

修士論文

球面上のフーリエ解析と偏微分方程式へのその応用

三重大学大学院教育学研究科
教科教育専攻 数学教育専修

No.208M022

山本智紀

2010年2月15日

目次

概要	2
1 序章	3
2 フーリエ級数	4
2.1 複素フーリエ級数	4
2.2 フーリエ級数展開できる関数	4
2.3 平均2乗誤差	13
2.4 補足	19
3 一般化フーリエ級数	20
3.1 フーリエ級数と線形代数	20
3.2 内積空間と基底	21
3.3 ヒルベルト空間	27
3.4 正規直交基底と一般化フーリエ級数	29
3.5 直交分解定理	32
3.6 補足	36
4 直交関数系	36
4.1 いろいろな直交関数系	36
4.2 ルジャンドル多項式系	38
4.3 ラゲール陪多項式	40
4.4 d 次元球面調和関数(球関数)	44
4.4.1 関数論的にみたフーリエ級数	46
4.4.2 球面調和関数と球面上のラプラス作用素	47
4.4.3 球面上の熱方程式	54
謝辞	57
参考文献	58

概要

フーリエは関数を記述する関数系として三角関数系を発見したが，現在，関数を記述できる関数系はさまざまなものが発見されている．その中でも球面上の関数を記述できる球面調和関数系に注目し，偏微分方程式にどのように利用できるかを調べた．

1 序章

この論文は球面上のフーリエ解析と偏微分方程式への具体的な応用についてである。フーリエは関数を記述する関数系として三角関数系 $\{\sin k\pi x, \cos k\pi x\}$ (あるいは $\{e^{ikx}\}$) があることを発見したが、関数を記述できる関数系はこれだけではない。たとえば、 $[-1, 1]$ 上の関数を記述するルジャンドル多項式系、 $(-\infty, \infty)$ 上の関数を記述するエルミート関数系、 $(0, +\infty)$ 上の関数を記述するラゲール関数系、球面上の関数を記述する球面調和関数系、 $(-\infty, \infty)$ 上の関数を記述するウェーブレット関数系などがある。この中でも特に球面調和関数系に注目し、具体的な応用例も調べた。

まず、第1章では、フーリエ級数展開の収束について簡単にまとめている。本論文では複素系のフーリエ級数を用いるので、この形の展開になっている。

第2章では、フーリエ級数の理論をヒルベルト空間上に一般化する。そのために無限次元のベクトル空間についても述べてある。この章を通して一般の正規直交基底を用いたフーリエ級数展開が可能であるための必要十分条件が得られる。

第3章では、 $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 以外の正規直交基底を紹介する。ここでは具体的に、ルジャンドル多項式、ラゲール陪多項式、球面調和関数を取り上げた。球面調和関数については細かく述べてある。そして最後に、球面調和関数による展開の具体的な応用例として球面上の熱方程式を取り上げた。この例を通して、球面調和関数による展開の有用性がみられるはずである。

2 フーリエ級数

2.1 複素フーリエ級数

本論文では主として複素形のフーリエ級数を扱うので、複素フーリエ級数についての基本事項をまとめておく。

f は \mathbf{R} 上で定義された周期 $2l$ の関数で、

$$\int_{-l}^l |f(x)| dx < \infty \quad (2.1)$$

を満たしているとする。本論文ではルベグ積分を仮定しているので、(2.1) が成り立つことは、 f が $[-l, l)$ で積分可能であることを意味する。 $\omega = \pi/l$ とおく。このとき、 $f(x)e^{-ik\omega x}$ も $[-l, l)$ で積分可能であるから、

$$c_k(f) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (2.2)$$

が定義でき、 $c_k(f)$ を f の複素フーリエ係数という。収束するかどうかは考えずに、形式的に次のような級数をつくる：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega x}. \quad (2.3)$$

この形式的な級数を f のフーリエ級数の複素形、あるいは単に f のフーリエ級数といい、(2.3) が f のフーリエ級数であることを、記号

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega x} \quad (2.4)$$

によって表す。一般に、(2.1) の条件だけからは

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega x}$$

が成り立つとは結論できない。では、どのような f に対して (2.4) の両辺は等号で結ばれるか、このことを以下でみていく。

2.2 フーリエ級数展開できる関数

f を \mathbf{R} 上で定義された周期 $2l$ の複素数値関数とする。 f が $[-l, l)$ 上で積分可能であるとき、 $\omega = \pi/l$ として、

$$s_N[f](x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\omega x} \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

とおき、これを f の第 N フーリエ部分和という。

もし、 $x \in [-l, l)$ で $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N[f](x) = f(x)$ が成り立っているとき、 f のフーリエ級数は f に x で収束しているという。これは、 f が x でフーリエ級数展開可能であることに他ならない。

本節では、

「どのような f がすべての点 $x \in [-l, l)$ でフーリエ級数展開できるか」

を考えていく。

フランスの数学者 J. B. J. Fourier (1768-1830) はすべての関数がフーリエ級数展開可能であると考えていた。しかし、この考えは正しくはなかった。たとえば次のような関数が知られている

(1) 周期 $2l$ の連続関数 f で $s_N[f](0)$ が発散するようなものが存在する。(duBois-Reymond, 1876 年).

(2) $E \subset [-l, l)$ を $[-l, l)$ の中に含まれる有理数全体のなす集合とする。このとき、周期 $2l$ の連続関数 f で、すべての $x \in E$ に対して

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |s_N[f](x)| = \infty \quad (2.6)$$

となるものが存在する (Kahne, Katznelson, 1965 年).

(3) f が周期 $2l$ で $[-l, l)$ 上でルベグ積分可能でも、いたるところで (2.6) が成り立つようなものが存在する (Kolmogolov, 1923 年).

ゆえに、一般の連続関数をすべての点でフーリエ級数展開することはあきらめなければならない。しかし、点 x で次のような条件が満たされていれば、 x でフーリエ級数展開が可能になる。

定理 2.1. f を \mathbf{R} 上の周期 $2l$ の連続関数とする。もしある点 $x \in [-l, l)$ で

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|^2 dh < \infty \quad (2.7)$$

が十分小さな $\delta > 0$ に対して成り立っているならば、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N[f](x) = f(x). \quad (2.8)$$

この定理を証明するために、ベッセルの不等式を証明する。まずはベッセルの不等式の証明で用いる基本公式をあげておく。

命題 2.1.

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{ikwx} dx = \begin{cases} 0 & (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \\ 1 & (k = 0). \end{cases}$$

証明. $k = 0$ のときは明らかである. $k \neq 0$ のときは, $y = \omega x$ と変数変換をすることにより,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{ik\omega x} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iky} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ky) dy + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ky) dy = 0 \end{aligned}$$

を得る. □

補題 2.1. (ベッセルの不等式) f を \mathbf{R} 上の周期 $2l$ の関数で, $[-l, l)$ 上で 2 乗可積分, すなわち

$$\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.9)$$

を満たすものとする. このとき, f の複素フーリエ級数 $c_k(f)$ は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx \quad (2.10)$$

を満たす.

証明. $s_N[f]$ と f との差の積分を評価すると次のようにして求める不等式が得られる.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |s_N[f](x) - f(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left\{ |s_N[f](x)|^2 + |f(x)|^2 - 2\operatorname{Re} \left(s_N[f](x) \overline{f(x)} \right) \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |s_N[f](x)|^2 dx &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left(\sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\omega x} \right) \overline{\left(\sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\omega x} \right)} dx \\ &= \sum_{k, k'=-N}^N c_k(f) \overline{c_{k'}(f)} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{i(k-k')\omega x} dx \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k(f) \overline{c_k(f)} = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 < \infty. \end{aligned}$$

一方,

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l s_N[f](x) \overline{f(x)} dx = \sum_{k=-N}^N c_k(f) \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \overline{f(x)} e^{ik\omega x} dx$$

$$= \sum_{k=-N}^N c_k(f) \overline{c_k(f)} = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 < \infty$$

である。以上の式を (2.11) に代入してまとめると

$$0 \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2$$

を得る。ここで $N \rightarrow \infty$ とすれば、ベッセルの不等式が導かれる。 \square

ベッセルの不等式のひとつの帰結として次が得られる。

系 2.1. f を \mathbf{R} 上の周期 $2l$ の関数で、 $[-l, l)$ 上で 2 乗可積分であるとする。このとき、

$$\begin{aligned} \lim_{|k| \rightarrow \infty} c_k(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f(x) \sin n\omega x dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f(x) \cos n\omega x dx = 0. \end{aligned}$$

証明. $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ とおく。 $|f_j(x)| \leq |f(x)|$ ($j = 1, 2$) であるから、

$$\int_{-l}^l |f_j(x)|^2 dx \leq \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx < \infty$$

が成り立ち、各 f_j が 2 乗可積分であることがわかる。したがって、ベッセルの不等式より、 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f_j)|^2 < \infty$ が成り立つ。この級数は絶対収束しているので、

$$|c_0(f_j)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k(f_j)|^2 + |c_{-k}(f_j)|^2)$$

と表せる。ゆえに、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|c_k(f_j)|^2 + |c_{-k}(f_j)|^2) = 0$$

つまり、

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |c_k(f_j)|^2 = 0$$

でなければならない。したがって、 $\lim_{|k| \rightarrow \infty} c_k(f_j) = 0$ となる。また、

$$\frac{1}{2l} \left| \int_{-l}^l f_j(t) \sin k\omega t dt \right|, \frac{1}{2l} \left| \int_{-l}^l f_j(t) \cos k\omega t dt \right| \leq |c_k(f_j)|$$

であるから、これより求める系を得る。 \square

以上のことをふまえて、定理の証明にとりかかる。

定理 2.1 の証明. 証明の方針は、 $s_N[f](x)$ がこれから定義するディリクレ核とよばれるある関数 $D_N(x)$ により、

$$s_N[f](x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(x-t) f(t) dt \quad (2.12)$$

と積分で表せることを示し、次に、 $s_N[f](x) - f(x)$ の大きさをこの積分を使った不等式にもち込んで評価するというものである。まずは $D_N(x)$ を求めることから始める。

$$\begin{aligned} s_N[f](x) &= \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\omega x} = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-ik\omega t} dt \cdot e^{ik\omega x} \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left(\sum_{k=-N}^N e^{ik\omega(x-t)} \right) f(t) dt. \end{aligned}$$

したがって、

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\omega x}$$

とすれば、これが求めたかったものであり、ディリクレ核とよばれる関数である。ここで次の二つのことを証明しておく：

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(x-t) dt = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(t) dt = 1, \quad (2.13)$$

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega t}{\sin \frac{\omega t}{2}}. \quad (2.14)$$

(2.13) の一番目の等号は、 D_N が周期 $2l$ の関数であり、 $D_N(-t) = D_N(t)$ であることから、

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(x-t) dt = \frac{1}{2l} \int_{-l-x}^{l-x} D_N(t) dt = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(t) dt.$$

二番目の等号は、次のように計算する。

$$\int_{-l}^l D_N(t) dt = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{ik\omega t} dt = 1.$$

(2.14) は少し技巧的な変形を用いて証明する：

$$D_N(t) = e^{-iN\omega t} (1 + e^{i\omega t} + \dots + e^{2iN\omega t})$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-iN\omega t} \frac{1 - e^{i(2N+1)\omega t}}{1 - e^{i\omega t}} \\
&= e^{-iN\omega t} \frac{1 - e^{i(2N+1)\omega t}}{e^{i\omega t/2}(e^{-i\omega t/2} - e^{i\omega t/2})} \\
&= \frac{e^{-i(N+1/2)\omega t} - e^{i(N+1/2)\omega t}}{e^{-i\omega t/2} - e^{i\omega t/2}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega t}{\sin \frac{\omega t}{2}}.
\end{aligned}$$

(2.13), (2.14) を使って,

$$s_N[f](x) - f(x) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

を証明する. (2.13) より,

$$\begin{aligned}
s_N[f](x) - f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(x-t)f(t)dt - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(t)dt \cdot f(x) \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l D_N(t)\{f(x-t) - f(x)\}dt \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega t}{\sin \frac{\omega t}{2}} \{f(x-t) - f(x)\}dt.
\end{aligned}$$

ここで,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin \frac{1}{2}\omega t} & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

とおく. $|t|$ が十分小さいとき,

$$\left| \sin \frac{\omega t}{2} \right| \geq \frac{\omega |t|}{4}$$

が成り立つから, 定理の条件 (2.7) より, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$\begin{aligned}
\int_{-\delta}^{\delta} |g(t)|^2 dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x-t) - f(x)|^2}{\sin^2 \frac{\omega t}{2}} dt \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \right|^2 dt \cdot \frac{16}{\omega^2} < \infty.
\end{aligned}$$

また, $|g(t)|^2$ は非負値可測関数だから,

$$\int_{-l}^l |g(t)|^2 dt = \int_{-l}^{-\delta} |g(t)|^2 dt + \int_{-\delta}^{\delta} |g(t)|^2 dt + \int_{\delta}^l |g(t)|^2 dt < \infty$$

が成り立つ. したがって, $g(t)$ は $[-l, l]$ で 2 乗可積分である.

