
そして、
∠ＡΔΓは半円より小さい切片ＡΔΓ内の角である。

また、半円より大きい切片の角、すなわち弧ＡＢΓと弦ＡΓとにはさまれた角は直角より大きく、より小さい切片の角、すなわち弧ＡΔΓと弦ＡΓとにはさまれた角は直角より小さいと主張する。

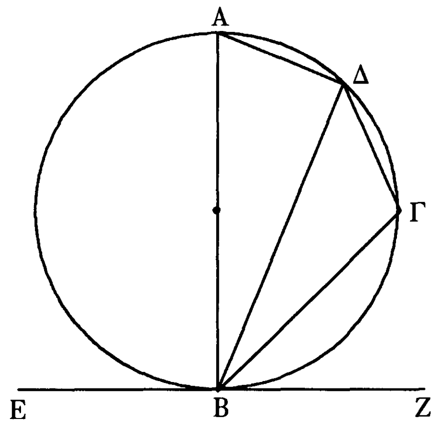
これはただちに明らかである。

なぜなら、
弦ＢＡ、ＡΓにはさまれた角は直角であるから、
弧ＡＢΓと弦ＡΓとにはさまれた角は直角より大きい。
また、
弦ＡΓと線分ＡＺにはさまれた角は直角であるから、
弦ＡΓと弧ＡΔΓとにはさまれた角は直角より小さい。

よって、円において、半円内の角は直角であり、半円より大きい切片内の角は直角より小さく、より小さい切片内の角は直角より大きい。また半円より大きい切片の角は直角より大きく、より小さい切片の角は直角より小さい。

命題Ⅲ－３２

もし円に直線が接し、その接点から円に対し円を切る直線がひかれるならば、それが接線となす角は円の反対側の切片内の角に等しいであろう。



直線ＥＺが円ＡＢΓΔに点Ｂにおいて接するとし、点Ｂから円ＡＢΓΔにそれを切る直線ＢΔがひかれたとせよ。ＢΔが接線ＥＺとなす角は円の反対側の切片内の角に等しいであろう。すなわち、角ＺＢΔは切片ＢＡΔ内につくられた角に等しく、角ＥＢΔは切片ΔΓＢ内につくられた角に等しいと主張する。

円ＡＢΓΔをかく。（Ｉ－公準３）
点Ｂにおいて円ＡＢΓΔに接する直線（接線）ＥＺをひく。（Ⅲ－命題16）

【証明】

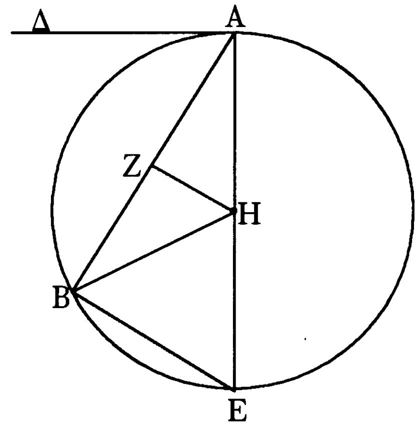
点ＢからＥＺに直角にＢＡをひく。（Ｉ－命題11）・・・①
弧ＢΔ上に任意の点Γがとられ、ＡΔ、ΔΓ、ΓＢ、ΔＢを結ぶ。（Ｉ－公準１）
Ⅲ－命題19より、円ＡＢΓΔの中心はＢＡ上にある。
それゆえ、ＢＡは円ＡＢΓΔの直径である。（Ｉ－定義17）
ゆえに、∠ＡΔＢは半円内にあるから、Ⅲ－命題31より、∠ＡΔＢ＝90°
したがって、残りの角の和は、∠ＢＡΔ＋∠ＡＢΔ＝90°　（Ｉ－命題32）
一方、①より、∠ＡＢＺ＝90°
だから、∠ＡＢＺ＝∠ＢＡΔ＋∠ＡＢΔ（Ｉ－公準４　公理１）
双方から∠ＡＢΔをひくと（Ｉ－公理３）、
∠ＡＢＺ－∠ＡＢΔ＝∠ＢＡΔ＋∠ＡＢΔ－∠ＡＢΔ
∠ΔＢＺ＝∠ＢＡΔ・・・②
円ＡＢΓΔは円に内接する四角形だから
∠ＢＡΔ＋∠ＢΓΔ＝180°　（Ⅲ－命題22）
ところが、∠ΔＢＺ＋∠ΔＢＥ＝180°
だから、∠ＢＡΔ＋∠ＢΓΔ＝∠ΔＢＺ＋∠ΔＢＥ（Ｉ－公準４　公理１）・・・③
③－②から、∠ＢΓΔ＝∠ΔＢＥ（Ｉ－公理３）・・・④

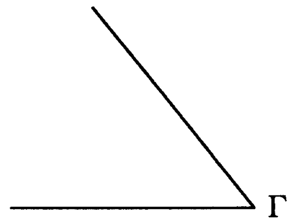
よって、もし、円に直線が接し、その接点から円に対し円を切る直線がひかれるならば、それが接線となす角は円の反対側の切片内の角に等しい。

命題Ⅲ－３３

与えられた線分上に与えられた直線角に等しい角を含む円の切片を描くこと。

与えられた線分をＡＢ、与えられた直線角をΓとせよ。このとき、与えられた線分ＡＢ上に角Γに等しい角を含む円の切片を描かねばならぬ。





角Γが鋭角の場合

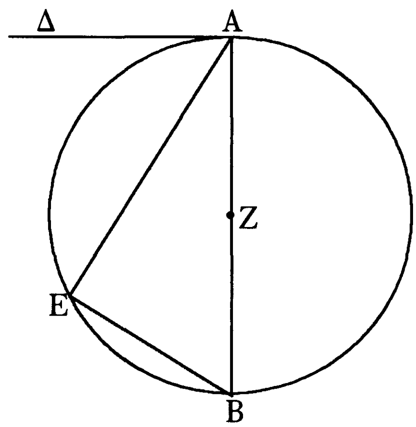
ＡＢを結び（Ｉ－公準１）、
線分ＡＢ上に点Ａにおいて∠Γに等しい
∠ＢＡΔをつくる。（Ｉ－命題23）・・・①
∠ＢＡΔも鋭角である。
ΔＡに直角にＡＥをひき（Ｉ－命題11）、
ＡＢをＺで２等分し（Ｉ－命題10）・・・②
点ＺからＡＢに直角にＺＨをひき（Ｉ－命題11）・・・③
ＺＨとＡＥの交点をＨとする。
点Ｈを中心とし、半径ＨＡの円をかけば、与えられた線分ＡＢ上に与えられた直線角Γを含む円の切片ＡＥＢが描かれる。

【証明】

描かれたとし、ＨＢを結ぶ。（Ｉ－公準１）
すると、②より、
ＡＺ＝ＺＢ
ＺＨは共通
③より、
∠ＡＺＨ＝∠ＢＺＨ＝90°
よって、底辺ＡＨ＝底辺ＢＨ（Ｉ－命題４）
ゆえに、点Ｈを中心とし、ＨＡを半径として円をかけば、
その円はＢも通る（Ｉ－定義15）
それをＡＢＥとし、ＥＢを結ぶと（Ｉ－公準１）、
ＡΔは直径Ｅの端ＡからＡＥに直角であるのでⅢ－命題16　系より
ＡΔは円ＡＢＥに接する。
直線ＡΔは円ＡＢＥに接し、接点Ａから円ＡＢＥに弦ＡＢがひかれたから、

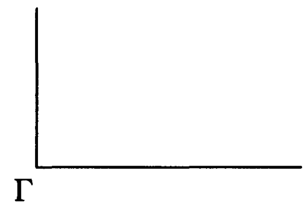
Ⅲ－命題32より、∠ΔＡＢ＝∠ＡＥＢ
一方、①より、∠ΔＡＢ＝∠Γ
ゆえに、　∠ＡＥＢ＝∠Γ（Ⅰ－公理１）
よって、与えられた線分ＡＢ上に与えられた角Γに等しい角ＡＥＢを含む円の切片ＡＥＢが描かれた。

角Γが直角の場合



線分ＡＢ上に点Ａにおいて、Γと等しい
角∠ＢＡΔをつくる。（Ⅰ－命題23）・・・④
ＡＢをＺで２等分し（Ⅰ－命題10）、
Ｚを中心とし（Ⅲ－命題１）、
ＺＡ、ＺＢのどちらかを半径として、
円ＡＥＢをかく。（Ⅰ－定義15　公準３）

【証明】

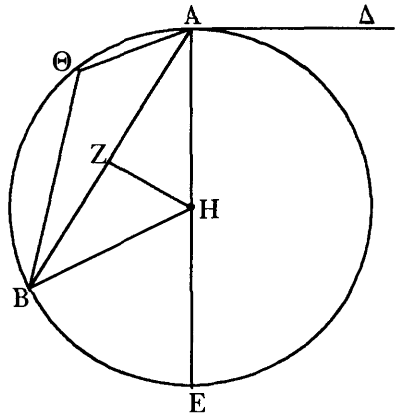


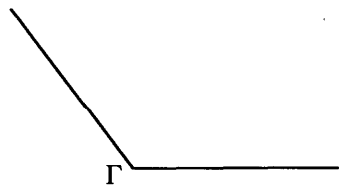
Ⅲ－命題16　系より、
ＡΔは円ＡＢＥに接する。
Ⅲ－命題31より、∠ＡＥＢ＝90°
④より、∠ＢＡΔ＝90°
ゆえに、∠ＡＥＢ＝∠ＢＡΔ（Ⅰ－公準４　公理１）
一方、④より、∠ＢＡΔ＝∠Γ
ゆえに、∠ＡＥＢ＝∠Γ（Ⅰ－公理１）
よって、ＡＢ上に角Γに等しい角を含む円の切片ＡＥＢが描かれた。

角Γが鈍角の場合

線分ＡＢ上に点ＡにおいてΓと等しい
角∠ＢＡΔをつくる。（Ⅰ－命題23）・・・⑤
ＡΔに直角にＡＥをひき（Ⅰ－命題11）、
ＡＢをＺで２等分し（Ⅰ－命題10）・・・⑥

点Ｚから、ＡＢに直角にＺＨをひき（Ｉ－命題11）・・・⑦
ＺＨとＡＥの交点をＨとする。
点Ｈを中心とし、半径ＨＡの円をかけば、
与えられた線分ＡＢ上に与えられた直線角Γ
を含む円の切片ＡΘＢが描かれる。





【証明】

描かれたとし、ＨＢを結ぶ（Ｉ－公準１）
すると⑥より、
ＡＺ＝ＺＢ
ＺＨは共通
⑦より、∠ＡＺＨ＝∠ＢＺＨ＝90°
よって、
底辺ＡＨ＝底辺ＢＨ（Ｉ－命題４）
ゆえに、点Ｈを中心とし、ＨＡを半径として円をかけば、その円は点Ｂも通る。（Ｉ－定義15）
Ⅲ－命題16　系より、
ＡΔは円ＡＢＥに接する。
そして、ＡＢは接点Ａからひかれたので、
Ⅲ－命題32より、
∠ＢＡΔ＝∠ＡΘＢ
一方、⑤より、
∠ＢＡΔ＝∠Γ
ゆえに、
∠ＡΘＢ＝∠Γ（Ｉ－公理１）

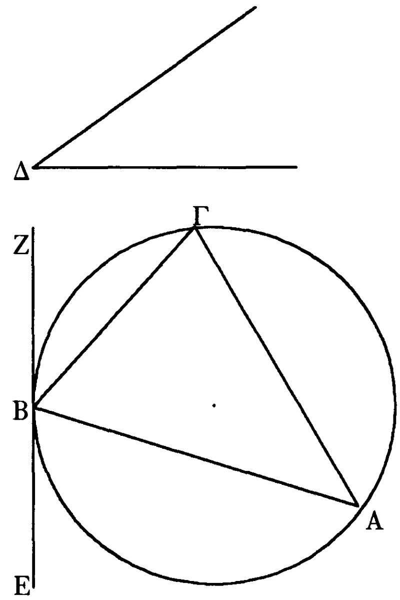
よって、与えられた線分ＡＢ上に角Γに等しい角を含む円の切片ＡΘＢが描かれた。

Ｑ．Ｅ．Ｆ．

命題Ⅲ－３４

与えられた円から与えられた直線角に等しい角を含む切片を切り取ること。

与えられた円をＡＢΓとし、与えられた直線角を角Δとせよ。このとき、円ＡＢΓから与えられた直線角Δに等しい角を含む切片を切り取らねばならぬ。

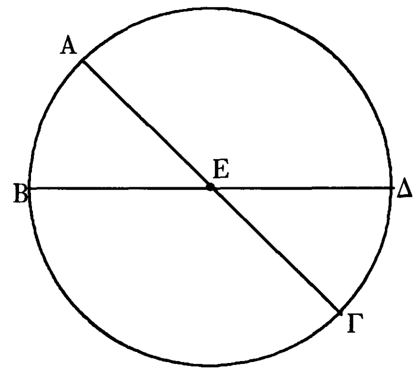


円ＡＢΓをかく。（Ⅰ－公準３）
点Ｂにおいて、
円ＡＢΓに接するＥＺをひく。（Ⅲ－命題16）
直線ＺＢ上に点Ｂにおいて、
∠Δに等しい∠ＺＢΓをつくる。（Ⅰ－命題23）・・・①
Ⅲ－命題32より、
∠ＺＢΓ＝∠ＢＡΓ
一方、①より、
∠ＺＢΓ＝∠Δ
ゆえに、
∠ＢＡΓ＝∠Γ（Ⅰ－公理１）

よって、与えられた円ＡＢΓから与えられた直線角Δに等しい角を含む切片ＢＡΓが切り取られた。

Ｑ．Ｅ．Ｆ．

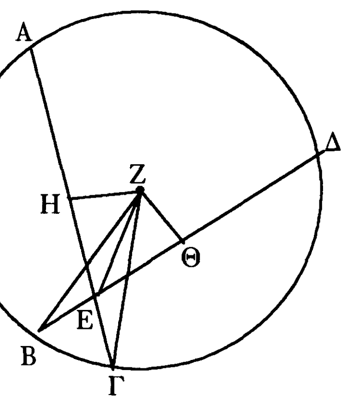
命題Ⅲ－３５



もし円において二つの弦が互いに交わるならば一方の弦の二つの部分にかこまれた矩形は他方の弦の二つの部分にかこまれた矩形に等しい。

円ＡＢΓΔにおいて二つの弦ＡΓ、ＢΔが点Ｅにおいて互いに交わるとせよ。ＡＥ、ＥΓにかこまれた矩形はΔＥ、ＥＢに囲まれた矩形に等しいと主張する。

【証明】



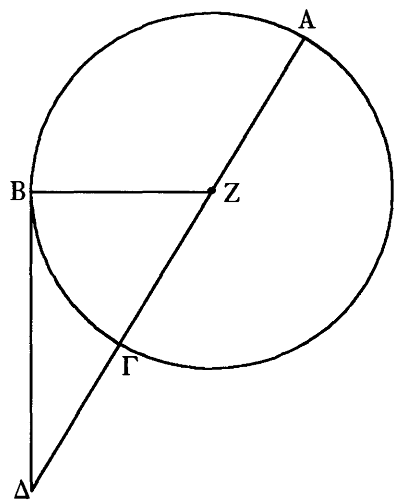
円ＡＢΓΔをかく。（Ⅰ－公準3）
中心をＥとする。（Ⅲ－命題１）
中心Ｅを通るようにＡΓ、ＢΔを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
点Ｅは円ＡＢΓΔの中心だから、
ＡＥ＝ＥΓ＝ΔＥ＝ＥＢ（Ⅰ－定義15）
ゆえに、ＡＥ、ＥΓにかこまれた矩形もΔＥ
ＥＢにかこまれた矩形に等しいことは明らかである。
次に、ＡΓ、ΔＢが中心を通らないとし（Ⅰ－公準１）、
円ＡＢΓΔの中心をＺとする。（Ⅲ－命題１）
Ｚから、弦ＡΓ、ΔＢに垂線ＺＨ、ＺΘをひき（Ⅰ－命題12）、
ＺＢ、ＺΓ、ＺＥを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
中心を通る線分ＨＺが中心を通らない弦ＡΓを直角に切るから、
ＡＨ＝ＨΓ（Ⅲ－命題３）
そこで、弦ＡΓがＨにおいて等しい部分にＥにおいて不等な部分に分けられたから、
ＡＥ×ＥΓ＋ＥＨ×ＥＨ＝ＨΓ×ＨΓ（Ⅱ－命題５）
双方にＨＺ×ＨＺを加えると、
$AE \times E\Gamma + EH^2 + HZ^2 = H\Gamma^2 + HZ^2$（Ⅰ－公理２）
$ZE^2 = EH^2 + HZ^2$　　$Z\Gamma^2 = H\Gamma^2 + HZ^2$（Ⅰ－命題47）
ゆえに、$AE \times E\Gamma + ZE^2 = Z\Gamma^2$
ところが、ＺΓ＝ＺＢ（Ⅰ－定義15）
ゆえに、$AE \times E\Gamma + ZE^2 = ZB^2$・・・①
同様に、$\Delta E \times EB + ZE^2 = ZB^2$・・・②
①②より、$AE \times E\Gamma + ZE^2 = \Delta E \times EB + ZE^2$（Ⅰ－公理１）
双方からZE^2をひくと、ＡＥ×ＥΓ＝ΔＥ×ＥＢ

よって、もし円において二つの弦が互いに交わるならば、一方の弦の二つの部分にかこまれた矩形は、他方の弦の二つの部分にかこまれた矩形に等しい。

命題Ⅲ－３６

もし円の外部に１点がとられ、それから円に二つの直線がひかれ、それらの一方は円を切り他方は接するとすれば、切る線分の全体と、外部にその点と凸形の弧との間に切り取られた線分とにかこまれた矩形は、接線の上の正方形に等しいであろう。

円ＡＢΓの外部に任意の点Δがとられ、Δから円ＡＢΓに２線分ΔΓＡ、ΔＢがひかれたとせよ。そして、ΔΓＡは円ＡＢΓを切り、ＢΔは接するとせよ。ＡΔ、ΔΓにかこまれた矩形はΔＢ上の正方形に等しいと主張する。



【証明】

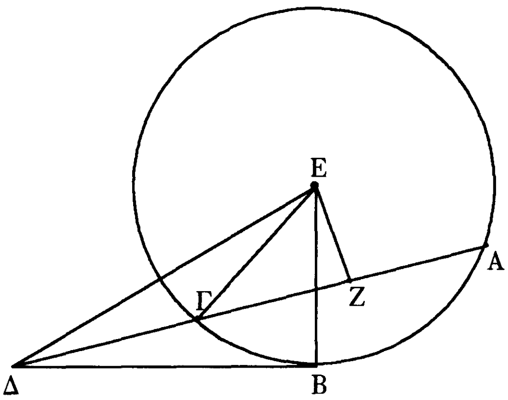
円ＡＢΓをかく。（Ⅰ－公準３）
円外に点Δをとり、点Γ、Ａで交わる線分ΔΓＡをかく。（Ⅰ－公準１）
点Ｂで、円ＡＢΓに接する線分ＢΔをひく。（Ⅲ－命題17）

（ア）ΔΓＡが中心を通る場合

円の中心Ｚをとる。（Ⅲ－命題１）
ＺＢを結ぶ。（Ⅰ－公準１）
すると、Ⅲ－命題18より、
$\angle ZB\Delta = 90°$
点Ｚは円ＡＢΓの中心より、
ＺΓ＝ＺＡ（Ⅰ－定義15）
ゆえに、弦ＡΓはＺにおいて２等分され、それにΓΔが加えられたから、
$A\Delta \times \Delta\Gamma + Z\Gamma^2 = Z\Delta^2$（Ⅱ－命題６）
一方、ＺΓ＝ＺＢ（Ⅰ－定義15）
だから、$A\Delta \times \Delta\Gamma + ZB^2 = Z\Delta^2$・・・①
$ZB^2 + B\Delta^2 = Z\Delta^2$（Ⅰ－命題47）・・・②
①②より、$A\Delta \times \Delta\Gamma + ZB^2 = ZB^2 + B\Delta^2$
双方から、ZB^2をひくと、
$A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta^2$（Ⅰ－公理３）

（イ）$\Delta\Gamma A$が中心を通らない場合

円の中心Eをとる。（Ⅲ－命題１）
Eから$A\Gamma$に垂線EZをひく。（Ⅰ－命題12)
EB、$E\Gamma$、$E\Delta$を結ぶ。（Ⅰ－命題１）
Ⅲ－命題18より
$\angle EB\Delta = 90^\circ$
中心を通る線分EZが中心を通らない弦$A\Gamma$を直角に切るから、
$Z\Gamma = ZA$（Ⅲ－命題３）
ゆえに、
$A\Delta \times \Delta\Gamma + Z\Gamma^2 = Z\Delta^2$（Ⅱ－命題６）

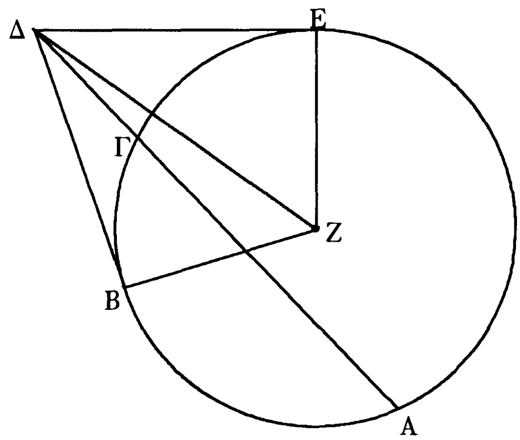


双方にZE^2を加えると、
$A\Delta \times \Delta\Gamma + Z\Gamma^2 + ZE^2 = Z\Delta^2 + ZE^2$（Ⅰ－公理２）
$\angle EZ\Gamma = 90^\circ$ より、
$E\Gamma^2 = \Gamma Z^2 + ZE^2$（Ⅰ－命題47)
$E\Delta^2 = \Delta Z^2 + ZE^2$（Ⅰ－命題47)
ゆえに、
$A\Delta \times \Delta\Gamma + E\Gamma^2 = E\Delta^2$
円$AB\Gamma$の中心がEより
$E\Gamma = EB$（Ⅰ－定義15)
したがって、
$A\Delta \times \Delta\Gamma + EB^2 = E\Delta^2$・・・③
$\angle EB\Delta = 90^\circ$ より、
$EB^2 + B\Delta^2 = E\Delta^2$・・・④
③④より、
$A\Delta \times \Delta\Gamma + EB^2 = EB^2 + B\Delta^2$
双方から
EB^2をひくと、
$A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta^2$（Ⅰ－公理３）

よって、もし円の外部に一点がとられ、それから円に二つの直線がひかれ、それらの一方は円を切り、他方は接するとすれば、切る線分の全体と外部にその点と凸形の弧との間に切り取られた線分とにかこまれた矩形は接線上の正方形に等しいであろう。

命題Ⅲ－３７

もし円の外部に１点がとられ、その点から円に二つの直線がひかれ、それらの一方は円を切り、他方は円周上におち、そして切る線分の全体と、外部にその点と凸形の弧との間に切り取られた線分とにかこまれた矩形が円周上におちる線分の上の正方形に等しいならば、円周上におちる線分は円に接するであろう。



円ＡＢΓの外部に任意の点Δがとられ、Δから円ＡＢΓに２線分ΔΓＡ、ΔＢがひかれたとし、ΔΓＡは円を切り、ΔＢは円周上におちるとし、矩形ＡΔ、ΔΓがΔＢ上の正方形に等しいとせよ。ΔＢは円ＡＢΓに接すると主張する。

【証明】

円ＡＢΓをかく。（Ｉ－公準３）
円の外部にΔをとり、円ＡＢΓに点Γ、Ａで交わる線分ΔΓＡをひく。（Ｉ－公準１）
また、ΔＢを結ぶ。（Ｉ－公準１）
円ＡＢΓに接線ΔＥをひき（Ⅲ－命題17)、円ＡＢΓの中心Ｚをとり（Ⅲ－命題１)、
ＺＥ、ＺＢ、ＺΔが結ばれたとする。（Ｉ－公準１）
∠ＺＥΔ＝90°　(Ⅲ－命題18)・・・①
Ⅲ－命題36より、$AΔ \times ΔΓ = ΔE^2$　　$AΔ \times ΔΓ = ΔB^2$（仮定より）
ゆえに、$ΔE^2 = ΔB^2$
したがって、ΔＥ＝ΔＢ（Ｉ－公理７）
ＺＥ＝ＺＢ（Ｉ－定義15)　　ＺΔは共通
ゆえに、∠ΔＥＺ＝∠ΔＢＺ（Ｉ－命題８）
①より、∠ΔＥＺ＝90°　だから、∠ΔＢＺ＝90°（Ｉ－公理１）
Ⅲ－命題16　系より、ΔＢは円ＡＢΓに接する。
中心がＡΓ上にあっても、同様に証明しうる。

よって、もし円の外部に１点がとられ、その点から円に二つの直線がひかれ、それらの一方は円を切り、他方は円周上におち、そして切る線分の全体と、外部にその点と凸形の弧との間に切り取られた線分とにかこまれた矩形が円周上におちる線分の上の正方形に等しいならば、円周上におちる線分は円に接するであろう。

第２節　『原論』第Ⅲ巻の構造

２－１　命題の相互関係図について

前節で見た37個の命題がどのように繋がりあっているのかを示す「命題の相互関係図」を作成し、本論文60ページに示した。この相互関係図では、例えば $\boxed{16}\rightarrow\boxed{18}$ は「命題18の証明に命題16が使用されている」ことを意味している。相互関係図を作成するにあたって、検討した結果について、その概要を以下に述べる。

（１）$\boxed{1}$ について

命題１は、与えられた円の中心を求める作図であり、すべての命題において使用されていると考えられる。なぜなら、円が描かれるためにはその中心が求められなければならないからである。

（２）$\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ について

この４つの命題は、例えば命題２は「円周上の任意の２点を結ぶ線分は円の内部にある」というように円の凸性を示しており、総じて円の形に関する命題と考えられる。また、命題７・命題８はユークリッド『原論』（全13巻）のいずれにおいても使用されていない孤立した命題となっていて違和感を感じる。しかし、トドハンター著の『原論』においては、命題７と命題８は命題９の証明に使用されており、これらは「円は対称性を持つ形である」ことを示していると考えられる。

（３）$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ について

これらは、弦に関する命題であり、命題３は命題４で使用され、命題４は第13巻の命題11で使用されている。

（４）$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{10}$ について

これらは、２つの円に関する命題であり、命題５は命題10で使用され、命題６は命題11・命題12・命題13で使用されている。また、命題10は命題23の仮定となっていると考えられる。

（５）$\boxed{11}$ $\boxed{12}$ $\boxed{13}$ について

これらは、接点に関する命題であり、２つの円について、命題11は内接する場合、命題12は外接する場合が扱われ、それぞれ２つの中心を結ぶ線分は接点を通ることが示されている。そして、命題13において、接点は１つであることが証明されている。

（６）$\boxed{14}$ $\boxed{15}$ について

これらは、円の中心と弦との距離に関する命題である。命題14は命題15で使用され

ており、「弦のうち中心に近いものは遠いものより常に大きい」ことを示していると考えられる。

（7）$\boxed{16}$ $\boxed{17}$ $\boxed{18}$ $\boxed{19}$ について

これらは、円の接線に関する命題であり、命題16とその系においては円の直径の端点から垂直に引かれた直線が円の接線であることが示され、これを用いて命題17において接線の作図が扱われている。また、命題18・命題19は円の接線と円の中心と接点を通る直線の関係を示していると考えられる。命題16・命題19は接弦定理（命題32）へ、命題17・命題18は方べきの定理（命題36）へ繋がっていく。

（8）$\boxed{20}$ $\boxed{21}$ $\boxed{22}$ $\boxed{31}$ について

これらは、円周角に関する命題であり、命題20で中心角は円周角の２倍であること、命題21で同じ弧の上の円周角は等しいことが示され、これらを用いて円に内接する四角形の性質（命題22）や半円内の角についての性質（命題31）が示されるとともに、命題31は接弦定理（命題32）に使用されることになる。

（9）$\boxed{23}$ $\boxed{24}$ $\boxed{25}$ について

これらは、円の切片に関する命題である。前記の（４）でも指摘したように、命題23の証明において「円は円と２つより多くの点で交わらない」ことを仮定としていると考えられるので、相互関係図では命題10から命題23へ矢印が付けられている。命題25は、「円の切片が与えられたとき、その切片を含む完全な円を描くこと」という作図題である。

(10) $\boxed{26}$ $\boxed{27}$ $\boxed{28}$ $\boxed{29}$ $\boxed{30}$ について

これらは、円の弧に関する命題である。命題26は命題27・命題28・命題29で使用されており、命題27は命題29で、命題28は命題30で使用されている。また、命題29は第４巻の命題11と命題15で使用されており、命題30は第４巻の命題16で使用されている。命題30は、「与えられた弧を２等分すること」という作図題である。

(11) $\boxed{32}$ $\boxed{33}$ $\boxed{34}$ について

これらのうち命題32が接弦定理であり、これを用いて命題33・命題34の作図が可能となっている。

(12) $\boxed{35}$ $\boxed{36}$ $\boxed{37}$ について

これらは、方べきの定理に関する命題である。命題35では、円内に２つの任意の弦が引かれ、その交点が円内にある場合が扱われ、命題36では円内の１つの弦の延長と円の接線の延長が交わる場合が扱われている。そして、命題37では、命題36の逆が扱

われている。

37個の命題のうち、作図題は、$\boxed{1}$ $\boxed{17}$ $\boxed{25}$ $\boxed{30}$ $\boxed{33}$ $\boxed{34}$ の６命題である。

２－２　命題に関するその他の注釈

前項の２－１で明示した「命題の相互関係図」は筆者独自のものであるが、例えば中村幸四郎著『数学史－形成の立場から－』（共立全書）では、

・円の中心に関すること（命題１，３，４，９）
・円の形に関連すること（命題２，７，８）
・２つの円の相互関係（命題５，６）
・円の弦に関すること（命題４，５）
・円の接線の作図およびその性質（命題16，17，18，19）
・円の中心角と円周角との関係（命題20）
・円周角の定理（命題21）
・円に内接する四辺形の定理（命題22）
・円の接線と接点をとおる弦のなす角がこの弦の上に立つ円周角に等しいという定理（命題32）
・与えられた角を含む円弧を作ること・切り取ること（命題33，34）
・円弧関係の一群（命題20～命題34）
・方べきの定理（命題35，36）
・方べきの定理の逆（命題37）(1)

のように、より細かな内容ごとに分類・整理されているものも見られる。しかし、中村幸四郎の書では第Ⅲ巻の各命題相互の関連については言及されていない。また、中村幸四郎、寺阪英孝、伊東俊太郎、池田美恵訳『ユークリッド原論』（共立出版）では、次のように、わずか７行にわたって命題が内容別に分類されているにすぎない。

第３巻

「この巻は円論であって11個の定義と37個の命題を含んでいる。与えられた円の中心を求める作図（命題１）からはじまり、(1)円の中心に関すること（命題2,7,8）、(2)円の形に関連すること（命題2,7,8）、(3)二つの円の相互関係（命題5,6）、(4)円の弦に関すること（命題4,5）、(5)円の接線の作図とその性質（命題16－19）、(6)円弧関係の命題群（命題20－34）、このなかに円周角の定理(21)、円に内接する四角形の定理（22)、円の接線と接点をとおる弦のなす角とその弦の上の円周角の定理（32)、与えられた角を含む円弧の作図（33,34)、方べきの定理とその逆（35,36,37)。」(2)

ところで、Ｔ．Ｌ．ヒースは、“The Thirteen Books of Euclid's Elements” において、以下の諸命題は第Ⅲ巻においても、また他の諸巻においても使用されていないと述べている。

命題７・命題８・命題12・命題13・命題15・命題25・命題33・命題34・命題35

これらの命題のうち、命題７と命題８は内容及び証明が複雑であり、他の諸命題の証明に使用することが想定されていたとは考えにくい。また、命題25・命題33・命題34はいずれも作図題であり、他の諸命題の証明に使用されないことは十分考えられる。

