

結合型パウルヴェ第 II 方程式の ベックルンド変換とソリトン解

三重大学大学院
教育学研究科教科教育専攻数学教育専修
吉田 和史

序文

パンルヴェ方程式は、2 階の代数的常微分方程式において「解の特異点の位置が初期条件に依存しない」という条件のもとで生まれてきたものである。このパンルヴェ方程式は 1900 年頃に発見され、それ以降多くの研究者がパンルヴェ方程式について研究をしてきた。パンルヴェ方程式は微分方程式であるので、解を求めるということが、やはり関心のある課題である。

しかし、解を求めるときにパラメータの値によって解が変わってくるので、一般にすべての解を求めることは困難である。そこで、ベックルンド変換と呼ばれる変換が効果を発揮してくる。ベックルンド変換とは、方程式の形は変えないがパラメータを変える変換のことである。このベックルンド変換を用いると、パンルヴェ方程式の一つの解から他の解を構成していくことができる。またこのことが、パンルヴェ方程式の有理解・代数解を決定するときに重要な役割を果たすことになる。第 1 章では、この論文を読むために必要となる言葉の定義や、パンルヴェ方程式についての歴史、ベックルンド変換の具体例をあげている。第 2 章では、II 型パンルヴェ方程式のベックルンド変換がどのようにして求められるのかについて書いている。後の章でもこのベックルンド変換の求め方が基本となっている。また、 τ 関数というものを定義することで、ベックルンド変換の計算量を減らすことができることを述べる。第 3 章では、東京大学の坂井氏、川上氏、中村氏によって定義された II 型行列パンルヴェ方程式のベックルンド変換を求めている。また、この II 型行列パンルヴェ方程式の有理解をすべて求めるときに必要なベックルンド変換も導いている。第 4 章では、笹野氏によって定義された結合型パンルヴェ第 II 方程式のベックルンド変換を求めている。それと、結合型パンルヴェ第 II 方程式の有理解と II 型パンルヴェ方程式の有理解との関係を求めている。第 5 章では、補足として、野田氏の論文を参考にし、II 型行列パンルヴェ方程式と結合型パンルヴェ第 II 方程式の有理解がどのようなになっているのかを紹介している。

最後に、大学院で研究を進めてきた二年間熱心に指導や助言をしていただいた石谷寛先生、川向洋之先生をはじめ、数学科の先生方に心からの感謝しています。ありがとうございます。

2012 年 2 月 13 日

著者

目次

1	序論	4
1.1	言葉の定義	4
1.2	パンルヴェ方程式の歴史	5
1.3	本論文の内容	6
2	II 型パンルヴェ方程式	7
2.1	ベックルンド変換	7
2.2	τ 関数	9
3	II 型行列パンルヴェ方程式	12
3.1	ハミルトニアンを満たす微分方程式から従うベックルンド変換	12
3.2	q_1 に関する単独高階化とベックルンド変換	14
4	結合型パンルヴェ第 方程式	17
4.1	ベックルンド変換	18
4.2	$A_4^{(1)}$ 型笹野系と II 型パンルヴェ方程式	19
5	補足	20
5.1	II 型行列パンルヴェ方程式の有理解	21
5.2	$A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解	23

1 序論

1.1 言葉の定義

最初に、複素領域で定義された 2 階の有理関数係数の線形常微分方程式

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1.1)$$

について、いくつか言葉の定義をしておく (ただし、 $' = d/dx$ である)。

定義 1 方程式の特異点だが、解の特異点にはなっていないものを見かけの特異点という。

定義 2 (1.1) における $p_1(x), p_2(x)$ の $x = a$ での極の位数がそれぞれ高々 1, 2 位の極になっているとき、 $x = a$ を (1.1) の確定特異点といい、そうでない特異点を不確定特異点という。

ここで $p_1(x), p_2(x)$ が $x = a$ において確定特異点になっているとき、(1.1) において、

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{x-a} \{a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots\}, \\ p_2(x) &= \frac{1}{(x-a)^2} \{b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots\}, \\ y &= (x-a)^\rho \{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots\} \quad (c_0 \neq 0) \end{aligned}$$

を代入して、 $(x-a)^{\rho-2}$ の係数を見ると、

$$\{\rho(\rho-1) + \rho a_0 + b_0\}c_0$$

となる。

定義 3 $f(\rho) = \rho(\rho-1) + \rho a_0 + b_0$ とおいたとき、 $f(\rho) = 0$ のことを $x = a$ における決定方程式といい、 $f(\rho) = 0$ の根を特性指数という。

定義 4 方程式 (1.1) に含まれるパラメータのうちで、特性指数と無関係なものを アクセサリー・パラメータという。

定義 5 リーマン球面 \mathbb{P}^1 上特異点で確定特異点しか持たない微分方程式を Fuchs 型であるという。

$y_1(x), y_2(x)$ を (1.1) の一次独立な解とすると、 $y_1(x), y_2(x)$ を特異点 $x = a$ のまわりを 1 周する道 γ に沿って解析接続したものを $\hat{y}_1(x), \hat{y}_2(x)$ とする。 $\hat{y}_1(x), \hat{y}_2(x)$ も (1.1) の解になっていることと、 $y_1(x), y_2(x)$ は解の基本系となっていることから、

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(x) &= c_{11}y_1(x) + c_{12}y_2(x), \\ \hat{y}_2(x) &= c_{21}y_1(x) + c_{22}y_2(x) \end{aligned}$$

とかけることがわかる。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(x) \\ \hat{y}_2(x) \end{bmatrix} = M_\gamma \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \quad \left(M_\gamma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (1.2)$$

と表せる。

定義 6 (1.2) における M_γ のことをモノドロミー行列という .

定義 7 関数 $f(x), g(x)$ に対し ,

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (D^j f \cdot g) y^j$$

を満たす $D^j f \cdot g$ を広田微分という .

命題 1 広田微分 $D^j f \cdot g$ は次のように計算することができる .

$$D^j f \cdot g = \sum_{r=0}^j (-1)^r C_j^r (f)^{(j-r)} (g)^{(r)}.$$

1.2 パンルヴェ方程式の歴史

物理的な現象を数式で表現すると , 微分方程式が現れることがよくある . しかし , 微分方程式の一般解は \sin, \cos などのよく知っている関数で書くことができない場合が多い . そこで「微分方程式で定義される新しい特殊関数を見つける」という研究がされてきた . そこで次の問題を考えられた .