さて, 三角関数の加法定理を用いることにより,

$$s_N[f](x) - f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega t \cdot g(t) dt$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sin N\omega t \left(\cos \frac{\omega t}{2} \cdot g(t) \right) dt \\ + \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \cos N\omega t \left(\sin \frac{\omega t}{2} \cdot g(t) \right) dt$$

である。ここで、 $g(t)$ が $[-l, l]$ で2乗可積分であるから、

$$\int_{-l}^l \left| \cos \frac{\omega t}{2} \cdot g(t) \right|^2 dt \leq \int_{-l}^l |g(t)|^2 dt < \infty,$$

$$\int_{-l}^l \left| \sin \frac{\omega t}{2} \cdot g(t) \right|^2 dt \leq \int_{-l}^l |g(t)|^2 dt < \infty$$

となり、 $\cos \frac{\omega t}{2} \cdot g(t)$ 、 $\sin \frac{\omega t}{2} \cdot g(t)$ も $[-l, l]$ で2乗可積分。ゆえに、先に示した系より、

$$\int_{-l}^l \sin N\omega t \left(\cos \frac{\omega t}{2} \cdot g(t) \right) dt \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

$$\int_{-l}^l \cos N\omega t \left(\sin \frac{\omega t}{2} \cdot g(t) \right) dt \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

を得る。よって、

$$s_N[f](x) - f(x) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

□

次に、フーリエ級数が絶対かつ一様収束するための一つの十分条件を示しておく。

定義 2.1. (ヘルダー連続性) $\alpha > 0$ とし、 f を \mathbf{R} 上の関数とする。 f が \mathbf{R} 上で一様に α 次ヘルダー連続であるとは、ある正定数 M が存在し、すべての $x, y \in \mathbf{R}$ に対して、

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \quad (2.15)$$

が成り立つことである。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta = (\varepsilon/M)^{1/\alpha}$ とすれば、 $|x - a| < \delta$ を満たすすべての x に対して

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|^\alpha < \varepsilon$$

が成り立つから、一様に α 次ヘルダー連続な関数は連続関数である。さらに次のことが成り立つ。

命題 2.2. f を周期 $2l$ の関数とする。

(1) $0 < \alpha < \beta \leq 1$ とする。 f が一様に β 次ヘルダー連続ならば、一様に α 次ヘルダー連続である。

(2) f が C^1 級関数ならば、一様に1次ヘルダー連続である。

(3) f が一様に α 次ヘルダー連続な関数とする。 $\alpha > 1/2$ であれば、 f はすべての点 x で条件 (2.7) を満たす。

証明. (1) f が周期 $2l$ であることから, 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して, ある $x', y' \in [-l, l)$ が存在して,

$$f(x) = f(x'), \quad f(y) = f(y'), \quad |x' - y'| \leq |x - y|$$

を満たす. また, $x', y' \in [-l, l)$ に対して,

$$\frac{|x' - y'|}{2l} \leq 1$$

であるから,

$$\left(\frac{|x' - y'|}{2l}\right)^\beta \leq \left(\frac{|x' - y'|}{2l}\right)^\alpha$$

が成り立ち, したがって,

$$|x' - y'|^\beta \leq (2l)^{\beta-\alpha} |x' - y'|^\alpha$$

を得る. 以上より,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x') - f(y')| \leq M|x' - y'|^\beta \\ &\leq (2l)^{\beta-\alpha} M|x' - y'|^\alpha \leq (2l)^{\beta-\alpha} M|x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

よって示された.

(2) f は C^1 級関数より, f' は $[-l, l]$ 上で連続であるから有界関数である. したがって, 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して, 積分の平均値の定理より, ある $c \in \mathbf{R}$ が存在して,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \\ &= |f'(c)| |x - y| \\ &\leq \sup_{t \in [-l, l]} |f'(t)| |x - y|. \end{aligned}$$

以上より結論を得る.

(3) $\alpha > 1/2$ のとき, 十分小さい $\delta > 0$ に対し, 積分の収束性 $\int_0^\delta h^{2(\alpha-1)} dh < \infty$ より,

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^\delta \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|^2 dh &\leq \int_{-\delta}^\delta M^2 |h|^{2(\alpha-1)} dh \\ &= 2 \int_0^\delta M^2 h^{2(\alpha-1)} dh < \infty. \end{aligned}$$

□

ここで, 次の定理を証明するために必要となる**優級数定理**を示しておく.

定理 2.2. (優級数定理) I 上で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し, 次の (i), (ii) を満たす定数 a_n ($n = 1, 2, \dots$) が存在すれば, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ はある関数に一様収束する.

- (i) $|f_n(x)| \leq a_n \quad (x \in I),$
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

証明. ε を任意に与えられた正の数とする. このとき, (ii) より, ある $N > 0$ が存在し,

$$m, n > N \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$$

を満たす. ゆえに,

$$\begin{aligned} m, n > N \Rightarrow |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| \\ \leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \dots + |f_n(x)| \\ \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n < \varepsilon \end{aligned}$$

となるので, 題意は示された. \square

定理 2.3. $1/2 < \alpha \leq 1$ とする. f が \mathbf{R} 上の周期 $2l$ の一様に α 次ヘルダー連続な関数ならば, $s_N[f](x)$ は $f(x)$ に \mathbf{R} 上で一様絶対収束している.

証明. 優級数定理より

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty$$

を示せば, 定理が証明される. $\varphi(x) = f(x+h) - f(x-h)$ とおくと,

$$\begin{aligned} c_k(\varphi) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \{e^{-ik\omega(x-h)} - e^{-ik\omega(x+h)}\} dx \\ &= c_k(f)[e^{ik\omega h} - e^{-ik\omega h}] = 2ic_k(f) \sin k\omega h. \end{aligned}$$

ベッセルの不等式と (2.15) より,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |2ic_k(f) \sin k\omega h|^2 \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |\varphi(x)|^2 dx \leq 4^\alpha M^2 |h|^{2\alpha}.$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ とする. $2^n \leq |k| \leq 2^{n+1}$ に対して, $h = 2^{-n-2}l$ を考えると, $\pi/4 \leq |k\omega h| \leq \pi/2$ であるから, $|\sin k\omega h| \geq 1/2$ である. ゆえに,

$$\sum_{2^n \leq |k| \leq 2^{n+1}} |c_k(f)|^2 \leq M^2 l^{2\alpha} 2^{-2n\alpha}.$$

ここで, $M_1^2 = M^2 l^{2\alpha}$ とおく. すると, シュヴァルツの不等式より,

$$\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)| \leq \left(\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} 1^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq M_1 2^{-(\alpha-1/2)n}.$$

よって,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| \leq M_1 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(\alpha-1/2)n} + |c_0(f)| < \infty.$$

□

2.3 平均 2 乗誤差

いままでは、ヘルダー連続性といった、かなり強い連続性をもつ関数のフーリエ級数展開について述べてきた。ここでは、連続関数あるいはもっと弱い不連続関数のフーリエ級数展開について考えていく。

定義 2.2. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ が周期 $2l$ の関数で積分可能であるとき、形式的に、

$$\varepsilon_N[f] = \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x) - s_N[f](x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

を考える。このとき、 $\varepsilon_N[f]$ を f と $s_N[f]$ との平均 2 乗誤差という。

$\varepsilon_N[f] \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) となるとき、これは $|f - s_N[f]|^2$ のグラフの面積が 0 に収束することを意味している。したがって、 f と $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N[f]$ はだいたい同じ形のグラフをもつことがわかる。 $\varepsilon_N[f] \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) となることを、 f は L^2 の意味でフーリエ級数展開可能、あるいはフーリエ級数は f に L^2 収束するという。

L^2 の意味でのフーリエ級数展開に関して次が成り立つ。

定理 2.4. f は \mathbf{R} 上の周期 $2l$ の関数で、 $[-l, l)$ 上で 2 乗可積分であるとする。このとき、

$$\varepsilon_N[f] \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

である。

この定理の証明には、いくつか補題が必要になる。まずはそれを見ておく。

ここで、本論文でよく使う記号を定義しておく。

$E \subset \mathbf{R}^d$ をルベグ可測集合とする。 E 上の \mathbf{C} または $[-\infty, \infty]$ に値をとるルベグ可測関数 $f(x)$ に対して、次のような量を定める：

$1 \leq p < \infty$ に対して、

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

また $p = \infty$ に対しては、

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \inf\{\lambda : \lambda > 0, m_d(\{|f| > \lambda\}) = 0\}.$$

ただし、ここで $m_d(E)$ は E の d 次元ルベーグ測度を表す。

さて、 $L(E)$ を E 上の \mathbf{C} または \mathbf{R} に値をとるルベーグ可測関数全体のなす集合とする。そして、 $1 \leq p \leq \infty$ に対して、

$$L^p(E) = \{f : f \in L(E), \|f\|_{L^p(E)} < \infty\}$$

と表すことにする。

命題 2.3. $f \in L^\infty(E)$ ならば、

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(E)} \quad \text{a.e. } x \in E.$$

証明. $m_d(\{|f| > \|f\|_{L^\infty(E)}\}) > 0$ と仮定し、矛盾を導く。

$$A_n = \left\{ x : x \in E, |f(x)| > \|f\|_{L^\infty(E)} + \frac{1}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$A = \{x : x \in E, |f(x)| > \|f\|_{L^\infty(E)}\}$$

とおく。 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $A = \bigcup_n A_n$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} m_d(A_n) = m_d(A) > 0$ 。したがって、十分大きな n に対して $m_d(A_n) > 0$ となる。このことから、

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \inf\{\lambda : \lambda > 0, m_d(\{|f| > \lambda\}) = 0\} \geq \|f\|_{L^\infty(E)} + \frac{1}{n}$$

でなければならない。これは矛盾である。 □

補題 2.2. $a \geq 0, b \geq 0$ のとき、

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b.$$

この補題は、相加平均・相乗平均の不等式の一般化になっている。

証明. $b = 0$ ならば明らかなので、 $b > 0$ のときを考える。このとき $t = a/b$ とすると、示すべき不等式は、

$$t^{1/p} \leq \frac{1}{p} t + \frac{1}{q}$$

となる。 t の関数 $f(t) = t^{1/p} - \frac{1}{p} t - \frac{1}{q}$ は $t = 1$ のとき最大値 0 をもつから、等号成立は $t = 1$ のときで、この不等式が成り立つ。 □

命題 2.4. (ヘルダーの不等式) $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ が

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.16}$$

を満たしているとする (ただし, $1/\infty = 0$ と定める). このとき, $f \in L^p(E)$ と $g \in L^q(E)$ に対して,

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^q(E)}$$

が成り立つ.

(2.16) の関係を p, q が満たすとき, q を p の共役指数, あるいは p を q の共役指数という. この不等式はシュバルツの不等式の一般化である.

証明. $p = 1, q = \infty$ の場合, 命題 2.3 より $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(E)}$ a.e. $x \in E$ であるから,

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leq \int_E |f(x)|dx\|g\|_{L^\infty(E)} = \|f\|_{L^1(E)}\|g\|_{L^\infty(E)}$$

である. $p = \infty, q = 1$ の場合も同様である. $1 < p, q < \infty$ の場合を示す. $\|f\|_{L^p(E)} = 0$ または $\|g\|_{L^q(E)} = 0$ の場合は, $f(x) = 0$ a.e. $x \in E$, あるいは $g(x) = 0$ a.e. $x \in E$ であるから, 不等式は明らかに成り立つ. よって, $\|f\|_{L^p(E)} > 0, \|g\|_{L^q(E)} > 0$ の場合を示せばよい.

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(E)}}, G(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(E)}}$$

とおく. ここで, 補題 2.2 において, $a = |F(x)|^p, b = |G(x)|^q$ とすると,

$$|F(x)G(x)| \leq \frac{1}{p}|F(x)|^p + \frac{1}{q}|G(x)|^q$$

が成り立つ. 両辺を積分すると,

$$\int_E |F(x)G(x)| \leq \frac{1}{p} \int_E |F(x)|^p + \frac{1}{q} \int_E |G(x)|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

となり, これより,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^q(E)}} \int_E |f(x)g(x)|dx \leq 1$$

を得る. □

命題 2.5. (ミンコフスキーの不等式) $1 \leq p \leq \infty$ とする. $f, g \in L^p(E)$ ならば, $f + g \in L^p(E)$ であり,

$$\|f + g\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}.$$

証明. $p = 1$ の場合は $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ より明らか. $1 < p < \infty$ の場合,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

が成り立つ. 実際, $|f(x)| \leq |g(x)|$ の場合,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p|g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

が成り立つ. また $|f(x)| \leq |g(x)|$ の場合も同様. このことから, $f + g \in L^p(E)$ を得る. さて,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)|f(x) + g(x)|^{p-1}$$

であるから, q を p の共役指数とすると, $q(p-1) = p$ およびヘルダーの不等式より,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p(E)}^p &\leq \int_E |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_E |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\ &\leq \|f\|_{L^p(E)} \| |f + g|^{p-1} \|_{L^q(E)} + \|g\|_{L^p(E)} \| |f + g|^{p-1} \|_{L^q(E)} \\ &= (\|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}) \|f + g\|_{L^p(E)}^{q/p}. \end{aligned}$$

すでに示したように, $\|f + g\|_{L^p(E)} < \infty$ であるから, $\|f + g\|_{L^p(E)} > 0$ の場合, 両辺を $\|f + g\|_{L^p(E)}^{p/q}$ で割って,

$$\|f + g\|_{L^p(E)} = \|f + g\|_{L^p(E)}^{p-p/q} \leq \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}$$

を得る. $\|f + g\|_{L^p(E)} = 0$ の場合, 命題は明らか. 最後に $p = \infty$ の場合を示す. $t = \|f\|_{L^\infty(E)} + \|g\|_{L^\infty(E)}$ とおく. $t = 0$ の場合は $f(x) = 0$ a.e. $x \in E$ より不等式は明らかであるから, $t > 0$ の場合を考える. このとき,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq t \quad \text{a.e. } x \in E$$

であるから, $m_d(\{|f + g| > t\}) = 0$ となる. したがって, $\|f + g\|_\infty \leq t$ を得る. \square

以上の準備のもと定理の証明をはじめ.