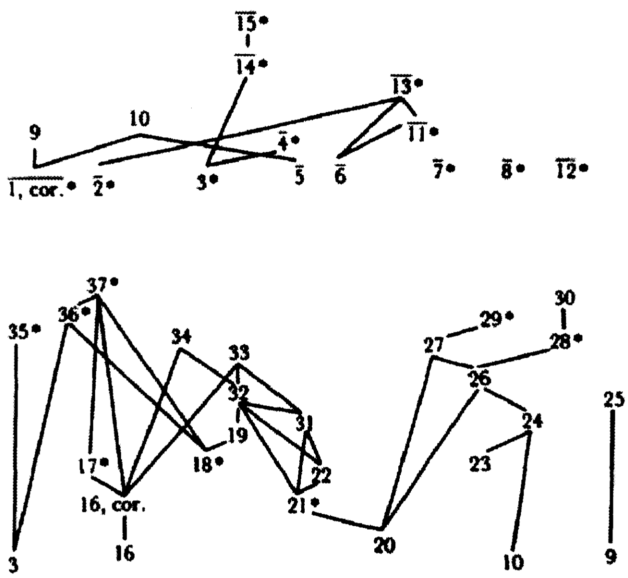
さらに、命題35（方べきの定理）は、長方形の面積に関する第Ⅱ巻の内容を用いて証明されていることから、第Ⅱ巻の延長上にあり、その１つの終点ともかんがえられる。

最後に残った命題12・命題13・命題15については、『原論』の他の命題で使用されてもよさそうに思われるが使用されていない。その理由は定かではないが、例えばもともとは命題12を使用して命題13が証明されていた可能性も否定できない。また、ユークリッド『原論』で使用されていなくても他の数学的著作において使用されていたとも考えられるが、いずれにしても不詳である。

一方、Ｉ.ミューラーは“Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements”において

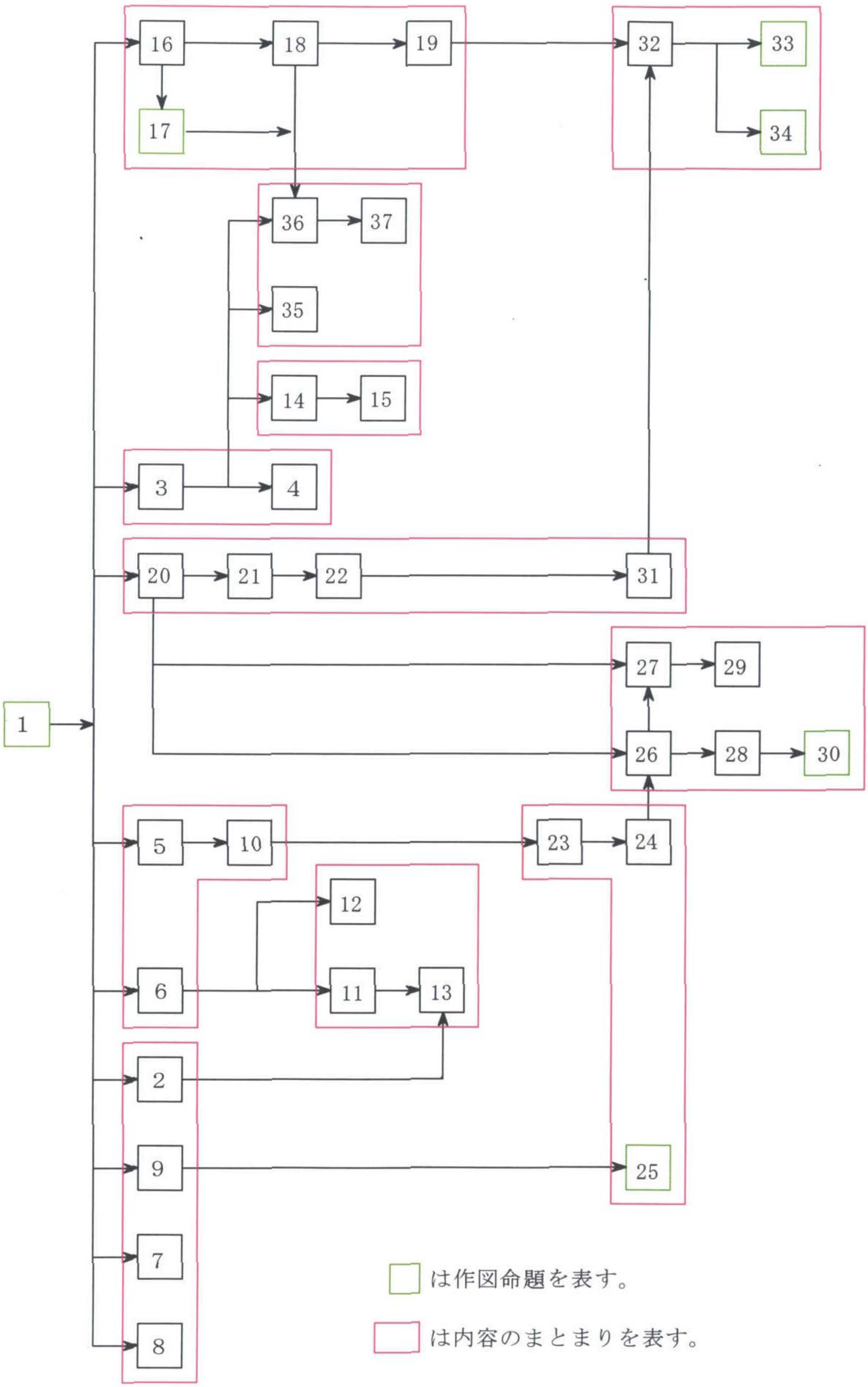
「第Ⅲ巻はその在り方に関し、論理的観点から見て第Ｉ巻とは類似せず、第Ⅵ巻に類似していて、体系として緩やかに組み立てられている」(3)

と述べるとともに、下記のような命題相互の関係図を示している。



なお、最近発行された、斎藤憲・三浦伸夫『エウクレイデス全集』（東京大学出版会）によれば、

「この命題(命題12)は、ヘロンが追加したものであり、本来の『原論』にはない。」(4)と述べられている。



は作図命題を表す。

は内容のまとまりを表す。

[引用文献]

（１）中村幸四郎著『数学史－形成の立場から－』（共立全書　1981年）

（２）中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳『ユークリッド原論』（共立出版、1971年、初版１刷発行　1985年　初版10刷発行）ｐ．499

（３）Ｉ.Mueller,Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements,MIT Press　1981 年　ｐ．177

（４）斎藤憲・三浦伸夫『エウクレイデス全集』（東京大学出版会　2008年1月28日初版）ｐ．299

第２章

幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書

第１節　イギリス中等教育における幾何学教育
第２節　幾何学教授法改良協会の設立と活動
第３節　幾何学教授法改良協会の『平面幾何学教授條目』
第４節　幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書
　　　　の内容と構造
第５節　第２章のまとめ

第１節　イギリス中等教育における幾何学教育

イギリスでは、1760年頃、産業革命が起こり、国民の社会生活に大きな影響を及ぼし始めた。そして、社会的・経済的問題は、必然的に教育問題を呼び起こしたと言われている。

当時のイギリスの中等教育界では、すでにジェントルマン階層の子弟を教育するパブリックスクールが中世以来の伝統を持つ学校として存立し、深くイギリスの社会に浸透していたが、産業革命後の富める中産階級層はパブリックスクールの基調であった古典主義を批判し、実験科学や数学などをも教育課程に入れるべきことを主張し始めた。

このような気運から、種々の教育実験学校が設立された。たとえば、ヘーゼルウッドスクール（1819年）では、近代的諸科学を取り入れ、数学科では算術、代数、測量、三角法及び幾何学が教授された。また、1827年には「有用智識普及会」が創立され、工業、科学、数学方面の文献が安価で販売されたのであった。

パブリックスクールにおいても、19世紀初頭になって、教育課程に数学科を位置づけようとする気運が高まってきた。その先鞭をつけたのがラグビー校であった。19世紀のパブリックスクール改革史上最も有名な校長はラグビー校のアーノルドであるとも言われているが、ラグビー校の教科別週あたり授業時間数は、古典時間$17\frac{3}{4}$に比べて、数学$2\frac{3}{4}$時間であるから、まだ微温的な改革と言えなくもない。

しかし、ともかくも数学科が正規の課程に取り入れられたのは、当時としては画期的なことであり、イギリスのパブリックスクールにおける数学科の確立がこの頃から始まったと見てよい。1834年のラグビー校の数学課程の要目は、

算術（１年級ー４年級）整数、分数、小数から開平開立まで
代数（４年級ー６年級）初歩から１次方程式、２次方程式まで
幾何（４年級ー６年級）ユークリッド第Ⅰ巻から第Ⅵ巻まで

であったと言われている。また、これら以外に、第６年級には、三角法と解析幾何の初歩が加えられたようである。

当時のイギリスで出版されていた幾何学書としては、

Robert Simson, Elements of Euclid（1756）
Thomas Simpson, Elements of Geometry（1780）
John Playfair, Elements of Geometry（1795）

などが見られる。これらの中で最も多く使用されたのは、シムソンの幾何学書であったと言われている。

ユークリッド『原論』は、390年頃活躍したアレクサンドリアのテオンによって、わかりやすくポピュラーなものしようという意図のもとに改訂されたが、結果として、かなり恣意的な改竄によって『原論』の原型は著しく歪められてしまった。しかし、このテオン版は一般に非常に普及したので、残存したマニュスクリプト（写本）はほ

とんどがこれである。この事態は、1808年にフランスのペイラールが初めて非テオン版のマニュスクリプトを発見して、「原ユークリッド」への復帰の第一歩を踏み出すまで続いたのである。したがって、5世紀以降は『原論』のテキストに大きなくずれが生じ、19世紀初頭まで、ユークリッドはこの歪曲されたテオン版によって知られていたことになる。

シムソンは自身の幾何学書の序文において、テオン版の誤りを正し、可能な限り、オリジナルな厳密性を保った「原論」を回復させたいと述べている。しかし、忠実な訳というよりは、自己の解釈を加えたシムソン流の「原論」である。英訳の『原論』としては最も有名で、多くの版を重ねた。ただし、第Ⅶ巻ー第Ⅹ巻及び第ⅩⅢ巻は含まれていない。

その後のイギリスにおいて出版された幾何学書としては、

Robert Potts, Euclid's Elements of Geometry（1845）

Todhunter, Elements of Euclid（1862）

Wilson, Elementary Geometry（1867）

Wright, The Elements of Plane Geometry（1868）

があるが、これら以外に、ド・モルガン（De Morgan）によるユークリッド擁護の論文があると言われている。

ユークリッドを教えるということが、19世紀の初期に、徐々に盛んになってきたことは、版の数によって知ることができる。1801－20年には52版、次の10年では36版、1831－40年では53版にも及んでいる。これらの幾何学書は、シムソンの幾何学書をはじめとする18世紀後半に発行されたものである。こうして、ユークリッドは教科書であるだけではなく、幾何学と同義語になったようである。

しかし、19世紀前半におけるユークリッドの扱われ方は、イギリスのケンブリッジやオックスフードなどの試験制度の影響もあって、たとえば、命題の順序はユークリッド『原論』に忠実であることが要求され、その内容も暗記、記憶することに重きが置かれた硬直したものであった。

こうした幾何教育にカンフル剤を投入したのが、1867年の「学校調査委員会」の報告書であった。その報告書では、

「少年たちはユークリッドに何年も取り組んできてユークリッドを完璧に知っているかもしれないが、幾何学の精神・方法論・成果を何も知らないに等しい。ユークリッドに費やされた時間は無駄であった。時間は大切であり、もっと良い方法が求められている」(1)

と述べられている。この委員会の主要メンバーであり、有能な数学者であったテンプル博士は当時ラグビー校の校長であり、後にカンタベリー大司教にもなった。彼は、委員会が考えるようなユークリッドを超えた幾何の教科書を作るように、ウイルソンに助言したのである。ウイルソンは直ちに着手し、編集にあたって、フランスからアミオーやブリオーなどの教科書を入手するとともに、ルーシェ・コンブルースの教科書を最大限利用したのである。また、マイヤーによるドイツの教科書、合衆国ピアス

の教科書なども利用した。こうして、ウイルソンの幾何学教科書の第1版は1868年4月に発行され、ラグビー校で直ちに使用され始めたのである。

ウイルソンは、彼の幾何学書がユークリッドの第I、II巻を超えるものでなかったと述懐しているが、同時に、この書が英国におけるユークリッドへの最初の挑戦であったとも述べている。前書きでは、その起源と目的を説明し、テンプル博士・モバーリ師（幾何学者の偏見のない“精神”を持った正統派の同僚）そしてロンドン大学のハースト教授への感謝が述べられている。

ウイルソンの幾何学書の前書きでは、ユークリッド批判が次の4点にわたって展開されている。

(1) 不自然さ

明解さと自然性を犠牲にしている。

全体がいかに数少ない公理や仮定に依存して作られているか。

(2) 証明が例外なく三段論法であること

そのせいで、「不必要に固定的で、漠然としていて、退屈で、不毛な」ものになっている。

(3) 証明の長さ

長々と証明をやって、知性よりは記憶力を鍛える。

(4) 示唆のなさ

すべての定理と問題は一定レベルで扱い、重要な定理の重要性を示したり、重要な方法をはっきり示すことをしない。(2)

さらに、ユークリッドによって幾何を教えることは、「少年たちが幾何学の知識についての本当の試験問題を解く手助けとならない」と述べている。

このウイルソンの批判は、ユークリッドをめぐる論争を引き起こした。ド・モルガンは、

「我々はウイルソンがいうようなやり方が、この国においてユークリッドに取って代わるものではないと自信をもって言える。古典的な幾何学はとても英国的な主題なのだ」

と反論した。ド・モルガンが求めたのは論理的欠点のない「修正された」ユークリッドなのであった。

ウイルソンの幾何学書に対するド・モルガンの批判に、他の数学者たちも共鳴した。その中には、トドハンターやドジソン（ルイス・キャロル）も含まれ、『ユークリッドと現代の反対者』の中で、ドジソンは、ルジャンドルには賛成しているが（ただし、上級の生徒についてのみ）、ウイルソン、ライト、及びアメリカ人のベンジャミン・ピアスについては嘲りのみ示している。

特に、ウイルソンは激しく批判されているが、それは、彼が数学学位試験の主席合格者であり、「だから、もっと分別があるべきだ」という事実に基づいている。トドハンターの論文はウイルソンの前書きに対する批判であり、彼のユークリッド擁護は、

次のような根拠に基づいている。

(a)普通の生徒はユークリッドの勉強から何かをちゃんと学んでいる。反対者のやり方から学ぶよりずっと多くのものを。

(b)ユークリッドを保持しようとしている人々は改革者より数学についての意見を述べるに当たって有能である。つまり、ケンブリッジの数学者の多数は変化に反対している。

(c)ユークリッドに反対する勢力はただ反対するという点でのみ連帯している。代替案について一致した意見はない。

(d)ユークリッドの欠点は「上手に教えること」で克服できる。

(e)ユークリッドが廃止された後に起きると予想される試験の問題を、ウィルソンは過小評価している。

(f)ユークリッドで鍛えられた英国の数学者は、問題の構成と解法における独創性と豊かさで無敵である。(3)

この論争では、たとえば、トドハンターとウイルソンでは、「普通の生徒」と言っても、その意味は異なっていたであろうし、問題を解くときに示す「独創性」を表出する生徒の割合についても、異なる見積もりをしていたであろう。また、「上手な教え方」についての見解も異なっていたであろうから、論争は噛み合ったものとはならなかったと思われる。

ともかくも、ウイルソンの幾何学書はかなりの関心を引き起こした。というのは、彼は数学学位試験の主席合格者であり、有名パブリックスクールの校長であり、英国協会の科学教育委員会のメンバーであり、一般教育に関する分野にも、貢献をしていたからである。そして、1870年1月22日、彼はロンドン数学学会での講演に招かれ、遠くエジンバラにまで足を運んだのである。

ウイルソンの講演はラグビー校のビリングトンによって印刷され、広まったが、その最終段落は、

「幾何学を教える際には、演繹的な科学に先立って、事実の親しみやすさがあるべきである。この科学は形而上学上の問題としてはっきりするべきである。その自然さ・秩序・分かりやすさ・正確さで区別されるべきである。私はまたユークリッドの原論は方法論・統一性・優美さに欠けているということを示そうとしました。『原論』が理由より記憶の訓練であることも。また、連想・有用性に欠けることも。詳細と原理の誤りによって価値を損なっていることも。20世紀前の書き手から予想されるかもしれないのと同じぐらいに「幾何学」の教科書は不適切で不適当である。たとえ、ユークリッドが持っていたのと同等のすばらしい完全な能力をその書き手が持っていても」(4)

という内容であった。

これによって、幾何教育の改革への関心は増大し、英国協会か大学教授の学会などによって、「権威あるシラバスを作成し、それに基づいて教科書を編集するような会」を立ち上げて欲しいという希望が出されるようになったのである。

第２節　幾何学教授法改良協会の成立と活動

幾何学教授法改良協会は、1921年1月4日に、創立50周年を記念して講演会を開催したが、そこでの James M. Wilson の講演「改良協会の初期の歴史」(“The Early History of the Association”) の記録が雑誌 “The Mathematical Gazette” Vol.10 (1921年) に掲載されている。

前節の最後に、英国協会か大学教授の学会などによって、「権威あるシラバスを作成し、それに基づいて教科書を編集するような会」を立ち上げて欲しいという希望が出されたと述べたが、これは、ウイルソンの講演記録「改良協会の初期の歴史」に記録されていることである。「改良協会の初期の歴史」では、続いて、

「しかし、そのような組織からの動きはありませんでした。仕方がないので、自分たちで協議会を作ることにしました。その必要性は緊急でしたが、慎重に検討し、議論する必要がありました。そして、ついに子ども（幾何学教授法改良協会のこと—筆者）が生まれることとなったのです」(5)

と述べられている。

1870年1月のエジンバラでのウイルソン講演から、1871年1月の改良協会設立までの経緯については、G. Howson の “A History of Mathematics Education in England” に詳しい。それによれば、1870年3月の『ネイチャー』誌に、「もし試験の本体が、未だにユークリッドの文体を主張するのであれば、そのような本に何の価値があろうか」という問題提起が、ロンドン数学学会の事務局長でありユニバーシティ・カレッジ校の数学主任であるロバート・タッカーによって取り上げられたとのことである。

続いて、1870年5月26日の『ネイチャー』誌では、バーミンガムのキング・エドワード校の若い教師であるロードン・レベットによって書かれた2番目の手紙によって、試験の改革を求める「反ユークリッド協会」を結成するために数学教師は連帯すべきだという提起がなされている。そして、1870年6月には、タッカー、レベット、ウォーメルが、ユークリッドに反対する『ネイチャー』誌の読者に対し、レベットに手紙を書くよう呼びかけている。

こうして、ウイルソンの家でさらなる行動を起こすための会合が開かれ、正式に協会を設立するため、ロンドンのユニバーシティ・カレッジで1871年1月に集うことが決定したのである。

1871年1月17日、ロンドン・ゴウワー街のユニバーシティ・カレッジにおいて、26人のメンバーと新協会への入会を辞退した数名の人の出席のもと、ド・モルガンの後継者であるロンドン大学のハースト博士の司会によって会合がもたれ、大いに議論された後、

The Association for the Improvement of Geometrical Teaching (A.I.G.T.)

という名称が採択され、ここにおいて、正式に「幾何学教授法改良協会」が設立されたのである。

その後、ハーストが会長に、ウイルソンとジョシュア・ジョーンズ（ウイルソンの

旧勤務校キング・ウイリアム・カレッジの校長）が副会長に、レベットとマッカーシー（バーミンガムのキング・エドワード校の教頭）が書記に選ばれた。そして、協会の目的が、

「この協会の目的は、幾何教育の全般的改良を促進することである。準備として必要なことは、あらゆる努力を払って試験を行うよう促進すること、どの特定の教科書を使用していても独立的に問題の枠組みを作ることである」

というように決定された。

国立国会図書館所蔵の“A.I.G.T. : 14th General Report January 1888”によれば、第14回総会（1887年１月14日）での名誉会員は15名、通常会員は186名であるが、この中に、菊池大麓の名前が、

Kikuchi, D.Y., M.A., Professor of Mathematics in the University of Tokio; Tokio, Japan.

のように見られる。

初期の協会は、教科書も一緒に発行すべきか、それともシラバスを優先させるべきかが議論された。G. Howson の“A History of Mathematics Education in England”によれば、ウイルソンの主張の結果、シラバス作成を優先して行なうことが決定されたと記述されているが、ウイルソンの“The Early History of the Association”によれば、

「教科書も同時に発行するか、それとも、シラバスのみを作成するか、が議論され、私（ウイルソン—筆者）は前者を主張したが、協会は後者を選んだ」(6)

と記録されていて、若干の齟齬がある。

しかし、まず最初にシラバスを作成し、その後、教科書の編集に進むという方針が決定されたことは明らかであり、ハーストを中心としてシラバス作成の委員会が構成されたのである。

ところが、会長ハーストは、良いシラバス・教科書よりも、良い教授法が重要であるとの考えから、新シラバスの性急な作成に慎重な姿勢を示したこと、急速に増えた会員には、測量や工学方面に関心を持つ人、幾何学における諸概念に限られた理解しか示し得なかった人など、多様な層があったことなどから、シラバス作成は遅々として進まず、『原論』第Ⅰ巻ー第Ⅲ巻をカバーしたシラバス“The Syllabus of Plane Geometry”がまとまったのは、ようやく1873年であり、第Ⅳ巻ー第Ⅵ巻に相当するシラバスが完成したのは1875年のことであった。

シラバス発行の後、改良協会の活動は、1884年の「平面幾何学教科書」発行へと続いていくのであるが、その過程は、“The Elements of Plane Geometry”の序文に見られる。その概要は以下の通りである。

シラバスは多くの教師や幾何学に関心を持つ人々に好意的に受け入れられた。そのことは、シラバスが3000部以上も発行され、売却されたことに示されているし、さらなる要望があって、新版が発行されたことからもわかる。

しかし、改良協会の多くの会員は、シラバスがさらに広く受け入れられ、採用されるためには、各命題の証明をもシラバスの中に含めて、オーソライズしたものを出版すべきであると考えた。こうして、1881年1月の年次総会において、「平面幾何学の

各条目の命題に証明を付けるための小委員会を立ち上げる」ことが決議されたのである。

この決議にもとづいて組織された小委員会の作業の結果、シラバスの第Ⅰ巻、第Ⅱ巻の内容を網羅した証明をつけて公表された。そして、それは1884年3月20日の総会において是認され、“The Elements of Plane Geometry : part Ⅰ”（corresponding to EUCLID BOOKS Ⅰ－Ⅱ）として刊行されたのである。

ただ、改良協会としては、この「part Ⅰ」をもって完全なるものとは考えられていない。協会では、シラバスの條目の一部に証明と練習問題を付けた一つの版として受け止められたに過ぎない。したがって、多くの教師から、「part Ⅰ」の他に、さらに詳細な例解や説明、練習問題などを含んだ書が望まれたが、それは協会としての事業ではなく、一個人の著作者の作業とすべきであると述べられている。そして、最後に、その作業に従事しようとする者に対しては、協会の名誉書記や出版社と協議して作業を進めて欲しいと述べられている。

上記の作業が誰によって進められたのかは定かでないが、結果的には、1888年に、ユークリッド『原論』の第Ⅲ巻ー第Ⅵ巻に対応する“The Elements of Plane Geometry”が「part Ⅱ」として発行されたのである。

こうして、ユークリッド『原論』の第Ⅰ巻ー第Ⅵ巻に対応する改良協会の平面幾何学教科書はできたものの、それは低学年では使用されたが、ケンブリッジやオックスフードなどの試験を目前にすると、再び『原論』に復帰する状態であったようである。各種の試験委員会で、A.I.G.T.の見解を採用したのは、ロンドンとエジンバラの2大学のみであり、イギリスの伝統的で堅固な試験制度の壁を打破するには至らなかったと言える。

幾何学教授法改良協会は、次第に幾何学だけでなく、初等数学全般の教育を対象とするようになり、1897年には、その名称も“The Mathematical Association”（数学協会）と改められることになる。

第３節　幾何学教授法改良協会の『平面幾何学教授條目』

第三編　圓

第壱節　原質

円、半径及び直径の定義については、第一編定義８、９、10を見よ。
円を軌跡と見なすことについては、第一編第五節（一）を見よ。

定義１　弧とは周の一部分なり。
定義２　円の弦は周上の二点を結付ける直線なり。
弦は周を二部分に分ち、その相等しからざるときは優弧、劣弧と称す。
二者を互いに共軛なりという。
定義３　円の弓形とは、弦とその周を分ちたる弧の含む形なり。弓形は、弧の優共軛或いは劣共軛なるに従て優弓形、劣弓形と称す。
定義４　円の中心において二半径の為す共軛角は半径の端に在る共軛弧の上に立つという。優角は優弧の上に劣角は劣弧の上に立つ。
定義５　円の扇形とは弧とその両端へ引ける半径の含む形なり。扇形の角とは中心において扇形の弧の上に立つ角なり。
定義６　同一の中心を有する円を同心円と称す。

円の下の性質は第一編定義８の直接の結果なり。
（甲）　円は唯一個の中心を有す。
（乙）　一点はその中心よりの距離、半径より小なる、之に等しき、或いは之より大なるに従て円周内に、円周上に、或いは円周外に在り。
（丙）　一点円の中心よりの距離は、その点の円周内に、円周上に、或いは円周外に在るに従て、半径より小なり、或いは之に等し、或いは之より大なり。

定理１　相等しき半径の円は全く相等し（重ねる方法）
系　周の交わる二円は同心たる能わず。

定理２　同円において或いは等円において、中心においての相等しき角は相等しき弧の上に立つ。中心においての相等しからざる角の中、大なる角は大なる弧の上に立つ。（重ねる方法）
系１　同円或いは等円の扇形にして角相等しきものは相等し。角相等しからざれば大なる角を有つもの大なり。（重ねる方法）
系２　円の直径は之を二等部分に分つ。互いに直角なる二直径は円を四等部分に分つ。

定義７　前者を半円と称す。後者を四分円と称す。

定理３　同円或いは等円において、相等しき弧は中心において相等しき角に対す。
相等しからざる弧の中、大なる弧は中心において大なる角に対す。（転換法）
系　同円或いは等円の扇形にして、相等しきものはその角も亦等し。相等しからざる扇形の中に就ては大なるもの大なる角の上に立つ。（転換法）

第弐節　弦

定理４　同円或いは等円においては相等しき弧は相等しき弦に対す。
相等しからざる劣弧の中、大なる弧は大なる弦に対す。
（定理３及び第一編定理５及び16）
系　同円或いは等円において二つ相等しからざる優弧の中、大なる弧は小なる弦に対す。

定理５　同円或いは等円において相等しき弦は相等しき優弧及び相等しき劣弧に対す
相等しからざる弦の中大なる弦は大なる劣弧及び小なる優弧に対す。
（転換法）

定理６　中心より弦の中点まで引ける直線は此弦に直角なり。

定理７　中心より弦に直角に引ける直線は此弦を二等分す。

定理８　弦の中点より之に直角に引ける直線は中心を過る。
（定理６、７、８の内、何れにても証明すれば他は同一法によりて真なり。）
系　二与点を過る総ての円の中心の軌跡は、此二点を結付ける直線を直角に二等分せる直線なり。

定理９　一直線は円周と二つより多くの点において交る能わず。
系　円の弦は全く円の内に在り。
（記）故に円周はその何処にても中心に向かいて凹なり。

定理10　同一直線上に在らざる三与点を過る円周一つ有り。
唯一つ有るのみ。〔軌跡の交り（甲)〕
系１　二円周同一の三点を過れば全く同一なり。
系２　二つの異なれる円の周は二つより多くの点において交る能わず。
系３　若し円内の一点より周へ二つより多くの相等しき直線を引き得れば此点は中心なり。

定理11　同円或いは等円において相等しき弦は中心より等距離なり。
二つの相等しからざる弦の中大なるものは小なるものより中心に近し。
（始めの部分は定理７及び第一編定理20によりて、後の部分は二弦の各一端を同一点に置き定理５及び第一編定理15によりて。）

定理12　同円或いは等円において中心より等距離の弦は相等し。不等距離の二弦中中心に近きもの遠きものより大なり。（転換法）
系　直径は円の最大弦なり。

第三節　弓形の内の角

定義８　円周上の一点より引ける二弦の為す角を周においての角と称し、その二辺の間に在る弧の上に立つという。

定義９　弓形の弧の一点よりその弧の両端へ引ける二直線の挟む角を弓形の内の角と称す。

定理13　周においての角は同弧の上に立つの中心においての角の半分なり。
（角の大小に関らず同一の方法を以て証明す。）

定理14　同弓形の内の角は相等し。（定理13）
系　弓形の弦のその内の一点において対する角は弓形の内の角より大なり。
その外の一点（底辺の同方に在りて）において対する角は弓形の内の角より小なり。（第一編定理９）

軌跡　一与直線の一方にある点にして此直線はその点において常角に対するときは諸点の軌跡は此直線を弦とせる弧なり。

定理15　弓形の内の角はその弓形の半円より小なる、之に等しき、或いは之より大なるに従て、直角より大なり、或いは之に等しく、或いは之より小なり。（定理13）

定理16　弓形はその内の角直角より大なる、之に等しき、或いは之より小なるに従て、半円より小なり、或いは之に等しき、或いは之より大なり。（転換法）

定理17　円の内接四辺形の対角は補角なり。（定理13）
系１　円の内接四辺形の各外角は之に相対する内角に等し。
系２　四辺形の対角補角なれば之を一円の内接形と為すを得。

第四節　甲　切線（直接法）

定義10　割線とは円周と二点において交る窮り無き直線なり。

定理18　円周上の一点より引ける各直線は円周と尚ほ一点において逢う。
独り同点において半径に直角なる直線は然らず。（第一編定理15）

定義11　無窮に延長するも円周と唯一点において逢う直線は円に切す或いは円の切線なりという。

定義12　切線の周に逢う点を切点と名く。

下に掲ぐる所は直ちに定理18より来る所の結果なり。
〔イ〕　円周の一点において円に一つ唯一つの切線を引くを得。
〔ロ〕　円の切線は切点へ引ける半径に直角なり。
〔ハ〕　円の中心は切点において切線に直角なる直線上に在り。
〔ニ〕　中心より切線への垂直線は切点を過る。

〔記〕　直線と円の相対の位置について
直線はその円の中心よりの距離、半径より小なる、之に等しき、或いは之より大なるに従いて、円と交わり、或いは之に切し、或いは全く之と逢わざる可し。

以上述たる数條の逆は転換法によりて証明するを得。

定理19　切線及び弦の挟む角は円の反対の弓形の内の角に等し。
（ユークリッドの証明）

定理20　円外の一点より円に二つ唯二つの切線を引くを得
（定理15　及び　定理14系）
系　一外点より円へ引ける二切線は相等しくしてその点と円の中心とを結付る直線と相等しき角を為す。（第一編　定理20　系）