1 階の代数的常微分方程式 : $R(y, y') = 0$ ($R(x, y)$ は t の解析関数を係数とする x, y の有理関数) で「極以外の解の特異点の位置が初期条件に依存しない」(解の極の位置は初期条件に依存してもよい) ものを分類せよ .

この問題は , H.Poincaré と L.Fuchs が研究した結果 , (i) 楕円関数のみならず微分方程式 (ii) リッカチ型方程式 (iii) 代数的に求積できる , のいずれかに帰着できることが示された . また , 次のような 2 階の場合も考えられた .

2 階の代数的常微分方程式 : $y'' = R(y, y')$ ($R(x, y)$ は t の解析関数を係数とする x, y の有理関数) で「極以外の解の特異点の位置が初期条件に依存しない」(解の極の位置は初期条件に依存してもよい) ものを分類せよ .

この問題を研究していた P.Painlevé と B.Gambier はパンルヴェ方程式といわれる次の 6 種類の方程式を發

見した．

$$P_I \quad y'' = 6y^2 + t,$$

$$P_{II} \quad y'' = 2y^3 + ty + \alpha,$$

$$P_{III} \quad y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},$$

$$P_{IV} \quad y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y},$$

$$P_V \quad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) (y')^2 - \frac{1}{t}y' + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{t} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1},$$

$$P_{VI} \quad y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) (y')^2 - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) y' \\ + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left\{ \alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right\}.$$

一方，このパンルヴェ方程式の発見後の 1905 年に R.Fuchs は， \mathbb{P}^1 上に 4 つの確定特異点と 1 つの見かけの特異点をもつ 2 階の Fuchs 型方程式を考えた．その方程式において，モノドロミー表現を不変にするためには，アクセサリー・パラメータの 1 つが P_{VI} を満たさなければならないことを発見した．L.Schlesinger は R.Fuchs の発見をうけ，ベックルンド変換と呼ばれる P_{VI} のパラメータのみを変化させる変換を見つけた．また，確定特異点だけでなく不確定特異点に対して，同様の計算が R.Garnier によって行われ， $P_I \sim P_V$ を導いた．しかし，R.Garnier は形式的に計算をただけであったが，上野喜三雄によって意味づけがなされた．さらに岡本和夫はこれらの $P_I \sim P_{VI}$ のハミルトン構造を発見した．

ところで，パンルヴェ方程式の一般解は本当に新しい関数になっているのかという問題があった．この問題に現代的な定式化を与えたのは，梅村浩である．梅村は古典関数を有理関数から出発して，既知関数の加減乗除と微分，既知関数を係数とする代数方程式を解く，既知関数を係数とする線形常微分方程式を解く，アーベル関数に既知関数を代入する—以上の操作を有限回繰り返して得られるもの

と定義し，古典関数でないものを“新しい関数”とした．さらに梅村は，「パンルヴェ方程式の解が古典関数ならば，代数関数が線形方程式の解を使ってかける」ということを証明した．このことにより「パンルヴェ方程式の古典解をすべて決定する」という問題が生まれた．この問題は，2008 年に P_{VI} までの代数解が完全に見つかったことにより解決し，パンルヴェ方程式の一般解は本当に新しい関数になっているということがわかった．

1.3 本論文の内容

ここでは，研究しているベックルンド変換という言葉の説明をしておく．次の 1 階の連立微分方程式

$$\begin{cases} q' = p - q^2 - \frac{t}{2}, \\ p' = 2qp + \alpha + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.3)$$

を例にして考える（ただし， $' = d/dt$ であり α は複素パラメータである）．この q, p に対して，

$$\begin{cases} Q = -q, \\ P = -p + 2q^2 + t \end{cases}$$

という変換を施すと, (1.3) のパラメータ α が $-\alpha$ に変換される. 実際,

$$\begin{aligned} Q' &= -q' = -\left(p - q^2 - \frac{t}{2}\right) = P - Q^2 - \frac{t}{2}, \\ P' &= -p' + 4qq' + 1 = -\left(2qp + \alpha + \frac{1}{2}\right) + 4q\left(p - q^2 - \frac{t}{2}\right) + 1 = 2QP - \alpha + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となっている. このようにパラメータを除いて, 方程式の形を変えない変換をベックルンド変換という.

この論文では, 東京大学の坂井秀隆, 川上拓志, 中村あかねによって定義された II 型行列パルヴェ方程式および笹野祐輔によって定義された結合型パルヴェ第 II 方程式のベックルンド変換を考察する. ベックルンド変換を求めることにより, 一つの解から他の解を構成していくことができ, 有理解・代数解をすべて求めるときに有用である. 詳細は, 三重大学大学院でともに研究を進めた野田真司の修士論文を参照されたい.

2 II 型パルヴェ方程式

II 型パルヴェ方程式の性質をあとで使うので, この章で II 型パルヴェ方程式のベックルンド変換と τ 関数について紹介しておく.

2.1 ベックルンド変換

II 型パルヴェ方程式

$$P_{II}: \quad y'' = 2y^3 + ty + \alpha \quad (2.1)$$

を考える ($' = d/dt$, α : 複素パラメータ). 高階の非線形微分方程式は, それと等価な 1 階の連立形の方程式に書き直しておく方が都合の良いことも多い. そこで,

$$q = y, \quad p = y' + y^2 + \frac{t}{2}$$

とおこう. そうすると, II 型パルヴェ方程式は,

$$H_{II}: \quad \begin{cases} q' = p - q^2 - \frac{t}{2}, \\ p' = 2qp + \alpha + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.2)$$

と等価である. 今, 3 つの変数 q, p, t についての多項式 $H = H(q, p; t)$ を

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \left(q^2 + \frac{t}{2}\right)p - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)q \quad (2.3)$$

で定義すると H_{II} は

$$\begin{cases} q' = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ p' = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2.4)$$

と表すことができる.

定義 8 1 個の関数 $H = H(q, p; t)$ を用いて (2.4) のような形に表される連立形の方程式をハミルトン系といい, H をそのハミルトニアンという.