定理 2.4 の証明. まず, 記号をみやすくするために,

$$\|f\|_{L^2([-l,l])} = \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

とおく. このとき, ミンコフスキーの不等式より,

$$\|f + g\|_{L^2([-l,l])} \leq \|f\|_{L^2([-l,l])} + \|g\|_{L^2([-l,l])}$$

が成り立つ。ルベグ積分論より任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次の (2.17) を満たす $g \in C([-l, l])$ (ここで $C([a, b])$ は $[a, b]$ 上の複素数値連続関数全体のなす集合を表す) が存在する：

$$g(-l) = g(l) = 0, \quad \|f - g\|_{L^2([-l, l])} < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (2.17)$$

さらに、この g を周期 $2l$ の C^∞ 関数で、

$$\sup_{t \in [-l, l]} |g(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (2.18)$$

と近似できることを証明する。

$G(e^{i\pi t/l}) = g(t)$ とおく。 $g(t)$ は連続関数より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$|t - a| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(a)| < \varepsilon$$

を満たす。ここで、 $\delta' = 2 \sin\{\pi(1 - \delta/2l)\}$ ととれば、

$$|z(t) - z(a)| < \delta' \Rightarrow |G(e^{i\pi t/l}) - G(e^{i\pi a/l})| = |g(t) - g(a)| < \varepsilon$$

を得る。よって、(2.17) より、 G は単位円周 $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ 上の連続関数になる。

$\mathcal{P}(\mathbf{T})$ を

$$\mathcal{P}(\mathbf{T}) = \{F | \mathbf{T} : F \text{ は } \mathbf{C} \text{ 上の複素係数の多項式}\}$$

とおく。ここで $F|_{\mathbf{T}}$ は F を \mathbf{T} 上の関数として考えたものである。後の 1.4 節の系 2.4 より、ある $P \in \mathcal{P}(\mathbf{T})$ で、

$$\sup_{z \in \mathbf{T}} |G(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (2.19)$$

となるものが存在する。いま、(2.19) の P に対して $p(t) = P(e^{i\pi t/l})$ とおけば、 p は \mathbf{R} 上の周期 $2l$ の C^∞ 関数になっていて、しかも (2.18) を満たしている。

さて、以上の準備のもとで定理を証明する。(2.18) より、

$$\begin{aligned} \|g - p\|_{L^2([-l, l])} &\leq \left\{ \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left(\sup_{t \in [-l, l]} |g(t) - p(t)| \right)^2 dt \right\}^{1/2} \\ &= \sup_{t \in [-l, l]} |g(t) - p(t)| \cdot \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l dt \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{8} \end{aligned} \quad (2.20)$$

である。さて、 p は C^∞ 級より、一様に 1 次ヘルダー連続。よって、十分大きく N をとれば、

$$\|p - s_N[p]\|_{L^2([-l, l])} \leq \sup_{t \in [-l, l]} |p(t) - s_N[p](t)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (2.21)$$

とできる.

次に, $\|s_N[f] - s_N[p]\|_{L^2([-l,l])}$ の計算をしておく :

$$\begin{aligned} \|s_N[f] - s_N[p]\|_{L^2([-l,l])}^2 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left| \sum_{k=-N}^N \{c_k(f) - c_k(p)\} e^{ik\omega t} \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left(\sum_{k=-N}^N \{c_k(f) - c_k(p)\} e^{ik\omega t} \right) \overline{\left(\sum_{k=-N}^N \{c_k(f) - c_k(p)\} e^{ik\omega t} \right)} dt \\ &= \sum_{k=-N}^N |c_k(f) - c_k(p)|^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(f - p)|^2. \end{aligned}$$

ここでベッセルの不等式を使えば,

$$\sum_{k=-N}^N |c_k(f - p)|^2 \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f - p|^2 dt = \|f - p\|_{L^2([-l,l])}^2.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \|s_N[f] - s_N[p]\|_{L^2([-l,l])} &\leq \|f - p\|_{L^2([-l,l])} \\ &= \|(f - g) + (g - p)\|_{L^2([-l,l])} \\ &\leq \|f - g\|_{L^2([-l,l])} + \|g - p\|_{L^2([-l,l])} \\ &< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned} \tag{2.22}$$

である.

以上の (2.17), (2.20), (2.21), (2.22) を使えば

$$\begin{aligned} \|f - s_N[f]\|_{L^2([-l,l])} &= \|(f - g) + (g - p) + (p - s_N[p]) + (s_N[p] - s_N[f])\|_{L^2([-l,l])} \\ &\leq \|f - g\|_{L^2([-l,l])} + \|g - p\|_{L^2([-l,l])} + \|p - s_N[p]\|_{L^2([-l,l])} \\ &\quad + \|s_N[p] - s_N[f]\|_{L^2([-l,l])} \\ &< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \end{aligned}$$

を得る. □

この定理の系として, ベッセルの不等式をより精密な形にできる.

系 2.2. (パーセヴァルの等式) f は \mathbf{R} 上の周期 $2l$ の関数で, $[-l, l]$ 上で 2 乗可積分であるとする. このとき, 次式が成り立つ:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx.$$

証明. ベッセルの不等式の証明から,

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 = \varepsilon_N[f]^2$$

であり, 定理 2.4 より $\varepsilon_N[f] \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) である. □

2.4 補足

ここでは、章内の証明に使った定理を記しておく。証明については「フーリエ解析と関数解析学」[新井], 「ルベーグ積分入門」[伊藤] 参照。

Σ を \mathbf{R}^d 内の二点以上を含むコンパクト集合とし、 $C(\Sigma)$ により、 Σ 上の複素数値連続関数全体のなす集合、 $C_{\mathbf{R}}(\Sigma)$ により Σ 上の実数値連続関数全体のなす集合を表すことにする。 $f \in C(\Sigma)$ に対して $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Sigma} |f(x)|$ と表すことにする。

定理 2.5. (ワイエルシュトラスの多項式近似定理) Σ が有限区間 $[a, b]$ であるとする。このとき、 $f \in C_{\mathbf{R}}([a, b])$ に対して、ある実係数多項式の列 $\{p_n\}$ で $\|p_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なるものが存在する。

系 2.3. $\Sigma = [-a, a]$ とし、 $h(x) = |x|$ とする。このとき、ある実係数の多項式 p_n で、 $p_n = 0$ かつ $\|p_n - h\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となるものが存在する。

定義 2.3. $C(\Sigma) \supset A$ が Σ の点を分離する $C(\Sigma)$ の部分環であるとは、次の (i), (ii), (iii) を満たすことである：

(i) $f, g \in A$ ならば $f + g, fg, \alpha f \in A$ ($\alpha \in \mathbf{C}$) となる。

(ii) $1 \in A$.

(iii) 任意の $x, y \in \Sigma$ ($x \neq y$) に対してある $f \in A$ が存在して、 $f(x) \neq f(y)$ となる。

また、 $A \subset C_{\mathbf{R}}(\Sigma)$ が Σ の点を分離する部分環であるとは、上記の (i) の条件の $\alpha \in \mathbf{C}$ を $\alpha \in \mathbf{R}$ に置き換えたものとする。

このような点を分離する部分環 A に対して、

$$[A] = \left\{ f \in C(\Sigma) : \begin{array}{l} \text{ある } f_j \in A \ (j = 1, 2, \dots) \text{ が存在し,} \\ \|f - f_j\|_{\infty} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\}$$

とおく。 $A \subset C_{\mathbf{R}}(\Sigma)$ のときには、

$$[A]_{\mathbf{R}} = \left\{ f \in C_{\mathbf{R}}(\Sigma) : \begin{array}{l} \text{ある } f_j \in A \ (j = 1, 2, \dots) \text{ が存在し,} \\ \|f - f_j\|_{\infty} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\}$$

とする。

定理 2.6. (ストーン・ワイエルシュトラスの定理 (実数形)) A を Σ の点を分離する $C_{\mathbf{R}}(\Sigma)$ の部分環とする。このとき、 $C_{\mathbf{R}}(\Sigma) = [A]_{\mathbf{R}}$ である。

定理 2.7. (ストーン・ワイエルシュトラスの定理 (複素形)) A を Σ の点を分離する $C(\Sigma)$ の部分環とする. さらに,

$$(iv) f \in A \text{ ならば } \bar{f} \in A,$$

を満たすとする. このとき, $[A] = C(\Sigma)$ である.

系 2.4. 任意の $f \in C(\Sigma)$ に対して, ある $p_n \in \mathcal{P}(\Sigma)$ ($n = 1, 2, \dots$) で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Sigma} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

を満たすものが存在する.

3 一般化フーリエ級数

3.1 フーリエ級数と線形代数

本節では, 何か新しい関数系を考えて, これが関数を記述できるかどうかを調べる統一的な方法を述べていく. そのためにまず, フーリエ級数の理論が線形代数と類似した部分をかかなりもっていることをみておく. フーリエ級数について, 前節の内容を要約すれば, 繰り返しになるが, 次のようになる.

$$L^2(-l, l) = \left\{ f : \begin{array}{l} f \text{ は } \mathbf{R} \text{ 上の周期 } 2l \text{ のルベグ可測関数で,} \\ \|f\|_{L^2(-l, l)} = \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \end{array} \right\}$$

とおき, $f \in L^2(-l, l)$ に対して,

$$c_k(f) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ik\omega x} dx \quad \left(k \in \mathbf{Z}, \omega = \frac{\pi}{l} \right)$$

とおく. f はフーリエ部分和 $s_N[f](x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\omega x}$ により次の意味で近似される:

$$\|f - s_N[f]\|_{L^2(-l, l)} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (3.1)$$

この証明において, 重要であったことのひとつは,

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{ij\omega x} e^{-ik\omega x} dx = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

ということであった.

さて、線形代数では、次のようなことがわかっている： V を n 次元ベクトル空間とし、 V に内積 (\cdot, \cdot) が定義されているものとする。 $\{e_j\}_{j=1}^n$ を V のある正規直交基底とする。すなわち、 e_1, \dots, e_n は V の基底で、

$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

を満たすものである。このとき、任意の元 $x \in V$ は、 $\{e_j\}_{j=1}^n$ により、

$$x = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

と書くことができる。線形代数のこの話とフーリエ級数展開との間には大きな類似性がある。実際、 $f, g \in L^2(-l, l)$ に対して、

$$(f, g)_{L^2(-l, l)} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \overline{g(x)} dx$$

とおき、 $E_j(x) = e^{ij\omega x}$ とおく。すると、

$$(E_j, E_k)_{L^2(-l, l)} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

であり、

$$s_N[f] = \sum_{j=-N}^N (f, E_j)_{L^2(-l, l)} E_j$$

と書くことができる。したがって、(3.1) は

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (f, E_j)_{L^2(-l, l)} E_j$$

と表すことができる。結局、おおざっぱに言って、フーリエ級数展開は、 $L^2(-l, l)$ の内積 $(\cdot, \cdot)_{L^2(-l, l)}$ に関する正規直交基底 $\{E_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ による表示であると考えることができる。

有限次元ベクトル空間で正規直交基底が何組もとることができたように、 $\{E_j\}$ だけが $L^2(-l, l)$ の正規直交基底ではなく、いろいろなものがある。そういったものを統一的にとり扱うため、以下に無限次元ベクトル空間に関する線形代数を考える。

3.2 内積空間と基底

ベクトル空間の定義からはじめる。

定義 3.1. \mathbf{K} によって, \mathbf{R} または \mathbf{C} を表すことにする. 集合 X が, \mathbf{K} 上のベクトル空間 (あるいは線形空間) とは, X の任意の元 x, y に対して和とよばれる演算 $x + y$ が定義され, また X の任意の元 x と \mathbf{K} の任意の元 α に対してスカラー積とよばれる演算 αx が定義され, 次の (i)-(vii) の条件を満たすことである:

- (i) (和の結合則) $(x + y) + z = x + (y + z) \quad (x, y, z \in X),$
- (ii) (和の交換則) $x + y = y + x \quad (x, y \in X),$
- (iii) (零元の存在) ある元 $\mathbf{0} \in X$ が存在し, すべての $x \in X$ に対して, $x + \mathbf{0} = x$ となる,
- (iv) (逆元の存在) 任意の $x \in X$ に対して, ある $x' \in X$ が存在し, $x + x' = \mathbf{0}$ となる,
- (v) (分配則) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
 $(\alpha, \beta \in \mathbf{K}, x, y \in X),$
- (vi) (スカラー積の結合則) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{K}, x \in X),$
- (vii) (単位元の存在) $1x = x \quad (x \in X).$

以下では, x の逆元 x' を $-x$ で表すことにする.

次に, 一般のベクトル空間に関する代数的ないくつかの定義を記す.

定義 3.2. (1) (一次結合) $x_1, \dots, x_n \in X$ とする. \mathbf{K} の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ によって $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ と表される X の元を x_1, \dots, x_n の一次結合という.

(2) (一次結合, 一次従属) $x_1, x_2, \dots \in X$ が一次独立であるとは, x_1, x_2, \dots の中から任意に有限個の元 $x_{i(1)}, \dots, x_{i(n)}$ をとってきたとき, その一次結合 $\alpha_1 x_{i(1)} + \dots + \alpha_n x_{i(n)}$ が $\mathbf{0}$ になるのは $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ に限ることである. 一次独立でないことを一次従属という.

(3) (部分空間) X の部分集合 M が X の部分空間であるとは, M の任意の元 x と y の一次結合が M の元になることである.

(4) (生成) E を X の部分集合とする. E の任意の有限個の元の一次結合全体からなる集合を $\text{span}(E)$ と表す ($\text{span}(E)$ は X の部分空間になっている).

次にベクトル空間 X に内積を定義する. まず, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ の場合からはじめる.

定義 3.3. X を \mathbf{C} 上のベクトル空間とする. X の任意の二つの元 u, v に対し, 複素数 (u, v) が対応していて, 次の条件 (i)-(iii) を満たすとき, (u, v) を u と v の内積という:

- (i) (正值性) $(u, u) \geq 0 \quad (u \in X); \quad (u, u) = 0 \iff u = 0,$
- (ii) (共役対称性) $(u, v) = \overline{(v, u)} \quad (u, v \in X; \overline{\quad}$ は複素共役を表す),

$$(iii) \text{ (準双線形性)} \quad (\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w) \\ (\alpha, \beta \in \mathbf{C}; u, v, w \in X).$$

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ の場合は次のように定義する.

定義 3.4. X を \mathbf{R} 上のベクトル空間とする. X の任意の二つの元 u, v に対し, 実数 (u, v) が対応していて, 上の条件 (i) と次の (ii)', (iii)' を満たすとき, (u, v) を u と v の内積という:

$$(ii)' \quad (u, v) = (v, u),$$

$$(iii)' \quad (\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}; u, v, w \in X).$$

定義 3.5. \mathbf{K} 上のベクトル空間 X に内積 (\cdot, \cdot) が定義されているとき, 組 $(X, (\cdot, \cdot))$ を内積空間という.