第四節　乙　切線（極限法）

本節の定理は第四節甲と相対する様に整理せり。
甲、乙、各独立に完全なるものなり。
定義10　第四節甲における如し。

定理18　第四節甲における如し。
（後の部分は極限に由りて証明す。）

定義11　若し円の割線その位置を変し、その二交点漸次に相近づき終に全く相合すれば此極限の位置に至りたるときは直線は円に切す。又は円の切線なりという。

結果〔イ〕〔ロ〕〔ハ〕〔ニ〕は第四節甲における如し。

〔記〕　直線と円と相対する位置に付て、第四節甲における如し。

定理19　第四節甲における如し。（極限によりて）

定理20　第四節甲における如し。（極限によりて）

系　第四節甲における如し。（第四節甲における如し）

第五節　二円

定理21　二点において交わる二円周の中心を過る直線は、この二点を結付ける直線を直角に二等分す。（第一編定理18及び５に由りて或いは軌跡（丙）に由りて）

定理22　若し二円周両円の中心を過る直線上の一点において逢えば他の点において逢う能わず。（定理21の対偶）

定義13　その周唯一点において逢う二円は相切すという。
その逢う点を切点と名く。

定理23　若し二円周両円の中心を過る直線上に在らざる一点において逢えば、尚ほ他の一点において逢う可し。
（定理22の裏、或いは直接幾何学的証明）

定理24　若し二円相切すれば両円の中心を過る直線はその切点を過る。
（定理23の対偶）

系　相切する二円は切点において同一の切線を有す。（定理18）

〔記１〕二円の中心の距離、その半径の和より大なれば、二円周は全く逢わず、各円全く他の外に在り。

〔記２〕二円の中心の距離、その半径の和に等しければ、二円周は一点において逢ひ各円全く他の外に在り。

定義14　この場合においては二円は外切すという。

〔記３〕二円の中心の距離、その半径の和より小、その差より大なれば、円周は二点において逢う。

定義15　この場合においては円は相交わるという。

〔記４〕二円の中心の距離、その半径の差に等しければ、円周は唯一点において逢ひ一円は全く他の円の内に在り。

定義16　この場合において二円は内切すという。

〔記５〕二円の中心の距離、その半径の差より小なれば、二円周は全く逢わず、一円は全く他の円の内に在り。

〔記６〕上五記の逆も亦真なり。〔転換法〕

第六節　作図題

作図１　与円或いは与円弧の中心を得ること。

作図２　与弧を二等分すること。

作図３　円周上或いは円周外の一点より与円に切線を引くこと。

作図４　二与円に通ずる切線を引くこと。
円の相対する位置に由りて二円に通じて引くことを得る切線の数の論説。

作図５　同一直線上に在らざる三点を過り円を書くこと。

作図６　皆平行ならざる又一点を過らざる三直線に切する円を書くこと。

定義17　三角形の三辺に切する円をその内接円と名く。

定義18　三角形の一辺及び他の二辺の引長に切する円をその傍書円と名く。
三角形の内接円及び傍書円の論説。

作図７　与円内に与三角形と等角なる内接三角形を書くこと。

作図８　与三角形と等角なる与円の外接三角形を書くこと。

作図９　与直線の上に与角を含む円の弓形を書くこと。

作図10　与円より与角を含む弓形を割り去ること。

円とその内接形及外接形との関係

定理25　一円の全周を任意数の相等しき弧に分ては此等の弧の弦の為す内接多角形は正なり。又総て分点においての切線の為す外接多角形も亦正なり。

定理26　正多角形の二角を二等分する直線の交点は多角形の総ての項より等距離なり。又総ての辺より等距離なり。

作図11　一つの与正多角形の内接円及び外接円を引くこと。

作図12　与円の内接及び外接正四、八、十六、三十二・・・辺形を書くこと。

作図13　与円の内接及び外接正三、六、十二、二十四・・・辺形を書くこと。

第七節　円及び面積

定理27　若し円の一弦その弦上或いはその弦の延長上の一点に由りて二分に分たるれば此二分の含む矩形は半径の上の正方形及び分点を円の中心に結付る直線の上の正方形の差に等し。

系１　一与点を過る弦の二分の含む矩形は何れの弦にても皆同じ。

系２　若し与点円内に在れば之を過る弦の二分の含む矩形は与点に由りて二等分さるる弦の半分の上の正方形に等し。

系３　若し与点円外に在れば之を過る弦の二分の含む矩形は此点より円へ引ける切線の上の正方形に等し。

系４　逆に若し外点を過る弦の二分の含む矩形此点を円周上の一点に結付ける直線の上の正方形に等しければ此直線は切線なり。

作図14　円の内接正十辺形を書く事、因て円の外接正十辺形を書くこと。
又与円の内接及び外接正五辺形及び二十、四十、八十・・・辺形を書くこと。

作図15　円の内接正十五辺形を書くこと。因て円の外接正十五辺形を書くこと。
又円の内接及び外接正三十、六十、百二十・・・辺形を書くこと。

第４節　幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書の内容と構造

“The Elements of Plane Geometry" 略して『あそしえーしょん　初等平面幾何学』

第三本　圓

第一節　原質

定義１　円とは、円周と名くる一線を以て囲みたる平面図形にして、その図形内の或る一点より円周へ引ける諸直線互いに相等しきものなり。此一点を円の中心と名づく。(原論　　第１巻　定義15　定義16)

定義２　円の半径とは、中心より円周に引ける直線をいう。
(原論では、半径の定義なし)

定義３　円の直径或いは円形とは、中心を通過しその双方円周において限れる直線をいう。(原論　　第１巻　定義17)

定理１　円の中心より一点への距離は、その点の円周内或いは円周上或いは円周外に在るに従て半径より小或いは等しく或いは大なり。

推論　中心より一点への距離その半径より小なるか或いは等しきか或いは大なるに従い、その一点は円周内に或いは円周上或いは円周外に在り。

定理２　円の直径はその円を半円と名くる二個の恒相等の部分に分つ。
(原論　　第１巻　定義17　定義18)

推論　互いに直角に相交わる二個の直径はその円を象限或いは四分円と名づくる四個の恒相等の部分に分つ。

定理３　相等半径の各円は恒相等なり。(原論　　第３巻　定義１)

推論１　二円相合するときその共通の中心を心として一円を回転するも二円は常に相合す。

推論２　不等半径の同心円は相会することなし。(原論　　第３巻　命題６の対偶)

推論３　円周互いに相会する二円は同心円なることなし。(原論　　第３巻　命題５)

第二節　中心及び扇形における角

定義４　弧とは円周の一部分なり。その和全円周をなす二弧を互いに連弧なりという。二弧中大なるものを大連弧或いは優弧といい、小なるものを小連弧或いは劣弧という。

定義５　二半径によつて円の中心になす連角はその半径によって挟まれたる連弧に対してその上に立つという。大連角は大連弧に対してその上に及び小連角は小

連弧に対してその上に立つ。

定義６　扇形とは弧及びその弧の両端に引ける半径とにて囲む図形をいう。
扇形の角とはその扇形の弧に対して立つところの中心における角をいう。
（原論　　第３巻　定義10）

定理４　同円或いは相等円において相等の中心角は相等の弧に対して立ち、又二個の不等の中心角中大なるものは大なる弧に対して立つ。
（原論　　下線部は　第３巻　命題26　後半は追加された内容）
推論　同円或いは相等円において相等角を有する扇形は相等しく、又不等角を有する二個の扇形において大なるものは大角を有す。

定理５　同円或いは相等円において相等弧は中心における等角に対して立ち、又二個の不等弧のおいて大なるものは中心における大角に対して立つ。
（原論　　下線部は　第３巻　命題27　後半は追加された内容）
推論　同円或いは相等円の相等扇形は等角を有す。又二個の不等扇形において大なるものは大なる角を有す。

第三節　弦

定義７　円の弦とは円周上の任二点を連結する直線なり。
（原論では弦の定義なし）
定理６　同円或いは相等の円において相等の弧は相等の弦に対す。又二個の不等小弧の中大なるものは大なる弦に対す。
（原論　　下線部は　第３巻　命題29　後半は追加された内容）
推論　同円或いは相等円において二個の不等大弧において大なるものは小なる弦に相対す。

定理７　同円或いは相等円において等しき弦は等しき大弧及び等しき小弧に相対す。
又二個の不等弦において大なるものは大なる小弧及び小なる大弧に相対す。
（原論　　下線部は　第３巻　命題28　後半は追加された内容）

設問１　与弧を二等分すべし（原論　　第３巻　命題30）

定理８　中心より弦の中央点に引ける直線はその弦に垂直なり。
（原論　　第３巻　命題３の前半）

定理９　中心より弦に垂直に引きたる直線はその弦を二等分す。
（原論　　第３巻　命題３の後半）

定理10　弦の中央点を通過しその弦に垂直に引きたる直線は中心を通過す。
（原論　　第３巻　命題１）

設問２　与円或いは与弧の中心を求むべし。（原論　　第３巻　命題１　命題25）

定理11　円の弦上に在る諸点はその円周内に在り。又弦を双方何れに延長するもその延長上に在る諸点は円周外にあり。（原論　　下線部は　第３巻　命題２）
推論　一直線は円周と二点より多く会することなし。

定義８　割線とは二点において円の円周と会する無限長の直線なり。

定理12　同一直線上に在らざる三与点を通過する円周は単に一個のみなり。
推論１　共通の三点を有する二個の円周は全く相合す。
推論２　相合せざる二円の円周は二点より多き点において相会することなし。
（原論　　第３巻　命題10）
推論３　円内の一点より円周に引き得べき直線二個より多く相等しきときはその一点は中心なり。（原論　　第３巻　命題９）

定理13　同円或いは相等円において等しき弦は中心より等距離なり。又二個の不等弦においてその大なるものは小なるものより中心に近し。（原論　　前半は第３巻　命題14の前半　　後半は　第３巻　命題15の後半の逆）

定理13　（別法）

定理14　同円或いは相等の円において中心より等距離の弦は相等しく、又不等の二弦においてはその中心に近きもの大なり。（原論　前半は　第３巻　命題14の後半　　後半は　第３巻　命題15の後半）
推論　直径は円における最大弦なり。（原論　　第３巻　命題15の前半）

第四節　弓形における角

定義９　弓形とは弦及びその弦によって円周を二弧に分ちその弧の一個と弦とにて限る図形なり。弓形は之を限る弧の小弧或いは大弧なるに従い小弓形或いは大弓形と名く。（原論では、円の切片と定義　第３巻　定義６）

定義10　円の円周上の一点より引きたる二弦によって作れる角を円周における角と名け、又その両辺間の弧に対して立つ角という。（原論　第３巻　定義９）
定義11　弓形の弧上の一点よりその弦の両端に引きたる二直線によって作れる角を弓形における角と名く。（原論では切片内の角と定義　第３巻　定義８）

定理15　円周における角は同弧に対して立つ中心における角の半なり。
（原論　　第３巻　命題20）

定理16　同弓形における角は互いに相等し。（原論　　第３巻　命題21）
推論１　弓形の弦のその弓形内に在る一点に対する角は弓形における角より大なり。又その弦に関して同傍における弓形の外方に在る一点に対する角は弓形における角より小なり。
推論２　与有限直線の一傍においてその線に対して常角をなす一点の軌跡は該直線を弦とする弧なり。（現在の円周角の定理の逆）

定理17　弓形における角はその弓形の半円より小なるか或いは等しきか或いは大なるかに従い直角より大なるか或いは等しきか或いは小なり。
（原論　　第３巻　命題31）

定理18　弓形はその弓形における角直角より大なるか或いは等しきか或いは小なるかに従い半円より小なるか或いは等しきか或いは大なり。
定理17の逆

定義12　直線形の各角点一円の円周上に在るときはその直線形を円に内切すといい，又その円を直線形に外切すという。

定理19　円に内切四角形の対角は互いに補角をなす。（原論　　第３巻　命題22）
推論１　円に内切四角形の外角はその内対角に相等し。
推論２　四角形の対角互いに補角をなすときは此四角形に外切する円を書き得べし。

第五節　切線

定理20　円の円周上に在る一点を通過する凡ての直線再び円周に会せざる直線は単に一個あるのみ而して此直線はその点において半径に垂直なり。
（原論　　第３巻　命題16の逆）

定理20　（別法）

定義13　一点において円の円周と相会し再びその円周と相会することなき直線はその点において円に切すといい、或いは円に切線なりという。その点を切点と名く。（原論　　第３巻　定義２）
定義13　（別法）　もし円の割線の二交点漸次接近する方法において、その位置を変し遂に相合するとき、その極限の位置における割線は円に切すといい、或いは円に切線なりという。二交点の遂に相合したる点を切点と名く。

推論１　円周中の一つ与点においてその円に切線は単に一個のみ引き得る。
推論２　円の任切線は切点に引かれたる半径に垂直なり。（原論　　第３巻　命題18）
推論３　円の中心は切点において切線に垂直なる線中に在り。
（原論　　第３巻　命題19）
推論４　中心より切線に垂直に引きたる直線は切点と会す。
推論５　設問　円周中の一つ与点においてその円に切線を引け。

定理21　直線は円の中心よりの距離、半径より小なるか或いは等しきか或いは大なるに従いその円を截るか或いは切するか或いは全く会せず。
推論　円の中心より直線への距離はその直線の円を截るか或いは切するか或いは会せざるかに従い、半径より小なるか或いは等しきか或いは大なり。

定理22　円外の一点よりその円に単に二個の切線を引き得る。
推論１　円外の一点より一円に引きたる二切線は相等しく、又その点と中心を連結する直線と等角をなす。（一本20　推論１）
推論２　設問　　円周外の一与点よりその円に切線を引け。作図法及び証明法は此定理中に含有せり。（原論　　第３巻　命題17）

定理23　切線と切点より引ける弦とにて包括したる各隣角はその円を分つ弦の相隣れる弓形における角に等し。（原論　　第３巻　命題32）

設問３　与直線上に与角を包括する弓形を書け。（原論　　第３巻　命題33）

設問４　与円より与角を包括する弓形を截るべし。（原論　　第３巻　命題34）

第六節　二円

定義14　二円互いに外方に在りて単に一点において相会するときは、之を外切すといい、又各の一部分内方に在りて残部分外方に在るときは之を交截すといい、又一円他の円の内方に在りて単に一点において相会するときは之を内切すという。（原論　　第３巻　定義３（但し、内切、外切の定義なし））

定理24　二円その中心を連結する直線中にあらざる一点において相会するときは此二円は又他の点において相会す。而して二円は相交截す。此交截の二点を連結する直線は中心を連結する直線によりて直角において二等分せられ、又二中心間の距離は両半径の差より大にしてその和より小なり。
推論　二円単に一点のみにおいて会するときはその点は二中心を連結する直線上に在り。（原論　　第３巻　命題11　命題12）

定理25　二円もしその中心を連結する直線上に在る一点において相会するときは此二円は他の点において会することなく二円は外切或いは内切す。而して二中心間の距離は外切するとき両半径の和に等しく内切するときは両半径の差に等し。（原論　　下線部は　第３巻　命題13）

推論１　因て反否により若し二円交截するときはその交截点の何れも中心を連結する直線上に在らず。

推論２　定理24の推論も亦次の如く顕はすことを得る。
二円若し互いに切するとき（内切或いは外切）その中心を連結する直線は切点を通過す。

推論３　二円若し互いに切するときは切点において共通切線を有す。
何となれば、切点より一円の半径に垂直に引きたる直線は他の円の半径に垂直なり。ゆえに両円に切線なり。（三本20　推論２）

設問５　与二円に共通切線を引け。

第七節　内切形及び外切形

設問６　一直線上に在らざる三点を通過する円を書け。
作図法及び証明は定理12において示せり。

設問７　同一点にあらずして互いに相交わる三直線に切する円を書け。

推論　　二個の平行線第三の直線によりて交截せらるときは、此三直線に切する円は単に二個のみなり。

定義15　三角形の三辺に切する円をその三角形の内切円と名く。

定義16　三角形の一辺及び他の二辺の延長線に切する円をその三角形の傍切円と名く。（原論では内切円、傍切円の定義なし）

設問８　与円に与三角形と等角の三角形を内切すべし。（原論　　第４巻　命題２）

定義17　直線形の各辺その直線形内に在る一円に切するときは、その円を直線形に内切すといい、又此直線形を円に外切すという。

設問９　与三角形に等角の三角形を与円に外切すべし。（原論　　第４巻　命題３）

定理26　円の全周を等弧の若干個に分つとき此等の弧の各弦によりて作れる内切多角形は正多角形なり。而して各分点において引ける各切線によりて作れる外切多角形も亦正多角形なり。

定理27　正多角形の各角の二等分線はその多角形の諸角頂より及び諸辺より等距離の一点において相会す。

設問10　与正多角形に外切円或いは内切円を作れ。

設問11　与円に４、８、16、32・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。
（４辺形は、原論　第４巻　命題６　命題７）

設問12　与円に３、６、12、24・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。

第八節　積と関したる円

定理28　円の弦その弦上或いはその延長上の一点によって二部分に分かつとき此二部分によって包括せられたる矩形は半径上の正方形とその与点（分点）と円の中心とを連結する直線上の正方形の差に等し。

推論１　一与点を通過する任意の弦の両部分によりて包括せられたる矩形はその弦の方向如何に関せず常に相同し。（原論　　第３巻　命題35）

推論２　一点若し円内に在るときその点を通過する任意の弦の両部分によりて包括せられたる矩形はその点によりて二等分せられたる半径上の正方形に等し。
（推論１の特別の場合）

推論３　一点若し円外に在るときその点を通過する任意の弦の両部分によりて包括せられたる矩形はその点より円に引きたる切線上の正方形に等し。
（推論１の特別の場合）（原論　　第３巻　命題36）

推論４　若し外方の一点を通過する弦の両部分によりて包括せられたる矩形その点を円の円周上の一点に連結する直線上の正方形に等しきときは此線は此円に相切す。（原論　　第３巻　命題37）

設問13　<u>円に正十角形を内切すべし</u>。之によりて円に正十角形を外切すべし。
又円に正五角形或いは20、40、80、・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。（原論　<u>下線部は第４巻　命題10）</u>

設問14　<u>円に正十五角形を内切すべし</u>。之によりて円に正十五角形を外切すべし。
又円に30、60、120・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。
（原論　<u>下線部は第４巻　命題16）</u>

第４節のまとめ

次に、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』に『原論』の命題がどのように取り入れられたかを検討した結果を述べる。

（１）第一節（原質）において

第一節（原質）においては、円、半径、直径について定義されている。円については、『原論』第Ⅰ巻の定義15、16より、直径については、『原論』第Ⅰ巻の定義17より取り入れられ、半径については、『原論』では定義されていないが、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』では定義２に述べられている。また、『原論』第Ⅲ巻の定義１（等しい２円とはその直径が等しいかまたはその半径が等しいものである）は、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』では、定理３で述べられており、第一節（原質）においては、定義に関することが多く述べられている。

また、『原論』では、同心円という言葉は使われていないが、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』では、第Ⅲ巻の命題５（もし、二つの円が互いに交わるならば、それらは同じ中心をもたないであろう）が、定理３の推論３で（円周互いに相会する二円は同心円なることなしと）述べられ、同心円という言葉が使われている。ただ、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』では、同心円という言葉が使われているが、定義はされていない。

（２）第二節（中心及び扇形における角）において

第二節においては、弧、扇形について定義されている。『原論』では、弧についての定義はないが、扇形については第３巻の定義10で述べられている。円弧に関する命題26、命題27が定理４、定理５の前半に取り入れられている。

（３）第三節（弦）において

弦に関する命題は、『原論』の中でも多い。原論には弦についての定義はないが、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』では、定義７で「円の弦とは円周上の任二点を連結する直線なり」と述べている。

定理６、定理７で弦と弧の関係を述べ、『原論』命題29、命題28を取り入れている。また、弦と中心との関係を定理８、定理９，定理10で述べ、『原論』命題３、命題１を取り入れている。

定理11で命題２を、定理12の推論で命題10、命題９を、定理13、定理14で命題14、命題15を推論で命題15を取り上げ、『原論』の中で弦に関する命題のうち、命題４以外はすべてこの節で述べられている。命題４については、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』では、どこにも取り上げられていない。

また、設問１「与弧を二等分すべし」は命題30より、設問２「与円或いは与弧の中心を求むべし。」は『原論』命題１,命題25より取り入れられている。

（4）第四節（弓形における角）において

この節では、まず弓形と円周における角、弓形における角について、定義されている。これらは、『原論』第Ⅲ巻の定義６、定義９、定義８より取り入れられている。そして、円周角にかかわる『原論』の命題20、命題21、命題31、命題22、が定理15、定理16、定理17、定理18、定理19に取り入れられている。

（5）第五節（切線）において

この節では、まず切線と切点について定義されている。そして、『原論』の命題16から命題19までの接線に関する命題が、定理20と推論２，推論３、定理22の推論２設問で取り入れられ、命題32の接弦定理が定理23で、設問３で「与直線上に与角を包括する弓形を書け」という命題33が、設問４で「与円より与角を包括する弓形を截るべし」という命題34が取り入れられている。

（6）第六節（二円）において

この節では、まず二円の外切、内切について定義されている。『原論』では、第３巻の定義３で、相接について述べているが、内切や外切についての定義はされていない。定理24の推論で命題11、命題12が取り入れられ、２つの円についての接点に関する内容が述べられている。また、定理25で、命題13が取り入れられており、２つの円において、接点は１つであることが証明されている。

（7）第七節（内切形及び外切形）において

この節では、まず定義15で内切円を定義16で傍切円を定義している。『原論』には、内切円と傍切円の定義はない。この第七節は主に『原論』第四巻の内容を述べている。設問８「与円に与三角形と等角の三角形を内切すべし」で『原論』第Ⅳ巻の命題２が、設問９「与三角形に等角の三角形を与円に外切すべし」で『原論』第Ⅳ巻の命題３が取り入れられている。また、設問11「与円に４，８，16，32，・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし」で『原論』第Ⅳ巻の命題６、命題７が取り入れられている。

（8）第八節（積と関したる円）において

この節では、主に方べきの定理について述べられている。定理28の推論１で『原論』第Ⅲ巻の命題35が、推論３で命題36が、推論４で命題37が取り入れられている。設問13で『原論』第Ⅳ巻の命題10が、設問14で『原論』第４巻の命題16が取り入れられている。

（9）『あそしえーしょん　初等平面幾何学』に取り入れられていない『原論』の命題について

『原論』の命題４、命題７，命題８，命題23、命題24は『あそしえーしょん　初等平面幾何学』には取り入れられていない。

まず、命題４「もし円において中心を通らない弦が互いに交わるならば、互いに２等分しない」は証明しなくとも命題３から、明らかであると考えられる。

命題７，命題８は、『原論』においても孤立した違和感を感じる命題である。

そして、命題23、命題24は、円の切片に関する命題であるが、命題23は命題24の証明に使われる補助命題であり、命題24は円周角・中心角に関する命題20、命題21を命題26、命題27で拡張するための準備と考えられる。

(10)『原論』にはないが、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』にはある定理について

第一節の定理１は『原論』にはみられず、定理２と定理３は、『原論』では定義とされ証明はない。また、あそしえーしょんの第一節の定理は公理的であり、定義とも考えられる。

第二節の定理４と定理５は、前半の内容は『原論』にあるが、後半の内容は『原論』にはみられない。

第三節の定理６と定理７と定理11は、前半の内容は『原論』にあるが、後半の内容は『原論』にはなく、定理12は『原論』にはみられない。

第四節の定理18は定理17の逆であるが、定理17は『原論』にあるが定理18は『原論』にはみられない。

第五節の定理21と定理22は『原論』にはみられない。

第六節の定理24は『原論』にはみられないが、推論において『原論』の命題11と命題12が取り入れられている。定理25の前半の内容は『原論』にあるが、後半の内容は『原論』にはみられない。

第七節の定理26と定理27は『原論』にはみられない。

第八節の定理28は『原論』にはみられないが、推論１と推論３と推論４において、『原論』の命題35と命題36と命題37が取り入れられている。

これら『あそしえーしょん　初等平面幾何学』で追加された定理より、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』はユークリッド『原論』より、初学者にとってより親切で理解しやすいように工夫されていると考えられる。また、これらの追加された定理は、平成10年度以前の教科書において、単元「円の性質」の学習内容として取り扱われていた。つまり、現代にも受けつがれている。

第５節　第２章のまとめ

第２章では、幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』がどのような目的で作られたのか、そして、どのような内容と構造を持っているかについて考察し、またその中で、ユークリッド『原論』をどのように改良しようとしたのか、教科書として何を大切にしたのかについて考察してきた。

本研究の方法でも述べたが、幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』第三本（円）の内容の対象となっているのは、ユークリッド『原論』第Ⅲ巻である。しかし、ユークリッド『原論』第Ⅲ巻は、教科書として作られたものではなく、一つ一つの命題を厳密に証明し、論理的秩序を美しく保ったギリシア時代の数学の諸成果を集大成したものであるといえる。

それに対して、幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、イギリスの中等教育の幾何の教科書として『原論』よりも適したものを意図して作られた。その大きな違いは、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、各節ごとに円の性質についての内容をまとめ、それぞれの定理に適した問題を多く取り入れていることである。そして、定理に続き、補題が述べられ、各節の終わりに多くの練習問題が書かれている。また、作図題を命題と分けると共により多く取り入れ、操作的な扱いも試みているなど、初学者が「円の性質」を学ぶのにユークリッド『原論』より親切に書かれているように思われる。そして、もう一つの大きな違いは、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』で、極限の考え方を取り入れたことである。それは、近世幾何学への発展を配慮したものとも考えられる。

しかし、全体としてユークリッド『原論』の精神や命題の内容は保持され、節ごとに必要な公理、定義を述べ、定理とその証明が続く公理的スタイルや、証明はすべて言葉で述べられ、代数的記号は使われていないなど、ユークリッド『原論』の公理的演繹的な論理体系そのものを改良しようとしたものではないと考えられる。つまり、論証を重んじ、論理的思考力・推論の能力の育成を大切にしていると思われる。

では、ユークリッド『原論』の精神つまり幾何の論証とは一体何だろうか。プロクロス（410－485）はユークリッド『原論』の基本的な考え方として、次の４つをあげている。

（１）分割的

分割的というのは、複雑な図形を最も単純な要素（たとえば三角形、さらに点、線、角など）に分割することである。

（２）定義的

定義的とは、定義によって存在を確定してそこから出発するということである。

（３）証明的

証明的とは、論理に従って明示することである。

（４）解析的

解析的とは、結論から前提に後戻りするという意味である。(7)

この４つの特徴は、ほぼユークリッドの論証のすべてを尽くしているといえよう。

そこで、ユークリッド幾何の学習は論理的思考力をかなり修練すると考えられる。そして、論理を学ぶには図形という直観的なものと抽象的な概念との対応関係が目に映る幾何の証明の方が代数より適しているであろう。さらに、一般と特殊の関係も図形による具体的な裏付けを持っている。また、分析－総合の方法を現しているのがユークリッドの幾何学ともいえ、それは科学全体の基本的な考え方や方法を修練するとも考えられる。

幾何学教授法改良協会は幾何学教育の目標をジェントルマンの教養として論理的思考あるいは推論の能力に据え、シラバスでは、『原論』の基本的路線は変更せず、公理を調整し、定理の配列を整理するなど微温的な改良の立場をとっていると考えられる。そして、シラバスを基にして、幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』が作られたといえよう。

しかし、幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、イギリスの中等教育の幾何の教科書として『原論』よりも初学者にとってより学びやすく適したものを意図して作られたという点においては、画期的な改良であったと考えたい。それは当時（19C～20C）においては、新しい試みであり、挑戦であったと思う。幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』の序文に、

> 「協会の総会において是認本書を出版、完全なる幾何学書の一部分なりと見做さず、幾何学教授綱領を補強して之に設題の証明と適当なる例題とを附加したるものと見做されん。教授に必要な科目は悉く本書に備わるが、本書は完全を目的としたるものに非ず。本書を基となして精細の幾何学書を出版せんとするものあらば、吾が協会は、大いに其学を賛助して自由に本書の抜粋を許さんとするなり」(8)

と述べられているように、この教科書は未だ未完成でありさらに改良するための基と考えられが、当時の教科書としては完全ではないが幾何学教育を一歩前進させた大変意義のある教科書であると考える。

〔引用文献〕

（１） J.M.Wilson,The Early History of the Association,The Mathematical Gazette,Vol.10,1921, p.241

（２） A.G.Howson,A History of Mathematics Education in England,Cambridge UP,1982,p.132

（３） 同上書、p.133

（４） 前掲書(1)、p.242

（５） 前掲書(1)、pp.242－243

（６） 前掲書(1)、p.243

（７） G.R.Morrow,PROCLUS A Commentary on the First Book of Euclid's Elements,Princeton, 1970
遠山啓「ユークリッド幾何の教育的位置づけ」（数学教育協議会編集『数学教室』1957年12月号、国土社)

（８） 幾何学教授法改良協会編纂　上野清校閲・三木留三訳述『あそしえーしょん初等平面幾何学』序文、明治25年６月

第３章

菊池大麓編纂の『初等幾何学教科書　平面幾何学』

第１節　明治初期の中等幾何学教育

（１）教育の強制的統一

明治維新は、政治革命であると同時に社会革命であった。慶応三年（1867年）12月の「王制復古」宣言から、明治元年（1868年）の「五箇条の御誓文」を経て、明治４年（1871年）の廃藩置県となり、封建的身分制度の撤廃を要求する「四民平等」のスローガンは、明治５年までの間に、遂行されることとなった。そして、旧封建的生産関係の代わりに、資本家的生産関係の支配的展開は、明治４年頃から踏み出されたのである。

明治維新の当時において、教育的指導者としての代表は福沢諭吉（1835－1901）であった。彼の『西洋事情』は、明治政府の参考となり、『学問のすすめ』は民衆の間に実理的自由主義を広め、官僚的専制と戦ってブルジョア・デモクラシーへの先駆を作った。彼にあっては、洋学とは「実学」であり、「実学」の研究こそ少なくとも明治前半期における日本教育のモットーであったと考えられる。

明治政府は、明治４年（1871年）教育の開発をめざし文部省を設けた。そして、明治５年（1872年）文部郷大木喬任の決断によって、学制が頒布された。それは、フランスの学制を基礎とした極端な画一的統一であった。

アメリカ人のスコットは、明治５年師範学校に招かれて、教授の方法を伝え、英語と算術とを教えることとなった。また、ダヴィッド・マーレーは、明治６年アメリカより聘されて、文部省学監となり、明治11年まで日本に止まった。マーレーは日本に来る前にオーバニー・アカデミーの校長として六年間在職し、1863年にラトガース・カレージの教授に転じて数学を教えていた。こうして、アメリカの数学教育の直訳・翻訳が日本へ入ってきた。

明治５年（1872年）文部省は小学校には「洋法算術」を指示し、教科書に『筆算訓蒙』『洋算早学』などを挙げ、中学校には「算術、代数学、幾何学」を指示した。これらは、日本伝統の和算（珠算も含む）ではなく洋算（筆算）であった。それは、日本の数学教育を国際化するという国防問題が緊急課題であったからとも考えられる。しかし、洋算を知らない先生が多く、余りにも大きな飛躍であったため、明治６年（1873年）に改正され、算術は筆算と珠算の併用となった。

和算家の出身であり明治８年東京師範学校の教師であった遠藤利貞は、珠算教授改造の第一歩を践んだ人であり、教科書として『算顆術授業書』（明治11年　東京師範学校蔵書）を編成した。この教科書は「其の順序を英米の算術書に資り、其の術及び術語に至りては皆日本先哲の遺法に拠り」と考え編成された。そして、その後には珠算書も改正を加えられ近代化するに至った。

中学校は、明治５年の学制によって初めて規定されたものである。それは、「小学を終わりたる生徒に、普通の学科を教授する所」であった。そこには外国教師によって教授される中学校もあったが、当時における良師と教科書の欠乏はむしろ外国語によって中学程度の学科を学ぶ方が便利な程であった。

次に数学の要目を述べると、

下等中学科（三個年）

六級	算術（6）	最大等数より分数まで
五級	算術（6）	小数より比例まで
四級	算術（6）	開平、開立、求積
三級	算術（4）	商業算、利息算
	幾何（2）	幾何用字解
	代数（2）	名義、記号
二級	算術（2）	利息算
	幾何（2）	円
	代数（2）	加減乗除
一級	算術（2）	対数用法
	幾何（2）	円内多辺法
	代数（2）	最大等数約分迄

上級中学科（三個年）

六級	幾何（4）	平面及び立体
	代数（2）	一元一次方程式
五級	幾何（4）	三角法
	代数（4）	多元一次方程式
四級	幾何（4）	求積曲面
	代数（4）	累乗及び開方
三級	幾何（3）	体求法
	代数（3）	二次方程式
二級	幾何（2）	体求法の続
	代数（2）	比例及び級数
	測量大意（2）	
	重学大意（2）	
一級	幾何（2）	温習
	代数（2）	温習
	測量大意（2）	
	重学大意（2）	

これはしかしながら、多くの場合においては空文としての教則に過ぎなかったのである。当時にあたっては、大学でさえ貧弱であった。東京開成学校と東京医学校が合併して東京大学となったのは明治10年のことである。明治５年頃は数学の専門的知識ある外国人教師もほとんどいなかった。

（2）洋算・西洋数学翻訳教育期

明治初期には、文明開化の波に乗って、欧米の翻訳翻案の算術書や数学書が数多く出た。遠藤利貞によれば、明治５年頃には中学校の幾何学教科書として、

「英語　ダービス氏幾何学書
　仏語　ルジャンドル氏幾何学書
　独語　ウイーガンド氏幾何学書等毎級連用せり」

といわれている。小倉金之助の調査によると、明治４－13年間に出版の翻訳初等数学書（幾何学のみ取り上げた）として、

アメリカ

デヴィース	中村六三郎『小学幾何用法』（明治６年）
	関口開『幾何初学』（明治７年）
	水野行[illegible]『西洋親書』（明治８年）
ロビンソン	柴田清亮『幾何学』（明治６年）
	杉原正市『小学幾何のちか径』（明治７年）
	栗野忠雄『新数学全書』（明治９年）
	堀田維禔『幾何学』（明治10年）
ブラッドボリー	宮川保全『幾何新論』（明治９年）
クラーク	山本正室、川北朝鄰『幾何学原礎』（明治６－11年）