II 型パルヴェ方程式

$$q'' = 2q^3 + tq + \alpha \quad (2.5)$$

のハミルトニアン (2.3) を t で微分すると,

$$H' = -\frac{1}{2}p, \quad (2.6)$$

$$H'' = -\frac{1}{2}\left(2qp + \alpha + \frac{1}{2}\right) \quad (2.7)$$

となる. これより,

$$p = -2H', \quad q = \frac{2H'' + \alpha + 1/2}{4H'} \quad (2.8)$$

となるから, H は次の微分方程式をみたすことがわかる.

$$(H'')^2 + 4(H')^3 + 2H'(tH' - H) - \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 = 0. \quad (2.9)$$

逆に, (2.9) を満たす解は, (2.8) により p, q で表すことで II 型パルヴェ方程式を満たす. ここで (2.9) を見ると, α を $-\alpha - 1$ とおいても方程式が不変になることがわかる. つまり (2.8) において, α を $-\alpha - 1$ としたものも (2.9) を満たす. そこで (2.8) の p, q を $p = \varphi(H', H'', \alpha)$, $q = \psi(H', H'', \alpha)$ とおいたとき, $P = \varphi(H', H'', -\alpha - 1)$, $Q = \psi(H', H'', -\alpha - 1)$ とおくと,

$$P = -2H', \quad Q = \frac{2H'' - \alpha - 1/2}{4H'} \quad (2.10)$$

となる. (2.10) は (2.9) を満たすことから II 型パルヴェ方程式の解である. また, p, q と P, Q はともに H', H'', α を使って記述できることから, p, q を P, Q で表すことができる. この関係式がベックルンド変換に他ならない. そこで, p, q と P, Q との関係を求めると,

$$p = P, \quad q = Q - \frac{\alpha + 1/2}{P}$$

となる. 以上のことをまとめると次が成り立つ.

命題 2 パラメータ α を $-\alpha - 1$ にするベックルンド変換は次で与えられる.

$$\begin{cases} q = Q - \frac{\alpha + 1/2}{P}, \\ p = P. \end{cases} \quad (2.11)$$

また, (2.5) において $q = -Q$ とおくと,

$$Q'' = 2Q^3 + tQ - \alpha$$

となることから, パラメータ α が $-\alpha$ になっていることがわかる. このとき, p を $p = -P + 2Q^2 + t$ とおくと,

$$\begin{cases} Q' = P - Q^2 - \frac{t}{2}, \\ P' = 2QP - \alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$$

となり，ハミルトン系を不変に保つことができる．

命題 3 パラメータ α を $-\alpha$ にするベックルンド変換は次で与えられる．

$$\begin{cases} q = -Q, \\ p = -P + 2Q^2 + t. \end{cases} \quad (2.12)$$

II 型パnulヴェ方程式には，上記のベックルンド変換以外にも以下のベックルンド変換が知られている．

定理 1 (1) α を $\alpha + 1$ に変える ベックルンド変換 $(q, p, H, t) \longrightarrow (Q, P, K, t)$ は次で与えられる．

$$q = -Q + \frac{\alpha + 1/2}{P - 2Q^2 - t}, \quad p = -P + 2Q^2 + t, \quad H = K + Q. \quad (2.13)$$

(2) α を $\alpha - 1$ に変える ベックルンド変換 $(q, p, H, t) \longrightarrow (Q, P, K, t)$ は次で与えられる．

$$q = -Q - \frac{\alpha - 1/2}{P}, \quad p = -P + 2 \left(Q + \frac{\alpha - 1/2}{P} \right)^2 + t, \quad H = K + Q + \frac{\alpha - 1/2}{P}. \quad (2.14)$$

2.2 τ 関数

ベックルンド変換によって有理解を次々と構成していくことができるが，前節のベックルンド変換を計算することはやや計算量が多くて大変なものである．この節で τ 関数を定義することで，そのベックルンド変換の計算量を軽減することができることを紹介する．

ハミルトン系 (q, p, H, t) を (q_0, p_0, H_0, t) と表し，このハミルトン系に正準変換 (2.13) を n 回 ($n \geq 0$) ほどこしたものを (q_n, p_n, H_n, t) と表す．同様に正準変換 (2.14) を n 回 ($n \geq 0$) ほどこしたものを $(q_{-n}, p_{-n}, H_{-n}, t)$ と表す．さらに τ_n を

$$\frac{d}{dt} \log \tau_n = H_n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.15)$$

となる関数とする．

定義 9 (2.15) の関数を τ 関数という．

注意 1 τ_n は定数倍の不定性がある．

命題 4 (1) $q_{n+1}, \tau_n, \tau_{n+1}$ は次をみたす．

$$q_{n+1} = - \left(\log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right)'.$$

(2) 定数 c_n を適切にえらぶことにより $\tau_{n-1}, \tau_n, \tau_{n+1}$ は

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \tau_n = c_n \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

をみたす．

証明 (1) (q_n, p_n, H_n, t) と $(q_{n+1}, p_{n+1}, H_{n+1}, t)$ の関係は

$$q_n = -q_{n+1} + \frac{\alpha + n + 1/2}{p_{n+1} - 2q_{n+1}^2 - t}, \quad (2.16)$$

$$p_n = -p_{n+1} + 2q_{n+1}^2 + t, \quad (2.17)$$

$$H_n = H_{n+1} + q_{n+1} \quad (2.18)$$

であった．故に (2.18) より

$$q_{n+1} = -H_{n+1} + H_n = -\frac{d}{dt} \log \tau_{n+1} + \frac{d}{dt} \log \tau_n = -\left(\log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\right)'.$$

(2) $(\log H'_n)'$ を計算すると，

$$(\log H'_n)' = \left\{ \log \left(-\frac{p_n}{2} \right) \right\}' = \frac{p'_n}{p_n} = \frac{2q_n p_n + \alpha + n + 1/2}{p_n}$$

となる．一方， $\left(\log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}\right)'$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \left(\log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}\right)' &= \left(\log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\right)' - \left(\log \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right)' \\ &= -q_{n+1} + q_n \\ &= q_n - \frac{\alpha + n + 1/2}{p_{n+1} - 2q_{n+1}^2 - t} + q_n \quad ((2.16) \text{ より}) \\ &= 2q_n + \frac{\alpha + n + 1/2}{p_n} \quad ((2.17) \text{ より}) \\ &= \frac{2q_n p_n + \alpha + n + 1/2}{p_n}. \end{aligned}$$

故に $(\log H'_n)' = \left(\log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}\right)'$ となることから，

$$\begin{aligned} \log H'_n &= \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} + C \\ H'_n &= c_n \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \quad (c_n = e^C) \end{aligned}$$