例 3.1. $L^2(-l, l)$ を本章のはじめに定義した集合とする. $L^2(-l, l) \ni f, g$, および $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して, 和 $f + g$ とスカラー積 αf を,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

により定義する. ミンコフスキーの不等式より,

$$\left(\int_{-l}^l |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{-l}^l |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

であり, また,

$$\left(\int_{-l}^l |\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = |\alpha| \left(\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

であるから, $f + g, \alpha f \in L^2(-l, l)$ を得る. これらの演算により $L^2(-l, l)$ は \mathbf{C} 上のベクトル空間になっている.

$f, g \in L^2(-l, l)$ に対して, シュヴァルツの不等式より,

$$\int_{-l}^l |f(x)\overline{g(x)}| dx \leq \left(\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-l}^l |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

であるから,

$$(f, g)_{L^2(-l, l)} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x)\overline{g(x)} dx$$

を複素数として定義することができる. これがベクトル空間 $L^2(-l, l)$ に内積を定めることを証明する. 内積の公理のうち,

$$(f, f)_{L^2(-l, l)} = 0 \iff f = 0 \quad (*)$$

以外はほとんど明らかであるが, (*) を示すには, 少し議論が必要になる. まず,

$f = g$ の解釈であるが、これから先 $L^2(-l, l)$ における二つの元 f, g が等しい、すなわち $f = g$ であるということを、ルベーク測度に関して、ほとんどすべての $x \in (-l, l]$ に対して $f(x) = g(x)$ で成り立つことと定義する。すなわち、

$$f(x) = g(x) \text{ a.e. } x \in (-l, l].$$

この定義によると、

$$h_1(x) = 1 \quad (x \in (-l, l]),$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & (x \in (-l, l] \cap \mathbf{Q}) \\ 1 & (x \in (-l, l] \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}, \quad \mathbf{Q} = \{\text{有理数全体}\}$$

は異なった関数であるが、

$$m(\{x \in (-l, l] : h_1(x) \neq h_2(x)\}) = m((-l, l] \cap \mathbf{Q}) = 0$$

であるから、 $h_1 = h_2$ となってしまうが、内積の定義について問題はおこらない。なぜならば、 $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(-l, l)$ がわれわれの意味で $f_1 = g_1, f_2 = g_2$ を満たしていれば $f_1(x)\overline{g_1(x)} = f_2(x)\overline{g_2(x)}$ が m に関しほとんどすべての x に対して成り立っているので、

$$(f_1, g_1)_{L^2(-l, l)} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f_1(x)\overline{g_1(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f_2(x)\overline{g_2(x)} dx = (f_2, g_2)_{L^2(-l, l)}$$

となるからである。

この定義のもとに、(*) が成り立つ。実際

$$(f, f)_{L^2(-l, l)} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx$$

であるから、 $|f(x)|^2 = 0$ a.e. $x \in (-l, l]$ 、すなわち $f(x) = 0$ a.e. $x \in (-l, l]$ である。このことを証明する。また、 \mathfrak{M}_d により d 次元ルベーク可測集合を表すものとする。

定理 3.1. $f(x)$ を $E \in \mathfrak{M}_d$ 上のルベーク可測な関数で、

$$\int_E |f(x)| dx = 0$$

が成り立っているとす。このとき、 $f(x) = 0$ a.e. $x \in E$ である。

この定理を証明するために次の不等式を証明する。この不等式自身非常に有用なものである。

補題 3.1. (チェビシエフの不等式) $f(x)$ を $E \in \mathfrak{M}_d$ 上のルベーク積分可能な関数とする。このとき、任意の $\lambda > 0$ に対して、

$$m_d(\{x : x \in E, |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E |f(x)| dx.$$

証明. $E_0 = \{x : x \in E, |f(x)| > \lambda\}$ とおくと, $E_0 \subset E$ より,

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)| dx &\geq \int_{E_0} |f(x)| dx \geq \lambda \int_{E_0} dx = \lambda m_d(E_0) \\ &= \lambda m_d(\{x : x \in E, |f(x)| > \lambda\})\end{aligned}$$

を得る. □

定理 3.1 の証明.

$$A_n = \left\{ x : x \in E, |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく. チェビシエフの不等式より,

$$m_d(A_n) \leq n \int_E |f(x)| dx = 0$$

が成り立つ. したがって, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと, $A = \{x : x \in E, |f(x)| > 0\}$ であるから,

$$m_d(\{x : x \in E, |f(x)| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_d(A_n) = 0$$

が成り立つ. □

以上の議論から, $(L^2(-l, l), (\cdot, \cdot)_{L^2(-l, l)})$ が \mathbf{C} 上の内積空間になっていることがわかる.

話を一般の \mathbf{K} 上の内積空間 $(X, (\cdot, \cdot))$ に戻す. 次に定義する量は X の元の大きさを測るのに使われる.

定義 3.6. $u \in X$ に対して, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ とおく. $\|\cdot\|$ を内積から導かれるノルムという.

例 3.2. $X = \mathbf{C}^n$ とし, $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{C}^n$ に対して,

$$(u, v) = u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_n \bar{v}_n$$

とする. このとき, $(X, (\cdot, \cdot))$ は内積空間で,

$$\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \quad (= |u|)$$

となっている.

後で必要になるので, 内積から導かれるノルムの性質をいくつかあげておく.

定理 3.2. (1) (正値性) $\|u\| \geq 0$; $\|u\| = 0 \iff u = 0$ ($u \in X$).

(2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ ($\alpha \in \mathbf{K}$), $u \in X$.

(3) (三角不等式) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ($u, v \in X$).

(4) (シュヴァルツの不等式) $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$ ($u, v \in X$).

証明. (4) シュヴァルツの不等式から示す. $(u, v) \neq 0$ とし, $\lambda \in \mathbf{R}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u + \lambda(u, v)v, u + \lambda(u, v)v) \\ &= \|u\|^2 + 2\lambda|(u, v)|^2 + \lambda^2|(u, v)|^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

である. これを λ の 2 次式とみると, “判別式 ≤ 0 ” でなければならぬ. したがって,

$$|(u, v)|^4 - |(u, v)|^2\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

である. これより, $|(u, v)|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ を得る.

(3) 次に, 三角不等式を示す. これはシュヴァルツの不等式を使って証明される:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(u, v) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \leq (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

(1), (2) は内積の定義から明らか. □

内積空間に基底および正規直交基底を定義する. まず, 有限次元ベクトル空間の場合を確認しておく.

n 次元ベクトル空間 V の一次独立な元の組 $\{e_1, \dots, e_n\}$ が基底をなすとは, 任意の $u \in V$ に対して, ある $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ が存在し,

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

となることである. また, 特に V の内積 (\cdot, \cdot) に関して,

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとき, $\{e_1, \dots, e_n\}$ を **正規直交基底** という.

一般の内積空間 $(X, (\cdot, \cdot))$ では, 次のように定義する.

定義 3.7. $\mathbf{Z}^d = \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}$ (\mathbf{Z} の d 個の直積) とする. $j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbf{Z}^d$ に対して, $|j| = |j_1| + \dots + |j_d|$ とし, $j = (j_1, \dots, j_d)$, $k = (k_1, \dots, k_d)$ に対して $j = k$ を $j_i = k_i$ ($i = 1, \dots, d$) とする. またそうでないとき $j \neq k$ と表す.

$\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ とする. X の元の族 $\{e_k\}_{k \in \Lambda}$ が X の **基底** をなすとは,

(i) $\{e_k\}_{k \in \Lambda}$ から任意に有限個の元 $\{e_{i(1)}, \dots, e_{i(n)}\}$ をとると, それは一次独立である,

(ii) 任意の $u \in X$ に対して, ある $\alpha_k \in \mathbf{K}$ ($k \in \Lambda$) が存在し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{k \in \Lambda, |k| \leq N} \alpha_k e_k \right\| = 0,$$

を満たすことである. さらに,

(iii)

$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & (j = k), \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

を満たすとき, $\{e_k\}_{k \in \Lambda}$ を正規直交基底という.

例 3.3. $\{e^{ik\omega x}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ は $L^2(-l, l)$ の正規直交基底になっている.

3.3 ヒルベルト空間

有限次元の場合と異なり, 一般の内積空間では, 基底の定義の中に「収束」という代数的でない概念が使われている. したがって, 内積空間上で議論を進める場合, 線形代数では現れなかった「収束」に関する議論もしなければならない.

内積空間の公理系に位相的な公理系を加えたものが, 次にあげるヒルベルト空間である.

定義 3.8. $(X, (\cdot, \cdot))$ を \mathbf{K} 上の内積空間とする. X が次の条件 (*) を満たすとき, X を \mathbf{K} 上のヒルベルト空間という.

(*) $u_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) が,

$$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

を満たすとき, ある $u \in X$ が存在して,

$$\|u - u_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(3.2) を満たす X の元の列 $\{u_n\}$ をコーシー列という. 以下, 本論文では記述を簡略化するため, $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) のことを $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, あるいは $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$) と表す.

命題 3.1. X をヒルベルト空間とする. $\{u_n\}$ をコーシー列とすると, $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる u がただ一つ存在する.

証明. u の存在はヒルベルト空間の公理より保証されているから, 一意性を示す. $\|u_n - v\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす $v \in X$ を考える. このとき,

$$\|u - v\| \leq \|u - u_n\| + \|u_n - v\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, $u = v$ である. □

以下に示すように、 $L^2(-l, l)$ はヒルベルト空間になっている。

定理 3.3. $(L^2(-l, l), (\cdot, \cdot)_{L^2(-l, l)})$ は \mathbf{C} 上のヒルベルト空間である。

証明. 条件 (*) を示せばよい。

仮定より、適当に $n_1 < n_2 < \dots \rightarrow +\infty$ なる番号を選べば、 $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^2(-l, l)} < 1/2^k$ とできる。

$$F_N(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^N |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|$$

とおくと、 $F_N(x) \leq F_{N+1}(x) \leq \dots$ であるから、 $F(x)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x)^2 (\leq +\infty)$ が存在する。ここで、単調収束定理より、

$$\int_{-l}^l F(x)^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-l}^l F_N(x)^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \|F_N\|_{L^2(-l, l)}^2.$$

また、三角不等式より、

$$\|F_N\|_{L^2(-l, l)} \leq \|f_{n_1}\|_{L^2(-l, l)} + \sum_{k=1}^N \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^2(-l, l)} = \|f_{n_1}\|_{L^2(-l, l)} + (1 - 2^{-N}).$$

ゆえに、

$$\int_{-l}^l F(x)^2 dx \leq (1 + \|f_{n_1}\|_{L^2(-l, l)})^2 < \infty.$$

したがって、ほとんどすべての $x \in (-l, l)$ に対して、 $F(x)^2 < \infty$ である。ところで、複素数列は絶対収束していれば収束するので、ほとんどすべての x に対しては、

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x))$$

が存在する。

$$G_N(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^N (f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x))$$

とおくと、

$$|f(x) - G_N(x)| \rightarrow 0, \text{ かつ } |f(x) - G_N(x)| \leq |f(x)| + |G_N(x)| \leq 2F(x)$$

であり、 $F(x)^2 \in L^1(-l, l)$ である。ゆえにルベーグの収束定理により、

$$\int_{-l}^l |f(x) - G_N(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

を得る。 □

定理 3.4. S を集合, \mathcal{B} を S の完全加法族, μ を可測空間 (S, \mathcal{B}) 上の測度とし,

$$L^2(S, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : \begin{array}{l} f \text{ は } S \text{ 上の } \mathcal{B}\text{-可測関数で,} \\ \|f\|_2 = \left(\int_S |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} < \infty \end{array} \right\}$$

とする. このとき, 内積 $(\cdot, \cdot)_2$ を,

$$(f, g)_2 = \int_S f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$$

とし, また,

$$\mu(\{x \in S : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

のとき, $f = g$ と定義する. この定義のもとで $(L^2(S, \mathcal{B}, \mu), (\cdot, \cdot)_2)$ は \mathbb{C} 上のヒルベルト空間になっている.

証明. 先の証明とほとんど同様にして示される. □

後の議論で必要になるので, ヒルベルト空間にいくつかの位相的な概念を導入しておく.

定義 3.9. (1) (開集合) X の部分集合 A が開集合であるとは, 任意の $a \in A$ に対して, ある正数 ε が存在し,

$$B(a, \varepsilon) := \{x \in X : \|x - a\| < \varepsilon\} \subset A$$

が成り立つ集合のことである.

(2) (閉包) X の部分集合 A に対して,

$$\overline{A} = \left\{ u \in X : \begin{array}{l} \text{ある } u_n \in A \ (n = 1, 2, \dots) \text{ が存在し,} \\ \|u_n - u\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \text{ となる.} \end{array} \right\}$$

を A の閉包という. $\overline{M} = M$ のとき, M を閉集合といい, また $\overline{M} = X$ のとき, M は X で稠密であるという. さらに, X の部分空間でありかつ閉集合になっているものを閉部分空間という.

3.4 正規直交基底と一般化フーリエ級数

本節では, フーリエ級数の理論をヒルベルト空間上に一般化する.

定義 3.10. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ とする. 内積空間 $(X, (\cdot, \cdot))$ の元 $\{e_j\}_{j \in \Lambda} \subset X$ が

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}$$

を満たすとき, $\{e_j\}_{j \in \Lambda}$ を X の正規直交系という. ここで, δ_{jk} はクロネッカーのデルタである. すなわち,

$$\delta_{jk} = 1 \ (j = k), \quad \delta_{jk} = 0 \ (j \neq k).$$

次の定理は、一般の正規直交基底に対してフーリエ級数の理論を一般化したものである。

定理 3.5. $(X, (\cdot, \cdot))$ をヒルベルト空間とし, $\{e_j\}_{j \in \Lambda}$ ($\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$) を X の正規直交系とする. このとき, 次の (i)-(v) は互いに同値である.

(i) $\text{span}(\{e_j\}_{j \in \Lambda})$ は X で稠密である.

(ii) (フーリエ級数展開) 任意の $u \in X$ に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{j \in \Lambda, |j| \leq N} (u, e_j) e_j \right\| = 0.$$

したがって, $\{e_j\}_{j \in \Lambda}$ は X の正規直交基底である.