イギリス

チャンバース　関口開『数学問題集』（明治４年）

フランス

ヴィーエヤールおよびクレットマン　神保長致『算学講本』（明治９－13年）

があった。それは、翻訳の時代であったといえよう。そして、この時代に翻訳・翻案以外の西洋数学を日本書に求めることは不可能であった。明治10年に菊池大麓がイギリスから帰るまで優秀な西洋数学の専門家を日本人に求め難かったのである。

明治10年東京数学会社（今の日本数学会の前身）が設けられ、明治13年頃から術語も統一に向かうように進んだが、その前後に至るまでは和算家にして兼ねて洋算を学んだ人々の貢献もあった。ことに岡本則録は優れた教師であった。ダヴィッド・マーレーは「数学教員は岡本氏にして、同氏は非常に数学の才あるものなり。予同氏と接対すること数回に及ぶ。之に因て同氏の数学の精微を極めたる、勤勉聡明の教師たることを知れり」と文部省に報告させている。明治10年頃、彼は中等教師の指導者であった。

また、外国語を主とする中学校においては、原書によって教授されていた。（数学の原書が全国の中学校から姿を潜めるようになったのは明治30年頃からである。）このように、明治13年前後までは、英米の数学特にアメリカの数学の全盛時代であった。まず、デヴィースが、間もなくロビンソンが、日本の中等学校数学に普及した。
ロビンソンの幾何学書はルジャンドル型であり、つまりフランス流の幾何学が流行したのが明治10年前後であった。

西南戦争（1877年）の結果は士族の子弟を教育へと向かわせた。そして、民権運動の勃興は多額の教育費を要する教育制度を許さなかった。そこでついに明治12年には明治５年の画一的学制が廃止され、新たな教育令が制定された。それは、男女によって教育を別にする方針をとり、中学校は男子の教育に宛てられた。「中学校は高等の普通教育を授くる所にして、中人以上の業務に就くがため又は高等の学校に入るために必須の学科を授くるものとす」のように、中学校の性格を規定するとともに、学科及び程度を定め、毎週の教授次数の規準を示したのである。同時に変則的な学校からは中学校の名をとり去り、学校を整理すると共に、その内容をも規定し統一したのであった。

次に明治15年（1882）制定の教則を掲げると

初等中学科

第一年前期	算術（５）	加減乗除、分数、小数
第一年後期	算術（５）	諸比例、百分算、開平
第二年前期	算術（２）	開立、級数、求積
	代数（２）	整数四術
第二年後期	代数（２）	分数四術
	幾何（２）	平面幾何
第三年前期	代数（２）	方程式
	幾何（２）	平面幾何
第三年後期	代数（２）	方程式
	幾何（２）	平面図形
第四年前期	代数（２）	順列、錯列、級数
	幾何（２）	立体幾何
第四年後期	幾何（２）	立体幾何、常用曲線

高等中学科

第一年前期	三角法（２）	八線変化、対数用法
第一年後期	三角法（２）	対数用法、三角実算

（第二年においては数学科を欠く。）

この頃から数学書の洋装が始まると共に内容においても転期を来たした。明治10年に菊池大麓がイギリスから帰朝してトドハンターを推薦してから、トドハンターの幾何学（1862年）が流行しはじめた。田中矢徳『幾何学教科書』（明治15年）は平面においてはトドハンターの『ユークリッド』がその原本となっている。しかし、編者はユークリッドの本法に従いながらも、ウイルソン流のところもあり、代数計算によっての証明はないが式を使用している。また、立体においてはトドハンター、ウイルソン及びショブネーを基礎としていることを見出す。

トドハンターの翻訳としては、他にも、

上野清訳　　『軸式円錐曲線法』（明治14年）

長沢亀之助訳　『微分学』（明治14年）
『代数学』（明治16年）
『平面三角法』（明治16年）
『宥克立』（明治17年）

などがある。トドハンターは原書としても、明治10年頃から外国語による中学校において採用されており、関口開の書によってその一部分は伝えられていたが、その一般的普及はこの頃からである。しかし、ユークリッドに対してはすでに

曽祢達蔵『突氏幾何学』（明治16年）

があった。また、長沢はユークリッドの翻訳に際して随分苦心されたらしいが、その結果は他の訳書に比べて見劣りがするものであった。彼は、この訳を窮屈な堅いものに仕上げた。それは、いかに“ユークリッドの精神”が当時の人々にとって難解であったかを語っていると思われる。

明治15年－18年頃において、原書として最も多く採用された教科書は、代数・トドハンター、幾何・ウイルソンおよびライト、三角法・トドハンターなどであり、トドハンターの幾何『ユークリッド』型が広く採用された形跡は少ない。つまり、明治10年代の幾何は、主としてアメリカを通じて輸入されたフランス流の幾何が漸次イギリスからのユークリッド型に推移した時代といえようが、その間は多様な動きを示し、ユークリッドの精神は未だ理解されるには至らなかったと思われる。

当時の標準的教科書が何であったのかを考察するために、明治19年に、文部省が各府県の師範学校の改造を企てた際に、教科書目を選んで訓令したときの数学書目を次に掲げる。

田中矢徳編『算術教科書』（ロビンソン等による）
森島修太郎訳『商業算術書』（ブライアントおよびストラットンの共著）
神津道太郎編『筆算摘要』（ロビンソン）
駒野政和著『新撰珠算精法』
遠藤利貞編『算顆術教科書』
福田理軒述『明治小学塵劫記』
田中矢徳編『代数教科書』（ロビンソンを主とす）
石川　彝訳『代数学』（ロビンソン）
田中矢徳編『幾何学教科書上』（式を用いたユークリッド）
宮川保全訳『幾何新論』（ブラッドボリー）
中条澄清訳『幾何学教授書』（ブルックス）

次に当時中学校の規範たる官立大阪中学校における、明治18年度の教科書を掲げる。

神津道太郎編『筆算摘要』（ロビンソン）
石川　彝訳『代数学』（ロビンソン）
山本・川北訳『幾何学原礎』（クラーク）
赤木周行訳『常用曲線法』（アミオ及びルーシェ、コンブレス）
宮川保全訳『三角新論』（ブラッドホリー）

このことからわかるように、明治10年代においては先に述べたように、未だアメリカ数学の支配力が大きく、ユークリッド流は決して広く採用されたのではなかった。

また、西南戦争の後ようやく日本の産業は進展し、それとともに中産階級の子弟などは学問によって身をたてんとするものが多くなってきた。その一方においては、中学校の数は激減され、入学試験は競争的とならざるを得なかった。そして、尾関正求『数学三千題』(明治12年)の出題によって、一層油を注がれた。「唯問題を解くことを貴び、答えさえ合えばそれでよい」という風潮であった。

	明治6	明治11	明治13	明治18
公立中学校数	3	107	137	104
私立中学校数	7	677	50	2

(3) 翻訳教育脱皮と我が国の数学教育構築期

維新革命以来20年近くもなった時、政治上および社会上の諸改革はようやく一応完了するようになった。財政上の整理統一が進行し、金融および運輸の機関が発達普及を見るときが来た。ここにおいて、明治19年の紙幣整理を機会に綿糸紡績業を中心として、新たなる産業は急激に生長を始め、生産様式は根本的に変革され出した。このように、産業革命開始の時期は、また同時に教育改造のために努力する時であった。高等師範学校が設立され、師範教育は改造され、中学校は整理された。中学教員は免許状を有し中等教科書は検定を要することとなった。中等教育は大いなる進歩改善を見るのである。

このようにして、明治19年(1886年)に中学校令が発布される。文部大臣森有礼の教育改造は、また異常の飛躍を中学校数学教科書の上に齎したのであった。その飛躍は外貌的には「横書き」数学書の形となって出題したのであった。

長沢亀之助、宮田耀之助同訳『チャーレス・スミス氏代数学』(明治20年)

中条澄清訳『ボール・ナイト氏初等代数学』第一巻(明治20年)

は横書きの数学書であり、一般的に普及を見た数学書における横書きの先駆書と言えよう。しかし、岡本則録は、文部省で数学教科書を横書きで刊行することを建議したが、次官の地位にあった神田孝平が許さなかったと言うことである。そして、長沢、中条に尋ぎて、菊池大麓において初めて文部省から『初等幾何学教科書』を横書きで出版することが許され、これから数学書の横書きが流行するに至る。

「横書き」は便宜上のものであるが、それは欧化主義の表象であり、産業革命の暗示であり、そして数学そのものの進展への前徴であろう。明治18年から29年の頃は数学界にとって重大なる一転機の時代である。それは、日本の諸学校から西洋人が影を潜め日本人だけで数学の教授ができるようになってきた時代であった。また、これら

の状況と相待って、数学書の良好なものが続々と現れる時代である。つまり、日本の西洋風数学はこの頃から整頓され、数学の著しい進歩があった。日本は第一次産業革命と同時に数学教育の飛躍を見る。

幾何学においては、有力なる大学教授菊池大麓編纂『初等幾何学教科書』平面部（明治21－22年　10版　明治31年)、立体部（明治22年）が顕れた。この書は、イギリスの「幾何学教授法改良協会」編纂の幾何学教科書を参考にして著された。そして、ユークリッド流の幾何学書が当時の日本数学の最高権威者、菊池大麓の筆によって書かれ、文部省によって出版され、広くかつ強き刺激と影響を与え、多くの中学校で採用された。

（４）数学教育の統一

明治19年頃から開始された第一次の産業革命は、日清戦争を経てますます日本の資本主義を発達させた。そして、明治19年における制限的中学校令はその後撤廃されて、急激なる中等教育の振興を見たのであった。

	明治20	明治23	明治28	明治31	明治32	明治40
中学校数	48	55	94	169	188	285
生徒概数	１万	１万	３万	６万	７万	11万

教科書または参考書の著者も、菊池・上野・長沢・遠藤・沢田・竹貫・松岡・樺など多く顕れてきた。その中でも、当時大学教授であり日本数学界の独裁的権威であったとも言われる藤沢利喜太郎は、菊池の幾何学教科書を極力支持して次のように述べている。

「・・・この菊池さんの幾何について申しますが、おそらくは日本の普通教育上にこの本ほど効能のあったものはなかろうと思います。・・・従ってわが国の幾何学教授法はまったく一変しました。一辺というよりはむしろ創設されたと言ってよかろう。・・・フランス流よりもユークリッド流の方がよいのです。」(1)

菊池および藤沢らの数学教育論は、日本の数学教育の統一を目標として進んだのであった。このようにして、明治30年前後から、教育問題が国民的課題となってきた。そして、明治32年に中学校はその拡張と共に内容の改善を期することになり、明治35年に中学校教授要目が公布されたのである。この要目にもっとも近い当時の教科書として、

算術　藤沢　　代数　藤沢　　幾何　菊池

三角法　ケージー、トドハンター、菊池、沢田

が挙げられる。幾何は３年からとなり、その内容は、

３年（毎週２）　緒論　直線　円

4年（毎週２）　円の続き　面積　比例　比例の応用

5年（毎週２）　比例の応用の続き　平面　多面体　曲面体

となったが、この要目の内容及び順番は、菊池の『初等幾何学教科書』の目次とまったく一致する。このように、この菊池の幾何学教科書によって日本の幾何学教育はほぼ確定され、ここに統一されたといえよう。

第２節　菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』の出現

（１）欧化主義の担い手

津山藩の医師であった菊池大麓の祖父の箕作阮甫は、江戸に出て藩邸詰めの蘭医宇田川玄真の弟子となって蘭学を学び、その後医書ばかりでなく広く蘭書の翻訳を行い、1839年には幕府天文方の翻訳局（蛮書和解御用）に迎えられる。ペリー来航の1853年にはアメリカ大統領の国書の翻訳を担当したり、ロシア使節プチャーチンとの対露交渉団の主席通訳官として長崎に赴いたりなど、外交上の功績も著しい。1856年９月に蕃書調所（東京大学の遠い前身）が開校すると首席教授となった。津山藩の藩校の儒者菊池文理の息子だった菊池秋坪（菊池大麓の父）は、江戸へ出て阮甫に弟子入りし、後に婿養子（箕作秋坪）となった。秋坪も蕃書調所の教授手伝いとなり、文久元年には福沢諭吉らとヨーロッパへ派遣され、慶應二年には樺太の国境確定交渉のためロシアに派遣され、幕末の外交交渉に活躍している。

菊池大麓は1855（安政２）年１月29日、江戸にあった津山藩の藩邸内で箕作秋坪の次男として生まれた。生まれたときの姓名は箕作大六であったが、父親の実家である菊池家を継いで菊池大麓と改めた。菊池は文久元年に６歳で蕃所調所に入学、特に英語を熱心に学んだ。もちろん数学も学んでおり、神田孝平から洋式で算術と代数の初歩も学んだ。そして、少しできるようになると教員になり、大六も英語の教授者となった。そこで、慶応２年に11歳で英国の留学生となりイギリスで学んだが、江戸幕府崩壊のため、明治元年に帰国する。明治維新となり、明治３年再び英国留学を命じられ、イギリスのケンブリッジ大学で多くを学び、明治10年５月帰国する。その後、同年６月４日に東京大学理学部四等教授（助教授に相当）、同年８月26日、わずか22歳で教授に就任した。また、９月には東京数学会社創立に参加し、その後、明治14年理学部長（26歳）、明治22年帝国学士院会員（34歳）、明治23年貴族院勅撰議員（35歳）、明治29年文部省専門学務局長（41歳）、明治30年文部次官（42歳）、明治31年東京帝国大学総長（43歳）、明治34年文部大臣（46歳）、明治42年帝国学士院長（54歳）などを歴任し、大正６年８月に62歳で他界した。明治40年の１月から８月までイギリスを再訪して、ロンドン大学で「日本の教育」について講演している。

この２回にわたる英国留学が菊池の思想形成に大きく投影したことは想像に難くない。日本の近代化が推進された明治時代の学術文化の中心的担い手としての菊池が果たした役割は単に数学教育の分野にとどまるものではない。

明治10年代後半から20年前後にかけて、日本は欧化に対して“近代化された日本”を示すために欧化政策を推進し、いわゆる鹿鳴館（明治16年落成）時代の到来を迎えることになる。この欧化主義の一環として、「羅馬字会」の設立がある。明治17年12月２日、羅馬字会の発起人会が開催され、外山正一、寺尾寿、矢田部良吉、隈本有尚ら７名が創立委員となり、翌明治18年１月17日に羅馬字会が設立されたのである。羅馬字会の目的は、規則第１条に「本会は日本語を書くに、これまで用い来れる文字を廃止、羅馬字を以て之に代えんことを目的とす」と掲げられているように、漢字を廃

し、ローマ字をもって代えようとする運動の推進団体であった。羅馬字会は明治18年1月、40名で構成された「書方取調委員会」を設置し、委員長に外山正一、副委員長に寺尾寿を、原案起草委員に外山、寺尾の他に矢田部良吉、神田乃武、イビー、チェンバレンを選出し、ローマ字綴方の決定に着手した。同年3月27日に決定された綴方は、後にヘボン式または標準式綴方の原型となったものであった。「明治廿五年一月現在羅馬字会会員現数」を記録した『羅馬字会員姓名簿』には日本人262名、外国人164名、計426名の氏名が記録されているが、そこには箕作麟祥、三輪桓一郎、高嶺秀夫、辻新次、山川健二郎などとともに菊池大麓の名も見られる。菊池と寺尾は共にローマ字使用推進論者であり、国字国文問題を通じて日本の近代化を図ろうとする意識を共有していたのである。たとえば、菊池は「・・・故に漢字を廃するは今日にては一日も猶予す可からざる急務なりと思わる」(「理学之説」)と述べている。菊池の『初等幾何学教科書』(明治21年9月20日巻壱、明治22年1月10日巻弐、横書き)、寺尾の『中等教育算術教科書』(明治21年2月22日上巻、同年8月31日下巻、縦書き)は、共に欧化主義を幾何と算術の分野において推進しようとする意図によって著された教科書と言える。

(2) 日本における幾何学の来歴

明治初期においては、ロビンソンの代数学書が多く使用されていたが、幾何学においても同様であった。そして、代数学の場合と同様、幾何学においても、明治10年に菊池大麓がイギリスから帰朝して、ロビンソンを批判し、トドハンターを推奨してから、トドハンターの時代が始まるのであるが、その前後には、ライトの幾何学、ウイルソンの幾何学、ショブネーの幾何学なども現れて、多様な動きを示していた。

このような動きを決定的な方向にもっていったのが、菊池大麓の『初等幾何学教科書』であった。この件については、藤沢は『数学教授法講義筆記』の第16回講義において、

> 「・・・明治二十一年に始めて日本人の作った幾何の書物が現れました。それは菊池さんの本で、これに続いて「アッソシェーション」の幾何も我国へ参りました。勿論菊池さんの本は幾何学教授法改良協会の本を参考にされたから、此れは大体似て居ります。以後今日迄も菊池さんの本が行われて居ります。」(2)

と述べている。ここに登場する「アッソシェーション」というのは、

Association for the Improvement of Geometrical Teaching

のことで、「幾何学教授法改良協会」(略して A.I.G.T.)のことである。詳しくは第2章第2節を参考にされたい。

藤沢は、幾何学の流派として、英国流、仏蘭西流、独逸最新流の3つを紹介しているが、これらはそれぞれ、ユークリッド流、ルジャンドル流、トロイトライン流と呼んでもよい。トロイトライン流が日本に広まってきたのは大正時代であるから、明治初期には、ユークリッド流とルジャンドル流の2つの流派があったといえる。ユークリッド流は、ユークリッド『原論』に範をとり、計算記号などをいっさい用いず、全

部言葉で述べる体裁をとっている。また、測度を用いない非度量的な幾何学でもある。これに対してルジャンドル流は、幾何学の中に算術や代数をある程度使用する行き方を採用するもので、度量的な幾何学と言える。前述したロビンソンやショブネーの幾何はルジャンドル流であり、トドハンターの幾何はユークリッド流である。また、ライトの幾何やウイルソンの幾何はユークリッド流とルジャンドル流の折衷型である。

英国に留学してトドハンターに師事した菊池の幾何は当然のことながらユークリッド流である。

次に、上に述べた人たちの幾何学がユークリッド流であるか、ルジャンドル流であるか、両方の折衷型であるかを考えるために、記号的であるか、度量的であるか、公理的であるかについて調べ、表にまとめた。

	記号的である	度量的である	公理的である
ＢＣ３００　ユークリッド　ギリシア	×	×	○
１７９１　シムソン　イギリス	×	×	○
１７９４　ルジャンドル　フランス	○	○	○
１８３６　ロビンソン　アメリカ	○	△	○
１８６２　トドハンター　イギリス	×	×	○
１８６７　ウイルソン　イギリス	○	×	○
１８６８　ライト　イギリス	○	△	×
１８６９　ショブネー　アメリカ	○	△	○
１８８４　ＡＩＧＴ　イギリス	×	△	○

△は比例は度量的であり、それ以外は度量的ではないことを意味する。

この表からも、

ユークリッド流・・・ユークリッド、シムソン、トドハンター

ルジャンドル流・・・ルジャンドル、ロビンソン、ショブネー

折衷型　　　　・・・ライト、ウイルソン

と考えられる。次に、それぞれの教科書の特徴を述べる。

シムソン（イギリス）

ユークリッドの正道に帰らんと試みた力作である。また、ユークリッドの諸版中最も有名なるものの１つであり、記号は全く見出されない。そこには、図形の度量的性質を欠くものであった。

ルジャンドル（フランス）

現代における初等幾何学教科書は大多数は、ルジャンドル型であってユークリッド型ではない。ルジャンドルは幾何学の中に、算術と代数をある程度まで用いている。また、論述を厳密にしながらも、必ずしもこれをもって唯一のものとせず、時には直感に訴えて、事実を主としたところもある。ユークリッドが非度量的なるに反してルジャンドルは度量的であり、とくに無理数のことは算術で学んだものと見なして簡単に比例論を取り扱っている。しかし、他の一面においてはユークリッドよりも論理的であった。また、作図題はルジャンドルによって円の一般的性質の後に廻された。

ロビンソン（アメリカ）

ロビンソンの幾何はルジャンドル型である。否算術的・代数的計算の多い点において、それは普通のフランス幾何学を凌いでいる。計算問題と測量その他の方面における応用問題の多数とは、この書の特徴であろう。

トドハンター（イギリス）

シムソン型であり、代数的記号や計算の痕跡をも見出し得ない。すべてが形式的・論理的であった。

ウイルソン（イギリス）

ユークリッドとルジャンドルの中間を行った平凡な教科書であった。その中には数式が用いられ、比例論はルジャンドルに倣った。しかし、定理の順序などはユークリッドに近かった。

ライト（イギリス）

ユークリッドとルジャンドルの両方を取り入れた折衷型の教科書である。

ショブネー（アメリカ）

ルジャンドルやルーシェ、コンブルースに倣える、フランス幾何学の正統に属している。

また、それぞれの幾何学教科書の内容を次に示した。

ユークリッド	シムソン	トドハンター
第１巻（平面図形） 定義（23） 公準（５） 公理（９） 命題（48）	第１巻（平面図形） 定義（35） 公準（３） 公理（12） 命題（48）	第１巻（平面図形） 定義（35） 公準（３） 公理（12） 命題（48）

第２巻（幾何学的代数） 定義（２） 命題（14）	第２巻（幾何学的代数） 定義（２） 命題（14）	第２巻（幾何学的代数） 定義（２） 命題（14）
第３巻（円） 定義（11） 命題（37）	第３巻（円） 定義（11） 命題（37）	第３巻（円） 定義（11） 命題（37）
第４巻（内接・外接多角形） 定義（７） 命題（16）	第４巻(内接・外接図形) 定義（７） 命題（16）	第４巻(内接・外接図形) 定義（７） 命題（16）
第５巻（比例の理論） 定義（18） 命題（25）	第５巻（比例論） 定義（20） 公理（４） 命題（25） 補足的命題（４）	第５巻（比例論） 定義（20） 公理（４） 命題（25）
第６巻 （比例理論の図形への応用)） 定義（５） 命題（33）	第６巻（相似図形） 定義（４） 命題（33）	第６巻（相似図形） 定義（４） 命題（33） 補足的命題（３）

ルジャンドル	ロビンソン	ショブネー
第１巻（平面図形） 定義（26） 用語と記号の説明 １．（命題１～20） タイトルなし ２．（命題21～36） 平行線の理論	第１巻（直線、角、多角形） 定義（54） 用語の説明 公準（３） 公理（13） 略語、略記号一覧 （命題１～44）	第１巻（直線図形） １．直線 ２．平行線 ３．三角形 ４．多角形 ５．四角形 ６．適用 ７．対称図形
第２巻（円と角の測度） 定義（10）	第２巻（比例） 定義と説明（18）	第２巻（円） １．弧と弦

1．（命題１～18） タイトルなし 4．（命題19～23） 角の測度 3．問題（18）	（命題１～25）	2．接線と割線 3．２つの円の関係 4．角と測度 5．作図題 6．内接、外接四角形
第３巻（多角形の測度相似） 定義（５） 1．（命題１～15） タイトルなし 2．（命題16～39） 比例線と相似 3．問題（17）	第３巻（円） 定義（14） （命題１～25）	第３巻（比例線、相似図形） 1．比例の理論 2．比例線 3．相似な多角形 4．適用 5．作図題
第４巻 （正多角形と円の測定） 1．（命題１～19） 2．平面幾何 （１）定理を証明すること（30） （２）幾何学的軌跡を見出すこと（32）	第４巻（作図題） （問題１～30）	第４巻 （直線図形の表面の比較と測定） 1．（定理１～９） タイトルなし 2．作図題
	第５巻 （比例性と多角形及び円の測定） （命題１～８） 実際的な問題（39）	第５巻 （正多角形、円の測定） 1．正多角形、平面図形の最大、最小 2．円の測定 3．平面図形の最大最小

ウイルソン	ライト	A. I .G.T.（條目）
第１巻（直線） 定義（29） 幾何学公理（４） 公準（３） 1．角	第１巻 1．直線　定義　定理 2．三角形　定義　定理 3．垂線と斜線 定義　定理	第１編（直線） 定義（29） 公理（２） ポスツラート（３） 1．１点においての角

2．三角形 3．平行線と平行四辺形 4．作図題 5．軌跡	4．平行線　定義　定理 5．多角形　定理　定理 6．平行四辺形 定義　定理	2．三角形 3．平行線及平行四辺形 4．作図題 5．軌跡
第2巻（面積の相当） 1．定理 2．作図題	第2巻 1．円　定義　定理 2．接線など 定義　定理 3．円における角 定義　定理 4．作図題	第2編（面積の相当） 1．定理 2．作図題
第3巻（円） 1．初等的性質 2．弦 3．切片内の角 4．接線 5．２つの円の関係 6．作図題 7．面積と係わる円	第3巻 1．比と比例 定義　定理 2．相似な三角形 多角形　定義　定理 3．三角形と円の測度的 性質　定義　定理 4．比例線に関する 作図題 5．正多角形 定義　定理	第3編（円） 1．原質 2．弦 3．弓形の内の角 4．切線 5．二円 6．作図題 7．円及び面積
第4巻 （比例の基本的命題） 1．比と比例 2．基礎的な幾何学命題	第4巻 1．直線図形の等積変形 2．直線図形の面積 2．正多角形、円 扇形、切片の面積 4．相似図形の面積比	第4編 （比例の基本の命題） 1．比及び比例 2．基本の幾何学的命題
第5巻 1．相似な図形 2．面積 3．軌跡と作図題		第5編（比例） 1．相似形 2．面積 3．軌跡及び作図題

A.I.G.T.（條目）	あそしえーしょん教科書	初等幾何学教科書（菊池）
第１編（直線） １．１点においての角 ２．三角形 ３．平行線及平行四辺形 ４．作図題 ５．軌跡	第一本（直線） １．一点における角 ２．三角形 ３．平行線及平行四辺形 ４．設問 ５．軌跡	第一編（直線） １．一つの点においての角 ２．平行　直線 ３．三角形 ４．平行四辺形 ５．軌跡　問題
第２編（面積の相当） １．定理 ２．作図題	第二本（面積の相当） １．定理 ２．設問	第二編（円） １．本原の性質 ２．中心においての角 ３．弦 ４．弓形においての角 ５．切線 ６．２つの円 ７．内接形及び外接形 ８．作図題　問題
第３編（円） １．原質 ２．弦 ３．弓形の内の角 ４．切線 ５．二円 ６．作図題 ７．円及び面積	第三本（円） １．原質 ２．中心及扇形における角 ３．弦 ４．弓形における角 ５．切線 ６．二円 ７．内切形及び外切形 ８．積と関したる円	第三編（面積） １．定理 ２．作図題 問題
第４編 （比例の基本の命題） １．比及び比例 ２．基本の幾何学的命題	第四本 （比例の設題の基本） 第一部　可度量 １．比及び比例について ２．幾何学上の課題の基本 第二部　可度に関せざる量 １．比及び比例について ２．幾何学上の課題の基本	第四編 （比及び比例） １．定義及び緒論 ２．定理

第５編（比例） １．相似形 ２．面積 ３．軌跡及び作図題	第五本（比例） １．相似形 ２．積 ３．軌跡及び設問	第五編 （比及び比例の応用） １．基本の定理 ２．相似直線形 ３．面積 ４．軌跡及び作図題 問題

菊池が『初等幾何学教科書』の「凡例」において

「本書は主として英国幾何学教授法改良協会の編纂したる幾何学書に拠るものなり。該協会は一千八百七十一年（明治四年）に設立し、・・・」(3)

と述べているように、菊池の幾何学教科書は改良協会が編纂した

The Element of Plane Geometry, 1884-1888

に準拠して編纂されたのであるが、

竹貫登代多訳補『アッソシェーション平面幾何教科書』明治25年

真田兵義訳『英国幾何学教授法改良協会編纂幾何学教科書』明治26年

などの幾何学教科書が改良協会の幾何学書の翻訳であったのに対して、菊池の教科書は翻訳ではなく、菊池が独自に執筆したものである。

トドハンターの幾何に続く菊池の幾何によって、日本の幾何教育はほぼ確定せられ、ユークリッド流の幾何学、菊池時代が続くことになる。菊池の教科書の出版は、平面部巻一が明治21年９月20日、平面部巻二が明治22年１月10日、立体部が明治22年７月23日のことであるから、明治20年代において日本の幾何教育は一定したことになる。

（３）菊池の『初等幾何学教科書　平面幾何学』

この教科書は、その「凡例」に

「本書は主として英国幾何学教授法改良協会の編纂したる幾何学書に拠るものなり」(4)

とあるように、菊池が留学し学んだ英国の幾何（ユークリッド幾何）に範を求めて著されたものである。また、菊池は

「本書の文体は、なるべく其儘之を口述し得べからんことをつとめたり」(5)

と述べて、言文一致の文体を採用すべきことを主義としている。この件に関しては、菊池の教科書に係わる解説書あるいは参考書とでも言うべき『初等幾何学教科書随伴幾何学講義　第一巻』（明治30年４月）の「幾何学に於て記号を用いることに就て」において、

「本邦に於ては文字に書く所と口に言う所とその文体を異にす。故に一般に教科書の文は直に之を口述す可からず。教員も生徒も普通の談話体に直して之を口述するを常とす。而して普通談話体に述べんとするの弊として、文章の首尾整わず

或は何が主にして何が客なるか判然せず。然のみならず、多数の人の僻として言句の末尾曖昧にして殆ど聴き取り難く、之が為に趣意貫徹せず往々誤解を生ずること有り。是れ普通の言論に於ても固より不都合なりと雖学術上に於ては殊に然りとす。幾何学は其の教育上の価値の一大部分は推理力の錬磨に在るものなり。故に、之を用いる言句は最厳確にして趣意判然ならざる可からず。定義、公理、定理の如き一言一句も苟くもす可からざるもの有り。是に於て余は少くとも幾何学に於ては教科書の文と教員生徒の言と其の体の一致ならんことを希望す。・・・余の教科書に於て記号を用いざるの一理由は本邦幾何学授業上此言文一致の改良を見んと欲するに在り。余は之を実行し得べき文体を試みるなり。」(6)

と述べているように、菊池は幾何の教科書を通して言文一致文体の創作と普及を意図し、それによって、日本の数学文化と思考様式の西欧化を図り、数学水準の向上を目指したのであった。

菊池大麓は藤沢利喜太郎とともに、当時の文部省普通学務局長服部一三から、数学の教科課程を一定にする目的のために教科書の編纂を依頼され、その依頼に応えて、『初等幾何学教科書　平面幾何学』を編纂したのである。明治21年９月20日に巻壱、明治22年１月10日に巻弐がそれぞれ文部省から出版され、明治22年４月20日には合本として再版された。以後、第10版まで版を重ねることになる。また、『初等幾何学教科書　立体幾何学』は明治22年７月23日に出版された。

菊池はまた“A Syllabus of Plane Geometry”の翻訳書である『平面幾何学教授條目』を明治20年２月15日に出版している。この『平面幾何学教授條目』の「序」において、

「・・・二千年の久しき此書（ユークリッド『原論』のこと）を尊で、完全無欠の書と為しユークリッドを敬うこと恰も神の如くなりき。然るに漸く近時に至りて、其不完全にして現今の時勢に適せざることを説く者頗る多く、其論大に勢力を得、現今に於ては最守旧の数学者と雖もユークリッドの幾何原本を其ままに用いることを主張するものは殆ど之れ無きに至れり。

此大改革に与りて大なる効力有るものは（但し主として英国に就て之を云う）Association for the Improvement of Geometrical Teaching　即幾何学教授法改良協会なり。此協会は一千八百七十一年に設立せるものにして、其会員は英国に於て数学の教授に従事せる諸氏なり」(7)

と述べられているが、第２章でも述べたが、ユークリッド流の幾何教育を大きく改造するには至らなかったようである。

また、菊池が『初等幾何学教科書』の「凡例」において、「本書に於ては文部大臣の許可を得て、断然横書することとせり」と述べているように、当時の教科書のほとんどが縦書きであった中、菊池の教科書は横書きで出版されたのである。この間の事情について、菊池は、後年に、「明治十九年余は文部省の依頼を受けて数学の中等教科書を編纂するに当て、森文部大臣に建議した。その主意は、今度の教科書はローマ字で書くことにしたい。若し何しても之が許されぬならば、普通の文字でも横書にす

ることとしたいと云うのであった。さすがの森文部大臣もローマ字は許されなかったが、横書は承諾された。而して、明治二十一年に幾何学教科書が横書で出版された。之が教科書に於て横書が用いられた初めである。」と述懐している。東京帝国大学理科大学教授の肩書きを持つ菊池が横書き教科書を著したこと、その横書き教科書が文部大臣の許可を得たものであったことから、その後、横書き教科書が急速に普及していくのである。