より主張が得られる．

(証明終)

注意 2 定理の証明より $c_n \neq 0$ がわかる．

ここで τ 関数の具体的な形を求めておく． $\alpha = 0$ のときの P_{II} の唯一の有理解 $(q, p) = (0, t/2)$ を持っていることが知られている (野田の論文参照 [7])．この解に定理 1 (2) のベックルンド変換を施し， $\alpha = -1$ のときの有理解を求めると $(q, p) = (1/t, t/2)$ が得られる．それぞれの (q, p) をハミルトニアン H に代入すると，

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\longrightarrow H = \frac{t^2}{8} - \frac{t^2}{4} = -\frac{t^2}{8}, \\ \alpha = -1 &\longrightarrow H = \frac{t^2}{8} - \left(\frac{1}{t^2} + \frac{t}{2}\right) \frac{t}{2} + \frac{1}{2t} = -\frac{t^2}{8} \end{aligned}$$

がわかる．このことをふまえると τ_0, τ_{-1} は

$$\tau_0 = \tau_{-1} = c_0 \times \exp\left(-\frac{t^3}{24}\right)$$

となる． τ 関数の不定性があったので， $c_0 = 1$ としておこう．ここで，命題 4(2) を用いると次の命題が成り立つ．

命題 5 (1) $\tau_n = c\tau_{-n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}, c$ は定数).

(2) τ_n は $(t$ の有理関数) $\times \exp(-t^3/24)$ という形をしている．

また，次のことが知られている．

定理 2 τ_n は \mathbb{C} 上で正則である．

このことを認めると， τ_n は $(t$ の多項式) $\times \exp(-t^3/24)$ という形をしている．このことをふまえ次の定義をもうける．

定義 10 $\tau_n = P_n \times \exp(-t^3/24)$ となるモニック多項式 P_n を Yablonskii-Vorob'ev の多項式と呼ぶ．

また，この論文には直接関係ないが，笹野系の有理解を構成するときに必要な τ_n, τ_{n+1} の関係式を導いておく．

補題 1 II 型バシルヴェ方程式の τ 関数は次をみtas．

$$\tau_n''\tau_{n+1} - 2\tau_n'\tau_{n+1}' + \tau_n\tau_{n+1}'' + \frac{t}{2}\tau_n\tau_{n+1} = 0.$$

特に $\tau_n = \exp(-t^3/24) \cdot P_n$ として P_n を定めると， P_n は $D^2(P_n \cdot P_{n+1}) = 0$ をみtas．

証明 $\frac{dH_n}{dt} = -\frac{p_n}{2}$, $\frac{dH_{n+1}}{dt} = -\frac{p_{n+1}}{2}$ と定理 1(1) の $p = -P + 2Q^2 + t$ より

$$\begin{aligned} p = -P + 2Q^2 + t &\longrightarrow P + p - 2Q^2 - t = 0 \\ &\longrightarrow p_{n+1} + p_n - 2q_{n+1}^2 - t = 0 \\ &\longrightarrow -2\frac{dH_{n+1}}{dt} - 2\frac{dH_n}{dt} - 2q_{n+1}^2 - t = 0 \\ &\longrightarrow 2\left(\frac{d}{dt} \log \tau_{n+1}\right)' + 2\left(\frac{d}{dt} \log \tau_n\right)' + 2q_{n+1}^2 + t = 0 \\ &\longrightarrow \frac{\tau_{n+1}''}{\tau_{n+1}} - \left(\frac{\tau_{n+1}'}{\tau_{n+1}}\right)^2 + \frac{\tau_n''}{\tau_n} - \left(\frac{\tau_n'}{\tau_n}\right)^2 + q_{n+1}^2 + \frac{t}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

また，定理 1(1) の $H = K + Q$ より

$$\begin{aligned} H = K + Q &\longrightarrow H_n = H_{n+1} + q_{n+1} \\ &\longrightarrow q_{n+1} = \frac{\tau_n'}{\tau_n} - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_{n+1}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる．故に (2.20) を (2.19) に代入すれば主張が得られる．また後半の主張は , 左辺に $\tau_n = \exp(-t^3/24) \cdot P_n$ を代入すると ,

$$(P_n'' P_{n+1} - 2P_n' P_{n+1}' + P_n P_{n+1}'') \exp\left(-\frac{t^3}{24}\right)$$

となることから従う．

(証明終)

3 II 型行列パウルヴェ方程式

この章では, 坂井秀隆, 川上拓志, 中村あかねによって定義された II 型行列パウルヴェ方程式のベックルンド変換について考察していく．

3.1 ハミルトニアンを満たす微分方程式から従うベックルンド変換

定義 11 次の H :

$$\begin{aligned} H\left(\begin{array}{c} \theta^0 \\ \theta_1^\infty, \theta_2^\infty, \theta_3^\infty \end{array}; t; \begin{array}{c} q_1, p_1 \\ q_2, p_2 \end{array}\right) &= \text{tr}[P^2 - (Q^2 + t)P - \theta_1^\infty Q], \\ Q &= \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ -q_2 & q_1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1/2 & -p_2 \\ p_2 q_2 - \theta_1^\infty - \theta_2^\infty & p_1/2 \end{pmatrix}, \\ R &= \theta_1^\infty I_2 + \begin{pmatrix} \theta_2^\infty & 0 \\ 0 & \theta_3^\infty \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ただし, P, Q, R は $PQ - QP = R$ をみたすとする.)

をハミルトニアンとする, ハミルトン系

$$\begin{cases} q_1' = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 - q_1^2 + q_2 - t, \\ q_2' = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -4q_1 q_2 - 4q_2 p_2 + 2\theta_1 + 2\theta_2, \\ p_1' = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 2q_1 p_1 + 4p_2 q_2 - 2\theta_2, \\ p_2' = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 2p_2^2 - p_1 + 4q_1 p_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

を II 型行列パウルヴェ方程式という．

この II 型行列パウルヴェ方程式のベックルンド変換を求める．ベックルンド変換を求めるためには, II 型パウルヴェ方程式 P_{II} の場合と同様に H の満たす微分方程式を求める必要がある．まず, ハミルトニアン H は

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 - 2(q_2 p_2 - \theta_1 - \theta_2)p_2 - (q_1^2 - q_2 + t)p_1 - 2q_1(q_2 p_2 - \theta_1 - \theta_2) - 2q_1 q_2 p_2 - 2\theta_1 q_1 \quad (3.2)$$