(iii) (パーセヴァルの等式) 任意の $u \in X$ に対して,

$$\|u\|^2 = \sum_{j \in \Lambda} |(u, e_j)|^2.$$

(iv) 任意の $u, u' \in X$ に対して,

$$\sum_{j \in \Lambda} |(u, e_j) \overline{(u', e_j)}| < +\infty, \quad \text{かつ} \quad (u, u') = \sum_{j \in \Lambda} (u, e_j) \overline{(u', e_j)}.$$

(v) 任意の $j \in \Lambda$ に対して, $(u, e_j) = 0$ ならば, $u = 0$.

この定理を証明する前に, ベッセルの不等式を内積空間上で証明しておく.

命題 3.2. (ベッセルの不等式) $(X, (\cdot, \cdot))$ を内積空間とし, $\{e_j\}_{j \in \Lambda}$ ($\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$) を X の正規直交系とする. このとき, 任意の $u \in X$ に対して,

$$\sum_{j \in \Lambda} |(u, e_j)|^2 \leq \|u\|^2.$$

証明. $\Lambda_N = \{j \in \Lambda : |j| \leq N\}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| u - \sum_{j \in \Lambda_N} (u, e_j) e_j \right\|^2 \\ &= \left(u - \sum_{j \in \Lambda_N} (u, e_j) e_j, u - \sum_{j \in \Lambda_N} (u, e_j) e_j \right) \\ &= \|u\|^2 - \sum_{j \in \Lambda_N} (u, (u, e_j) e_j) - \sum_{j \in \Lambda_N} ((u, e_j) e_j, u) + \sum_{j, k \in \Lambda_N} ((u, e_j) e_j, (u, e_k) e_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|u\|^2 - \sum_{j \in \Lambda_N} |(u, e_j)|^2 - \sum_{j \in \Lambda_N} |(u, e_j)|^2 + \sum_{j, k \in \Lambda_N} (u, e_j) \overline{(u, e_k)} (e_j, e_k) \\
&= \|u\|^2 - \sum_{j \in \Lambda_N} |(u, e_j)|^2.
\end{aligned}$$

ゆえに $\sum_{j \in \Lambda_N} |(u, e_j)|^2 \leq \|u\|^2$ である。ここで、 $N \rightarrow \infty$ とすれば、求める不等式を得る。 □

定理 3.5 の証明. $u \in X$ に対して、 $S_N[u] = \sum_{j \in \Lambda_N} (u, e_j) e_j$ とおく。

$$(ii) \implies (iv) \quad (S_N[u], S_N[u']) = \sum_{j, k \in \Lambda_N} ((u, e_j) e_j, (u', e_k) e_k) = \sum_{j \in \Lambda_N} (u, e_j) \overline{(u', e_j)}$$

$$\begin{aligned}
&|(u, u') - (S_N[u], S_N[u'])| \\
&= |(u, u') - (S_N[u], u') + (S_N[u], u') - (S_N[u], S_N[u'])| \\
&\leq |(u - S_N[u], u')| + |(S_N[u], u' - S_N[u'])| \\
&\leq \|u - S_N[u]\| \|u'\| + \|S_N[u]\| \|u' - S_N[u']\|.
\end{aligned}$$

ここで、 $\|S_N[u]\|^2 = \sum_{j \in \Lambda_N} |(u, e_j)|^2 \leq \|u\|^2$ であるから、 $N \rightarrow \infty$ とすれば、

$$(S_N[u], S_N[u']) \rightarrow (u, u')$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\sum_j |(u, e_j)(u', e_j)| &\leq \left(\sum_j |(u, e_j)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j |(u', e_j)|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|u\| \|u'\| < \infty.
\end{aligned}$$

(iv) \implies (iii) $u = u'$ とおけばよい。

(iii) \implies (ii) ベッセルの不等式の証明より、

$$\left\| u - \sum_{j \in \Lambda_N} (u, e_j) e_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j \in \Lambda_N} |(u, e_j)|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

(ii) \implies (v) 仮定より、すべての N に対して $S_N[u] = 0$ であるから、

$$\|u\| = \|u - S_N[u]\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

となり、 $u = 0$.

(v) \implies (ii)

$$\begin{aligned} \|S_{N+n}[u] - S_N[u]\|^2 &= \left(\sum_{k \in \Lambda_{N+n} \setminus \Lambda_N} (u, e_k) e_k, \sum_{k \in \Lambda_{N+n} \setminus \Lambda_N} (u, e_k) e_k \right) \\ &= \sum_{k \in \Lambda_{N+n} \setminus \Lambda_N} |(u, e_k)|^2. \end{aligned}$$

ところが、ベッセルの不等式より $N, n \rightarrow \infty$ のとき、(最右辺) $\rightarrow 0$ である。したがって、ヒルベルト空間の公理より、ある $u' \in X$ が存在し、

$$\|u' - S_N[u]\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

となる。ゆえに、

$$(u', e_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N[u], e_n) = (u, e_n).$$

すなわち、 $(u' - u, e_n) = 0$ である。ここで (v) により $u = u'$ となる。

(ii) \implies (i) 明らか。

(i) \implies (v) $(u, e_n) = 0$ とする。 $\{e_j\}_{j \in \Lambda}$ の有限個の元のある一次結合で表される X の元 u_1, u_2, \dots によって、

$$\|u - u_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

とできる。 $(u, u_n) = 0$ であるから、 $(u, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, u_n) = 0$ を得る。

□

3.5 直交分解定理

次章で必要になるので、ヒルベルト空間における直交分解定理を証明しておく。有限次元ベクトル空間における直交分解定理は線形代数の基本定理のひとつであるが、ここではそれを無限次元の場合に証明する。まず、直交分解の定義をする。

定義 3.11. (直交分解) X_0, X_1, X_2 を X の部分空間とし、 X_0, X_1, X_2 は次の (i), (ii) を満たすとする：

(i) 任意の $u \in X_0$ に対して、ある $u_1 \in X_1$ とある $u_2 \in X_2$ で、

$$u = u_1 + u_2 \tag{3.3}$$

となるものが存在する。また、任意の $u_1 \in X_1, u_2 \in X_2$ に対して $u_1 + u_2 \in X_0$ である。

(ii) 任意の $u_1 \in X_1$ と $u_2 \in X_2$ に対して, $(u_1, u_2) = 0$ となっている.

このとき, X_0 は X_1 と X_2 に直交分解されるといい, $X_0 = X_1 \oplus X_2$ で表す.

二点注意を述べておく.

(1) $X_1 \oplus X_2$ のとき, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ である. なぜならば, $u \in X_1 \cap X_2$ とすると, 定義の (ii) より $\|u\|^2 = (u, u) = 0$ となり, $u = 0$ でなければならないからである.

(2) $u \in X_0$ に対して, 定義の (i) の (3.3) の u_1, u_2 は一意的に存在する. 実際, もし $u = u'_1 + u'_2$ なる $u'_1 \in X_1$ と $u'_2 \in X_2$ が存在するならば, $u_1 + u_2 = u = u'_1 + u'_2$ より,

$$u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2 \in X_1 \cap X_2 = \{0\}.$$

ゆえに, $u_1 = u'_1, u_2 = u'_2$ である.

直交分解定理とは次のものである.

定理 3.6. M を X の閉部分空間とする. このとき, X のある閉部分空間 M' で,

$$X = M \oplus M'$$

となるものが一意的に存在する.

この定理の証明のために, まず, 次の補題から証明する.

補題 3.2. $u, v \in X$ に対して,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

が成り立つ.

証明. (左辺) $= (u + v, u + v) + (u - v, u - v)$
 $= \|u\|^2 + (u, v) + (v, u) + \|v\|^2 + \|u\|^2 - (u, v) - (v, u) + \|v\|^2$
 $=$ (右辺). □

定理 3.6 の証明. M に対して,

$$M' = \{u \in X : \text{任意の } v \in M \text{ に対して, } (u, v) = 0\}$$

とおく. M' は明らかに X の部分空間である. この M' が求める部分空間であることを証明する.

M' が閉集合であること: $u_n \in M'$ ($n = 1, 2, \dots$) で, ある $u \in X$ に対して, $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるとする. このとき, 任意の $v \in M$ に対して,

$$(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v) = 0$$

であるから、 $u \in M'$ である。

以下、直交分解の条件 (i), (ii) を X, M, M' に対して示す。

条件 (ii) の証明： M' の定義から明らかである。

条件 (i) の証明：

任意の $u \in X$ をとる。このとき、 $v \in M$ と $w \in M'$ で $u = v + w$ を満たすようなものを探す。 X が有限次元の内積空間の場合、 v は u から M に下ろした垂線の足とし、 $w = u - v$ とすれば、これが求める分解であることが分かる。ここで垂線の足は u と M との最短距離を与える点であることに注意しておく。このことを一般のヒルベルト空間の設定で考える。まず、 u と M との距離を次のように定義する：

$$d = \inf\{\|u - x\| : x \in M\}.$$

このとき、 $d = \|u - v\|$ となる $v \in M$ が必ず存在することを証明する。 d の定義より、ある $u_n \in M$ が存在し、 $\|u - u_n\| \rightarrow d$ ($n \rightarrow \infty$) であるから、補題 3.2 より、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2}(u_n + u_m) - u \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(u_n - u_m) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\|u_n + u_m - 2u\|^2 + \|u_n - u_m\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|u_n - u\|^2 + \|u_m - u\|^2) \rightarrow d^2 \quad (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $(u_n + u_m)/2 \in M$ であるから、

$$\left\| \frac{1}{2}(u_n + u_m) - u \right\|^2 \geq d^2$$

である。したがって、 $\|(u_n - u_m)/2\|^2 \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) となる。 X の完備性から、ある $v \in X$ で $\|u_n - v\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となるものが存在するが、いま M が閉部分空間であることより、 $v \in M$ であり、さらに

$$\|u - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = d$$

を満たしている。

あとは $w = u - v$ とおき、 $w \in M'$ であることを証明すればよい。そのため、任意の $x \in M$ に対して $(w, x) = 0$ となることを証明する。 $x \neq 0$ の場合を証明すれば十分である。この場合、必要ならば x の代わりに $x/\|x\|$ を考えることにより、 $\|x\| = 1$ と仮定してよい。このとき、次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned} d^2 &= \|w\|^2 = \|w - (w, x)x + (w, x)x\|^2 \\ &= \|w - (w, x)x\|^2 + \|(w, x)x\|^2 + 2\operatorname{Re}(w - (w, x)x, (w, x)x) \\ &= \|w - (w, x)x\|^2 + \|(w, x)x\|^2 \\ &\geq d^2 + |(w, x)|^2. \end{aligned}$$

ゆえに、 $(w, x) = 0$ である。

最後に M' の一意性を証明する。すなわち、

$$X = M \oplus M' = M \oplus M''$$

なる X の閉部分空間 M', M'' が存在するならば、必ず $M' = M''$ となることを証明する。まず、 $u \in M'$ ならば $u = v + v'' \in M \oplus M''$ と直交分解できる。ゆえに、

$$(v, v) = (v, u - v'') = 0$$

であるから、 $u = v'' \in M''$ である。すなわち $M' \subset M''$ となる。次に、 M' と M'' の役割を入れかえて同じ議論を繰り返せば、 $M'' \subset M'$ も示すことができる。

□

定義 3.12. 直交分解定理の M' を M の直交補空間といい、 M^\perp で表す。

X の閉部分空間 X_0 と X_0 の閉部分空間 X_1 を考える。 X_0 は X の内積 (\cdot, \cdot) によってヒルベルト空間になるので、直交分解定理から $X_0 = X_1 \oplus X_2$ なる X_0 の閉部分空間 X_2 がただ一つ存在する。以下では、 X_2 のことを $X_0 \ominus X_1$ と表す。特に、 $X \ominus X_1$ が X_1^\perp である。

定義 3.13. (直交射影) M を X の閉部分空間とする。直交分解定理より、任意の $u \in X$ に対して、 $u = u_1 + u_2$ ($u_1 \in M, u_2 \in M^\perp$) と一意的に分解できる。そこで、

$$P_M(u) = u_1$$

と定義し、 P_M を X から M への直交射影作用素、あるいは単に直交射影という。

定理 3.7. M を X の閉部分空間とする。このとき、 X から M への直交射影 P_M は、

$$\|P_M u\| \leq \|u\| \quad (u \in X)$$

を満たす。

証明. $u = u_1 + u_2$ を u の直交分解とすると、

$$\|u\|^2 = (u_1 + u_2, u_1 + u_2) = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$$

より、 $\|P_M(u)\| = \|u_1\| \leq \|u\|$ である。

□

定理 3.8. X, M, P_M を前定理と同じものとする。このとき、 $P_M^2 = P_M$ であり、次の式が成り立つ：

$$(P_M u, v) = (u, P_M v) \quad (u, v \in X).$$

証明. $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2$ をそれぞれ u, v の直交分解とする。

$$(P_M u, v) = (u_1, v_1 + v_2) = (u_1, v_1)$$

$$(u, P_M v) = (u_1 + u_2, v_1) = (u_1, v_1)$$

であるから、与式は成り立つ。また、 $P_M^2 = P_M$ は明らかである。

□

3.6 補足

ここに記す定理は章内の定理の証明に用いたものであり、ルベーク積分において非常に重要な定理である。証明にはルベーク積分論の細かい知識を必要とするので省略する。

$f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を $E \in \mathfrak{M}_d$ 上の可測関数, $f(x)$ を E 上の関数とし, $f_n(x)$ が E 上のほとんどすべての点で $f(x)$ に収束していることを, f_n は E 上で f に概収束するという。

定理 3.9. (単調収束定理) $E \in \mathfrak{M}_d$ 上の可測関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) が E 上ほとんどいたるところで非負値をとり, かつ単調増加で, E 上のある関数 $f(x)$ に E 上で概収束しているとする。このとき $f(x)$ は E 上可測であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

である。

定理 3.10. (ルベークの収束定理) $E \in \mathfrak{M}_d$ とし, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を E 上のルベーク可測関数とし, $f(x)$ を E 上の関数とする。 f_n が f に E 上で概収束し, さらに E 上のルベーク積分可能な関数 $\varphi(x)$ で

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{a.e. } x \in E \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすものがあるとする。このとき $f(x)$ は E 上ルベーク積分可能であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

が成り立つ。

4 直交関数系

4.1 いろいろな直交多項式系

正規直交基底のひとつの作り方は, 線形代数でも扱われているグラム・シュミットの直交化法である。これについてみておく。

定理 4.1. $(X, (\cdot, \cdot))$ をヒルベルト空間とする。 $\{u_j\}_{j=0}^{\infty} \subset X$ が一次独立でかつ $\text{span}(\{u_j\}_{j=0}^{\infty})$ が X で稠密であるとする。

(a) X の正規直交基底 $\{e_j\}_{j=0}^{\infty}$ で, 次の条件 (i), (ii) を満たすものが存在する。

(i) 各 u_n は e_0, \dots, e_n の一次結合で表される。

(ii) 各 e_n は u_0, \dots, u_n の一次結合で表される.