菊池は『初等幾何学教科書』の第10版への序文で

「本書遂次版を重ね、毎版多少の修正を加えたりしたが、今版更に大に訂正して、第十版を出版することとなれり」(8)

と述べているように、改良の手を加えて版を重ねていったのである。そこで、本論文では、最後の第10版を使用することとした。

第10版の目次は下記のごとくである。

この目次を見てもわかるように、ユークリッド『原論』と比較すれば、およそ、第一編が第Ⅰ巻に、第二編が第Ⅲ巻と第Ⅳ巻に、第三編が第Ⅱ巻に、第四編が第Ⅴ巻に、第五編が第Ⅵ巻に相当している。

冒頭の「緒論」では、「幾何学は物の形、大きさ及び位置に関する真理を研究する学科なり」と規定されると同時に、「此学科は唯其の論ずる事項の緊要なるのみならず、又推理法の最も良き練習となる」とも主張されている。続いて、命題、定義、公理、仮設と終結、対偶、転換法、同一法、作図題などの解説がなされ、幾何学学習の準備にあてられている。

菊池は『初等幾何学教科書』の「凡例」において、

「余は追って本書の随伴として幾何学講義を編著して、之を世に公にせんと欲す。」(9)

と述べているが、この幾何学講義の出版は『初等幾何学教科書』出版の約９年後の明治30年４月13日のことであった。署名は『初等幾何学教科書随伴幾何学講義　第一巻』であった。菊池の幾何教育観はこの『幾何学講義』に端的に語られている。

菊池の『初等幾何学教科書』は、英国改良協会の幾何学書に依拠するとともに、なお仏国、独国の幾何教科書をも参酌し、菊池独自の構想によって編纂されたのであり、その意義・特徴として、

（１）日本人によって書かれた最初の本格的な幾何学教科書であること。

（２）言文一致の文体を目指した教科書であること。

（３）横書き教科書の普及に貢献した教科書であること。

（４）後代に続く幾何教育の目的を確立させた教科書であること。

（５）記号を用いないで記述することを目指した教科書であること。

（６）幾何学と代数学とは別学科であると意識した教科書であること。

を指摘することができる。（１）～（３）については、すでに言及した。（４）に関しては、『幾何学講義』の「第一章　総論」の冒頭で、

「幾何学とは空間の性質を論ずる学科なり。・・・幾何学に於ては、物の諸性質の中、唯其の形、大きさ及び位置の三つにのみ注目し、他は之を顧みざるなり」

と述べると同時に

「斯くの如く、幾何学に於ては少数の公理及定義を基礎とし、夫より逐次推究し、正当の証明無くしては一歩も進まず、実に演繹推理法の最も好き例なり。故に幾何学はその講ずる所の事項が吾人の生存する空間の性質にして宇宙万物皆此性質を有せざる無きを以て之を知ること、人生極めて必要の事たるのみならず、又其の攻究の方法は吾人の何事に付いても行わざるを得ざる推理の方法を練習するに最最当なり。此学科の普通教育中の一大科目たるは又至当の事なりと言う可し。

故に幾何学を教授するに当たりては、只に其の事項を学ばしむるに止らず、常に推理の方法に注意すること緊要なり。」(10)

と述べていることからも伺えるように、幾何教育に、

（１）空間の諸性質の獲得

（2）推理力の錬磨

という２重の目標を担わせたのである。しかも、菊池は、

「幾何学は、其の教育上の価値の一大部分は推理力の錬磨に在るものなり。」(11)

と述べていることからも推察できるように、幾何教育の目標は、むしろ後者の方に重点が置かれていたのである。

推理力の錬磨に関連して、上記の「(5) 記号を用いないで記述すること」という特徴を指摘することができる。菊池は

「余は教科書に於ては、第四編に至るまでは一切記号を用いず、総て言語のみを用いたり。」(12)

と述べているが、その一例を「中心より弦へ引ける垂線は、其の弦を二等分す」という定理10の証明に見てみよう。この定理の証明は下記のように記述されている。

「Oを円ＡＢＣの中心、ＯＤをOより弦ＡＢへ引ける垂線とせよ。然るときは、ＡＢはD点に於て二等分せらる可し。ＯＡ，ＯＢを結び付けよ。然れば直角三角形ＯＡＤ、ＯＢＤに於て、辺ＯＡは辺ＯＢに等しく、辺ＯＤは両形に通す。故にＡＤはＢＤに等し。即ＡＢはD点に於て二等分せらる」(13)

このように、たとえば等号の記号を用いて「ＯＡ＝ＯＢ」などとせずに、「辺ＯＡは辺ＯＢに等しく」と言葉で記述されるのである。このような記述の仕方について、菊池は、

「余の経験に依れば、「・・・せよ」「然るときは・・・なる可し」、又は、「・・・なるを以て・・・なり」「・・・を結び付けよ」「角ＡＢＣ」など言うは、最初は耳慣れず、口慣れざるを以て、少しく可笑しき様なれども、断じて之を実行するときは、暫時にして之に慣れ、大いに之を便利とするに至るものの如し」(14)

と主張して、教育上の価値を強調している。菊池は、さらに続けて、

「斯くの如くして自己の思想を明白に順序正しく述ぶるの習慣を得せしむるは、又幾何学を学ぶの教育上の価値を増すものなり。・・・余の教科書に於て記号を用いざるの一理由は本邦幾何学の授業上此言文一致の改良を見んと欲するに在り。余は之を実行し得べき文体を試みるなり。」(15)

と述べているように、『初等幾何学教科書』における文体の修得を通して、日本人の思考様式の改善を図ろうとしたのである。

菊池が記号を用いないで記述する方式を推奨した理由はもう一つある。それは、（6）に述べたように、幾何学と代数学を区別することに係わっている。菊池は、

「幾何学と代数学とは別学科にして、幾何学には自ら幾何学の方法有り。濫に代数学の方法を用いる可からざるなり。言語を用いる代りに便宜の為に記号を用いるは宜しと雖是吾々が幾何学上に用いる記号にして、代数学の記号にあらず。故に直ちに代数上の法則を之に応用するは決して許す可からざること勿論なり。」(16)

と述べて、たとえば、直線ＡＢ上の正方形を表現するとき、簡略にAB^2と書くことは差し支えないが、それはあくまでも「ＡＢ上の正方形」を意味する記号であって、これを「ＡＢの二乗」と読んだり、代数学におけるa^2なる記号と同様なものとするのは大いなる誤謬であると強調している。また、ＡＢとＣＤの和なる直線上の正方形に関連して、$(AB+CD)^2$と略記するのはよしとしても、

「・・・是れ唯略したる書き方なることを忘る可からず、$(AB+CD)^2$を代数学式の如く心得、これを代数学的に展開して$AB^2+CD^2+2AB\cdot CD$とし、以て定理の証明するが如きは言語道断なり」(17)

と強調している。つまり、菊池は、代数学には代数学固有の目的があり、幾何学には幾何学固有の目的があり、それぞれに即した方法があるのであって、それらを混同してはならないという分化主義の立場に立っているのであり、その観点から、記号を用いることを排除したのである。

このように、菊池は『初等幾何学教科書』の中で記号を用いなかったのは、一つは思想を厳密に語ることを可能にする言文一致文体を提供するためであり、そしてもう一つは代数的計算による図形の計量に傾斜し、論証の精神を欠いていた日本の数学文化を矯正するためであった。菊池は言文一致体を作ったと考えられる。

彼が作った文体は「・・・せよ」「然るときは・・・なる可し」「・・・なるを以て・・・なり」「・・・を結び付けよ」「角ＡＢＣ」というものであり、「・・・だ」（二葉亭四迷）「・・・である」（尾崎紅葉）「・・・です」（山田美妙）といった、近代文学史で言われる言文一致ではない。つまり、口語体ではない。菊池は、規範的文体をあらかじめ作った上でそれを字句どおり語らせること、つまり言を文に近づける方略を自覚的に取っていた。それは、「西洋では幾何学授業の際生徒に之を述べしむる時に在りては勉めて教科書の文に拠らしむるを以て常とす」という状況にあったことと、さらに西洋文化の導入による日本の文化の世界的レベルへの引き上げを目指したからであると考えられる。つまり、菊池は、幾何学的対象そのもの、幾何学的対象の操作、幾何学的対象の関係、および命題の論理的関係を表現する規範的構文を作り、それを一句違わずに語る教育方法を取ることによって、日本人の思考様式の意図的な改造を目指していたと考えられる。

第３節　『初等幾何学教科書　平面幾何学』の内容と構造

この節では、『初等幾何学教科書　平面幾何学』の内容と構造を調べるために、まず、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』との違いについて検討した。以後この章においては、略して『あそしえーしょん教科書』と呼ぶことにする。

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第二編（円）	第三本（円）
第一節（本原の性質）	第一節（原質）
定義１　円とは、一つの線を以て囲みたる平面形にして、その内の或る一つの点よりこの線上の何れの点まで引ける直線も皆相等しきものなり。この線を円周、或いは単に周と称し、この点を円の中心又は円心と称す。	定義１（菊池の定義１と同じ　以下同様の書式とする）円とは、円周と名くる一線を以て囲みたる平面図形にして、その図形内の或る一点より円周へ引ける諸直線互いに相等しきものなり。此一点を円の中心と名づく。
定義２　円の直径 定義３　円の半径	定義２（定義３）　円の半径 定義３（定義２）　円の直径
定理１　円の中心より一つの点の距離は、その点が円周の内に在るか、或いはその上に在るか、或いはその外に在るかに従って、半径より小なり、或いは之に等し、或いは之より大なり。	定理１（定理１）
系１　一つの点は、一つの円の中心よりの距離が半径より小なるか、或いは之に等しきか、或いは之より大なるかに従ってその円の内に或いは上に或いは外に在り。 系２　円はその中心において対称なり。即、円の中心はその対称の中心なり。 系３　円周は中心より一定の距離にある点の軌跡なり。	推論（系１） 等勢・対称について 点等勢・等勢の中心因って円はその中心に関して等勢なり。円の中心は等勢の中心なり。
問題68　一つの円には中心は唯一つ有るのみ。	例題１（問題68）

問題69　一つの与えられたる点を過り、中心が一つの与えられたる直線の上にある円周は皆他の一つの定まれる点を過る。	例題２　平行四辺形はその対角線の交点に関して点等勢を有することを示せ。 例題３　四角形もしその対角線の交点に関して点等勢を有するときはその四角形は平行四辺形なり。
定理２　円の直径は之を二つの全く相等しき部分に分かつ。 系１　互いに垂線なる二つの直径は円を全く相等しき四つの部分に分かつ。	定理２（定理２）　半円 推論（系１）　四分円
定義４　半円　　四分円　　象限 系２　円は其の何れの直径についても対称なり。即円の直径は何れも円の対称の軸なり。	等勢に分かつ（対称） 等勢の軸（対称の軸） 円は任意の直径に関して等勢なり　或いは円の各直径は等勢の軸なり。
問題70　円内の一点よりその点を過る直径とその両側において相等しき角を為す所の二つの直線を引き周において終わらしむるときは此の直線は相等し。	例題４　等脚三角形の頂角の二等分線はその三角形の等勢の軸なることを示せ。 例題５　菱形はその各対角線に関して等勢なることを示せ。 例題６　平行四辺形もしその一つの対角線に関して等勢なるときはその四角形は菱形なるべし。 例題７　四角形もしその各対角線に関して等勢なるときはその四角形は菱形なるべし。 例題８　一つ曲線もし一与点を通過する各軸に関して等勢なるときはその曲線は与点を中心とする円なることを証せ。
定理３　半径が相等しき円は全く相等し。 定義５　同じ中心の円を同心円と称す。 系１　相合する二つの円の半径は相等し。 系２　二つの円が相合したるときは中	定理３（定理３） 推論１（系２）

心を心としてその一つを回転せしむるも二つの円は常に相合す。	
系３　半径が相等しからざる同心円は出会う能わず。	推論２（系３）
系４　周が出会う所の二つの円は同心なる能わず。	推論３（系４）
	例題 ９（問題70） 10　与一円周上に二角頂を有し円内の一与点を第三角頂とする等角三角形を作れ。 11　頂角を与え円内の一与点を頂点としその円周上に底辺の両端を有する等脚三角形を作れ。 12　一円の円周上に在る若干点を任一定点へ連結する諸直線を二等分するとき各其分点は他の定円の円周上に在ることを示せ。 13　一定円周と会すべく円外の一点より引ける諸直線を底辺とし等脚三角形を作れば其の角頂は二個の定円周上に在り。正方形を作りこの定理を説明し且つ証明すべし。 14　一定円外に中心より半径の三倍より大ならざる距離に一点を取り其の点を通過して其の点と円周の間の部分を円内の部分に等しくすべき一直線を引き得ることを示せ。
第一節の問題 問題71　正方形の対角線上の任意の点を過り辺に平行なる直線を引けばこの線が辺と交わる所の点は皆対角線の交点を中心とせる一つの円の周の上にあり。	15（問題71）

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第二節（中心に於いての角）	第二節（中心及扇形に於ける角）
定義６　弧　　互いに共軛 　　　　優弧　劣弧	定義４（定義６）弧　　連弧 　　　　大連弧（優弧）　小連弧（劣弧）
定義７　優角は優弧に対しその上に立つという。劣角は劣弧に対し	定義５（定義７）

その上に立つという。	
定義８　扇形	定義６（定義８）扇形
定理４　同じ円或いは相等しき円に於いて中心に於いての相等しき角は相等しき弧の上に立つ。中心に於いての相等しからざる二つの角の中大なる角が大なる弧の上に立つ。	定理４（定理４　証明も同じ） 推論　同円或いは相等円に於いて相等角をする扇形は相等しく又不等角を有する二個の扇形に於いて大なるものは大角を有す。
問題72　相等しき円に於いて中心に於いての一つの角が他の角の二倍なれば第一角に対する弧も第二の角に対する弧の二倍なり。	例題16（問題72） 例題17　相等円に於いて一扇形の角他の扇形の角の二倍なるときは其の第一扇形は第二扇形の二倍なるべし。
定理５　同じ円或いは相等しき円に於いて、相等しき弧は中心に於いての相等しき角に対す。相等しからざる弧の中、大なる弧が中心に於いて大なる角に対す。	定理５（定理５　証明も同じ） 推論　同円或いは相等円の相等扇形は等角を有す又二個の不等扇形に於いて大なるものは大なる角を有す。
第二節の問題 問題73　此定理を直接に幾何学的に証明せよ。 問題74　二つの共軛弧が相等しければ各の弧は円周の何分なりや。	例題 18　中心を与ふ円の与弧を等分すべし。 19　与扇形を二等分すべし。 20　半円を三等分すべし。 21　四分円を三等分すべし。 22　中心を与ふる円周を三分すべし。

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第三節（弦）	第三節（弦）
定義９　弦	定義７（定義９）円の弦
定理６　円の弦の上にある総ての点は円周の内に在り。：而して其の双方への延長の上に在る点は円周の外に在り。	定理11（菊池の定理６と同じ。順番が違う。）
（この証明より何を基に述べているの	

か、例えば　Ⅱ、１、系１のように教科書に書かれている。)	
系　一つの直線は一つの円の周と二つより多くの点に於いて出会う能わず。	推論（定理６の系）
定義10　割線	定義８（定義10　割線）
問題75　Ⅰ、18に拠らず、Ⅰ、11、13、15及Ⅱ、１、系１を用いてこの定理を証明せよ。	
定理７　同じ円或いは相等しき円に於いて、相等しき弧に対する弦は相等し；相等しからざる劣弧の中大なる劣弧に対する弦が他より大なり。	定理６（菊池の定理７と同じ）
系　同じ円或いは相等しき円に於いて相等からざる優弧の中大なる弧に対する弦が他より小なり。	推論（定理７　系）
問題76　相等しき円に於いて一つの弧が一つの他の弧の二倍なるときは前者に対する弦は後者に対する弦の二倍より小なり。	例題23（問題76）
定理８　同じ円或いは相等しき円に於いて相等しき弦は相等しき優弧及び相等しき劣弧に対す；相等しからざる弦の中、大なる弦が大なる劣弧及び小なる優弧に対す。	定理７（定理８）
系　同じ或いは相等しき円に於いて相等しき弦は中心に於いて相等しき角に対す；相等しからざる弦の中大なる弦が中心に於いて大なる劣角に対す。	設問１　与弧を二等分すべし。(作図12)
定理９　中心より弦の中点に引ける直線は弦に垂直なり。	定理８（定理９）
問題77　円内に於いて其の中心を過ら	

ざる二つの直線が相交わるときは各が他を二等分することは決して無し。	
定理10　中心より弦へ引ける垂線は其の弦を二等分す。 系　此の垂線の延長と円周と交わる所の二つの点は此の弦に対する劣弧及び優弧を二等分す。	定理９（定理10）
問題78　一つの円の平行なる弦の中点の軌跡は之に垂直なる直径なり。	例題24（問題78）
問題79　平行なる弦は円周より相等しき弧を截り取る。	問題25　相交わる二円の一共通点を通過する直線各円周上に各端を有するとき中心を連結する直線の前の直線上に於ける正射影は前の直線の半なることを示せ。
定理11　弦の中点より之に直角に引ける直線は円の中心を過る。	定理10（定理11）
問題80　二つの与えられたる点を過る所の総ての円周の中心の軌跡は此の二つの点を結び付くる直線を直角に二等分する直線なり。	例題26（問題80） 設問２　与円或いは与弧の中心を求むるべし。（作図13）
定理12　同一の直線上に在らざる三つの点を過る円周は一つ有り。而して唯一つに限る。	定理12（定理12）
系１　三つの同じ点を過る円周は全く相合す。	推論１（系１）
系２　相合せざる二つの円周は二つより多くの点に於いて出会う能わず。	推論２（系２）
系３　円内の在る点より円周へ引ける直線が二つより多く相等しければ其の点は中心なり。	推論３（系３）
系４　三角形の三つの頂点を過り	問題27　二円は共通の弧を有せざること

一つの円を書くを得 而して唯一つに限る。	を証せ。
定義11　外接円　外心	
定理13　同じ円或いは相等しき円に於いて相等しき弦は中心よりの距離が相等し。；相等からざる弦の中、大なるものが小なるものより中心に近し。	定理13（定理13） 定理13（別法）２つの証明を取り扱っている。
問題81　此　定理の最初の部分を後の部分と同じ方法に拠りて証明せよ。	
定理14　同じ円或いは相等しき円に於いて中心より相等しき距離に在る弦は相等し；相等しからざる距離に在る弦の中、中心に近きものが他より大なり。 系　直径は円の最大なる弦なり。	定理14（定理14） 推論（系）
問題82　此　定理を直接に幾何学的に証明せよ。	例題28（問題82）
問題83　円内の一つの与えられたる点を過る最短き弦は其の点を過る直径に垂直なり。	例題29　第二本定理９により、直接に定理13及び14を証せ。
第三節の問題 問題84　一つの円に於いて相等しき弦の中点の軌跡は同心円なり。	例題 30　直線形の各辺を直角に於いて二等分する各直線一点に於いて会するときは該形の各角点を通過して円を書くことを得る。 31　相交わる二円の共通点中の一個を通過して各円周上に其の各端を有する最大直線を引け。 32　相交わる二円の共通点中の一個を通過して一直線を引き各円内に容るる弦を相等しからしむ。 33（問題83）円内の一与点を通過して最小弦を引け。

問題85　二つの相等しき円の中心を結び付くる直線に平行なる直線より其の二つの円が截り取る弦は相等し。	34（問題85） 35　ＡＢＣＤ直線は二個の同心円（どこで定義されたのだろう）をＡ、Ｂ、ＣＤにおいて截る然るときはＡＢはＣＤに相等しきことを示せ。 36　一与点より与一円の円周に最短及び最長なる直線を引け。 37　相交わらざる与二円の各に其の一端を有する最短及び最長の直線を求む。
問題86　二等辺三角形の頂角が正三角形の外角に等しければ、其の外接円の半径は相等しき辺に等し。	38（問題86） 39　円の直径より小なる幅を有する平行線の定規の使用によりて中心を決定せよ。 40　二円の交点の一個より二円の共通弦に互いに相等しき傾斜の直線を引き各円周上に於いて相会する他の二点間に在る此等の部分は相等し。

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第四節（弓形に於いての角）	第四節（弓形に於ける角）
定義12　弓形　　優弓形　　劣弓形	定義９（定義12） 弓形　小弓形　大弓形
定義13　周に於いての角 弧の上に立つ	定義10（定義13）円周に於ける角 弧に対して立つ角
定義14　弓形に於いての角 弓形は此角を含むという	定義11（定義14）弓形に於ける角
定理15　周に於いての角は同じ弧の上に立つ所の中心に於いての角の半分なり。	定理15（定理15）
問題87　一つの円内の点Ｅにおいて交わる二つの弦ＡＢ、ＣＤが為す所の角ＡＥＣは弧ＡＣ及ＢＤの上に立つ所の中心に於いての角の和の半分なり。	例題41（問題87）
問題88　一つの円の二つの弦ＡＢ、ＣＤを延長し円外の点Ｅにおいて出会わしむるときは角ＡＥＣは弧ＡＣ及ＢＤの上に立つ所の中心においての角の	例題42（問題88）

差の半分なり。 問題89　三角形ＡＢＣの頂点Ａ、ＢＣ、を過る円周の中心Ｏより一つの辺ＢＣへ垂線ＯＤを引けば角ＢＯＤは角Ａ（或いは其の補角）に等し。	
定理16　同じ弓形に於いての角は相等し。（円周角の定理にあたるだろう）	定理16（定理16）
系１　弓形の弦が其の内の一つの点において対する所の角は、弓形に於いての角より大なり。弦が弓形と同じ側にその外にある点において対するところの角は弓形に於いての角より小なり。	推論１（系１）
系２　弓形と同じ側において其の弦を底辺とする三角形の頂点は、その頂点に於いての角が弓形に於いての角より小なるか或いは之の等しきか或いは之より大なるかに従て、弓形の外に或いはその弧の上に或いはその内に在り。	
系３　一つの与えられたる有限直線の同じ側において其の直線が常に一定の角に対する様なる点の軌跡は其の直線を弦とせる円弧なり。	推論２（系３）
	例題43　一円の二弦ＡＢ、ＣＤの交点をＥとす其Ｅは円の内外何れに在るに関せずＡＥＣ、ＤＥＢの三角形は等角なることを示せ。又、ＥＡＤ、ＥＣＢの三角形に於けるも同様なり。 例題44　Ｂに於いて相交わる二円の一弦をＢＡ他の弦をＢＣとしＢを通過してＰ及びＱに於いて各円周に会するＰＢＱ一直線を引きＰＡ、ＱＣ（要するときはその延長線）Ｒに於いて相会するときはＲは一定の弧上に在ることを示せ。 例題45　ＰをＡＰＢ円弧上の一点としＡＰをＱに延長しＰＱをＰＢに等しくす然るときはＱの軌跡は一の円弧なり。

定理17　弓形に於いての角は其の弓形が半円より小なるか或いは之に等しきか或いは之より大なるかに従いて一直角より大なり或いは之に等し或いは之より小なり。	定理17（定理17）
問題90　三角形の二辺を直径として書きたる円の周は第三辺或いは其の延長の上において出会う。	例題46（問題90） 例題47　菱形の各辺上に其の各辺を直径として書ける四円は一個の共通点を有す。
定理18　弓形は其れに於いての角が一直角より大なるか、或いは之に等しきか、或いは之より小なるかに従いて、半円より小なり、或いは半円に等し、或いは之より大なり。	定理18（定理18）
定義15　その形は円に内接す 円はその形に外接す	定義12（定義15） その形は円に内切す 円はその形に外切す
定理19　円に内接する四角形の相対する角は互いに補角なり。（円に内接する四角形の性質にあたるだろう）	定理19（定理19）
系１　円に内接する四角形の外角はその内対角（其の外角に隣れる内角に対する内角）に等し。	推論１（系１）
系２　四辺形の対角が互いに補角ならば、之に外接する円を書くことを得。	推論２（系２）
問題91　ＡＣ、ＢＤを結び付け、Ⅱ16及Ⅰ、13を用いてこの定理を証明せよ。	例題48（問題91） 例題49　一円もし平行四辺形に外切して書き得るときは此の平行四辺形は矩形なり。 例題50　円は各矩形に外切して書き得る。
問題92　一つの円に内接する四角形ＡＢＣＤの二つの辺ＡＢ、ＤＣをを延長してＥ点において出会わしめ、又他の二つの辺ＢＣ、ＡＤを延長してＦ点に	例題51（問題92）

おいて出会わしむ；若しＢ、Ｅ、Ｆ
Ｄを過る一つの円を書くことを得ればＡＣは初の円の直径ＥＦは第二の円の直径なり。

第四節の問題

問題93　ＡＯＢ、ＣＯＤは互いに垂線なる二つの直径なり；ＯＡ上に任意にＯＥを取り、ＯＤ上に之に等しくＯＦを取りて、ＢＦを延長せば、ＤＥに垂直なる可し。；又ＢＦ、ＤＥの延長が夫々円周とＫ、Ｌに於いて出会へば弧ＫＬは周の四分の一なる可し。

例題

52　ＡＢＣ直角三角形の斜辺への垂線ＡＤの底より二辺に垂線ＤＥ、ＤＦを書くときは、Ｂ、Ｅ、Ｆ、Ｃは一円周上にあることを証せ。

53　ＡＢは円の弦にして其の円の中心をＣとす。而してＤＥは円周上の任意の点ＤよりＡＢに下せる垂線なり。然るときはＡＤＥ、ＢＤＣ角は相等なることを証せ。

54　ＡＢはＡＰＱＢ円に於ける定弦にしてＰＱは与長を有する他の弦なり。ＡＰ、ＢＱ若しＲに於いて会するときはＲはＰＱの凡ての位置に於いて定円の円周上にあることを証せ。

55（問題93）

56　ＡＰＢ、ＡＰＣの二円の交点の一個Ｐを通過してＢＣ直線をＡＰに直角に引きＢＡ、ＣＡは再びＱ及びＲに於いて円周に会する。然るときはＡＰはＱＰＢ角を二等分す。

57　円の内切四角形の両対辺相等しきときは他の両対辺は平行す。

58　ＡＢＣＤは平行四辺形にして若しＡ、Ｂを通過する一円ＡＤ及びＢＣをＥ及びＦを截るときはＥ、Ｆ、Ｃ、Ｄを通過して他の円を書き得ることを証せ。又此二円相等しきときＥＦの位置を求む。

59　第一本定理２０に於いて説明されたる二個の三角形の外切円は凡ての場合に於いて互いに相等し。

60　一円の諸弦一定点を通過するとき其の弦の各中央点は一定円の円周上に在り。

61　相交わる二円の交点の一個を通過して各円の直径を引き其の各直径の他端を連結する直線は他の交点を通過することを証せ。

問題94　ＡＢは一つの円の定まれる弦なり。Ｐは円周上の任意の点なり。；ＡＰとＢＰの為す角を二等分する直線は皆各二つの定まれる点の中の一つを過る可し。

62（問題94）

63　ＡＢＣ三角形のＡ及びＣより其の対辺への垂線Ｅに於いて相交わり而してＢＤは外切円のＢを通過する直径なり。然るときはＡＥはＣＤに等しく又ＡＣ

ＥＤは互いに二等分せらることを証せ。

64　　任三角形の各辺上其の外方に書きたる各等辺三角形の外切円は一点に於いて相合することを証せ。

65　ＡＢＣ三角形の各辺上にＡ’ＢＣ

Ｂ’ＣＡ及びＣ’ＡＢ等辺三角形を作りＡ及びＡ’角項をＢＣの反対の傍らに在らしむ　（他も同様なり）　然るときはＡＡ’、ＢＢ’、ＣＣ’は一点に於いて相会わす。

66　例題64及び65に於いて決定せられたる点は同じことなるを証せ。又其の点をＤとせばＡＡ’＝ＢＢ’＝ＣＣ’＝ＤＡ＋ＤＢ＋ＤＣなり。

67　ＯＡを直径として一円を書きＯを通過して任直線を引き円周とＰに於いて会わし又Ａを通過してＯＡへの垂線とＱに於いて会わせしむ然るときは第二本例題19によつてＯＰ、ＯＱにより包括せられたる矩形は常数なることを証せ。又其の反を説明し且つ証せ。

問題95　円に内接する四辺形の対角線が互いに垂直なるときは其の交点より一つの辺へ引ける垂線の延長は之に対する辺を二等分する。（此直線をブラーメグプタの定理と称す。）

68　三角形の二辺上に其の各辺を底辺とし又第三辺を対角線として三個の正方形を書き此等の正方形に外切する三円は一つの共通点を有することを証せ。

69　ＡＢＣＤＥＦの六角形を円に内切するときは、Ａ、Ｃ、Ｅの各角の和はＢ

Ｄ、Ｆの各角の和に相等し。円に内切する偶数辺を有する任直線形は同定理なる

問題96　三角形の外接円の周上の任意の点より三つの辺或いは其の延長へ引ける垂線の足は一直線上に在り。（此定理を　シムソンの定理と称す。此直線を其点に関係して三角形のシムソン線と名く。）	ことを説明し且つ証せ。 70　ＡＢＣＤ円に於いてＡＢ及びＣＤの平行二弦を引き其の円の中心をＯとしＣＤ弦をＦに於いて二等分しＡ、Ｏ、Ｆを通過する円を書きＧに於いて与円を截る然るときＢ、Ｆ、Ｇは一直線上に在ることを証せ。 71　与へられたる底辺及び頂角を有する諸三角形中最も大なるものは二辺相等しき三角形なり。 72　二円Ａ及びＢに於いて相交わりＡＢＣ円の円周上に任点Ｐを取りＰＡ、ＰＢ（要するときは延長す）他の円の円周とＱ、Ｒに会す。然るときはＱＲ弦はＰの位置に関せず同長なることを証せ。 73　互いに中心を通過する二個の等円の交点の一個を通過して一直線を引き他の二点に於いて各円周と相交わらしむ。然るときは此等の点及び二円の他の交点は等辺三角形の角点なり。 74　二円の交点の各を通過して任直線を引き其の一線各円とＡ及びＢに於いて相会し他の一線各円とＣ及びＤに於いて相会す然るときはＡＣはＢＤに平行なることを証せ。 75　両三角形に於いて底辺、積及び頂角相等しきときは此両三角形は全く相等し。

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第五節（切線）	第五節（切線）
定理20　円周上の一つの点を過る総ての直線の中、独り其の点への半径に垂直なる直線は再び円周と出会わず。其の他は皆之と一つの他の点に於いて出会う。 定義16　円に切す	定理20（定理20の逆） 円の円周上に在る一点を通過する凡ての直線再び円周に会わせざる直線は単に一個あるのみ而して此直線は其の点において半径に垂直なり。 定義13（定義16）

円の切線　切点	円に切す 円に切線　切点
定理20（別法）　他の証明として、定理20を極限法で証明している。	定理20　別法
定義16（第二）　円の割線が其の二つの交点が常に相近づき終に相合わする様に動くときは其の極限の位置に於いて其の直線は円に切す。或いは円の切線なりと云う。二つの交点の合わしたる点を切点と称す。	定義13　別法（定義16　第二）
系１　円周上に一つの点に於いて一つの切線を引くを得、而して唯一つに限る。	推論１（系１）
系２　円の切線は切点への直径に垂線なり。	推論２（系２）
系３　円の中心は切点に於いて切線に垂線なる直線の上に在り。	推論３（系３）
系４　中心より切線に引ける垂線は之と切点に於いて出会う。	推論４（系４）
	推論５　設問　円周中の１つ与点に於いて其の円に切線を引け。
	例題76　与直線と与角をなして与円に切線を引け。
問題97　一つの円の相等しき弦は皆之と同心なる一つの円に切す。	例題77（問題97）
定理21　直線は一つの円の中心より其の距離が半径より小なるか或いは之に等しきか或いは之より大なるかに従いて其の円周と交わり或いは之に切し或いは全く之と出会わず。	定理21（定理21）
系　円の中心より一つの直線の距離は其の直線が円周と交わるか或いは之に切するか或いは全く之と出会わざるかに従いて半径より小なり或いは之に等或いは之より大なり。	推論（系）