で与えられる^{*1}． H', H'', H''', H'''' をそれぞれ q_1, q_2, p_1, p_2 で表すと以下ようになる．

$$\begin{aligned} H' &= -p_1, \\ H'' &= -2q_1 p_1 - 4q_2 p_2 + 2\theta_2, \\ H''' &= -2p_1^2 + 2(t - q_1^2 + q_2)p_1 - 8q_1 q_2 p_2 + 4q_1 \theta_2 + 8q_2 p_2^2 - 8p_2(\theta_1 + \theta_2), \\ H'''' &= -12q_1 p_1^2 + 2(4t q_1 - 24q_2 p_2 + 6\theta_1 + 12\theta_2 + 1)p_1 + 48q_1 q_2 p_2^2 + 16t q_2 p_2 - 8t \theta_2 - 48q_1 p_2(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

^{*1} $\theta_1^\infty, \theta_2^\infty, \theta_3^\infty$ を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とおいておく．

ここから q_1, p_1 を q_2, p_2, H', H'' で表すと,

$$\begin{aligned} p_1 &= -H', \\ q_1 &= \frac{H'' + 4q_2p_2 - 2\theta_2}{2H'} \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる. これらを H, H''', H'''' に代入すると,

$$\begin{aligned} H &= \frac{(H'')^2 + 2(H')^3 - 4(q_2 - t)(H')^2 - 8p_2H'(q_2p_2 - \theta_1 - \theta_2) - 16q_2^2p_2^2 - 4\theta_2^2 + 16q_2p_2\theta_2}{4H'}, \\ H''' &= \frac{(H'')^2 - 4(H')^3 - 4(q_2 + t)(H')^2 + 16p_2H'(q_2p_2 - \theta_1 - \theta_2) - 16q_2^2p_2^2 - 4\theta_2^2 + 16q_2p_2\theta_2}{2H'}, \\ H'''' &= -\frac{2\{(1 - 12q_2p_2 + 3H'' + 6\theta_1 + 6\theta_2)(H')^2 + \{2tH' - 12p_2(q_2p_2 - \theta_1 - \theta_2)\}H'' + 24p_2(-\theta_2^2 - 2q_2^2p_2^2 + 2q_2p_2\theta_1 + 3q_2p_2\theta_2 - 2\theta_2\theta_1)\}}{H'} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$2H - H''' = 3(H')^2 + 4tH' - 12p_2(q_2p_2 - \theta_1 - \theta_2)$$

となり, q_2 を p_2 と H, H', H'', H''' の有理式で表すと,

$$q_2 = \frac{4tH' + 3(H')^2 + 12p_2(\theta_1 + \theta_2) - 2H + H'''}{12p_2^2}$$

となる. この q_2 を H'''' に代入することにより, p_2 を H, H', H'', H''', H'''' の有理式で表すことができ, さらにこれらを (3.3) に代入することにより, q_1 を H, H', H'', H''', H'''' の有理式で表すことができる. これらを (3.2) に代入すると, H の満たす微分方程式が得られる.

命題 6 H の満たす微分方程式は,

$$\begin{aligned} &\frac{2H + 2tH' - H'''}{6} + \frac{\{H'''' + 4H''(3H' + t) + 2H' - 12H'\theta_1\}\{H'''' + 4H''(3H' + t) + 2H' + 12H'\theta_1\}}{48H'\{H'''' + 2H'(2t + 3H') - 2H\}} \\ &- \frac{\{H'''' + 2H''(3H' + 2t) + 2H' - 12H'(\theta_1 + \theta_2)\}\{H'''' + 2H''(3H' + 2t) + 2H' + 12H'(\theta_1 + \theta_2)\}}{48H'\{H'''' + H'(4t + 3H') - 2H\}} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

である.

(3.4) に, パラメータに関する条件, $\theta_1 = -(\theta_2 + \theta_3)/2$ を代入すると,

$$\begin{aligned} &\frac{2H + 2tH' - H'''}{6} + \frac{\{H'''' + 4H''(3H' + t) + 2H' + 6H'(\theta_2 + \theta_3)\}\{H'''' + 4H''(3H' + t) + 2H' - 6H'(\theta_2 + \theta_3)\}}{48H'\{H'''' + 2H'(2t + 3H') - 2H\}} \\ &- \frac{\{H'''' + 2H''(3H' + 2t) + 2H' - 12H'(\theta_2 - \theta_3)\}\{H'''' + 2H''(3H' + 2t) + 2H' + 12H'(\theta_2 - \theta_3)\}}{48H'\{H'''' + H'(4t + 3H') - 2H\}} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. ここで (3.5) において, $(\theta_2, \theta_3) = (-\theta_2, -\theta_3)$ としても方程式は不変であることがわかる. また, (3.5) で $(\theta_2, \theta_3) = (\theta_3, \theta_2)$ としても方程式は不変であることがわかる.

どのようにしてベックルンド変換が得られるのかを説明する. H の満たす微分方程式を導く過程において, q_1, q_2, p_1, p_2 をそれぞれ H, H', H'', H''', H'''' , θ_1, θ_2 で表した. それらを

$$\begin{cases} q_1 = \xi(H, H', H'', H''', H'''', \theta_1, \theta_2), \\ q_2 = \rho(H, H', H'', H''', H'''', \theta_1, \theta_2), \\ p_1 = \sigma(H, H', H'', H''', H'''', \theta_1, \theta_2), \\ p_2 = \omega(H, H', H'', H''', H'''', \theta_1, \theta_2) \end{cases} \quad (3.6)$$

とおく．そこで Q_1, Q_2, P_1, P_2 を

$$\begin{cases} Q_1 = \xi(H, H', H'', H''', H'''' , -\theta_1, -\theta_2), \\ Q_2 = \rho(H, H', H'', H''', H'''' , -\theta_1, -\theta_2), \\ P_1 = \sigma(H, H', H'', H''', H'''' , -\theta_1, -\theta_2), \\ P_2 = \omega(H, H', H'', H''', H'''' , -\theta_1, -\theta_2) \end{cases} \quad (3.7)$$

とおく．また (3.6) の連立方程式から H, H', H'', H''', H'''' をそれぞれ q_1, q_2, p_1, p_2 で表すことができる．この関係式を (3.7) の右辺に代入することにより， Q_1, Q_2, P_1, P_2 をそれぞれ q_1, q_2, p_1, p_2 で表すことができる．この関係式がベックルンド変換を与える．