(b) $\{e'_j\}_{j=0}^\infty$ を条件 (i), (ii) を満たす正規直交基底とする. このとき $|\alpha_j| = 1$ なる $\alpha_j \in \mathbf{K}$ が存在し, $e'_j = \alpha_j e_j$ ($j = 0, 1, \dots$) となる.

証明. (a)

$$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}, \quad e_1 = \frac{u_1 - (u_1, e_0)e_0}{\|u_1 - (u_1, e_0)e_0\|}, \quad \dots, \quad e_n = \frac{u_n - \sum_{j=0}^{n-1} (u_n, e_j)e_j}{\left\| u_n - \sum_{j=0}^{n-1} (u_n, e_j)e_j \right\|}$$

と定めていく. ただし, ここで e_j のつくり方と u_0, \dots, u_n の一次独立性より,

$$u_n - \sum_{j=0}^{n-1} (u_n, e_j)e_j \neq 0$$

である. さらに, 各 e_n は u_0, \dots, u_n の一次結合で書けているので, (ii) が成り立つ.

(i) も e_n のつくり方から明らかである.

また, $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$ となっていることも容易にわかる.

次に, $\{e_j\}$ が基底をなすことを示す. いま, 任意の j に対して, $(u, e_j) = 0$ が成り立っているとする. このことと (i) より, 任意の j に対して, $(u, u_j) = 0$ である. $\text{span}(\{u_j\}_{j=0}^\infty)$ は X で稠密であるから $\{u_j\}_{j=0}^\infty$ の一次結合からなる元の列 p_1, p_2, \dots が存在し, $\lim_{j \rightarrow \infty} p_j$ である. ここで, $(u, p_j) = 0$ であるから,

$$\|u\|^2 = (u, u) = \lim_{j \rightarrow \infty} (u, p_j) = 0.$$

したがって, 前章で示した定理 3.5 より, $\{e_j\}$ は正規直交基底になっている.

(b) $\{e'_k\}_{k=0,1,\dots}$ を次の (i)', (ii)' を満たす正規直交基底とする:

(i)' 各 u_n は e'_0, \dots, e'_n の一次結合で表される.

(ii)' 各 e'_n は u_0, \dots, u_n の一次結合で表される.

このとき, $e'_k = \alpha_k e_k$, $|\alpha_k| = 1$ となる $\alpha_k \in \mathbf{K}$ の存在を数学的帰納法により証明する. $k = 0$ の場合は, 定義より明らかである. $0, 1, \dots, k-1$ まで正しいと仮定し, k の場合を示す. 条件 (i), (ii), (i)', (ii)' より, $e'_k = \sum_{j=0}^k c_j e_j$ である. したがって, $l = 0, \dots, k-1$ に対して, $(e'_k, e_l) = c_l$ である. 一方, 帰納法の仮定より,

$$c_l = (e'_k, e_l) = \alpha_l^{-1} (e'_k, e'_l) = 0$$

である. ゆえに $e'_k = c_k e_k$ が得られる. 明らかに $|c_k| = 1$ なので, $\alpha_k = c_k$ とおけばよい.

□

$1, x, x^2, \dots$ という関数系に対してこのグラム・シュミットの直交化法を使って、いくつかの直交関数形をつくってみる。土台となるヒルベルト空間をいろいろととりかえることによって、同じ操作から様々な直交関数系が得られることがわかるであろう。

4.2 ルジャンドル多項式系

まずルジャンドル多項式系という直交関数系をつくる。土台とするヒルベルト空間は次のものである：

$$L^2([-1, 1]) = \left\{ f : \begin{array}{l} f \text{ は } [-1, 1] \text{ 上のルベーク可測関数で,} \\ \|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \end{array} \right\}$$

ただし、内積は

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f, g \in L^2([-1, 1]))$$

とする。ここで $\text{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ が $L^2([-1, 1])$ で稠密になっていることをみておくことにする。ルベーク積分論より、任意の $f \in L^2([-1, 1])$ に対して、 $[-1, 1]$ 上の連続関数列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ が存在し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_2 = 0 \quad (4.1)$$

となる。また、ワイエルシュトラスの近似多項式定理より、 $[-1, 1]$ 上の任意の連続関数 g に対して、ある多項式 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ が存在し、

$$\|g - p_n\|_2^2 \leq \sup_{t \in [-1, 1]} |g(t) - p_n(t)|^2 \cdot \int_{-1}^1 dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.2)$$

が成り立つ。これらのことより、 $\text{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ が $L^2([-1, 1])$ で稠密であることがわかる。

さて、グラム・シュミットの直交化法で $\{1, x, x^2, \dots\}$ を直交化していくと次のようになる：

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad e_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \dots$$

しかし、一つひとつをこのようにグラム・シュミットの直交化法で計算していくのは大変である。そこで一般の $e_n(x)$ を求めるための便利な公式としてロドリゲスの公式があるので、それを紹介しておく。この公式は、

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

として、これから一般の e_n が、

$$e_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

によって与えられるというものである。このことを証明する。定義より $P_n(x)$ は n 次の多項式であって、 $n > m$ のとき、部分積分法より次がわかる：

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx &= \frac{1}{2^{n+m}n!m!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx \\ &= \frac{-1}{2^{n+m}n!m!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m dx \\ &= \dots \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n+m}n!m!} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m dx = 0. \end{aligned}$$

また、 $m = n$ のときは、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx \\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx \\ &= \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$e'_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

とおけば、これらは正規直交系になる。 P_n は n 次の多項式であるから、定理 4.1 の条件 (i), (ii) を満たす。したがって、 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ は正規直交基底であり、しかもある $\alpha_n \in \mathbf{R}, |\alpha_n| = 1$ が存在し、

$$e_n(x) = \alpha_n e'_n(x) \quad (x \in [-1, 1])$$

となる。ところで、 $e'_n(x)$ の定め方から $e'_n(x)$ の最高次の項の係数は正である。また、 $e_n(x)$ の最高次の項の係数も正である。したがって、 $\alpha_n = 1$ でなければならない。よって、 $e'_n = e_n$ である。 $\{P_n(x)\}_{n=1}^\infty$ をルジャンドル多項式系という。

ルジャンドル多項式と微分方程式 ルジャンドル多項式は、次の常微分作用素

$$T(u) = \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{du}{dx} \right)$$

の $L^2([-1, 1])$ に属する固有関数で、その固有値は $-n(n+1)$ であることがわかる。

証明. $h(x) = (x^2 - 1)^n$ とおくと,

$$(x^2 - 1)h'(x) = 2nxh(x)$$

であるから, 両辺にライプニッツの公式を適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(h'(x)(x^2 - 1)) \\ &= h^{(n+2)}(x)(x^2 - 1) + \binom{n+1}{1} h^{(n+1)}(x)2x + \binom{n+1}{2} h^{(n)}(x)2 \\ &= (x^2 - 1)h^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xh^{(n+1)}(x) + n(n+1)h^{(n)}(x) \end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(2nh(x)x) \\ &= 2nh^{(n+1)}(x)x + 2n \binom{n+1}{1} h^{(n)}(x) \\ &= 2nxh^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)h^{(n)}(x) \end{aligned}$$

を得る. したがって, $h^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$ に注意すれば, ルジャンドルの多項式は微分方程式

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n(x) + n(n+1) P_n(x) = 0$$

を満たすので, よって,

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right) = -n(n+1) P_n(x)$$

となり, 結論を得る. □

4.3 ラゲール陪多項式

$k \in \mathbf{Z}_+$ とし, $(0, \infty)$ 上の測度 $d\mu(x) = x^k e^{-x} dx$ を考える.

さらに, $X = L^2((0, \infty), d\mu)$ とし, これを内積

$$(f, g)_\mu = \int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$$

によるヒルベルト空間であるとし, $\|f\|_\mu = (f, f)_\mu^{1/2}$ とおく.

はじめに, $\text{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ が X で稠密な部分空間であることを示し, 次にグラム・シュミットの直交化法で得られる多項式を具体的に求める.

定理 4.2. $\text{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ は X で稠密である.

この定理の証明に必要な次の補題を示すことから始める.

補題 4.1. f を \mathbf{R} 上の関数で, 任意に $\xi \in \mathbf{R}$ をとって固定したとき,

$$|f(x)|e^{|\xi x|}e^{-x^2} \in L^1(\mathbf{R}, dx)$$

であるとする. もしも, すべての多項式 $P(x)$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)P(x)e^{-x^2} dx = 0$$

であるならば, $f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}$ である.

証明. $e^{-i\xi x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i\xi x)^n/n!$ であり, 任意の $N \in \mathbf{Z}_+$ に対して,

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(-i\xi x)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^N \frac{|\xi x|^n}{n!} \leq e^{|\xi x|}$$

であるから, ルベーグの収束定理と仮定より,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)e^{-x^2} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi x)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)e^{-x^2} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

ゆえに, $\mathcal{F}[fe^{-x^2}](\xi) = 0$ ($\xi \in \mathbf{R}$) であるから, $f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}$ を得る. □

定理 4.2 の証明. $L = \text{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ とおく. 示すべきことは, $g \in X$ が

$$\int_0^{\infty} g(x)x^n d\mu(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

を満たすならば $g = 0$ となることである. 実際これが示せれば, $\overline{L}^\perp = \{0\}$ であるから, 直交分解定理より $X = \overline{L}$ となる.

以下, $g(x) = 0$ a.e. x を示す. 変数変換より, 任意の n に対して,

$$0 = \int_0^{\infty} g(x)x^n x^k e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x^2)|x|^{2k+1} x^{2n} e^{-x^2} dx$$

である. また, $g(x^2)|x|^{2k+1} x^{2n+1} e^{-x^2}$ は奇関数であるから,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x^2)|x|^{2k+1} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$$

である. ゆえに, 任意の多項式 $P(x)$ に対して,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x^2)|x|^{2k+1} P(x) e^{-x^2} dx$$

となる. ここで, $f(x) = g(x^2)|x|^{2k+1}$ とおくと, この等式と次の不等式より, f が補題の条件を満たしていることがわかる: シュヴァルツの不等式より,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} g(x^2)|x|^{2k+1}e^{|\xi x|}e^{-x^2} dx \\ & \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x^2)|x|^{2k+1}e^{-x^2} dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2k+1}e^{2|\xi x|}e^{-x^2} dx \right)^{1/2} \\ & \leq \|g\|_{\mu} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2k+1}e^{2|\xi x|}e^{-x^2} dx \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

よって, 補題 4.1 より $g = 0$ を得る. □

今示した定理 4.2 より, $1, x, x^2, \dots$ から, グラム・シュミットの直交化法で X の正規直交基底 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ をつくることができる. このとき, e_n は次にあげるラゲール陪多項式とよばれる多項式になっている:

定義 4.1. (ラゲール陪多項式) $k, n \in \mathbf{Z}_+$ に対して,

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{k+n}e^{-x})$$

とおく. $L_n^k(x)$ をラゲール陪多項式という.

この定義におけるラゲール陪多項式はソニンの多項式とよばれることもあり, そのときのラゲール陪多項式は $(-1)^k n! L_{n-k}^k(x)$ である.

ライプニッツの公式より,

$$L_n^k(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+k}{n-j} \frac{x^j}{j!}$$

である. したがって, L_n^k は n 次の多項式である. このとき, 次が成り立つ.

定理 4.3. $(L_n^k, L_m^k)_{\mu} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{\Gamma(n+1+k)}{n!} & (n = m) \end{cases}$

ただし, Γ はガンマ関数とする.

証明. $n \neq m$ とする. このとき $n < m$ を仮定しても一般性は失われない. $n < m$ のとき, 部分積分法より,

$$(L_n^k, L_m^k)_{\mu} = \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} L_n^k(x) \frac{d^m}{dx^m} (x^{k+m}e^{-x}) dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty \left(\frac{d^m}{dx^m} L_n^k(x) \right) x^{k+m} e^{-x} dx = 0.$$

(ここで最後の等号は、 $L_n^k(x)$ が n 次 ($n < m$) の多項式であることによる.)

また、 $n = m$ のときは、

$$(L_n^k, L_n^k)_\mu = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^{k+n} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+1+k)}{n!}$$

となる. □

この定理より次のことがわかる.

定理 4.4. $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ を $\{1, x, x^2, \dots\}$ からグラム・シュミットの直交化法でつくった X の正規直交基底とする. このとき、次式が成り立つ:

$$e_n(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+k+1)}} L_n^k(x).$$

証明. 右辺を $e'_n(x)$ とおく. $L_n^k(x)$ が n 次多項式であるから、 $\{1, x, x^2, \dots\}$ は $\{e_0, e_1, \dots\}$ で生成することができる. したがって、 $\{e'_n\}_{n=0}^\infty$ は X の正規直交基底で、前章の定理の条件を満たす. したがって、 $e_n = \alpha_n e'_n$ ($n = 0, 1, \dots$) を満たす定数 $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1$ が存在する. ところが、 e'_n と e_n の最高次の項の係数は正なので $\alpha_n = 1$ となる. □

ラゲール陪多項式と微分方程式 ラゲール陪多項式 $L_n^k(x)$ は、常微分作用素

$$T_k = x \frac{d^2}{dx^2} + (k+1-x) \frac{d}{dx}$$

の固有値 $-n$ の固有関数になっている.