定理22　円外の一つの点より之へ二つの切線を引くを得；而して唯二つに限る。	定理22（定理22）
系　円外の一つの点より之へ引ける二つの切線は相等しく；其の点と円の中心とを結びつくる直線と相等しき角を為す。	推論１（系） 推論２　設問　円周外の一与点より其の円に切線を引け。作図法及び証明法は此定理中に含有せり。
問題98　一つの円が二つの相交わる直線に切すれば其の中心は此直線の挟む角を二等分する直線の上に在り。	例題78（問題98）
問題99　二つの平行なる直線に切する円の中心の軌跡を求む。	例題79（問題99）
	例題80　一円直角三角形に内切するときは斜辺と其の円の直径との和は他の二辺の和に等しきことを示せ。
問題100　四辺形の辺が皆同じ円に切するときは相対する辺の和は相等し。	例題81（問題100）
問題101　問題100の逆を証明せよ。	例題82　若し凸四角形に於いて二対辺の一変の和他の二対辺の一変の和に等しきときは円を此四角形に内切することを得る。 例題83　任偶数編の直線形一円に外切するとき一個ずつ相隔たりたる辺の和は他の各辺の和に等し。 例題84　与円に与点を通過して与長に等しき弦を引け。
定理23　切線及び切点より引ける弦の挟む角は各隣りの弓形に於いての角に等し。	定理23（定理23） 例題85　定理19を適用して定理23の第二を称せ。
・他の証明として、定理23を極限法に由りて証明している。	第二証　極限法に由りて証明している。
	例題86　定理19推論１の四角形の角頂の二個相合わしたる極限の場合として定理23を証せ。
問題102　ＡＢ、ＡＣは一つの円周上	例題87（問題102）

の点Ａより引ける二つの弦なり；ＢＤをＡに於いての切線に平行に引きＡＣとＤ点に於いて交わらしむ；円ＢＣＤはＡＢに切す。
問題103　ＡＢＣＤは円に内接する四辺形にして其の対角線の交点をＥとす；三角形ＡＥＢに外接する円を書けばＥに於いて此円に切する直線は四辺形の一つの辺に平行なり。

第五節の問題
問題104　中心Ｏなる円外の点Ａより之へ二つの切線ＡＢ、ＡＣを引けばＯＡは二つの切点を結びつくる弦ＢＣを直角に二等分す。
問題105　円の弦は其の１つの端を過る直径と其の端より他の端に於いて切線へ引ける垂線との挟む角を二等分す。
問題106　四辺共に同じ円に切する平行四辺形は菱形なり。
問題107　二つの円に切する直線の切点Ａ、Ｂより円の中心を結び付くる直線が夫々の周と交わる点Ｃ、Ｄへ引ける直線ＡＣ、ＢＤは平行なり。

例題88（問題103）

例題89（問題105）
例題90　直角三角形に於いて直角を包括する辺の一個を直径として円を書くとき斜辺の截点に於ける切線は他の辺を二等分す。
例題91　初めに円の中心を求めずして与円の与点に於いて切線を引け。

設問３　与直線上に与角を包括する弓形を書け。

例題92　与角直角なる場合を験せ。

設問４　与円より与角を包括する弓形を截るべし。

例題
93　Ａ及びＢを其の中心とする二等円あり。Ｏは此等の円外の一定点にしてＡはＯＢに等しき半径の第三円の中心なり。Ｏより此三円に引きたる各切線は直角三角形の各辺に相等しきことを証せ。
94　項角と其の項角を包括する辺の一個

	及び高さを与へて三角形を書け。 95　与点を通過し与点に於いて与直線に切する円を書け。 96　等脚三角形の外切円に角各点を通過して引ける切線は又等脚三角形を作ることを証せ。又二個の三角形共に等辺三角形にあらざれば其の頂角等しきこと能わざることを証せ。 97　円に内切或いは外切する平行四辺形の各対角線は円の中心を通過す。

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第六節（二つの円）	第六節（二円）
定義17　二つの円は相切す 二つの円は外切す　内切す　相交わる	定義14（定義17） 二円の外切　交截　内切
定理24　二つの円の周が其の中心を結び付くる直線上に在らざる１つの点に於いて出会うときは円周は１つの他の点に於いて再び出会い円は相交わる；二つの交点を結び付くる直線は中心を結び付くる直線に垂直にして之が為に二等分せらる；而して中心の間の距離は半径の和より小にして其の差より大なり。	定理24（定理24）
系　若し二つの円の周が唯１つの点に於いて出会うときは其の点は中心を結び付くる直線上に在り。	推論（系）
定理25　二つの円の周が其の中心を結び付くる直線の上に在る１つの点に於いて出会うときは此二つの円周は他の点に於いて出会わず、円は外切或いは内切す；而して其の中心の間の距離は外切の場合に於いては半径の和に等しく、内切の場合に於いては半径の差に等し。	定理25（定理25）
系１　二つの円が相交われば其の周は	推論１（系１）

二点に於いて出会い其の点は其の中心を結び付くる直線の上に在らず。（是れ定理25の対偶なり）	
系２　二つの円が相切すれば、其の中心を結び付くる直線は切点を過る。(是れ定理24の系と同じことなり)	推論２（系２）
系３　二つの円が相切すれば其の切点に於いて同一の切線を有す。	推論３（系３）
問題108　二つの円の周が出会うこと無く各全く他の外に在れば其の中心の間の距離は半径の和より大なり。若し其の一つが全く他の内に在れば距離は半径の差より小なり。	例題98（問題108）
問題109　二つの円の中心の間の距離が（イ）半径の和より大なるか或いは（ロ）其の和に等しきか或いは（ハ）其の和より小にして、差より大なるか或いは（ニ）其の差に等しきか或いは（ホ）其の差より小なるかに従いて二つの円は（イ）各全く他の外にあり或いは（ロ）外切し或いは（ハ）相交わり或いは（ニ）内切し或いは（ホ）１つが全く他の内に在る可し；之を転換法に拠りて証明せよ。又、直接に幾何学的に証明せよ。	例題99（問題109） 設問　与二円に共通切線を引け 例題100　二円相等しきとき此設問の作図法を与ふべし
第六節の問題	例題
問題110　二つの円が相切すれば切点を過る任意の二つの直線が其の二つの円周より截り取る所の弧の弦は平行なり。	101　互いに相切する二等円の円周上に其の両端及び三等分点を有する一直線を引け。
問題111　二つの円が相切すれば切点を過る任意の直線は円より相等しき角を含む弓形を截り取る。	
問題112　二つの円がＰ点に於いて外切し、直線ＡＢが夫々Ａ、Ｂに於いて之に切す。ＡＢを直径として書ける円	102（問題112）

はＰ点を過り、中心を結び付くる直線に切す。	
問題113　三つの相等しき円が互いに相切すれば、其の中心は正三角形の頂点なり。三つの頂点も亦然り。	103（問題113）
問題114　二つの円がＥ点に於いて外切し、ＡＢ、ＣＤは平行にして各１つの円の直径なれば直線ＡＤ、ＢＣはＥ点に於いて交わる。	104（問題114）
問題115　１つの円の半径が他の円の直径なれば、二つの円は内切し；切点より外の周へ引ける直線は内の周に於いて二等分せらる。	105（問題115） 106　与点に於いて与円に切する与半径の円を書け。如何なるとき唯々一個の解法を有するか。
問題116　外切する二つの定まれる円に外切する任意の円を書けば定まれる円の中心より其の中心の距離の差は常に定まれる円の半径の差に等しい。	107　一与点を中心とし与円に切する円を書け。通常二個の解法あることを示せ。如何なるとき唯々一個の解法を有するか。
問題117　相交わる二つの定まれる円に切する任意の円を書けば、定まれる円の中心より其の中心の距離の和或いは差は常に同じ。	108　二円外切するとき与長の直線を引き其の両端を各円の円周上に在らしめ且つ切点を通過するには如何に其線を引くべきか。
問題118　二つの円が相交わる所の点Ａ、Ｂを過り直線ＰＡＱ、ＲＢＳを引き、円周とＰ、Ｑ、Ｒ、Ｓ点に於いて出合はしむ；弦ＰＲ、ＱＳは平行なり。	109　ＡＢ共通弦を有する二等円あり。一円の弦ＡＣはＡＢに等しくＡＣを後方に延長するとき他の円の中心を通過するときはＡＢは各円の半径に等しきことを示せ。 110　二円外切するとき共通切線上の正方形は各直径によりて包括せられたる矩形に等しきことを示せ。 111　二円及び其の一円周上のＡ点を与へＰＡ弦を引き他の円周をＱに於いて截りＱＡをＰＡにひ等しからしむ。

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第七節（内接形及外接形）	第七節（内切形及外切形）
定義18　円は直線形に内接す 直線形は円に外接す	設問６　一直線上に在らざる三点を通過する円を書け。作図法及び証明は定理１

	２に於いて示せり。
定理26　同一の点を過らず又平行ならざる三つの与へられたる直線に切する円は四つあり。而して唯四つに限る。 系１　三角形の三つの辺に切する円は一つ有り。而して唯１つに限る。	設問７　同一点にあらずして互いに相交わる三直線に切する円を書け。 推論（問題119）
定義19　三角形の三つの辺に切する円を其の内接円と称す；其の中心を内心称す。 系２　三角形の１つの辺及び他の二つの辺の延長に切する円は三つ有り。而して唯三つに限る。	定義15（定義19）三角形の内切円
定義20　三角形の１つの辺及び他の二つの辺の延長に切する円を其の傍接円と称す。；其の中心を傍心と称す。	定義16（定義20）三角形の傍切円
問題119　二つの平行線が１つの他の直線と交われば、此三つの直線に切する円は二つ有り。而して唯二つに限る。此二つの円は相等し。	例題112（問題119） 例題113（問題120） 例題114　等脚三角形の二個の相等しき傍接円の半径は此三角形の高さに等し。 設問８　与円に与三角形と等角の三角形を内切すべし。 定義17（定義18） 円は直線形に内切す 直線形は円に外切す 設問９　与三角形に等角の三角形を与円に外切すべし。 例題115　与四角形に等角の四角形を与円に外切すべし。

定理27　円の全周を任意の数の相等しき弧に分かつときは、此等の弧の弦の成す内接形は正多角形なり。又総ての分点に於いての切線の成す外接形も正多角形なり。	定理26（定理27） 例題116　一円に内切する任等辺形は又等角なり。 例題117　円に内切する任等角（原本は等辺とあれども恐らくは等角の誤りならん）形に於いて各辺は一辺を隔たる次の辺に等し故に若し辺の数奇数なるときは此図形は等辺なり。
定理28　正多角形の角を二等分する直線は皆１つの点に於いて出会い此点は総ての頂点より相等しき距離に在り。且総ての辺より相等しき距離にあり。	定理27（定理28） 設問10　与正多角形に外切円或いは内切円を作れ。 設問11　与円に４、８、16、32・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。 設問12　与円に３、６、12、24・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。 問題118　ＡＣ対角線を与へてＡＢＣＤＥＦ正六角形を書け。
第七節の問題 問題120　三角形の二つの傍心を結び付くる直線は１つの頂点を過り、内心と第三の傍心とを結び付くる直線に垂直なり。	例題 119（問題122）
問題121　三角形ＡＢＣの二つの頂点Ｂ、Ｃ及び内心及び辺ＢＣに切する傍接円の中心を過り１つの円を書くことを得。	120（問題121）
問題122　三角形の二つの傍心及び二つの頂点を過り、１つの円を書くを得。	
問題123　三角形の各の頂点を過り外心と他の頂点とを結び付くる直線に	121（問題123）

平行なる二つの直線を引けば此六つの直線が為す所の六辺形の辺は皆相等し角は二つずつ相等し。	122　等辺三角形の内切、外切及び傍切円の各半径は１、２、３の比例をなす。 123　与円に内切する等辺三角形、正方形及び正六角形は其の円に外切する相応円形の四分の一、二分の一、及び四分の三なり。 124　円の任切線を其の円の外切正方形の各辺によりて三分せられ其の各部分によりて円の中心に有つ角を求め。 125　三与点をその中心とし互いに相切する三円を書け。通常四個の解法あることを示せ。
問題124　直線形の角を二等分する直線が皆同一の点を過れば此直線形に内接する円を書くを得。	126（問題124） 127　正多角形は其の辺偶数或いは奇数なるに従い等勢の中心を有し或いは有せざることを示せ。 128　M辺の正多角形はMの奇数或いは偶数なるに従いM或いは２Mの等勢の軸を有す。 129　与二直線に切し且つ第三の与直線より与距離に於いて其の中心を有する円を書け。斯くの如き円は幾個書き得るか。 130　与三角形内に一点Oを求む。若しAO、BO、COを連結するときはOBC、OCA、OABの各角は皆な互いに相等しきことを要す。
問題125　三角形の内心と外心とが合すれば、其の三角形は正三角形なり。	131（問題125）
問題126　二等辺三角形の内接円の切点を結び付けて得る所の三角形は二等辺なり。	132（問題126）
問題127　底辺及び頂角が与へられたる三角形の内心の軌跡は二つの円弧なり。	133（問題127） 134　ＤＡは円内の正六角形の一辺にしてＡＢはＤＡに等しく、且つと鈍角をなす切線なり。Ｃを円の中心としＢＤをＥに於いて円に會し、ＢＣをＦに於いて円周の近き部分に會するときはＡＥ及び

	ＥＦは同円に内切する正十二角形及び正二十四角形の一辺に等し。 135　与二直線の大なるものに等しき底辺を有し小なるものに等しき内切円の直径を有する等脚三角形を作れ。 136　与直角三角形に於いて直角を包括する二辺は６及び８なり内切円によりて分たれたる斜辺の両部分の長さを求む。 137　頂角及び内切円によりて分たれたる底辺の両部分を与へて三角形を作れ。 138　正方形及び等辺三角形を同円に内切す其の正方形の積は其の三角形の一辺上に作れる正方形の三分の二なることを証せ。

初等幾何学教科書（菊池）	あそしえーしょん教科書
第八節（作図題）	第八節（積と関したる円）
初等幾何学の作図に於いて用いることを許す器械は定規及び両脚規に限り定規は直線を引くために、両脚規は円を書き及び距離を移すためにのみ用いるものとす。即、最初より為し得ると認むる所の作図は下の三つに限る。之を、幾何学作図の規矩と称す。 作図の規矩 １．１つの任意の点より他の任意の点へ直線を引くことを得。 ２．有限直線を任意の長さに延長することを得。 ３．任意の点を中心とし、任意の半径を以て円を書くことを得。 作図題１（Ｉ－設問４　あそしえーしょん教科書　第一本の設問４と同じ　以下同様の書式とする。）　与へられたる有限直線を二等分すること。	幾何学作図法之綱領 （第一本の前に書かれている） 吾が協会は初学者に勧告せんとすることあり他なし。理論的幾何学を修むる以前或いは之を修ると同時に簡単なる幾何学の作図法を練習すべきこと是なり。是幾何学は如何なるものなるや又斯学の結果は如何なるものなるやの概念を得るに必要なればなり。 次の作図法には単に定規及び両脚規を使用す。定規は直線を引き及び之を延長するに用い、両脚規は円を書き及び距離を移すに用ゆ。 １．一角を二等分すること。 ２．一直線を二等分すること。 ３．一の与直線上の一点より及び其の外方の一点より其の直線に垂線を引くこと又一の与直線上に有限直線の正射影を断定すること。

問題128　上の作図に於いてA及びBを中心として円を書くに其の半径がABの半分より大なるを要する理由如何？

作図題２（Ⅰ－設問１）　与へられたる角を二等分すること。

問題129　FAを延長すれば共軛角BACを二等分す。

問題130　与へられたる角を四つに等分すること。

作図題３（Ⅰ－設問２）　与へられたる直線上の与へられたる点より之に垂線を引くこと。

問題131　第二の方法に於いて、円が再びBACと交わらざること有りや？若し有れば其の場合に於いては如何為す可きや？

問題132　与へられたる直線上に正方形を作ること。

問題133　二つの辺を与へ、矩形を作ること。

作図題４（Ⅰ－設問３）　与へられたる直線の外の与へられたる点より之へ垂線を引くこと。

問題134　第一の方法に於いてDをABのCに反対の側に取る理由を説明せよ。

問題135　第二の方法に於いて円がABとDより他の点に於いて出会わざること有りや？若し有れば其の場合に於いては如何為す可きや？

４．一の与角に等しき角を作る事及び二個の与角の和に等しき角を作ること等。

５．種々の約束に従い他の直線に平行線を作ること之に由て線を等分すること及び線を与比に分かつこと等。

６．次の与件を以て三角形を作ること。

（α）　三辺

（β）　二辺及び共角

（γ）　二角及び隣辺

（δ）　二角及び一対辺

７．種々の約束に従い円に切線を引くこと。

８．円の内外接形を書くこと及び直線形の内外接円を書くこと。

７及び８は直線及び三角形の理論を修めたる後まで延ばすも可なり。然れども円を修むる前に於いて学ぶべきものとす。

以上の作図法は普通に教ゆべきものなり又次の設問を与へて其の説明を示すべし。

（α）以上の諸法を聯合せる作図法但し普通（即ち特に数を限らず）の約束に従い而も二直線以上一線を通過し或いは二点以上一直線上に在る状況等幾何学上著名なる結果を示すべきもの。

（β）梯尺を用いて上の作図法及び聯合をなすこと（但し分度規を用いず）

（γ）上の作図法を応用して距離の間接測量を為すこと。

（δ）分度規及び弦梯尺の使用法及び之れに由て角を作り及び角の間接測量をなすこと。

作図法の公法

次の作図法は公法として許すべきものなり。

１．任意の一点より任意の他の一点へ直線を引くことを得る。

作図題５（Ｉ－設問５）与へられたる直線上の与られたる点に於いて之と与へられたる角に等しき角を為す直線を引くこと。

作図題６（Ｉ－設問６）　与られたる点を過り、与へられたる直線に平行なる直線を引くこと。

問題136　与へられたる点を過り二つの与へられたる平行線の間に在る部分が与へられたる直線に等しき様に直線を引くこと。

作図題７（Ｉ－設問７）　三つの辺を与え三角形を作ること。

問題137　与へられたる底辺の上に正三角形を作ること。

問題138　直角を三つに等分すること。

作図題８（Ｉ－設問８）　二つの辺及び其の挟角を与え三角形を作ること。

問題139　二つの辺及び１つの角を与え平行四辺形を作ること。

作図題９（Ｉ－設問10）　二つの角及び其の間の辺を与え三角形を作ること。

問題140　与へられたる直線を斜辺として、直角二等辺三角形を作ること。

作図題10（Ｉ－設問11）　二つの角及び其の１つに対する辺を与え三角形を作ること。

作図題11（Ｉ－設問９）　二つの辺及

２．有限直線を任意の長さに延長することを得る。

３．任意の定直線を半径とし任意の中心の円を書き得る。

第八節（積と関したる円）

定理28　円の弦其の弦上或いは其の延長上の一点によつて二部分に分かつとき此二部分によつて包括せられたる矩形は半径上の正方形とその与点（分点）と円の中心とを連結する直線上の正方形の差に等し。

推論１　一与点を通過する任意の弦の両部分によりて包括せられたる矩形は其の弦の方向如何に関せず常に相同じ。

推論２　一点若し円内にあるとき其の点を過通する任意の弦両部分によりて包括せられたる矩形は其の点によりて二等分せられたる半径上の正方形に等し。（推論１の特別な場合）

推論３　一点若し円外にあるとき其の点を通過する任意の弦の両部分によりて包括せられたる矩形は其の点より円に引きたる切線上の正方形に等し。（推論１の特別な場合）

推論４　若し外方の一点を通過する弦の両部分によりて包括せられたる矩形は其の点を円の円周上の一点に連結する直線上の正方形に等しきときは此線は此円に相切す。

例題139　推論２の反、円内の一点を通過する弦の両部分によりて包括せられたる矩形その点を円の円周上の一点に連結

びその１つに対する角を与え、三角形を作ること。

作図題12（Ⅲ－設問１　あそしえーしょん教科書　第三本の設問１と同じ　以下同様の書式とする。）　与へられたる円弧を二等分すること。

作図題13（Ⅲ－設問２）　与へられたる円周或いは円弧の中心を得ること。

作図題14（Ⅲ－設問６）　同一直線上に在らざる三つの点を過る円周を書くこと。

作図題15　与へられたる円周上の与へられたる１つの点に於いて其の円に切線を引くこと。

問題141　与へられたる円に切し、与へられたる直線と与へられたる角を為す所の直線を引くこと。

作図題16　与へられたる円外の与へられたる点より之へ切線を引くこと。

作図題17（Ⅲ－設問３）　与へられたる直線の上に与へられたる角を含む弓形を書くこと。

問題142　与へられたる角が直角なるときは如何？

作図題18（Ⅲ－設問４）　与へられたる円より与へられたる角を含む弓形を截り取ること。

作図題19（Ⅲ－設問５）　二つの与えしたる直線上の正方形に等しきときはこの点を通過して円周に会すべくこの線を延長せばその点において二等分せらる。

例題140　円形の穹門あり。その幅60「フィート」高さ18「フィート」なり。穹門の曲率半径を求む。

例題141　この穹門の下を流るる水あり。その高さ14「フィート」なるとき、幅幾何を減ずべきや？

例題142　車道の幅60「フィート」その両側に幅10「フィート」の人道あり。之に穹門を作るに据石の処における高さも亦10「フィート」なり。この穹門の曲率半径及び高さを求む。

例題143　静隠なる湖の水面上六「フィート」の処に眼を置き六英里の距離において湖の水面上又六「フィート」の処にある燈火をみることを得べし英里数を以て地球の直経を求む。

例題144　前例題の与件より海面上ｈ「フィート」の処に眼を置き而して英里における極限の距離をｄとせばｄ＝ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ｈなることを示せ。

例題145　海面上96「フィート」高き処にある燈峯の燈火は海面を照らすこと幾何里なるや？又海面上24「フィート」高き処に眼を置くときは幾何英里の距離に至るまでこの燈火をみるべきか？

例題146　各1350「フィート」高さの両山頂を互いに見るべき極限の距離幾何なるや？

例題147　陸地を去て出帆する船はその船の愈々遠かるに従い愈々速かに消失するは如何なる理由なるか？

例題148　第一球面上において与高を有する二物体の極限距離は第二球面上において有する二物体の極限距離の二倍なるとき、二球の直経を比較せよ。

られたる円に切する直線を引くこと。

問題143　二つの円が各全く他の外に在りて出会わざるときは、両円に切する直線は二双有り。

問題144　二つの円が外切すれば両円に切する直線は一双と一つ有り。

問題145　二つの円が交わるときは、幾個の共通切線を引くを得るや？内切するときは如何？１つが全く他の内に在りて出会わざるときは如何？

問題146　二つの円が相等しきときは作図法如何？

作図題20（Ⅲ－設問７）　同一の点を過らず又平行ならざる三つの直線に切する円を書くこと。

作図題21（Ⅲ－設問８）　与へられたる円に内接し、与へられたる三角形と等しき角の三角形を作ること。

作図題22（Ⅲ－設問９）　与へられたる円に外接し、与へられたる三角形と等しき角の三角形を作ること。

作図題23（Ⅲ－設問１０）　与へられたる正多角形に内接或いは外接する円を書くこと。

作図題24（Ⅲ－設問１１）　与へられたる円に内接或いは外接する四辺、八辺、十六辺、三十二辺等の正多角形を作ること。

作図題25（Ⅲ－設問１２）　与へられたる円に内接或いは外接する三辺、六辺、十二辺、二十四辺等の正多角形を

例題149　平原に在る鉄道中、高さが $13\frac{1}{2}$ 「フィート」の円柱崖上に水槽あり。此水槽の所より毎時36英里の速力にて退却する列車中の人に此水槽の底の地平に見ゆるは幾分の後なるや？

例題150　C若しAB延長線上の一定点なるときはCよりA及びBを通過する諸円に引ける切線は皆相等し。

例題151　OABは等脚三角形にしてOAはOBに相等しくOを通過して引きたる直線をPにおいて截りABをQにおいて外切円周を截る。然るときはOP、OQによりて包括せられたる矩形は線の方向如何に関せず相同じ。

例題152　AB,CDの二直線Oにおいて互いに内方或いは外方において相交截しOA,OBの矩形OC,ODの矩形に等しきときはA,B,C,Dを通過して円を書き得ることを示せ。

例題153　円外の一点より円に二切線OA,OBを引きPQはABの中央点を通過する任意の弦とす。然るときはOを円の中心に連結する直線はPOQ角を二等分することを示せ。

例題154　OA,OBはO点より円に引ける切線Cは円の中心DはABの中央点にしてPQはOを通過する任意の弦なり。然るときはABはPOQ角を二等分することを示せ。

設問13　円に正十角形を内切すべし之によりて円に正十角形を外切すべし。又円に正五角形或いは20．40．80・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。

例題155　二円再びDに於いて交截するときはCD弦はACに相等し。又OB、BC、CDはOBC円に於ける内切正五角形の三辺なり。（設問１３の円）

作ること。

第八節の問題

問題147　二つの対角線及び１つの辺を与え平行四辺形を作ること。

問題148　与へられたる直線を対角線とせる正方形を作ること。

問題149　与へられたる角ＢＡＣ内の与へられたる点Ｏを過り直線ＢＯＣをＢＣがＯに於いて二等分さるる様に引くこと。

問題150　与へられたる角ＢＡＣ外の与へられたる点Ｏより直線ＯＢＣをＯＢがＢＣに等しき様に引くこと。

問題151　１つの与えられたる直線の同じ側に在る二つの与えられたる点より其の直線上の１つの点へ引ける直線が之と相等しき角を為す様に其の点を定むること。

問題152　与へられたる直線を任意の数の相等しき部分に分かつこと。

問題153　底辺、底辺に隣る１つの角及び他の二つの辺の和を与え、三角形を作ること。

問題154　二つの辺及び第三辺への中線を与え、三角形を作ること。

問題155　三つの中線を与え、三角形を作ること。

問題156　与へられたる円に於いて与へられたる長さの弦を与へられたる点を過る様に引くこと。

問題157　二つの円の交点を過り、１つの直線を各の円が其のから截り取る弦が相等しき様に引くこと。

問題158　円内の或いは円外の与へられたる点より其の周へ最長き直線及び最短き直線を引くこと。

例題156　底辺に於ける一角項角の三分の一なる等脚三角形を書け。

例題157　一直角を五等分すべし。

例題158　正五角形の一対角線は各辺中の一個に平行す。

設問14　円に正十五角形を内切すべし之によりて円に正十五角形を外切すべし又円に30、60、120、・・・辺数の正多角形を内切或いは外切すべし。

例題

159　与直線を分かち其の両部分によりて包括する矩形を与直線の半の上に作れる正方形より大ならざる与正方形に等しくすべし。

160　三角形の底辺中に一点を求め此点より角頂に引きたる直線上の正方形を底辺の両部分によりて包括する矩形に等しくす。二様の解法一様の解法或いは皆無の場合を区別すべし。

161　正五角形の一辺を延長するときは外角を三等分す。

162　正五角形の各角点中の一個を中心とし其の各対角線中の一個を半径とし円を書くときは正五角形の一辺は此円に内切する正十角形の一辺に相等し。

163　二個の等円の中心互いに他の円周

問題159　与へられたる円周上の与へられたる点に於いて之に切する与へられたる半径の円を書くこと。 問題160　二つの与へられたる円に切する与へられたる半径の円を書くこと。 問題161　１つの与へられたる点を過り、与へられたる直線上の与へられたる点に於いて之に切する円を書くこと。	中に在るときは共通弦上の正方形は半径上の正方形の三倍なることを証せ。 164　円外の一点より二直線を引き其の一は直径に垂線にして他の一は円を載るとき其の垂線上の正方形は全割線と円外の部分とによりて包括する矩形及び直径の両部分によりて包括する矩形との和或いは差に等し垂線の直径を内分或いは外分するに従い其の和或いは其の差を取るべし。

第３節のまとめ

第３節において『初等幾何学教科書』の内容と構造を調べるために、『あそしえーしょん教科書』との違いについて検討した。そこで、その主な点についてまとめておきたい。

全体として、定理の数は同じであり、内容についてもほとんど同じである。しかし、定義・系についいは、『初等幾何学教科書』の方が多く、菊池は初学者にとって丁寧にわかりやすく書くことをより意図したと思われる。それに対し、問題・例題については、『あそしえーしょん教科書』の方が多く、初学者にとってわかりやすいということ以上に練習問題を多くさせ問題を解く力をつけることを意図したように思われる。

作図題については、『初等幾何学教科書』は第二編の第八節にまとめて書かれているが、『あそしえーしょん教科書』では、第一本（直線図形）より作図題が書かれ、第三本においては第３節・第５節・第６節・第７節、第８節の関連のある定理の近くに書かれている。

菊池は『幾何学講義』にも書かれているように、あえて円を学んでから作図題を学ぶために、第二編の第八節にまとめて作図題を入れたと考える。なぜならば、菊池は推理力の錬磨を重視したため、作図題においても証明をする際には円の性質を使うと考えたからである。『幾何学講義』より菊池の考えを表しているところを引用すると、

> 「ユークリッドは方法を示さざる作図は（ポスチュレート三件の他は）定理の証明に於いても之を用いざるの主義なるよりして定理と作図題と交錯し実に第一編の命題１、２は作図題なり。協会編纂の教科書に於いては作図は定理とは全く之を区別すと雖も第一編中に一節を置き作図題を掲ぐ。余の第二編第八節の作図題１及至11に同じ。其の他の教科書に於いても多くは之に類す。
>
> 原来幾何学作図は推理の系統以外のものとして差支なし。作図は定理の応用に過ぎざるなり。尤も幾何学授業の際生徒が多少容易なる作図をしらざれば不便なりと雖も是は別に容器書法を学ばしむるを得策とす。（明治三十五年発布の中学校の教授要目に拠れば第二年に容器書を学ぶべきものなるを以て幾何学を学ぶ生徒は巳に作図を知得したるなり。）
>
> 故に教科書に於いては定理応用の好例として作図題を掲ぐるに当たりて啻其の方法を示すのみならず、其の証明を厳正ならしめざる可からず且授業の際には種々の場合を成る可く精密に吟味するを可とす。然るに作図に於いて円を用いざるものは殆ど之れ無く、円の性質を知らざれば証明完全なる能わず。某円を書き某直線又は某円と交わらしむと言うも円と直線と又は円と円とは如何に交わるものなるかを知らざれば決して推理上完全なりと言い難し。是れ余の教科書に於いて作図題を第二編の末に入れたる所以なり。（ルーシェ及コムブルーッスの教科書に於いても亦此斯くの如し）」(18)

また、第七節まではほとんど同じ内容であるが、第八節は大きく違う。『初等幾何学教科書』は作図題がまとめて書かれているが、『あそしえーしょん教科書』では、

積と関したる円として方べきの定理に関する内容や例題が書かれている。

では、『初等幾何学教科書』には、積と関したる円としての方べきの定理に関する内容が書かれていないのであろうか。

『初等幾何学教科書』では、円に関する内容を第二編に書き、面積の相当に関する内容を第三編に書いた。そのため、この方べきの定理においては証明に面積の相当に関する定理を使うため第二編（円）の所では扱えない。従って、『初等幾何学教科書』では、積と関したる円についての内容は、第三編（面積）のところで取り扱われている。以下次のように書かれている。

『初等幾何学教科書　平面幾何学』

第参編　面積　第一節　定理

定理14　円の弦を内分或いは外分すれば、二つの分の包む矩形は半径の上の正方形と分点を円の中心と結び付くる直線の上の正方形との差に等し。

（あそしえーしょん　第三本　第八節　定理28　積と関したる円）

系１　一つの与えられたる点を過る弦の分の包む矩形は何れの弦にても皆等し。

（あそしえーしょん　第三本　第八節　定理28　推論１）

系２　若し与えられたる点が円の内に在れば之を過る弦の分の包む矩形は其の点において二等分さるる弦の半分の上の正方形に等し。

（あそしえーしょん　第三本　第八節　定理28　推論２）

系３　若し与えられたる点が円の外に在れば之を過る弦の分の包む矩形は其の点より引ける切線の上の正方形に等し。

（あそしえーしょん　第三本　第八節　定理28　推論３）

系４　逆に若し一つの円外の点を過る弦の分の包む矩形が其の点を円周上の一つの点と結び付くる直線の上の正方形に等しければ此直線は円に切す。

（あそしえーしょん　第三本　第八節　定理28　推論４）[19]

第二節　作図題

作図題７　与えられたる円に内接する正十辺形を書くこと。依りて円に外接正十辺形を書くこと。及び円に内接又は外接する正五辺形、二十辺形、四十辺八十辺形・・・を書くこと。

（あそしえーしょん　第三本　第八節　設問13）

作図題８　与えられたる円に内接する正十五辺形を書くこと。依りて円に外接する正十五辺形を書くこと。又円に内接又は外接する正三十辺形、六十辺形、・・・を書くこと。

（あそしえーしょん　第三本　第八節　設問14）[20]