命題 7 (θ_2, θ_3) を $(-\theta_2, -\theta_3)$ にするベックルンド変換，すなわち (θ_1, θ_2) を $(-\theta_1, -\theta_2)$ にするベックルンド変換は次で与えられる．

$$\begin{cases} q_1 = \frac{P_1(Q_1 P_1 + 2\theta_1) + 4Q_1 P_2(Q_2 P_2 - \theta_1 - \theta_2)}{P_1^2 + 4Q_2 P_2^2 - 4P_2(\theta_1 + \theta_2)}, \\ q_2 = \frac{\{P_1^2 + 4P_2(Q_2 P_2 - \theta_2)\}[Q_2\{P_1^2 + 4P_2(Q_2 P_2 - \theta_2)\} - 4\theta_1(\theta_1 + \theta_2)]}{\{P_1^2 + 4Q_2 P_2^2 - 4P_2(\theta_1 + \theta_2)\}^2}, \\ p_1 = P_1, \\ p_2 = \frac{(Q_2 P_2 - \theta_1 - \theta_2)\{P_1^2 + 4Q_2 P_2^2 - 4P_2(\theta_1 + \theta_2)\}}{Q_2\{P_1^2 + 4P_2(Q_2 P_2 - \theta_2)\} - 4\theta_1(\theta_1 + \theta_2)}. \end{cases}$$

命題 8 (θ_2, θ_3) を (θ_3, θ_2) にするベックルンド変換は次で与えられる．

$$\begin{cases} q_1 = Q_1, \\ q_2 = Q_2, \\ p_1 = P_1, \\ p_2 = P_2 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{Q_2}. \end{cases}$$

3.2 q_1 に関する単独高階化とベックルンド変換

II 型行列パルヴェ方程式のハミルトン系 (3.1) から $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$ として q_2, p_1, p_2 を消去し， q_1 だけの単独高階化方程式にする．(3.1) の第 1 式から p_1 について解くと，

$$p_1 = q_1' + q_1^2 - q_2 + t$$

となる．これを (3.1) の第 3 式，第 4 式に代入する．

$$q_1'' + 2q_1 q_1' - q_2' + 1 = 2q_1(q_1' + q_1^2 - q_2 + t) + 4q_2 p_2 - 2\theta_2, \quad (3.8)$$

$$p_2' = 2p_2^2 - (q_1' + q_1^2 - q_2 + t) + 4q_1 p_2. \quad (3.9)$$

(3.9) から q_2' について解き，それを (3.1) の第 2 式に代入する．

$$q_1'' - 2q_1^3 + 6q_1 q_2 - 2t q_1 - 2\theta_1 + 1 = 0.$$

これを q_2 について解くと，

$$q_2 = \frac{-q_1'' + 2q_1^3 + 2t q_1 + 2\theta_1 - 1}{6q_1}$$

となる．この q_2 を (3.6) に代入すると， $(p_2, p'_2, q_1, q'_1, q''_1)$ に関する式が得られる．また， q_2 を (3.1) の第 2 式に代入すると， (p_2, q_1, q'_1, q''_1) に関する式が得られる．この 2 つの式から p_2 を消去することにより， q_1 に関する単独高階化方程式が得られる．

命題 9 (3.1) から q_1 に関する単独高階化方程式にすると次の方程式が得られる．

$$\begin{aligned} & \frac{16tq_1^2 - 44q_1^4 + 10q_1''q_1 + 4q_1 - 8\theta_1q_1 - 9(q_1')^2}{24q_1^2} \\ & + \frac{\{q_1''' - 2q_1'(3q_1^2 + t) - 2q_1(3q_1'' - 6q_1^3 - 6q_1t + 6\theta_2 + 4)\}\{q_1''' - 2q_1'(t + 3q_1^2) + 2q_1(3q_1'' - 6q_1^3 - 6q_1t + 6\theta_2 + 2)\}}{8(2q_1^3 - q_1'' + 2tq_1 + 2\theta_1 - 1)^2} \\ & + \frac{q_1'q_1''' + 72q_1^3\theta_2 - 72q_1^4t - 2t(q_1')^2 - q_1''''q_1 + 6q_1^2(q_1')^2 + 2q_1''q_1t - 72q_1^6 + 36q_1^3 + 2q_1q_1' + 42q_1''q_1^3}{4q_1(q_1'' - 2q_1^3 - 2q_1t - 2\theta_1 + 1)} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.10) において II 型パンルヴェ方程式 P_{II} のときと同様に $q_1 = -q_1$ とおこう．そうすると，(3.10) はパラメータのおきかえ

$$\begin{cases} \theta_1 = 1 - \theta_1, \\ \theta_2 = -1 - \theta_2. \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1 = 1 - \theta_1, \\ \theta_2 = 2\theta_1 + \theta_2 - 1 \end{cases}$$

をのぞいて不変であることがわかる．このことから以下のベックルンド変換が得られる．

命題 10 (θ_1, θ_2) を $(1 - \theta_1, -1 - \theta_2)$ にするベックルンド変換 は次のようになる．

$$\begin{cases} q_1 = -Q_1, \\ q_2 = Q_2, \\ p_1 = -P_1 + 2Q_1^2 - 2Q_2 + 2t, \\ p_2 = P_2 + 2Q_1 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{Q_2}. \end{cases}$$

命題 11 (θ_1, θ_2) を $(1 - \theta_1, 2\theta_1 + \theta_2 - 1)$ にするベックルンド変換 は次のようになる．

$$\begin{cases} q_1 = -Q_1, \\ q_2 = Q_2, \\ p_1 = -P_1 + 2Q_1^2 - 2Q_2 + 2t, \\ p_2 = P_2 + 2Q_1. \end{cases}$$

ここで，命題 7 の変換をした後に，命題 11 の変換を施すと， (θ_1, θ_2) を $(\theta_1 + 1, -2\theta_1 - \theta_2 - 1)$ にするベックルンド変換 ができる．

命題 12 (θ_1, θ_2) を $(\theta_1 + 1, -2\theta_1 - \theta_2 - 1)$ にするベックルンド変換 は次のようになる .