証明. $f(x) = (x^{-k} e^x)/n!$, $g(x) = x^{k+n} e^{-x}$ とおく.

$$xg'(x) = (k+n-x)g(x)$$

であるから、両辺にライプニッツの公式を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(xg'(x)) &= xg^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1} g^{(n+1)}(x) \\ &= xg^{(n+2)}(x) + (n+1)g^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((k+n-x)g(x)) &= (k+n-x)g^{(n+1)}(x) - \binom{n+1}{1} g^{(n)}(x) \\ &= (k+n-x)g^{(n+1)}(x) - (n+1)g^{(n)}(x) \end{aligned}$$

を得る. よって、微分方程式、

$$xg^{n+2}(x) = (k-1-x)g^{(n+1)}(x) - (n+1)g^{(n)}(x)$$

が成り立つ. このことに注意して, 計算していく.

$$\begin{aligned}
& x \frac{d^2}{dx^2} L_n^k(x) + (k+1-x) \frac{d}{dx} L_n^k \\
&= x f''(x) g^{(n)}(x) + x f'(x) g^{(n+1)}(x) + x f'(x) g^{(n+1)}(x) + x f(x) g^{n+2}(x) \\
&\quad + k f'(x) g^{(n)}(x) + k f(x) g^{(n+1)}(x) + f'(x) g^{(n)}(x) \\
&\quad + f(x) g^{(n+1)}(x) - x f'(x) g^{(n)}(x) - x f(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= (x f''(x) + k f'(x) + f'(x) - x f'(x)) g^{(n)}(x) \\
&\quad + (2x f'(x) + (k-1-x) f(x) + k f(x) + f(x) - x f(x)) g^{(n+1)}(x) \\
&= -n f(x) g^{(n)}(x) = -n L_n^k(x)
\end{aligned}$$

となり, 結論を得る.

□

ルジャンドル多項式やラゲール陪多項式と同じようにして得られるものに, チェビシェフ多項式系, エルミート多項式系などがあるが, 本論文では省略する.

4.4 d 次元球面調和関数 (球関数)

フーリエ級数を関数論的な視点から多変数に拡張したものが球面調和関数である. 球面調和関数は球面上の関数に対する一般化フーリエ級数のひとつになっていて, 熱方程式などの偏微分方程式に決定的な応用をもっている. そのことを詳しくみていく.

まず, 球面に関するいくつかの記号を導入しておく.

$$S = S^{d-1} = \{x \in \mathbf{R}^d : |x| = 1\}$$

とおく. このとき, S 上の点 x は極座標を使って

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos \theta_1, \\
x_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\
&\vdots \\
x_{d-1} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}, \\
x_d &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \\
&(\theta_j \in [0, \pi] (j = 1, \dots, d-2), \theta_{d-1} \in [0, 2\pi))
\end{aligned}$$

と表すことができる.

このとき球面 S の表面積は以下ようになる.

$$\begin{aligned}\sigma_d &= \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^{d-2} \theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} d\theta_{d-1} \cdots d\theta_1 \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.\end{aligned}$$

ただし Γ はガンマ関数である.

$$d\sigma(x) = \frac{1}{\sigma_d} \sin^{d-2} \theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{d-1}$$

とおき, S 上の関数 f に対して,

$$\int_S f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\sigma_d} \int f \sin^{d-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{d-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{d-1} \quad (4.4)$$

により S 上の積分を定義する. もちろん, このような積分はすべての関数に定義できるわけではない. 本論文では (4.4) の右辺の積分を書いたときには, 暗黙のうちに f として積分が定義できるような関数を考えているものとする. そして,

$$\|f\|_{L^2(\sigma)} = \left(\int_S |f(x)|^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} < \infty$$

なる関数の集合を $L^2(S, \sigma)$ と表すことにする. $L^2(S, \sigma)$ は

$$(f, g)_S = \int_S f(x) \overline{g(x)} d\sigma(x) \quad (f, g \in L^2(S, \sigma))$$

を内積とするヒルベルト空間になっている.

また, 球面上の微分について述べておく. 簡単のため, $d = 3$ の場合を考える. 球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上の関数 f に対して, x に関する偏微分を,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

と定義することはできない. (x, y, z) が球面上の点であっても $(x+h, y, z)$ は一般には球面には含まれないから, 球面上の関数 f に対しては $f(x+h, y, z)$ が意味をもたなくなるからである.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

とおくと $\partial F(x, y, z)/\partial z = 2z$ であるから, 陰関数の定理により $z \neq 0$ を満たす点の近くでは, z は x, y の関数として一意的に定まり, x, y について何回でも偏微分

可能である。したがって、球面上の関数 f に対しては、 x に関する偏微分は z を変数 x, y の関数とみなして $z = z(x, y)$ とかくとき、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y)) + \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y)) - \frac{x}{z(x, y)} \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z(x, y)) \end{aligned}$$

で与えられる。球面上では、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z) &= 2x \neq 0, & \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z) &= 2y \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} F(x, y, z) &= 2z \neq 0 \end{aligned}$$

のいずれかは必ず成り立つから、球面上の f の偏微分を上記のように定義すればよい。一般の次元の場合も、 $d = 3$ の場合を拡張すればよい。

今、これらの記号を使って、フーリエ級数を関数論的な視点で見直してみる。

4.4.1 関数論的にみたフーリエ級数

\mathbf{R}^2 の点 (x_1, x_2) と $x_1 + ix_2 (\in \mathbf{C})$ を対応させることにより、以下では \mathbf{R}^2 を複素平面 \mathbf{C} と考えることにする。このとき、 $f \in L^2(S^1, \sigma)$ に対して $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$ とすると、 \tilde{f} は t の関数として周期 2π をもち、 $\tilde{f} \in L^2(-\pi, \pi)$ となる。従って、フーリエ級数論より L^2 ノルムに関する収束の意味で

$$f(e^{it}) = \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\tilde{f}) e^{ikt}$$

となる。ただし、 $c_k(\tilde{f}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) e^{-ikt} dt$.

いま $z = e^{it}$ とおくと $e^{-it} = \bar{z}$ であるから、

$$f(z) = c_0(\tilde{f}) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k(\tilde{f}) z^k + c_{-k}(\tilde{f}) \bar{z}^k)$$

と表すことができる。この $c_k(\tilde{f}) z^k + c_{-k}(\tilde{f}) \bar{z}^k$ は k 次の斉次多項式である。ここで z を形式的に任意の複素数と考えることによって、自然に全平面上で定義された k 次斉次多項式に拡張できる。すると、この多項式 $c_k(\tilde{f}) z^k + c_{-k}(\tilde{f}) \bar{z}^k$ は以下に定義する調和関数になっていることが証明できる。

ここで、 Δ を \mathbf{R}^d 上のラプラス作用素、すなわち、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

とおく。

定義 4.2. (ラプラス作用素と調和関数) \mathbf{R}^d の開集合 Ω 上の C^2 関数が Ω 上の調和関数であるとは, \mathbf{R}^d のラプラス作用素 Δ に対して,

$$\Delta f(x) = 0 \quad (x \in \Omega)$$

を満たすことである.

命題 4.1. $c_k(f)z^k + c_{-k}(f)\bar{z}^k$ は \mathbf{C} 上の調和関数である.

証明. \mathbf{R}^2 の場合, $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

となる. また, このとき,

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \quad (4.5)$$

となっていることに注意しておく. 開集合 $\Omega \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ 上の C^1 関数 g が Ω 上で正則であることと, コーシー・リーマンの方程式を満たすことは同値であり, g がコーシー・リーマンの方程式を満たすことと

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = 0$$

を満たすことは同値である. したがって, g が正則ならば (4.5) により, g と \bar{g} が調和関数になることがわかる. よって, $g = z^k$ とすれば結論を得る. \square

以上から, フーリエ級数展開とは, S^1 上の関数を \mathbf{R}^2 上の調和な k 次斉次多項式 Y_k で

$$f = c + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k$$

と展開するということになる. ここで c は複素数である. このような視点から S^1 上のフーリエ級数を S^{d-1} に高次元化したものが球面調和関数による展開となる.

4.4.2 球面調和関数と球面上のラプラス作用素

まず, k 次の球面調和関数の定義からはじめる. $\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d)$ を \mathbf{R}^d の複素係数 k 次斉次多項式全体を表すとする. つまり

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d) = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha : a_\alpha \in \mathbf{C}, |\alpha| = k \right\}$$

である. さらに, この多項式のうち調和なものを考える:

$$\mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d) = \{P \in \mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d) : \Delta P(x) = 0, x \in \mathbf{R}^d\}$$

このとき, 球面調和関数は次のように定義される.

定義 4.3. $P \in \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d)$ を球面 S 上に制限した関数を, S 上の k 次球面調和関数という. すなわち, S 上の関数 H が S 上の k 次球面調和関数であるとは, ある $P \in \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d)$ が存在して

$$H(x) = P(x) \quad (x \in S)$$

となるような関数のことである. S 上の k 次球面調和関数全体からなる集合を $\mathcal{H}_k(S)$ で表す.

本論文では, 混乱の恐れのない限り,

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d), \quad \mathcal{HP}_k = \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d), \quad \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k(S)$$

と表すことにする.

本節の目標は次の定理を証明することである.

定理 4.5. (1) $\dim \mathcal{H}_k = \binom{d+k-1}{k} - \binom{d+k-3}{k-2}$ ($k = 2, 3, \dots$),
 $\dim \mathcal{H}_0 = 1, \quad \dim \mathcal{H}_1 = d.$
 (2) $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k, Y^{(l)} \in \mathcal{H}_l$ ($k \neq l$) のとき,

$$(Y^{(k)}, Y^{(l)})_S = \int_S Y^{(k)}(x) \overline{Y^{(l)}(x)} d\sigma(x) = 0.$$

(3) $Y_j^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ ($j = 1, \dots, h(d, k); k = 0, 1, 2, \dots$) を \mathcal{H}_k の正規直交基底とする. ただしここで $h(d, k) = \dim \mathcal{H}_k$ である. このとき $f \in L^2(S, \sigma)$ に対して,

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{h(d,k)} (f, Y_j^{(k)})_S Y_j^{(k)} \right\|_{L^2(\sigma)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

この定理の証明には以下に示す補題を用いる.

補題 4.2. $\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d)$ は \mathbf{C} 上の有限次元ベクトル空間で, その次元は

$$d_k = \binom{d+k-1}{d-1} = \binom{d+k-1}{k} = \frac{(d+k-1)!}{(d-1)!k!}$$

である.

証明. 定義より, \mathcal{P}_k は $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = k$) で生成される \mathbf{C} 上のベクトル空間で, 各 x^α は一次独立であるから, \mathcal{P}_k の次元は, $|\alpha| = k$ なる多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ の個数であり, それが d_k である. \square

$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha$ に対して x^α のところに形式的に ∂^α を代入してつくった偏微分作用素

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \partial^\alpha$$

を考える. $P, Q \in \mathcal{P}_k$ に対して

$$(P, Q)_p = P(\partial)\bar{Q} \quad (4.6)$$

とする. このとき, 次が成り立つ.

補題 4.3. $(\cdot, \cdot)_p$ は \mathcal{P}_k 上の内積になっている.

証明. $P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha$, $Q(x) = \sum_{|\beta|=k} b_\beta x^\beta$ であるとする.

$$(P, Q)_p = P(\partial)\bar{Q} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha \sum_{|\beta|=k} b_\beta x^\beta = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! a_\alpha \bar{b}_\alpha$$

となっている. この式より, $(P, Q)_p \in \mathbf{C}$ であり, さらに内積の公理をすべて満たすことも明らかである. \square

一般には, $\text{span}\left(\bigcup_k \mathcal{HP}_k\right)$ が多項式全体を生成していることはまったく期待できない. 実際, 調和でない多項式はいくらでも存在する. ところが, 球面上では $\text{span}\left(\bigcup_k \mathcal{HP}_k\right)$ が多項式全体を生成していることがわかる. このことが定理の主張 (3) の土台となる部分である. そして, このことを示してくれているのが次の補題である. この補題については, 補題 4.3 と線形代数学の直交分解定理を用いて示される.

補題 4.4. $P \in \mathcal{P}_k$ とすると, ある $P_j \in \mathcal{HP}_{k-2j}$ ($j = 0, \dots, l; l$ は $k - 2l \geq 0$ となる最大の整数) が存在し,

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + \dots + |x|^{2l} P_l(x)$$

と書くことができる.