また、菊池が円論について、面積よりも早く学ばせたかったもう一つの理由は、『幾何学講義』において、

「ユークリッド及び協会の教科書においては第二編に面積を論じ、円を第三編に

掲げたるといえども余は順序を変し円を面積の前にしたり。是れ生徒をして成る可く早く趣味最大なる円に接せしめ且つ作図題を提出せんが為なり。蓋し協会においても此順序に異議無きは其の教授條目において第二編の首に「第三編」（即ち円）は最後の節を除くの外は第二編に関せず。故に直に第一編に次て之を修むるも可なりと特に明言したるに依りて知るべし。」(21)

と述べられているように、円を直線図形に続き重要な学習内容であるとともに、生徒の趣味最大である学習内容と考えていたからである。

本論文150ページに『初等幾何学教科書』第二編と『あそしえーしょん教科書』第三本の各節においての定義・定理・系・問題・作図題・総合問題の数の違いを表にまとめた。

次に各節の主な違いについて述べたい。

（１）第一節について

『あそしえーしょん教科書』では、「円とは円周と名くる一線を以て囲みたる平面図形」と定義され、『初等幾何学教科書』では「円とは一つの線を以て囲みたる平面形にして、その中の或一つの点よりこの線上の何れの点まで引ける直線も皆相等しきものなり。この線を円周、この点を円の中心と称す」と定義されている。また、『幾何学講義』には「この定義に従いたるとも円なる語は円周の意味に用いられることあり。初学者は注意すべし。」と書かれている。

菊池が円を平面形と定義したことについて、佐藤英二は「菊池大麓の数学教育構想」において、

「『初等幾何学教科書』には、「平面図」と「平面形」という二つの概念が登場する。「平面図とは、一つの平面上に或る線及び点の一群」（定義７）であり、「平面形とは線を以て囲みたる平面の一部分」（定義20）と定義されている。菊池は両者の原語がいずれも、“plane figure”であると認めているから、彼は本来一つの概念であった「平面図」と「平面形」を意図的に区別したことになる。彼が両者を区別した意図は、初等幾何学から射影幾何学への拡張性を保障する点にあった。」(22)

と述べ、菊池は「近世幾何学」すなわち射影幾何学における完全四辺形などの概念との整合性を考慮して古典的な“plane figure”である「平面形」に加えて「平面図」という概念を導入していたと考え、さらに菊池が「平面形」よりも先に「平面図」を導入した点に射影幾何学を重視する姿勢が読み取れると述べている。

また、菊池は『幾何学講義』において、

「定義20に於ける平面形も定義７に於ける平面図形も何れも英語 plane figure の訳なり。plane figure なる語は従来初等幾何学に於いては通例定義20に於ける如く解し足れども近来に至り所謂近世幾何学に於いて度量に関せず主として位置及び形状を論するに当たり定義７の如く解することとなり同一語に少しく異なりたる二様の意味有るが如し、因って余は之を訳するに一は平面図として一は平面形

とせり。・・・三角形に付いても亦然り。近時或いは之を三つの直線を以て囲みたる多角形とは定義せずして、三つの直線（三つ共に同一の点を通らず、又互いに平行ならざる）の成せる図形なりとせり。」(23)

と述べている。

全体的には、第一節の内容はほとんど同じであり、どちらも公理的内容である。菊池は、『幾何学講義』において、

「第一節に掲げたる定理は皆円の本原の性質なり。それらは、公理的であり論理的証明は却って困難であり、初学者は不必要の感を懐き厭うことあり。然れども厳正なる論証の進行上之を欠くべかざるなり。」(24)

と述べている。

また、『あそしえーしょん教科書』では、半円、四分円、同心円の定義がないが、『初等幾何学教科書』では、定義されている。

（2）第二節について

『あそしえーしょん教科書』では、互いに共軛の定義がないが、『初等幾何学教科書』では定義されている。それに対し、『あそしえーしょん教科書』では、扇形についての推論があるが、『初等幾何学教科書』ではない。『初等幾何学教科書』では、扇形という言葉を用いず、中心に於いての角と弧についての関係として述べている。

（3）第三節について

定理６については、第10版より定理11から定理６に変更した。その理由は、

「この定理は弦の基本の性質にして、本節の諸定理に先ちて弦は円上の二点を結び付くるの他は再び円周と出会わず且つ全く円の内に在ることを明確に為し置くこと穏當なりとするに在り。ユークリッドはこの定理に相当する命題を其の第三編（円の編）の初めに置けり。即ち次の如し。　命題２　円周上に任意の二点を取れば之を結び付くる直線は円の内に落るべし。」(25)

と述べている。従って、『初等幾何学教科書』の定理７が『あそしえーしょん教科書』の定理６に等しく、『初等幾何学教科書』の定理11が『あそしえーしょん教科書』の定理10となっている。そして、定理12よりどちらも同じ内容となる。『初等幾何学教科書』は『あそしえーしょん教科書』よりユークリッド『原論』に近いことが覗われる。

また、『初等幾何学教科書』ではこの第三節で外接円について定義しているが、『あそしえーしょん教科書』にはどの節にも外接円の定義はない。

『あそしえーしょん教科書』には作図題があり、『初等幾何学教科書』には作図題がない。

（4）第四節について

『初等幾何学教科書』も『あそしえーしょん教科書』も、まず弓形を定義し、次に

周においての角を定義し、そして弓形においての角を定義している。周においての角と弓形においての角は同じ部分を表すのであるが、『原論』第Ⅲ巻の命題２０「円において角が同じ弧を底辺とするとき、中心角は円周角の２倍である。」と対応するそれぞれの定理では、周においての角と言う言葉を使用し、そして『原論』第Ⅲ巻の命題２１「円において同じ切片内の角は互いに等しい。」と対応するそれぞれの定理では弓形においての角と言う言葉を使用している。『原論』における切片内の角が『初等幾何学教科書』や『あそしえーしょん教科書』では弓形における角となり、現在では円周角となったと考えられる。そして、現在の教科書には弓形においての角と言う定義はなく、どちらも円周角として取り扱っている。

円周角の定理の証明が『あそしえーしょん教科書』では、弦の上に中心がくる特別な場合も証明しているのに対し、『初等幾何学教科書』では『原論』と同じく中心が円周角の内にある場合と外にある場合について証明している。また、円周角が優角の場合についても証明している。このことについて菊池は『幾何学講義』に、

「定理15に於いては三つの場合の円を掲げたるが尚ほ一つ特殊の場合を区別することを得、Oが角ＢＡＣの一辺（例えばＡＢ）の上に在るもの是なり；此場合に於いてはＡＤがＡＢと合しＤ点がＢ点と合するを以て証明は極めて容易なるのみならず、実際此証明中に含畜せらるるなり。故にある教科書には此場合を掲くると雖、余は之を省きたり。蓋し教員に於いて注意を与ふる位にて充分なりとす。（ユークリッドは之を省き、協会の教科書は之を掲ぐ。）ユークリッドは優角を論ぜざるを以て丙の場合を載せず；故に次の定理（Ⅱ、16）に於いては弓形が半円より小なる場合は別に証明するを要す。即次の如し；ＡOを結び付け之を延長して円周と再びＥに於いて交わらしめＤＥを結び付けよ。然るときは角ＢＡＥ、ＢＤＥは相等しく（半円より大なる同じ弓形中に在るを以て）、角ＣＡＥ，ＣＤＥも亦相等し。故に其の和なる角ＢＡＣ，ＢＤＣも相等し。」(26)

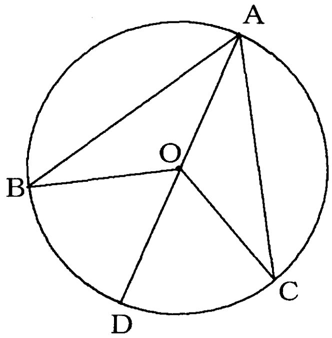
と述べている。定理15においても『あそしえーしょん教科書』より『初等幾何学教科書』の方がユークリッド『原論』に近いといえる。参考として、定理15を次に述べる。

菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』第二編（円）

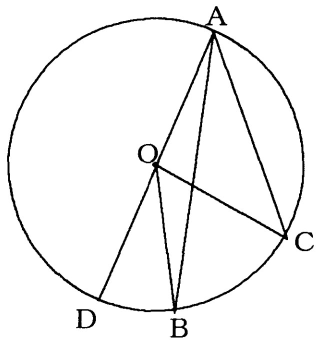
定理15　周においての角は同じ弧の上に立つ所の中心においての角の半分なり。

ＢＡＣを弧ＢＣの上に立つ所の周においての角：ＢＯＣを同じ弧の上に立つ所の中心においての角とせよ。然るときは角ＢＡＣは角ＢＯＣの半分なるべし。

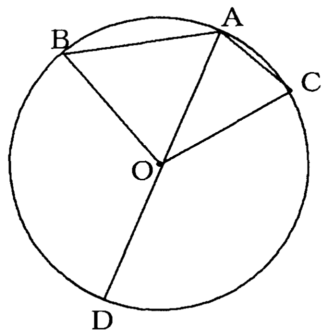
甲



乙



丙



ＡＯを結び付く、之を延長して円周と再びＤにおいて出会はしめよ。
然ればＯＡはＯＢに等しきを以て、角ＯＡＢは角ＯＢＡに等し。
然るに外角ＢＯＤは二つの内対角ＯＡＢ，ＯＢＡの和に等し。
故に角ＯＡＢは角ＢＯＤの半分なり。
同様に角ＯＡＣは角ＣＯＤの半分なり。
故に差（乙円の場合）なる角ＢＡＣは二つの角ＢＯＤ，ＣＯＤの和或いは差なる角ＢＯＣの半分なり。(27)

また、第四節においては、節の終わりの例題が『初等幾何学教科書』は４題に対し、『あそしえーしょん教科書』は24題と非常に多い。

（5）第五節について

『あそしえーしょん教科書』と『初等幾何学教科書』は全体としてはほとんど同じ内容である。違いは定理20の内容と、『あそしえーしょん教科書』には作図題があり、『初等幾何学教科書』には作図題がないことである。

定理20は『初等幾何学教科書』ではユークリッド『原論』命題16が取り入れられているが、『あそしえーしょん教科書』はその逆が取り上げられている。この節は『あそしえーしょん教科書』と『初等幾何学教科書』は全体としてはほとんど同じ内容であるが、『原論』とは大きく違い、切線を論ずるのに極限法を使っている。菊池は『幾何学講義』において、

「切線を論ずるに二法を併載したるは協会の決議に従うてなり。第一法は普通初等幾何学の方法にして初学者の最容易に了解し得るところなれども単に円のみに限るものなり。之に反し第二法極限法は一般に曲線に応用し得べきものなり。且、極限のことは初学者には稍困難なりと雖も頗る重要にして独り数学上のみならず普通一般に有益なる思想を与うるものなり。而して切線の諸性質は殊に好く極限の説明に適当す。是れ余が協会の決議を賛成し此所に此法を併せて掲げたるのみならず他にも屡々極限の事を掲げたる所以なり。」(28)

と述べている。

また、佐藤英二は、

「円の接線に関する定義は射影幾何学への現実的な配慮と言ってよい。菊池は「円周と一つの点に於いて出会ひ、双方へ窮り無く延長するも再び之と出会わざる直線」として、通例に従って円の接線を定義したのに続き、「円の割線が、その二つの交点が常に相近づき終に相合する様に動くときは、その極限の位置に於いてその直線は円に切す。或いは円の切線なりと云う。」と述べて、極限を用いた接線の第二の定義を与えている。その後の接弦定理（定理23）の証明において、菊池はまず通例の接線の定義に基づく証明を示し、その後極限を用いた接線の定義に基づく証明をも紹介している。さらに彼は、円接四角形の二つの頂点が近づいた時の極限として接弦定理を証明する問題（159）を置いている。接線に関して二通りの定義を載せる判断について菊池は A.I.G.T.の決議に従ったものであるこ

とを明らかにしているが、彼は A.I.G.T.の権威にやむなく従ったのではなく、積極的に賛同する立場を取っていた。」(29)

と述べている。『原論』には極限の考えはないが、『あそしえーしょん教科書』と『初等幾何学教科書』では、極限の考えを取り入れたことより、近世幾何学への発展をも配慮して作られたことが覗える。

（6）第六節について

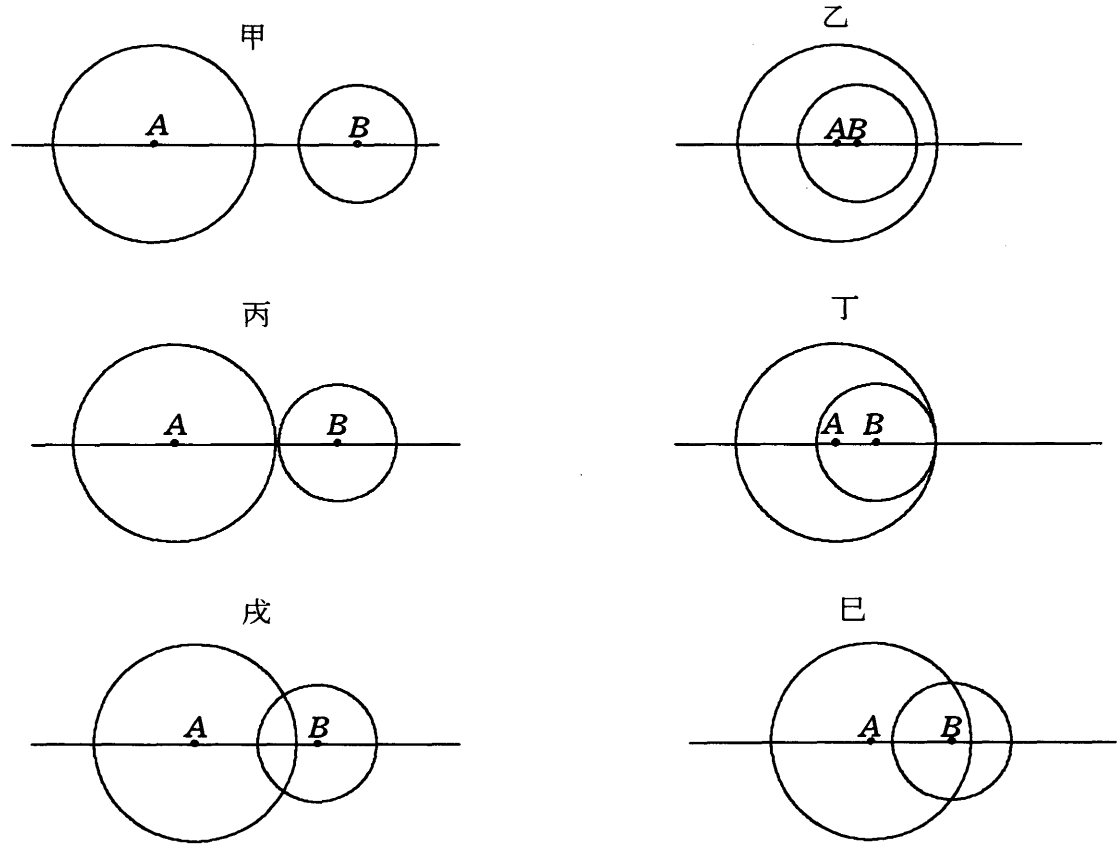
『あそしえーしょん教科書』と『初等幾何学教科書』はほとんど同じ内容である。違いは、『あそしえーしょん教科書』には作図題があり、『初等幾何学教科書』には作図題がないことである。

第六節について、菊池は『幾何学講義』において、

「余は教科書に於ける論法は協会の決議したるものにて、ユークリッド其の他従来のものと稍其の趣を異にすと雖も要する所は総ての場合を成る可く簡単に述べふるに在りとす。而して前述に説明せる如く二円の相対しての位置については、定理24及び25を以て盡せりとす。(二円周が全く出会わざる場合を省く)」(30)

と述べている。初学者が学ぶ幾何学の教科書として『初等幾何学教科書』を書いていることが伺われる。

『幾何学講義』 p.119



（7）第七節について

『あそしえーしょん教科書』では、内心と傍心の定義はないが、『初等幾何学教科書』では定義されている。菊池は、『幾何学講義』において、

「定義18（第四節）と定義15（第七節）とを比較す可し。定義15に於いては直線形が円に内接し円が直線形に外接す；定義18に於いては直線形が円に外接し円が直線形に内接す。初等幾何学に於いては円と直線形とのみに付いて言うを以て内接円は之に外接する直線形内に在るものとすと雖も、高等幾何学に於いては総ての曲線の切線が為す形は之に外接すと云う。故に定義19と定義20に於ける如き区別なし。」(31)

と述べている。『初等幾何学教科書』においては、内接円と内心そして傍切円と傍心を区別して学ばせようとしたことが覗われる。

また、菊池は切の字と接の字を使い分けている。まず、第3節では、定義11で「三角形の三つの頂点を過る円をその外接円と称す」とし、接の字を使っている。次に、第4節では、定義15で「一つの直線形の頂点が皆一つの円周に在るときは、その形は円に内接すと云う。円はその形に外接すと云う。」とし、接の字を使っている。しかし、第5節では、切点・切線としては、切の字を使い、そして、第6節でも「二つの円は相切す。外切す。内切す。」など切の字を使っている。また、第7節では両方の字が使われている。例えば、定義18で「直線形の辺が皆其の内に在る一つの円に切するときは、円は直線形に内接し、直線形は円に外接すると云う」、定義19で「三角形の三つの辺に切する円をその内接円と称す。」、定理27では「円の全周を任意の数の相等しき弧に分かつときは、此等の弧の弦の成す内接形は正多角形なり。又総ての分点においての切線の成す外接形も正多角形なり。」と述べられている。これらより、考えられることは切を使うときは線や辺に関するときであり、接を使うときは多角形に関するときであると思われる。

また、『あそしえーしょん教科書』には作図題があり、『初等幾何学教科書』には作図題がない。

（8）第八節について

第八節については、先に述べた。

		定義	定理	系	問題	作図題	総合問題
第一節	菊池	5	3	9	3	0	1
	A.I.G.T.	3	3	5	8	0	7
第二節	菊池	3	2	0	1	0	2
	A.I.G.T.	3	2	2	2	0	5
第三節	菊池	3	9	9	9	0	3
	A.I.G.T.	2	9	6	7	2	11
第四節	菊池	4	5	5	6	0	4
	A.I.G.T.	4	5	4	11	0	24
第五節	菊池	2	4	6	7	0	4
	A.I.G.T.	2	4	8	17	4	5
第六節	菊池	1	2	4	2	0	9
	A.I.G.T.	1	2	4	3	1	11
第七節	菊池	3	3	2	1	0	8
	A.I.G.T.	3	2	1	7	7	20
第八節	菊池	0	0	0	19	25	15
	A.I.G.T.	0	1	4	20	2	6
合計	菊池	21	28	35	48	25	46
	A.I.G.T.	18	28	34	75	16	89

第４節　第３章のまとめ

第３章では、明治初期の西洋文化の導入の中で、欧化主義の担い手であった菊池大麓がどのように幾何学教育の目的を考え、『初等幾何学教科書』を編纂したのかについて考察してきた。また『初等幾何学教科書』第二編（円）とその参考となった幾何学改良協会編纂の幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』第三本（円）を比較するとともに、『初等幾何学教科書』第二編（円）の内容や構造を調べ、菊池の考えを検討することにより、“ユークリッド『原論』第Ⅲ巻がどのように受容されたのか”を考察してきた。

第２章のまとめでも述べたように、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、全体としてはユークリッド『原論』の精神や命題の内容は保持され、公理的・演繹的な論理体系が大切にされているが、各節ごとに内容をまとめたり、それぞれの定理に適した練習問題を多く取り入れるなど初学者が学ぶのにユークリッド『原論』より親切に書かれている。つまり、初等幾何学の教科書を意図して作られた。そして、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』よりもさらに論理的演繹的な体系を重んじユークリッド『原論』に近いと考えられる菊池大麓編纂『初等幾何学教科書』が、明治初期に作られ、中等教育で使われることによって、日本にユークリッド流の幾何学が受容された。つまり、この菊池大麓編纂『初等幾何学教科書』が、現在もユークリッド流の幾何が取り入れられている基となった教科書と言えよう。

菊池の教科書を介して教育界に広まったのは、“数学とは『初等幾何学教科書』で表現されたような公理・定義・定理に基づく演繹的な体系の構造物であり、その目的は、緻密な論理体系を学習して、一般的普遍的で論理的な思考能力を身につけることである”とする教育思想である。また、その考えは、幾何学教科書に記号が導入され、ユークリッド流の幾何学の特徴が薄まった現代でも論理的思考力の形成を目的とする幾何学の教育理念は消えていないと思われる。そして、それは、数学教育史において菊池大麓が『初等幾何学教科書』(1888～1889年）を通して、日本にユークリッド流の幾何学を導入し、中等学校における論証幾何の定着を決定づけた数学者とされている所以であろう。

菊池の幾何学教科書は文部省の依頼を受け編纂された。それは、広く世に受け入れられ、教科書のスタイルを決定したと考えられる。1899年に彼の教科書は、全国の中学校46校のうちの37校、師範学校32校のうちの30校で採用され、他の教科書を圧倒していた。また、1907年の調査によると、菊池の幾何学教科書（『幾何学小教科書』1899～1900年　『初等幾何学教科書』1888～1889年他）は、中学校（のべ316校）の36％で採用され、最大のシェアを保っていたとされている。しかし、第二位から第四位まで（寺尾寿・吉田好九郎11％　三守守11％　林鶴一９％）の教科書のすべてが記号を用いており、初等幾何学における「代数」と「幾何」の分離という菊池の方針は、記号の有無を見る限り、教科書の執筆者の支持を失っていた。

また、幾何と代数の分離という菊池の教育思想は、1910年半ばには、数学教師の論

議の的になった。吉田浅之助は「数学の問題を算術・代数・幾何・三角法のどの方法で解くかという問題は『エフイシエンシー』の問題であり、何れの方法で解いても差し支えない」と述べ、白井亀吉は、「代数や算術や幾何、三角何れにも同じ共通した一部の性質がある・・・から、自分の有ゆる力を綜合して何等かの方法で解決すると云うことは無論なければならない」と考えて「各分科の連絡」を考えた。ここには、利用可能な資源を最大限に利用し、効率性の原則に基づいて数学の問題を解く近代的な問題解決者と、効率的なカリキュラムを構成しようとする教師の姿が見える。そして、論理的な思考の重視と数学における効率性の重視は、論理的思考力の効率的な形成へと向かうとき矛盾するものではない。こうして、菊池が重視した「推理力の錬磨」という考えは後の世代に受け継がれていくのだが、幾何と代数の分離や記号を使わないという考えは批判され改良されていく。

菊池による幾何学教育の意義づけについては様々な立場で研究されている。小倉金之助は「菊池の教育思想がイギリスの数学文化と A.I.G.T.の直接的な影響下で形成されたことを指摘し、菊池は留学先のイギリスの慣習を無反省に日本に取り入れた」と批判している。一方、横畑知己は、「菊池の幾何教育観は、当時日本人にとってとりわけ理解が困難であった論証幾何学を普及するための努力の成果であった」と、菊池を再評価している。佐藤英二は「菊池によるユークリッド流の幾何学の採用は、彼が学んだイギリスの文脈に強く規定されており、同時に菊池の教育思想の形成は当時の日本の文脈に即した自覚的なものであった」と述べ、横畑の主張を継承している。さらに、佐藤英二は「菊池は、古代ギリシアに由来する論証の精神の文化的価値を認め、それを導入した点で、日本の数学文化に重要な貢献をした。他方で、菊池がユークリッド流の幾何学を導入した背景には「理学」の普遍性が方言（日本文化）の矯正を無条件に正当化するという思考様式があり、方言の矯正によってこそ、日本は列強に対抗できるというナショナリズムが存在していた。」と述べている。

私は、この第３章を考察する中で“菊池はなぜ日本にユークリッド幾何を取り入れたのか”を考えてきた。菊池は、明治初期の欧化主義の担い手として日本文化の世界的レベルの引き上げを目指し、日本人の思考様式の意図的な改造を目指していたと考える。そのために推理力の錬磨を重視し、言文一致体を作り、代数と幾何を分化して日本人に論証の精神をしっかり身につけさせたかったのであろうと思う。そして、菊池はイギリスの数学文化を無反省に取り入れたのではなく、それまで代数的計算による図形の計量に傾斜し論証の精神を欠いていた日本の数学文化の矯正と、さらには高等教育で解析幾何学や射影幾何学などを学ぶ基礎として、まずはユークリッド幾何学において論証の力を高めたかったのではないかと思われる。さらに菊池は、論証の幾何学としてはユークリッド『原論』を学ぶことが最も適していると考えたのではなかろうか。しかし、中等幾何学教育として、ユークリッド『原論』をそのまま学ぶことは難しく、そこで、初学者にとってより親切でわかりやすく改良された『あそしえーしょん　初等平面幾何学』を参考に『初等幾何学教科書』を編纂したのであろう。

菊池がケンブリッジで学び日本に移植しようとしたのは「知識を鵜呑みにせず自己

の理性を働かせて考え抜く」という啓蒙主義的思想である。その根幹に数学があったのだと思われる。菊池は自分自身が学者としての業績を上げることより、「知識を鵜呑みにせず自己の理性を働かせて考え抜く」という人たちを作り上げることの方を天命と考えていたのかもしれない。明治初期という時代において、日本を思い、教育に取り組んだ学者と言えよう。

最後に、『幾何学講義』第一巻の附録「幾何学の発達及び文化」に述べられている菊池の考えを紹介し、菊池は高等幾何学への発展をも考えて『初等幾何学教科書　平面幾何学』を編纂したことを述べたい。。

「今日にては初等幾何学においては主として太古の幾何学に依ると雖も漸次に近世幾何学の方法及び思想を加えて初等幾何学即ち普通教育においての幾何学は遂に一変するに至るべしと余は常に考え居れり。」(32)

「太古の幾何学と近世幾何学とは何れも幾何学図形其の物に就いて幾何学を研究するものにして固より極めて相近くして唯其の方法少しく異なるのみ故に余は近世幾何学の方法は漸々初等幾何学において之を採ることとなるべしと考ふるなり。」(33)

［引用文献］

（１）藤沢利喜太郎講述『数学教授法講義筆記』（大日本図書　明治33年10月）第16回講義　ｐ．370

（２）藤沢利喜太郎講述『数学教授法講義筆記』（大日本図書　明治33年10月）第16回講義　ｐ．369

（３）菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月第十版）「凡例」

（４）菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月第十版）「凡例」

（５）菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月第十版）「凡例」

（６）菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐ.18

（７）菊池大麓訳『平面幾何学教授條目』（全分社　明治20年２月）「序」

（８）菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月第十版）「序文」

（９）菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月第十版）「凡例」

(10) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）第一章　「総論」の冒頭　ｐ．１

(11) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐ.19

(12) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐ.18

(13) 菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月第十版）ｐ.98　定理10

(14) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐ.19

(15) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐｐ.19-20

(16) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐ.20

(17) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐｐ.20-21

(18) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐｐ.132-133

(19) 菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月

第十版）ｐｐ.213-214

(20) 菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年３月第十版）ｐｐ.228-231

(21) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐ.157

(22) 佐藤英二著「菊池大麓の数学教育構想」（日本数学教育史学会『数学教育史研究』第４号、2004年）ｐ.31

(23) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）ｐ.75

(24) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐ.111

(25) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐ.116

(26) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐ.117

(27) 菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年3月第十版）ｐｐ.107-109

(28) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐ.119

(29) 佐藤英二著「菊池大麓の数学教育構想」（日本数学教育史学会『数学教育史研究』第４号、2004年）ｐ.32

(30) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐｐ.124-125

(31) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第二巻』（大日本図書　明治39年８月）ｐ.129

(32) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）附録xv-xvi頁

(33) 菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義　第一巻』（大日本図書　明治30年４月）附録xvi頁

終　章

本論文のまとめと残された課題

第１節　本論文のまとめ

本論文では、中等数学教育における『原論』第Ⅲ巻の受容に関して、日本ではどのように幾何の教科書が作られ、ユークリッド『原論』第Ⅲ巻（円論）を受け入れたのかを歴史的に考究してきた。そこで明らかになったことを各章についてまとめてみたい。

（１）第１章

まず、第1章ではユークリッド『原論』第Ⅲ巻で扱われている37個の命題すべてにわたって、一つひとつの命題についての証明を検討すると共に、各命題相互のつながりについても考察した。

そこで、明らかになったことは、一つひとつの命題は無駄がなく、緻密に考えられた結果を整理して書き上げられており、また命題相互の関係は前後の順番も論理的秩序も非常に巧妙に考えられていることである。そしてそれは、定義・公準・公理を基にして一つひとつの論理を積み上げ各命題が証明されていること、さらに定義・公準・公理・証明された命題を使って、新しい命題が証明されていくという構成のすばらしさと、論理的秩序が保たれていることから生み出された美しさと言えよう。私も、第Ⅲ巻は『原論』の中でも体系として緩やかに組み立てられているといわれているが、それでもなほその構成のすばらしさや論理的秩序の美しさに惹かれ、魅力的であり感動した。しかも、13巻すべてにおいて体系が形成されているということは偉大なことである。

ユークリッド『原論』第Ⅲ巻は、中等数学教育の教科書としてつくられたものではなく、一つひとつの命題を厳密に証明し、公理的・演繹的な論理体系や、論理的秩序を美しく保ったギリシア時代の数学の諸成果を集大成したものであるといえる。また、ユークリッド『原論』で行われた論証の精神は、数学の原型をなす考え方や科学の基本的な考え方ともみなせる。そのため、『聖書』に次いで世界各国語に翻訳され、実に二千年以上にもわたって“数学の聖典”として学び継がれたのであろう。

（２）第２章

第２章では、まず、なぜ幾何学教授法改良協会が設立されたのか、そして、どのような活動を行ったのかについて考察した。次に、幾何学教授法改良協会編纂の幾何学教科書、略して『あそしえーしょん　初等平面幾何学』がどのような目的で作られたのか、そして、どのような内容と構造を持っているのかについて調べ、その中で、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、ユークリッド『原論』をどのように改良しようとしたのか、教科書として何を大切にしようとしたのかについて考察した。

イギリスにおいて、19世紀初期に、ユークリッドを教えるという気運が盛んになってきたのであるが、その扱われ方は試験制度の影響もあって、たとえば、命題の順序はユークリッド『原論』に忠実であることが要求され、その内容も暗記、記憶することに重きが置かれた硬直したものであった。それは、（１）で述べたようにユークリ

ッド『原論』は中等数学教育の教科書として作られたものではなく、少年たちが学ぶのにはとても難解であったための結果ともいえよう。そこで、「少年たちはユークリッドに何年も取り組んできて、ユークリッドを完璧に知っているかもしれないが、幾何学の精神・方法論・成果を何も知らないに等しい。もっと良い方法が求められている。」と学校調査委員会は考え、ウイルソンに“ユークリッドを超えた幾何の教科書を作るように”要請した。ウイルソンはその要請に応え、幾何学教科書を作り、第1版を1868年4月に発行した。

ウイルソンは、「この書が英国におけるユークリッドへの最初の挑戦であった」と述べ、さらにウイルソンの幾何学書の前置きで次のようにユークリッドを批判した。

(1) 不自然さ

明解さと自然性を犠牲にしている。

全体がいかに数少ない公理や仮定に依存して作られているか。

(2) 証明が例外なく三段論法であること

そのせいで、「不必要に固定的で、漠然としていて、退屈で、不毛な」ものになっている。

(3) 証明の長さ

長々と証明をやって、知性よりは記憶力を鍛える。

(4) 示唆のなさ

すべての定理と問題は一定レベルで扱い、重要な定理の重要性を示したり、重要な方法をはっきり示すことをしない。

このウイルソンの批判は、ユークリッドをめぐる論争を引き起こした。ド・モルガンは、「我々はウイルソンがいうようなやり方が、この国においてユークリッドに取って代わるものではないと自信をもって言える。古典的な幾何学は、とても英国的な主題なのだ。」と主張し、また、トドハンターは、論文の前書きで次のようにウイルソンに対して批判した。

(a) 普通の生徒はユークリッドの勉強から何かをちゃんと学んでいる。反対者のやり方から学ぶよりずっと多くのものを。

(b) ユークリッドを保持しようとしている人々は改革者より数学についての意見を述べるに当たって有能である。つまり、ケンブリッジの数学者の多数は変化に反対している。