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -Q_1 - \frac{2\theta_1(P_1 - 2Q_1^2 + 2Q_2 - 2t)}{P_1(P_1 - 4Q_1^2 + 4Q_2 - 4t) + 4Q_1^2(Q_1^2 + 2Q_2 + 2t) + 4Q_2(Q_2 + P_2^2 + 4Q_1P_2 - 2t) + 4t^2 + 4(P_2 + 2Q_1)(\theta_1 + \theta_2)}, \\ q_2 = Q_2 - \frac{4\theta_1(4Q_1Q_2 + 2P_2Q_2 + \theta_2)}{P_1(P_1 - 4Q_1^2 + 4Q_2 - 4t) + 4Q_1^2(Q_1^2 + 2Q_2 + 2t) + 4Q_2(Q_2 + P_2^2 + 4Q_1P_2 - 2t) + 4t^2 + 4(P_2 + 2Q_1)(\theta_1 + \theta_2)} \\ \quad - \frac{4\theta_1^2(P_1 - 2Q_1^2 + 2Q_2 - 2t)^2}{\{P_1(P_1 - 4Q_1^2 + 4Q_2 - 4t) + 4Q_1^2(Q_1^2 + 2Q_2 + 2t) + 4Q_2(Q_2 + P_2^2 + 4Q_1P_2 - 2t) + 4t^2 + 4(P_2 + 2Q_1)(\theta_1 + \theta_2)\}^2}, \\ p_1 = -P_1 + 2Q_1^2 - 2Q_2 + 2t, \\ p_2 = 2Q_1 + P_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{Q_2} \\ \quad + \frac{4\theta_1(2Q_1Q_2 + P_2Q_2 + \theta_1 + \theta_2)^2}{Q_2^2\{P_1(P_1 - 4Q_1^2 + 4Q_2 - 4t) + 4Q_1^2(Q_1^2 + 2Q_2 + 2t) + 4Q_2(Q_2 + P_2^2 + 4Q_1P_2 - 2t) + 4t^2 + 4\theta_2(P_2 + 2Q_1)\} - 4Q_2\theta_1(\theta_1 + \theta_2)}. \end{array} \right.$$

また , 合成の順序を逆にすると , (θ_1, θ_2) を $(\theta_1 - 1, -2\theta_1 - \theta_2 + 1)$ にするベックルンド変換 ができる .

命題 13 (θ_1, θ_2) を $(\theta_1 - 1, -2\theta_1 - \theta_2 + 1)$ にするベックルンド変換 は次のようになる .

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -Q_1 - \frac{2P_1(\theta_1 - 1)}{P_1^2 + 4P_2^2Q_2 + 4P_2\theta_1 + 4P_2\theta_2}, \\ q_2 = Q_2 + \frac{4(\theta_1 - 1)(2P_2Q_2 + \theta_1 + \theta_2)}{P_1^2 + 4P_2^2Q_2 + 4P_2\theta_1 + 4P_2\theta_2} + \frac{16P_2(\theta_1 - 1)^2(P_2Q_2 + \theta_1 + \theta_2)}{(P_1^2 + 4P_2^2Q_2 + 4P_2\theta_1 + 4P_2\theta_2)^2}, \\ p_1 = -P_1 + 2Q_1^2 - 2Q_2 + 2t + \frac{8(\theta_1 - 1)(P_1Q_1 - 2P_2Q_2 - \theta_2 - 1)}{P_1^2 + 4P_2^2Q_2 + 4P_2\theta_1 + 4P_2\theta_2} - \frac{64P_2(\theta_1 - 1)^2(P_2Q_2 + \theta_1 + \theta_2)}{(P_1^2 + 4P_2^2Q_2 + 4P_2\theta_1 + 4P_2\theta_2)^2}, \\ p_2 = P_2 + 2Q_1 + \frac{4P_1(\theta_1 - 1)}{P_1^2 + 4P_2^2Q_2 + 4P_2\theta_1 + 4P_2\theta_2} \\ \quad + \frac{(4P_2^2Q_2\theta_2 + 4P_2^2Q_2 + 4P_2\theta_2^2 + P_1^2\theta_1 + 4P_2\theta_1\theta_2 + P_1^2\theta_2 + 4P_2\theta_1 + 4P_2\theta_2)}{(Q_2P_1^2 + 8P_2Q_2\theta_1 + 4P_2Q_2\theta_2 - 4P_2Q_2 + 4P_2^2Q_2^2 - 4\theta_1 + 4\theta_1^2 - 4\theta_2 + 4\theta_2\theta_1)}. \end{array} \right.$$

野田氏は , 命題 12 , 命題 13 のベックルンド変換が定義できない場合として得られる , 次のような方程式系

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1' + q_1^2 - q_2 + t = 0, \\ q_2' + 4q_1q_2 - 2\theta_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

を考えた . 有理解を決定するとき , この方程式系のベックルンド変換も必要となるので , ここでその具体形を与えておく . まず , 方程式系から q_2 を消去し , q_1 だけの式にすると ,

$$q_1'' + 6q_1q_1' + 4q_1^3 + 4tq_1 - 2\theta_1 + 1 = 0 \quad (3.12)$$

となる . また (3.12) 式において , $q_1 = u'/(2u)$ とおくと ,

$$u''' + 4tu' - 2(2\theta_1 - 1)u = 0 \quad (3.13)$$

という線形方程式になる . ここで , $v = u'$ とおくと ,

$$v''' = (u''')' = \{-4tu' + 2(2\theta_1 - 1)u\}' = -4tu'' - 2(3 - 2\theta_1)u' = -4tv' + 2(2\theta_1 - 3)v$$

となることから , v の満たす微分方程式は次のようになる .

$$v''' + 4tv' - 2(2\theta_1 - 3)v = 0. \quad (3.14)$$

(3.13) と (3.14) を見比べると θ_1 が $\theta_1 - 1$ になっていることがわかる . すなわち , $v = u'$ とおくことで , θ_1 が $\theta_1 - 1$ となるベックルンド変換が得られる . これを q_1, q_2 に関する変換にすると次が成り立つ .