証明. $j = 2, 3, \dots$ に対して $|x|^2 \mathcal{P}_{j-2} = \{|x|^2 Q : Q \in \mathcal{P}_{j-2}\}$ とおく. このとき, 内積 $(\cdot, \cdot)_p$ に関して,

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{HP}_j \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{j-2} \quad (4.7)$$

と直交分解できていることを証明する. それには, 内積 $(\cdot, \cdot)_p$ に関する $|x|^2 \mathcal{P}_{j-2}$ の直交補空間

$$(|x|^2 \mathcal{P}_{j-2})^\perp = \{P \in \mathcal{P}_j : (|x|^2 Q, P)_p = 0 \ (\forall Q \in \mathcal{P}_{j-2})\}$$

が \mathcal{HP}_j と一致することを示せば十分である。 $P \in \mathcal{HP}_j$ とすると、任意の $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$ に対して、

$$(|x|^2 Q, P)_p = \Delta Q(\partial) \bar{P} = Q(\partial) \overline{\Delta P} = 0$$

であるから、 $\mathcal{HP}_j \subset (|x|^2 \mathcal{P}_{j-2})^\perp$ がわかる。逆に $P \in (|x|^2 \mathcal{P}_{j-2})^\perp$ とすると、任意の $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$ に対して、

$$(Q, \Delta P)_p = Q(\partial) \overline{\Delta P} = \Delta Q(\partial) \bar{P} = (|x|^2 Q, P)_p = 0$$

がわかる。ここで、 $\Delta P \in \mathcal{P}_{j-2}$ であるから、 $\Delta P = 0$ でなければならない。ゆえに、 $(|x|^2 \mathcal{P}_{j-2})^\perp \subset \mathcal{HP}_j$ である。

直交分解 (4.7) を使うと、補題が次のように証明できる。 $P \in \mathcal{P}_k$ をとる。 $k = 0, 1$ のときは P 自身が調和関数になっている。 $k \geq 2$ の場合を示す。まず $j = k$ として (4.7) を適用すると、ある $P_0 \in \mathcal{HP}_k$ と $Q_1 \in \mathcal{P}_{k-2}$ により、

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 Q_1(x)$$

と書けることがわかる。 $k - 2 \leq 1$ ならば補題の証明が終わる。 $k - 2 \geq 2$ であるときは、 $j = k - 2$ として (4.7) を使えば、ある $P_1 \in \mathcal{HP}_{k-2}$ とある $Q_2 \in \mathcal{P}_{k-4}$ によって、 $Q_1 = P_1 + |x|^2 Q_2$ と書けるので、

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + |x|^4 Q_2(x)$$

となる。以下、この操作を繰り返せば補題の証明が完了する。

□

この補題より、任意の k 次斉次多項式 P は、球面 S 上では

$$P(x) = P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_l(x) \quad (x \in S)$$

と球面調和関数の和で表せることがわかる。従って、任意の多項式も S 上に制限すれば、球面調和関数の一次結合で表せることになる。このことも用いて次の補題を得る。

補題 4.5. S 上の連続関数 f に対して、ある $f_n \in \text{span} \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(S)$ ($n = 1, 2, \dots$) で

$$\sup_{x \in S} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるものが存在する。

証明. \mathbf{R}^d 上の複素係数の多項式全体からなる集合を \mathcal{P} とする。また、 S 上の関数 g で、ある $P \in \mathcal{P}$ によって $g(x) = P(x)$ ($x \in S$) となるもの全体のなす集合を A とする。このとき、 A はストーン・ワイエルシュトラスの定理の条件を満たすので、任意の $f \in C(S)$ に対して $\|f - g_n\|_S \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なる $g_n \in A$ が存在する。すでに示したように、各 g_n は球面調和関数の一次結合で表されているので、補題の証明を終える。 □

ここで \mathcal{H}_k の次元を計算しておく。(4.7)により,

$$\dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{HP}_k + \dim \mathcal{P}_{k-2}$$

が成り立つことに注意する. 一方, $P \in \mathcal{HP}_k$ を S 上に制限した関数に対応させる写像を φ_k とおく. φ_k は \mathcal{HP}_k から \mathcal{H}_k の上への線形写像である. この写像が1対1写像であることを示す. そのためには, $\varphi_k(Y) = 0$ のとき, $Y = 0$ であることを証明すればよい. Y が k 次斉次であることより, 任意の $x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ に対して,

$$Y(x) = |x|^k Y\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^k \varphi_k(Y)\left(\frac{x}{|x|}\right) = 0$$

がわかる. ゆえに $Y = 0$ でなければならない. したがって, φ_k は \mathcal{HP}_k から \mathcal{H}_k への同型写像となり, 線形代数学の一般論から, \mathcal{HP}_k の次元と \mathcal{H}_k の次元が一致することが得られる. 以上のことから,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}_k(S^{d-1}) &= \dim \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d) \\ &= \dim \mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d) - \dim \mathcal{P}_{k-2}(\mathbf{R}^d) \\ &= \binom{d+k-1}{k} - \binom{d+k-3}{k-2} =: h(d, k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

を得る.

以上の補題より定理を示していく.

定理 4.5 の証明. (1) はすでに示した.

(2) を証明する. $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$, $Y^{(l)} \in \mathcal{H}_l$ とする. 上で定義した \mathcal{HP}_k から \mathcal{H}_k の上への同型写像 φ_k を使って, $u = \varphi_k^{-1}(Y^{(k)})$ を定義する. 同様にして $v = \varphi_l^{-1}(Y^{(l)})$ とおく. $x = rx'$ ($r \in (0, \infty)$, $x' \in S$) と極座標で表すと,

$$u(x) = r^k Y^{(k)}(x'), \quad v(x) = r^l Y^{(l)}(x')$$

となっている. 定義より u, v は調和であるから $\Delta u = \Delta v = 0$ であり, また $x \in S$ では

$$\frac{\partial u}{\partial r} = k Y^{(k)}(x), \quad \frac{\partial v}{\partial r} = l Y^{(l)}(x)$$

となっている. したがって, グリーンの公式より次の式が得られる:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\{x \in \mathbf{R}^d : |x| \leq 1\}} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \sigma_d \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma(x) \\ &= \sigma_d \int_S (l Y^{(k)} Y^{(l)} - k Y^{(l)} Y^{(k)}) d\sigma(x) = \sigma_d (l - k) \int_S Y^{(k)} Y^{(l)} d\sigma(x). \end{aligned}$$

したがって (2) は証明された.

次に (3) の主張を証明する. \mathcal{H}_k は $h(d, k)$ 次元ベクトル空間であるから, $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{h(d, k)}^{(k)}$ という \mathcal{H}_k の内積 $(\cdot, \cdot)_{L^2(\sigma)}$ に関する正規直交基底をとることができる. (2) より,

$$\{Y_j^{(k)} : k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, \dots, h(d, k)\} \quad (4.9)$$

が正規直交系であることがわかる. また, 任意の $f \in L^2(S, \sigma)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ルベーク積分の一般論から $\|f - g\|_{L^2(\sigma)} < \varepsilon/2$ を満たす S 上の連続関数 g が存在する. さらに, 補題 4.5 より, ある $h \in \text{span} \left(\bigcup_k \mathcal{H}_k \right)$ で,

$$\|g - h\|_{L^2(\sigma)} \leq \|f - h\|_S < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるものが存在する. ゆえに $\text{span} \left(\bigcup_k \mathcal{H}_k \right)$ が $L^2(S, \sigma)$ で稠密であることがわかった. よって前に示した定理より, (3) が示される. \square

次に, 球面調和関数が, 球面上のラプラス作用素とよばれる作用素 Δ_S の固有関数となっていることを見ておく. Δ_S は極座標で表せば,

$$\begin{aligned} \Delta_S u = & \sum_{k=1}^{d-2} \frac{1}{(\sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{k-1})^2 \sin^{d-1-k} \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\sin^{d-1-k} \theta_k \frac{\partial u}{\partial \theta_k} \right) \\ & + \frac{1}{(\sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{d-2})^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_{d-1}^2} \end{aligned}$$

となっている. また, \mathbf{R}^d のラプラス作用素 Δ を極座標を使って書き表すと

$$\Delta u = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_S u$$

となることが計算により得られる.

定理 4.6. ある l 次球面調和関数 $Y_1^{(l)}, \dots, Y_{h(d,l)}^{(l)}$ で, $\{Y_j^{(l)} : l = 0, 1, 2, \dots; j = 1, \dots, h(d,l)\}$ が $L^2(S^{d-1}, \sigma)$ の正規直交基底となり, さらに次式を満たすものが存在する;

$$\Delta_S Y_j^{(l)} = -l(d+l-2)Y_j^{(l)}.$$

証明. l 次の球面調和関数に対して, $r^l Y^{(l)}(x')$ は \mathbf{R}^d 上の調和関数であるから,

$$0 = \Delta r^l Y^{(l)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (d-1) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S \right) r^l Y^{(l)}$$

である. したがって, S 上では,

$$l(l-1)Y^{(l)} + (d-1)lY^{(l)} + \Delta_S Y^{(l)} = 0$$

を満たしている. これより, 定理が得られる. \square

なお、関数 $f \in L^2(\sigma)$ が十分滑らかであれば、 f の球面調和関数による展開

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h(d,k)} (f, Y_j^{(k)})_S Y_j^{(k)}$$

は一様収束し、しかも球面上のラプラス作用素の微分に関して項別微分できるなどの性質をもつ。

以下では、球面調和関数の具体的な形を $d = 3$ の場合について述べる (一般の場合は **ゲーゲンバウアー多項式** とよばれるものを使って記述される)。

便宜上、今度は $x = (x_1, x_2, x_3)$ を

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, & x_2 &= r \sin \theta \cos \phi, & x_3 &= r \sin \theta \sin \phi \\ & & & & & (\theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)) \end{aligned}$$

と表す。

ここで Δ_S は、 r, θ, ϕ を使って表すと次のように書くことができる：

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

まず、 $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ の形の関数で次を満たすものを探し出す：

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta_S + l(l+1))\Theta(\theta)\Phi(\phi) \\ &= \frac{\Phi(\phi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + l(l+1)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \end{aligned}$$

この関係式を変形すると、

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \frac{1}{\Theta} + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

ここで両辺は定数でなければならないので、それを仮に m^2 とおく。すると、

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2\Phi(\phi) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0. \quad (4.11)$$

(4.10) の解は $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ を満たしているので、 m は整数で $\Phi_m(\phi)$ は $e^{im\theta}$ と $e^{-im\theta}$ の一次結合でなければならない。一方、 $t = \cos \theta$ と変数変換し $P^m(t) = \Theta(\theta)$ とおくと、 t は -1 から 1 を動く変数として、(4.11) は、

$$\frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{dP^m}{dt} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right) P^m(t) = 0 \quad (4.12)$$

と変形される (これは, ちょうど $m=0$ の場合がルジャンドル多項式 $P_l(t)$ の満たす微分方程式である). さて, $|m| \leq l$ のとき,

$$P_l^m(t) = \frac{1}{2^l l!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}} (t^2-1)^l \quad (4.13)$$

は(4.12)を満たしている. この $P_l^m(t)$ をルジャンドル陪関数という. また, δ_{lk} をクロネッカーのデルタとして,

$$\int_{-1}^1 P_l^m(t) P_k^m(t) dt = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk}$$

となる.

そこで, $l=0, 1, 2, \dots; j=1, \dots, 2l+1; m=j-l-1$ とし, α_k を $|\alpha_k|=1$ なる複素数として次のようにおく:

$$Y_j^{(l)}(x') = Y_j^{(l)}(\theta, \phi) = \alpha_k \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (4.14)$$

このとき,

$$\Delta_S Y_j^{(l)} = -l(l+1) Y_j^{(l)}$$

を満たし, かつ,

$$\int_S Y_j^{(l)}(x') Y_{j'}^{(l')}(x') d\sigma(x') = \delta_{ll'} \delta_{jj'}$$

となる. ここで, $\sigma(S)=1$ と正規化してあったことに注意する. また S 上では,

$$x_1 = \cos \theta, \quad (x_2 \pm ix_3)^m = (\sin^m \theta) e^{\pm im\phi}$$

となっていることより, $r^l Y_j^{(l)}(x')$ は多項式であることがわかる. ((4.13)を見よ). しかも調和になっている. ゆえに, $Y_j^{(l)}$ が \mathcal{H}_l の正規直交基底をなす球面調和関数になっている.

4.4.3 球面上の熱方程式

最後に, 球関数展開を用いて熱方程式を解いてみる.

このためには球面調和関数による展開が一様収束し, 球面上の微分についての項別微分ができるという事実が必要になる. この事実を認めるため, 次の定理をみておく.

定理 4.7. $f \in C^\infty(S)$ であれば,

$$f(x') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2l+1} (f, Y_j^{(l)}) Y_j^{(l)}(x')$$

は S で一様絶対収束している.

以後、 C^∞ 級という十分な滑らかさを仮定して $d = 3$ の場合を考察する。

微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \theta, \phi) = \Delta_{S^2} u(t, \theta, \phi)$$

を球面上の熱方程式という。

f を球面上の関数とし、熱方程式の解 $u(t, \theta, \phi)$ が、

$$u(0, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$$

を満たすとする。このとき、 f を解 $u(t, \theta, \phi)$ の初期値という。

任意の $f \in C^\infty(S^2)$ に対し、 f を初期値とする熱方程式の解 $u(t, \theta, \phi)$ を求める。まず、 f を、

$$f(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} (f, Y_j^{(k)})_S Y_j^{(k)}(\theta, \phi)$$

と球関数展開する。

そして、熱方程式の解を、

$$u(t, \theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} \alpha_{j,k}(t) Y_j^{(k)}(\theta, \phi)$$

なる球関数展開の形で求める。形式的な計算により、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \theta, \phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} \alpha'_{j,k}(t) Y_j^{(k)}(\theta, \phi), \\ \Delta_{S^2} u(t, \theta, \phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} \{-k(k+1)\} \alpha_{j,k}(t) Y_j^{(k)}(\theta, \phi), \\ u(0, \theta, \phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} \alpha_{j,k}(0) Y_j^{(k)}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} (f, Y_j^{(k)})_S Y_j^{(k)}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \alpha'_{j,k}(t) &= -k(k+1) \alpha_{j,k}(t), \\ \alpha_{j,k}(0) &= (f, Y_j^{(k)})_S \end{aligned}$$

が成り立つ。

これを解いて、

$$\alpha_{j,k}(t) = (f, Y_j^{(k)})_S e^{-k(k+1)t}$$

を得る。

さて、 $t \geq 0$ のとき、

$$u(t, \theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} (f, Y_j^{(k)})_S e^{-k(k+1)t} Y_j^{(k)}(\theta, \phi)$$

は t, θ, ϕ について何回でも項別微分できる。したがって、上で形式的に行った計算が正しいことがわかる。ゆえに、 $u(t, \theta, \phi)$ は熱方程式の解で、その初期値は $f(\theta, \phi)$ である。

謝辞

本論文作成にあたり，2年間ご指導下さいました石谷寛先生，肥田野久二男先生，三重大学教育学部数学教室の教職員の方々に厚くお礼申し上げます．先生方の中でも，肥田野久二男先生には，学部時代から多くの時間を割いて辛抱強くご指導いただいたり，また，三重県立高等学校の教員採用試験に向けての十分な時間やフリースクールへボランティアに通う時間，自由に数学を勉強できる時間も配慮していただき，こんなにも充実した大学院生生活を送らせていただいたことには感謝の気持ちで一杯であります．最後に，大学院に入学してから2年間迷惑ばかりかけながらも，勉強に打ち込むことができるよう支え続けて下さった父母にこの場を借りて感謝申し上げます．

参考文献

- [1] ルベーク積分講義 ルベーク積分と面積0の不思議な図形たち 新井仁之
日本評論社
- [2] フーリエ解析と関数解析学 新井仁之 培風館
- [3] フーリエ解析の展望 岡本清郷 朝倉書店
- [4] ルベーク積分入門 伊藤清三 裳華房