(c) ユークリッドに反対する勢力はただ反対するという点でのみ連帯している。代替案について一致した意見はない。

(d) ユークリッドの欠点は「上手に教えること」で克服できる。

(e) ユークリッドが廃止された後に起きると予想される試験の問題を、ウィルソンは過小評価している。

(f) ユークリッドで鍛えられた英国の数学者は、問題の構成と解法における独創性と豊かさで無敵である。

このように、幾何学教育の改革への関心は増大し、英国協会か大学教授の学会などによって、「権威あるシラバスを作成し、それに基づいて教科書を編集するような会」を立ち上げて欲しいという希望で、1871年幾何学教授法改良協会が設立されることになる。

ここで、ユークリッド『原論』を教えるということについてもう少し考察したい。それは、一つひとつの命題の内容を教えるのはもちろんのことであるが、それ以上に公理的・演繹的な論理体系、論証の精神を教えるということを意味する。そのためには、幾何学教育が何を目的に行われるのかについて、検討する必要があるが、幾何学教育が何を目的に行われるのかについては、現代に至るまで論争となるところであり、現代においても議論されることであるので、残された課題として、ここではウイルソンとトドハンターの主張を参考に考えたい。

ウイルソンは、「幾何学を教える際には、演繹的な科学に先立って、事実の親しみやすさがあるべきである。」と述べ、その自然さ・秩序・わかりやすさ・正確さを大切にしている。その点において、ユークリッド『原論』は難解であり、もっと理解しやすい教科書を求めていると言えよう。しかし、トドハンターが指摘しているように、ユークリッド『原論』に代わるものを考えたわけではない。ウイルソン自身も彼の幾何学書がユークリッドの第Ⅰ・Ⅱ巻を超えるものでなかったと述懐している。それに対し、トドハンターは、「ユークリッドの欠点は上手に教えることで克服できる」と述べ、ユークリッド『原論』を変化させるべきではないとウイルソンの考えに反対した。このように、ユークリッド『原論』を教えるということについては、様々な議論がなされたが、当時において、ユークリッド『原論』以外を幾何学で教えることは考えられなかったであろう。つまり、ユークリッド『原論』をいかに改良するかということが、幾何学教授法改良協会の目的となったと思われる。

幾何学改良協会は、1873年に『原論』第Ⅰ巻～第Ⅲ巻をカバーしたシラバス“The Syllabus of Plane Geometry”を作成し、1875年に第Ⅳ巻～第Ⅵ巻に相当するシラバスを完成させた。シラバス発行後、幾何学教授法改良協会の活動は1884年の“The Elements of Plane Geometry : part Ⅰ”（corresponding to EUCLID BOOKS Ⅰ－Ⅱ）略して『あそしえーしょん　初等平面幾何学』発行へと続く。そして、1888年にユークリッド『原論』の第Ⅲ巻～第Ⅵ巻に対する“The Elements of Plane Geometry”が「part Ⅱ」として発行された。

幾何学教授法改良協会は、次第に幾何学だけでなく、初等数学全般の教育を対象とするようになり、1897年には“The Mathematical Association”（数学協会）と改められることになる。

『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、各節ごとに円の性質についての内容をまとめ、それぞれの定理に適した問題を多く取り入れている。そして、定理に続き、補題が述べられ、各節の終わりに多くの練習問題が書かれている。また、作図題を多く取り入れ、操作的な扱いも試みている。これらのことより、初学者が「円の性質」を学ぶのにユークリッド『原論』よりわかりやすく親切に書かれているように思われ

る。そして、ウイルソンの批判を随分解消していると考えられる。まず、それぞれの節に内容をまとめることにより、より自然であり明解になったと考える。また、証明だけでなく練習問題を多く取り入れることにより、さらに証明が理解されやすくなると共に退屈で不毛なものとしてみる意識を解消している。また、定理と補題と分けることにより長々とした証明を少しでも短く理解しやすくしている。そして、定理・補題・作図と明確に分けることにより、重要性を示したり、重要な方法をはっきり示していると考えられる。

このように、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』はイギリスの中等数学教育の幾何の教科書として、『原論』よりも適したものを意図して作られたと考える。しかし、全体としてユークリッド『原論』の公理的・演繹的な論理体系や論証としての考え方、命題の内容は保持された。各節ごとに必要な公理、定義を述べ、定理とその証明が続く公理的スタイルや証明はすべて言葉で述べられ、代数的記号は使われていないなどユークリッド『原論』の論証の精神は大切にされた。ユークリッド『原論』そのものを改良しようとしたものでないと考えられる。

『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、『原論』の基本的路線は変更せず、公理を調整し、定理の配列を整理するなど微温的な改良であったという考えもあるが、私は、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』はイギリスの中等数学教育の幾何の教科書として『原論』よりも初学者にとってより学びやすく適したものを意図して作られた、当時においては新しい試みであり、挑戦であったという意味において画期的な改良であったと考えたい。ただし、『あそしえーしょん　初等平面幾何学』はその序文で述べられているように、未だ未完成の教科書であり、さらに改良するための基であるといえよう。しかし、当時の教科書としては完全ではないが幾何学教育を大きく前進させた大変意義のある教科書であると考える。

この『あそしえーしょん　初等平面幾何学』が大切にしたのは、初学者にとってよりわかりやすく親切であるということと、論理的思考力あるいは推論の能力の育成であると考える。

（３）第３章

第３章では、明治初期の西洋文化の導入の中で、欧化主義の担い手であった菊池大麓がどのように幾何学教育の目的を考え、『初等幾何学教科書　平面幾何学』を編纂したのかについて考察した。また『初等幾何学教科書　平面幾何学』第二編（円）とその参考となった幾何学改良協会編纂の幾何学教科書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』第三本（円）を比較するとともに、『初等幾何学教科書　平面幾何学』第二編（円）の内容や構造を調べ、菊池の考えを検討することにより、“ユークリッド『原論』第Ⅲ巻が、日本にどのように受容されたのか”を考察した。

明治初期の西洋文化の導入の中で、数学教育においても、日本伝統の和算から洋算を教えることとなったが、当時においては洋算を教えられる教師が不足し、また、教科書はほとんど原書か翻訳書であるという状態であった。明治10年前後は翻訳の時代

であり、この時代に翻訳・翻案以外の西洋数学を日本書に求めることは不可能であったのである。中でも明治13年前後までは、英米の数学とくにアメリカの数学の全盛時代であり、ロビンソンが日本の中等学校数学に普及した。ロビンソンの幾何学書はルジャンドル型であり、フランス流の幾何学が流行した時代であった。明治10年に菊池大麓がイギリスから帰り、ようやく日本人にも優秀な西洋数学の専門家を見出すこととなる。そして、菊池大麓がトドハンターを推薦してから、日本でユークリッド流の幾何学であるトドハンターの幾何学が流行しはじめ、明治18年から29年の頃、ようやく日本の諸学校から西洋人が影を潜め、日本人だけで数学の教授ができるようになってきた時代となる。また、これらの時代と相待って、数学書の良好なものが現れた。

幾何学においては、文部省の依頼を受け、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』が現れた。明治21年9月20日に巻壱、明治22年1月10日に巻弐がそれぞれ文部省から出版され、明治22年4月20日には合本として再版された。以後10版まで版を重ねることになる。また、『初等幾何学教科書　立体幾何学』が明治22年7月23日に出版された。菊池は文部省から、数学の教科課程を一定にする目的のため教科書の編纂を依頼され、その依頼に応えて、『初等幾何学教科書　平面幾何学』を編纂したのである。菊池の幾何学教科書は広く受け入れられた。それは、全国の中学校46校のうちの37校、師範学校32校のうちの30校で採用され、他の教科書を圧倒していた。このことより、菊池の幾何学教科書がその後の教科書のスタイルを決定したと言えよう。

この菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』は、英国の幾何学教授法改良協会の幾何学書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』を参考に作られたものである。そして、英国の幾何学教授法改良協会の幾何学書『あそしえーしょん　初等平面幾何学』は、ユークリッド『原論』を教科書として改良しようと試みた書であり、菊池がユークリッド幾何を日本に取り入れ、普及させたと言われる所以であろう。つまり、ユークリッド『原論』は、菊池によって日本に受容されたと言えよう。

では、“菊池はなぜ日本にユークリッド幾何を取り入れたのであろうか。”
そのために、まず、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』について考えたい。菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』の意義・特徴として、

（１）日本人によって書かれた最初の本格的な幾何学教科書であること。
（２）言文一致の文体を目指した教科書であること。
（３）横書き教科書の普及に貢献した教科書であること。
（４）後代に続く幾何教育の目的を確立させた教科書であること。
（５）記号を用いないで記述することを目指した教科書であること。
（６）幾何学と代数学とは別学科であると意識した教科書であること。

を指摘することができる。また、菊池は幾何学教育の目標として、

（１）空間の諸性質の獲得
（２）推理力の錬磨

を挙げ、『幾何学講義』に「幾何学は、其の教育上の価値の一大部分は推理力の錬磨に在るものなり。」と述べているように、２項目のうち後者の方に重点を置いた。菊

池が（2）推理力の錬磨の方に重点を置いたことは、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』が『あそしえーしょん　初等平面幾何学』よりもさらに論理的演繹的な体系を重んじ、ユークリッド『原論』に近いことからも覗える。さらに菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』では、円論を第二編に取り上げ、作図題においても証明をする際には円の性質使うため、円の性質を作図題より先に学ばせたことからも覗える。菊池の幾何教育観は、当時の日本人の思考様式を意図的に改造するため、推理力の錬磨を重視し、論証幾何学を普及するための努力の成果であったと考えられる。菊池は、古代ギリシアに由来する論証の精神の文化的価値を認め、それを日本の数学文化に受け入れた。その背景には、日本文化の世界的レベルの引き上げをめざし、日本人の思考様式の意図的な改造を目指していたと考える。そのために推理力の錬磨を重視し、言文一致体を作り、代数と幾何を分化して日本人に論証の精神をしっかりと身につけさせたかったのだと思われる。そして、菊池はそれまで代数的計算による図形の計量に傾斜し論証の精神を欠いていた日本の数学文化の矯正とさらには高等数学（解析幾何学・射影幾何学など）を学ぶ基礎として、まず、ユークリッド幾何学において論証の力を高めたかったのではないかと思われる。さらに菊池は、論証の幾何学としてはユークリッド『原論』を学ぶことが最も適していると考えたのではなかろうか。しかし、中等幾何学教育としてユークリッド『原論』をそのまま学ぶことは難しく、そこで、初学者にとってより親切でわかりやすく改良された『あそしえーしょん　初等平面幾何学』を参考に『初等幾何学教科書』を編纂したのであろう。

菊池がケンブリッジで学び日本に移植しようとしたのは「知識を鵜呑みにせず自己の理性を働かせて考え抜く」という啓蒙主義的思想である。その根幹に数学があったのだと思われる。菊池は自分自身が学者としての業績を上げることより、「知識を鵜呑みにせず自己の理性を働かせて考え抜く」という人たちを作り上げることの方を天命と考えていたのかもしれない。明治初期という時代において、日本を思い、教育に取り組んだ学者と言えよう。

第2節　残された課題

本論文では、中等数学教育における『原論』第Ⅲ巻の受容に関して、日本ではどのように幾何の教科書が作られ、ユークリッド『原論』第Ⅲ巻（円論）を受け入れたのかを歴史的に考究するために、ユークリッド『原論』第Ⅲ巻、幾何学教授法改良協会編纂『あそしえーしょん　初等平面幾何学』第三本、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』第二編を考察し、明治20年代までの幾何学教育史（円論）について考えてきた。そこで残された課題としては、まず、第1に菊池以降現在までの幾何学教育史（円論）について、今後考察していきたいと考える。特に、私が教師となって授業に使った平成10年以前の教科書においては、円の性質の単元で、菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』第二編の内容の多くが取り扱われていたので、菊池以降どのように教科書の内容が変遷してきたかを調べてみたい。また、平成10年改訂の学習指導要領で、円の性質においての学習内容がほとんど削減され、平成23年度より完全実施の新学習指導要領でも、円周角の定理とその逆しか学ばない。なぜ削減されたのか今後考えていきたい。

第2に、本研究のもう一つの目的である“「円の性質」について、中等数学教育の幾何において、何が大切なのか、また大切にすべきなのか、そしてそのために何を学べばよいのか”について、今後の課題としたい。菊池が自分の思想を持って幾何学教科書を作ったように、私もこの「円の性質」の単元について、教科書を作りたいと考えている。そして、中学校で授業実践をする中でさらに改良し、“「円の性質」について、中等数学教育の幾何において、何が大切なのか、また大切にすべきなのか、そしてそのために何を学べばよいのか”について、考察していきたい。

第3に、今日における幾何学教育の目標をどのように考えるのかということである。菊池は、幾何学教育の目標を（1）空間の諸性質の獲得（2）推理力の錬磨とし、特に後者を重視した。河口商次は「幾何教育における論証は、生徒が納得できて誤りを犯さない程度のものであるべきである」と述べ、論証を重視しすぎてはいけないという考えであった。遠山啓は、「中学校三年生までにユークリッド的な論証を終え、高校では画法幾何や解析幾何に移るべきだ」という考えであった。他にも様々な考えはあるが（1）空間の諸性質の獲得は、いつの時代においても幾何学教育の大目標と言えよう。それに対して、（2）推理力の錬磨については、中等数学教育においてどのようにとらえるのが良いのか、大いに議論すべき所であろう。菊池の幾何と代数の分離や記号を使わないという考えは批判され改良されていくが、推理力の錬磨という考えは、現代においても確かに受け継がれているといえよう。現在中学2年生の「図形の性質」という単元は、ユークリッド的な論証（証明）が扱われており、ユークリッドの精神を受け継いでいると考えられる。新学習指導要領が、子どもたちに何を目指すのかを検討すると共に、私は幾何学教育の目的を何と考えるのか、そして、中等数学教育においてユークリッド的な論証をどのように取り扱うべきか、今後考察していきたいと考えている。

参考文献

【主な参考文献】

1．中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳『ユークリッド原論』（共立出版、1971年、初版１刷発行　1985年、初版10刷発行）

2．中村幸四郎『数学史－形成の立場から－』（共立全書　1981年）

3．Ⅰ.Mueller,Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements,MIT Press 1981

4．A.G.Howson,A History of Mathematics Education in England,Cambridge UP,1982

5．上野清校閲、三木留三譯述『あそしえーしょん　初等平面幾何学』（版権所有 25年6月27日印刷　明治25年6月28日出版）

6．菊池大麓編纂『初等幾何学教科書　平面幾何学』（大日本図書　明治31年3月15日印刷　明治31年3月18日発行　第十版）

7．菊池大麓著『初等幾何学教科書随伴　幾何学講義』（大日本図書　第一巻　明治30年4月10日印刷　明治30年4月13日発行　　第二巻　明治39年8月17日印刷　明治39年8月20日発行）

8．上垣渉「日本数学教育史要（13）菊池大麓と寺尾寿」（数学教育協議会編集『数学教室』2004年４月号、No. 629に所収）

9．上垣渉「日本数学教育史要（20）藤沢利喜太郎の数学教育論⑥」（数学教育協議会編集『数学教室』2004年11月号、No. 636に所収）

10．上垣渉「日本数学教育史要（23）藤沢利喜太郎の数学教育論⑨」（数学教育協議会編集『数学教室』2005年２月号、No639に所収）

11．上垣渉著『ギリシア数学の探訪』（亀書房　2007年5月30日　第１刷発行）

12．上垣渉著『はじめて読む数学の歴史』（ベル出版　2006年1月25日　初版発行　2006年3月20日　第２刷発行）

13．藤沢利喜太郎講述『数学教授法講義筆記』（第日本図書　明治33年10月13日印刷　明治33年10月16日発行）

14．小倉金之助著作集第四巻『数学教育の根本問題』（勁草書房　1973年7月10日　第１刷）

15．小倉金之助著作集第六巻『数学教育の歴史』（勁草書房　1974年5月10日第１刷発行）

16．小倉金之助著『数学教育史』（岩波書店　1932年6月25日　第１刷発行　1973年4月24日改版第１刷発行　2007年6月5日　第２刷発行）

17．小倉金之助著『近代日本の数学』（勁草書房　1973年10月5日　第１刷発行）

18．佐藤英二著『近代日本の数学教育』（東京大学出版会　2006年2月22日　初版）

19．遠山啓著作集『幾何教育をどうすすめるか』（太郎次郎社　1981年6月2日　初版印刷　1981年6月10日　初版発行）

20．遠山啓著「系統学習の意味」（黒田孝郎編『数学教育の実践』国土社　1958年に所収）

21. 遠山啓著『現代数学教育講座　６空間と図形』（明治図書　1970年8月　初版刊）
22. 蟹江幸博・並木雅俊著『文明開化の数学と物理』（岩波書店　2008年11月6日　第１刷発行）
23. 河口商次編著『図形教育』（日新出版　1960年）
24. 松尾七重著『算数・数学における図形指導の改善』（東洋館出版社　2000年2月25日　初版発行）
25. 根生誠「19世紀イギリス数学教育史ー幾何学教授改良協会の設立をめぐってー」（東海大学紀要　海洋学部一般教養　第１９輯）
26. G.R.Morrow,PROCLUS A Commentary on the First Book of Euclid's Elements,Princeton, 1970
遠山啓「ユークリッド幾何の教育的位置づけ」（数学教育協議会編集『数学教室』1957年12月号、国土社）
27. Ｔ．Ｌ．ヒース著平田寛訳『ギリシア数学史』（共立全書　1959年）
28. 斎藤憲・三浦伸夫『エウクレイデス全集』（東京大学出版会　2008年１月28日　初版）
29. 斎藤憲著『ユークリッド『原論』とは何か（岩波書店　2008年9月17日　第１刷発行）
30. 小倉金之助・鍋島信太郎共著『現代数学教育史』（大日本図書　昭和32年9月　初版）
31. 長尾十三二著『西洋教育史』（東京大学出版会　1991年12月）第二版
32. 藤井泰著『イギリス中等教育制度史研究』（風間書房　1995年２月）
33. G.ウォルフォード著　竹内洋・海部優子共訳『パブリックスクールの社会学（英国エリート教育の内幕）』（世界思想社　1996年12月）
34. 日本数学教育学会編者『現代の数学教育２』（培風館　昭和46年11月25日　初版発行）

附属資料　　『原論』第Ｉ巻（定義と命題）、『原論』第Ⅱ巻（定義と命題）

（1）第Ｉ巻　定義

1．点とは部分をもたないものである。

2．線とは幅のない長さである。

3．線の端は点である。

4．直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。

5．面とは長さと幅のみをもつものである。

6．面の端は線である。

7．平面とはその上にある直線について一様に横たわる面である。

8．平面角とは平面上にあって互いに交わりかつ一直線をなすことのない二つの線相互のかたむきである。

9．角をはさむ線が直線であるとき、その角は直線角とよばれる。

10．直線が直線の上に立てられて接角を互いに等しくするとき、等しい角の双方は直角であり、上に立つ直線はその下の直線に対して垂線とよばれる。

11．鈍角とは直角より大きい角である。

12．鋭角とは直角より小さい角である。

13．境界とはあるものの端である。

14．図形とは一つまたは二つ以上の境界によってかこまれたものである。

15．円とは一つの線にかこまれた平面図形で、その図形の内部にある1点からそれへひかれたすべての線分が互いに等しいものである。

16．この点は円の中心とよばれる。

17．円の直径とは円の中心を通り両方向で円周によって限られた任意の線分であり、それはまた円を２等分する。

18．半円とは直径とそれによって切り取られた弧とによってかこまれた図形である。半円の中心は円のそれと同じである。

19．直線図形とは線分にかこまれた図形であり、三辺形とは三つの、四辺形とは四つの、多辺形とは四つより多くの線分にかこまれた図形である。

20．三辺形のうち、等辺三角形とは三つの等しい辺をもつもの、二等辺三角形とは二つだけ等しい辺をもつもの、不等辺三角形とは三つの不等な辺をもつものである。

21．さらに三辺形のうち、直角三角形とは直角をもつもの、鈍角三角形とは鈍角をもつもの、鋭角三角形とは三つの鋭角をもつものである。

22．四辺形のうち、正方形とは等辺でかつ角が直角のもの、矩形とは角が直角で等辺でないもの、菱形とは等辺で、角が直角でないもの、長斜方形とは対辺と対角が等しいが、等辺でなく角が直角でないものである。これら以外の四辺形はトラペジオンとよばれるとせよ。

23．平行線とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、いずれの方向においても互いに交わらない直線である。

第Ｉ巻　公準（要請）

1．任意の点から任意の点へ直線をひくこと。
2．および有限直線を連続して一直線に延長すること。
3．および任意の点と距離（半径）とをもって円を描くこと。
4．およびすべての直角は互いに等しいこと。
5．および1直線が2直線に交わり同じ側の内角の和を2直角より小さくするならばこの2直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側において交わること。

第Ⅰ巻　公理（共通概念）

1．同じものに等しいものはまた互いに等しい。
2．また等しいものに等しいものが加えられれば、全体は等しい。
3．また等しいものから等しいものがひかれれば、残りは等しい。
4．また不等なものに等しいものが加えられれば全体は不等である。
5．また同じものの2倍は互いに等しい。
6．また同じものの半分は互いに等しい。
7．また互いに重なり合うものは互いに等しい。
8．また全体は部分より大きい。
9．また2線分は面積をかこまない。

第Ⅰ巻　命題

命題1　与えられた有限な直線（線分）の上に等辺三角形をつくること。

命題2　与えられた点において与えられた線分に等しい線分をつくること。

命題3　二つの不等な線分が与えられたとき、大きいものから小さいものに等しい線分を切り取ること。

命題4　もし二つの三角形が2辺が2辺にそれぞれ等しく、その等しい2辺にはさまれる角が等しいならば、底辺は底辺に等しく、三角形は三角形に等しく、残りの2角は残りの2角に、すなわち等しい辺が対する角はぞれぞれ等しいであろう。

命題5　二等辺三角形の底辺の上にある角は互いに等しく、等しい辺が延長されるとき、底辺の下の角は互いに等しいであろう。

命題6　もし三角形の2角が互いに等しければ、等しい角に対する辺も互いに等しいであろう。

命題7　一つの線分を底辺として、三角形をなす2線分にそれぞれ等しく、同じ側にことなった点で交わり、最初の2線分と同じ端をもつ他の2線分をつくることはできない。

命題8　もし二つの三角形において2辺が2辺に等しく、底辺も底辺に等しければ、等しい辺にはさまれた角もまた等しいであろう。

命題9　与えられた直線角を2等分すること。

命題10　与えられた線分を2等分すること。

命題11　与えられた直線にその上の与えられた点から直角に直線をひくこと。

命題12　与えられた無限直線にその上にない与えられた点から垂線を下すこと。 命題13　もし直線が直線の上に立てられて二つの角をつくるならば、二つの直角かまたはその和が２直角に等しい角をつくるであろう。

命題14　もし任意の直線に対してその上の点において同じ側にない２直線が接角の和を２直角に等しくするならば、この２直線は互いに一直線をなすであろう。

命題15　もし２直線が互いに交わるならば、対頂角を互いに等しくする。

命題16　すべての三角形において辺の一つが延長されるとき、外角は内対角のいずれよりも大きい。

命題17　すべての三角形においてどの２角をとってもその和は２直角より小さい。

命題18　すべての三角形において大きい辺は大きい角に対する。

命題19　すべての三角形において大きい角には大きい辺が対する。

命題20　すべての三角形においてどの2辺をとってもその和は残りの1辺より大きい。

命題21　もし三角形の辺の一つの上にその両端から三角形の内部で交わる２線分がつくられるならば、つくられた２線分はその和が三角形の残りの２辺の和より小さいが、より大きい角をはさむであろう。

命題22　与えられた３線分に等しい３線分から三角形をつくること。ただしどの２線分をとってもその和は残りの線分より大きくなければならない。

命題23　与えられた直線上にその上の点において与えられた直線角に等しい直線角をつくること。

命題24　もし二つの三角形において２辺が２辺にそれぞれ等しく、等しい線分によってはさまれる角の一方が他方より大きいならば、底辺も底辺より大きいであろう。

命題25　もし二つの三角形において２辺が２辺にそれぞれ等しく、底辺が底辺より大きいならば、等しい線分にはさまれる角も一方が他方より大きいであろう。

命題26　もし二つの三角形において２角が２角にそれぞれ等しく、１辺が１辺に、すなわち等しい２角にはさまれる辺かまたは等しい角の一つに対する辺が等しければ、残りの２辺も残りの２辺に等しく、残りの角も残りの角に等しいであろう。

命題27　もし１直線が２直線に交わってなす錯覚が互いに等しければ、この２直線は互いに平行であろう。

命題28　もし１直線が２直線に交わってなす一つの外角が同じ側の内対角に等しいかまたは同側内角の和が２直角に等しければ、この２直線は互いに平行であろう。

命題29　一つの直線が二つの平行線に交わってなす錯覚は互いに等しく、外角は内対角に等しく、同側内角の和は２直角に等しい。

命題30　同一直線に平行な２直線はまた互いに平行である。

命題31　与えられた点を通り、与えられた直線に平行線をひくこと。

命題32　すべての三角形において１辺が延長されるとき、外角は二つの内対角の和に

等しく、三角形の三つの内角の和は２直角に等しい。

命題33　等しくかつ平行な２線分を同じ側で結ぶ２線分はそれ自身等しくかつ平行である。

命題34　平行四辺形において対辺および対角は互いに等しく、対角線はこれを２等分する。

命題35　同じ底辺の上にありかつ同じ平行線の間にある平行四辺形は互いに等しい。

命題36　等しい底辺の上にありかつ同じ平行線の間にある平行四辺形は互いに等しい。

命題37　同じ底辺の上にありかつ同じ平行線の間にある三角形は互いに等しい。

命題38　等しい底辺の上にありかつ同じ平行線の間にある三角形は互いに等しい。

命題39　同じ底辺の上にありかつ同じ側にある等しい三角形は同じ平行線の間にある。

命題40　等しい底辺の上にありかつ同じ側にある等しい三角形は同じ平行線の間にある。

命題41　もし平行四辺形が三角形と同じ底辺をもちかつ同じ平行線の間にあれば、平行四辺形は三角形の２倍である。

命題42　与えられた直線角の中に与えられた三角形に等しい平行四辺形をつくること。

命題43　すべての平行四辺形において対角線をはさむ二つの平行四辺形の補形は互いに等しい。

命題44　与えられた線分上に与えられた三角形に等しい平行四辺形を与えられた直線角に等しい角のなかにつくること。

命題45　与えられた直線角のなかに与えられた直線図形に等しい平行四辺形をつくること。

命題46　与えられた線分上に正方形を描くこと。

命題47　直角三角形において直角の対辺の上の正方形は直角をはさむ２辺の上の正方形の和に等しい。

命題48　もし三角形において１辺の上の正方形が三角形の残りの２辺の上の正方形の和に等しければ、三角形の残りの２辺によってはさまれる角は直角である。

（２）第Ⅱ巻　定義

1．いかなる直角平行四辺形（矩形）も直角をはさむ２線分によってかこまれるといわれる。

2．いかなる平行四辺形においてもその対角線をはさむ平行四辺形のどれか一つは二つの補形と合わせてグノーモーンとよばれるとせよ。

第Ⅱ巻　　命題

命題１　もし２線分があり、その一方が任意個の部分に分けられるならば、２線分にかこまれた矩形は、分けられていない線分と分けられた部分のおのおのとにかこまれた矩形の和に等しい。

命題２　もし線分が任意に２分されるならば、全体と分けられた部分のおのおのとにかこまれた矩形の和は全体の上の正方形に等しい。

命題３　もし線分が任意に２分されるならば、全体と一つの部分とにかこまれた矩形は二つの部分にかこまれた矩形と先にいわれた部分の上の正方形との和に等しい。

命題４　もし線分が任意に２分されるならば、全体の上の正方形は、二つの部分の上の正方形と、二つの部分によってかこまれた矩形の２倍との和に等しい。

命題５　もし線分が相等および不等な部分に分かれるならば、不等な部分にかこまれた矩形は二つの区分点の間の線分上の正方形との和はもとの線分の半分の上の正方形に等しい。

命題６　もし線分が２等分され、任意の線分がそれと一直線をなして加えられるならば、加えられた線分を含んだ全体と加えられた線分とにかこまれた矩形ともとの線分の半分の上の正方形との和は、もとの線分の半分と加えられた線分とを合わせた線分上の正方形に等しい。

命題７　もし線分が任意に２分されるならば、全体の上の正方形と一つの部分の上の正方形との和は全体の線分とこの部分とにかこまれた矩形の２倍と残りの部分の上の正方形との和に等しい。

命題８　もし線分が任意に２分されるならば、全体と一つの部分とにかこまれた矩形の４倍と残りの部分の上の正方形との和は全体の線分と先の部分とを一直線とした線分上の正方形に等しい。

命題９　もし線分が相等および不等な部分に分けられるならば、不等な部分の上の正方形の和はもとの線分の半分の上の正方形と二つの区分点の間の線分上の正方形との和の２倍である。

命題10　もし線分が２等分され、任意の線分がそれと一直線をなして加えられるならば、加えられた線分を含んだ全体の上の正方形と加えられた線分上の正方形との和は、もとの線分の半分の上の正方形と、もとの線分の半分と加えられた線分とを一直線とした上の正方形との和の２倍である。

命題11　与えられた線分を２分し、全体と一つの部分とにかこまれた矩形を残りの部分の上の正方形に等しくすること。

命題12　鈍角三角形において鈍角の対辺の上の正方形は鈍角をはさむ２辺の上の正方形の和より、鈍角をはさむ辺の一つと、この辺へと垂線が下され、この鈍角への垂線によって外部に切り取られた線分とにかこまれた矩形の２倍だけ大きい。

命題13　鋭角三角形において鋭角の対辺の上の正方形は鋭角をはさむ２辺の上の正方形の和より、鋭角をはさむ辺の一つと、この辺へと垂線が下され、この鋭角への垂線によって内部に切り取られた線分とにかこまれた矩形の２倍だけ小さい。

命題14　与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

謝辞

三重大学教育学部数学科（34期生）を卒業後、21年間中学校の数学教師として数学を学び、そして、2007年度現職教員という形で本大学院に入学させて頂きました。もう一度、大学院で数学を学べるということは喜びであったものの、私にやっていけるのだろうかととても不安でした。しかし、指導教官である上垣渉先生の暖かい助言やご指導と諸先生方の暖かいご指導のおかげで、この２年間、安心して楽しく学ばせて頂きました。先生方は大変丁寧に教えてくださいました。この２年間の暖かいご指導にとても感謝しております。本当にありがとうございました。

また、研究の方法も論文の書き方も全く知らなかった私が、このように論文を完成させることができました。このように完成した論文を手にしますと、胸一杯の気持ちです。上垣渉先生には、初めはユークリッド『原論』の証明さえできなかった私を、ここまで成長させていただきました。そして、論文を書く学生としての指導だけでなく、その指導者としての在り方をも学ばせて頂きました。本当に多くのことを学びました。また、勤務校との兼ね合いや家庭の事情などいろいろとご配慮いただき、そのおかげでやってこられたと深く感謝しております。誠にありがとうございました。

私は、この論文を書く中でそして菊池の考えを考察する中で、“教師は何を目指して、どのような数学を子どもたちに教えるのか”をしっかり考えている必要があると思いました。今後、中学校へ戻って仲間と議論し、いつも意識して授業に望むように心がけたいと考えています。また、ギリシア時代から明治初期に至る数学教育史を学び、歴史を考えて授業を行うようになりました。まだまだ、私にとっての課題はたくさんありますが、今後研修を続けたいと思います。

この２年間は、今まで忙しさに忙殺され、考えることもなく我武者羅に生きてきた私にとって、自分を見つめ直し、これからの生き方を考える大切な日々でした。数学教室の先生方にいろいろ助言していただき、今はさわやかな気持ちで修了を迎えられそうです。そういう意味でも、この論文は、私にとって今までのまとめとして、また、これから数学教師として生きていく出発点としての考えをまとめたものとも言えます。諸先生方に感謝すると共に、今後さらに研究を深めていきたいと思います。

最後に、院生生活を送る上で大変御心遣い頂いた事務の鈴木さん、いつも励ましアドバイスを頂いた千田さん、私の心の支えだった同級生の服部さん、発表の準備などお手伝い頂いた山本さんなど、多くの方々に支えられたことに厚くお礼申し上げます。

また、勤務校である名張中学校の亀井敬一校長先生をはじめ諸先生方には、大変忙しいにもかかわらず、快く研修に行かせていただきました。ありがとうございました。そして、自習になっても快く「大学で勉強してきて」といってくれた２年生の生徒たち、私が大学院を目指すにあって大きな支えとなってくれた夫や娘たちに、心より感謝しています。他にも多くの方に励まされ、支えられて今日まで至ることができたことに感謝し、大学院で学んだことを今後に生かしていきたいと思っております。本当にありがとうございました。