命題 14 θ_1 を $\theta_1 - 1$ にするベックルンド変換 $(q_1, q_2, \theta_1) \longrightarrow (Q_1, Q_2, \theta_1 - 1)$ は次で与えられる .

$$\begin{cases} q_1 = \frac{2\theta_1 - 1}{2(Q_1^2 + Q_2 + t)}, \\ q_2 = \frac{(2\theta_1 - 1)Q_1}{Q_1^2 + Q_2 + t} - \frac{(2\theta_1 - 1)^2}{4(Q_1^2 + Q_2 + t)^2} + t. \end{cases}$$

証明 $v = u', w = u''$ として q_1, q_2 を u, v, w で表すと ,

$$q_1 = \frac{v}{2u}, \quad q_2 = \frac{w}{2u} + t - \frac{v^2}{4u^2}. \quad (3.15)$$

また , w' を u, v, w で表す . (3.13) を用いると ,

$$w' = u''' = -4tu' + 2(2\theta_1 - 1)u = -4tv + 2(2\theta_1 - 1)u$$

となる . ここで , q_1, q_2, u, v, w を Q_1, Q_2, u', v', w' におきかえる . このときの Q_1, Q_2 を u, v, w で表すと ,

$$Q_1 = \frac{w}{v}, \quad Q_2 = \frac{w'}{2v} - \frac{w^2}{4v^2} + t = (2\theta_1 - 1)\frac{u}{v} - \frac{w^2}{4v^2} - t$$

となる . この Q_1, Q_2 に (3.15) から得られる

$$w = 2uq_2 + \frac{v^2}{2u} - 2ut$$

を代入して q_1, q_2 で表すと ,

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{q_1^2 + q_2 - t}{2q_1}, \\ Q_2 = \frac{2\theta_1 - 1}{2q_1} - \left(\frac{q_1^2 + q_2 - t}{2q_1} \right)^2 - t \end{cases} \quad (3.16)$$

が得られる . この式で q_1, q_2 について解くと , 主張の式が得られる . (証明終)

上の証明の中の (3.16) の変換は $\theta_1 - 1$ を θ_1 にするベックルンド変換である . ここで $\theta_1 = \theta_1 + 1$ として (Q_1, Q_2) と (q_1, q_2) を入れかえると , θ_1 を $\theta_1 + 1$ にするベックルンド変換が得られる .

命題 15 θ_1 を $\theta_1 + 1$ にするベックルンド変換 $(q_1, q_2, \theta_1) \longrightarrow (Q_1, Q_2, \theta_1 + 1)$ は次で与えられる .

$$\begin{cases} q_1 = \frac{Q_1^2 + Q_2 - t}{2Q_1}, \\ q_2 = \frac{2\theta_1 + 1}{2Q_1} - \left(\frac{Q_1^2 + Q_2 - t}{2Q_1} \right)^2 - t. \end{cases}$$

4 結合型パンルヴェ第 方程式

この章では , 笹野祐輔によって定義された結合型パンルヴェ第 方程式 ($A_4^{(1)}$ 型笹野系) のベックルンド変換を考える .

4.1 ベックルンド変換

定義 12 次の H :

$$H = -x^2y + \frac{y^2}{2} - \frac{ty}{2} - \alpha_1x - z^2w + \frac{w^2}{2} - \frac{tw}{2} - \alpha_2z + yw \quad (4.1)$$

をハミルトニアンとする, 次のハミルトン系

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} = -x^2 + y + w - \frac{t}{2}, \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2xy + \alpha_1, \\ z' = \frac{\partial H}{\partial w} = -z^2 + y + w - \frac{t}{2}, \\ w' = -\frac{\partial H}{\partial z} = 2zw + \alpha_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

を結合型パンルヴェ第 方程式 ($A_4^{(1)}$ 型笹野系) という

この $A_4^{(1)}$ 型笹野系 のベックルンド変換を求める. II 型パンルヴェ方程式, 行列 II 型パンルヴェ方程式の時と同様に, H の満たす微分方程式を求める. 先の H に対して, H', H'', H''' を x, y, w で表すと,

$$\begin{aligned} H' &= -\frac{y}{2} - \frac{w}{2}, \\ H'' &= -xy - \frac{\alpha_1}{2} - zw - \frac{\alpha_2}{2}, \\ H''' &= -y \left(-x^2 + y + w - \frac{t}{2} \right) + x(-2xy - \alpha_1) - w \left(-z^2 + y + w - \frac{t}{2} \right) + z(-2zw - \alpha_2). \end{aligned}$$

また, x, y, w を H', H'', H''' で表すと, 次のようになる.

$$x = \frac{2tH' + 2H''' + 8(H')^2 - 2zH'' + \alpha_2z - \alpha_1z}{\alpha_2 + 2H'' - 4zH' - \alpha_1}, \quad (4.3)$$

$$y = \frac{(2H'' - 4zH' + \alpha_2 - \alpha_1)(2H'' - 4zH' + \alpha_2 + \alpha_1)}{4(H''' + 4(H')^2 + 2z^2H' + tH' - 2zH'')}, \quad (4.4)$$

$$w = \frac{-8H'H''' - 32(H')^3 - 8t(H')^2 - 8z\alpha_2H' + 4(H'')^2 + 4\alpha_2H'' + \alpha_2^2 - \alpha_1^2}{4(H''' + 4(H')^2 + 2z^2H' + tH' - 2zH'')}. \quad (4.5)$$

この x, y, w を (4.1) に代入して, H, H', H'', H''' の関係式を表すと,

$$H''' + 6(H')^2 + 2tH' - H = 0 \quad (4.6)$$

となる. H の満たす微分方程式が決定できた. この微分方程式は (2.9) や (3.4) の方程式と違い, パラメータを含んでいない. このことを考慮すると, 次のベックルンド変換が得られる.

命題 16 $A_4^{(1)}$ 型笹野系の α_1 を $\alpha_1 + r$ に変えるベックルンド変換は次で与えられる .

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{(-x+z)r}{2y(x-z) + 2\alpha_1 + r}, \\ Y = -\frac{r(2\alpha_1 + r)}{4\{(x-z)^2y + \alpha_1(x-z)\}}, \\ Z = z, \\ W = \frac{r(2\alpha_1 + r)}{4\{(x-z)^2y + \alpha_1(x-z)\}}, \\ \alpha_1 = \alpha_1 + r, \\ \alpha_2 = \alpha_2. \end{array} \right.$$

また , ハミルトン系 (4.2) を見ると , x と z および y と w を入れ替えることにより , α_1 と α_2 が入れ替わることがわかる .

命題 17 $A_4^{(1)}$ 型笹野系 において $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_1)$ とするベックルンド変換は次で与えられる .

$$\left\{ \begin{array}{l} X = z, \\ Y = w, \\ Z = x, \\ W = y, \\ \alpha_1 = \alpha_2, \\ \alpha_2 = \alpha_1. \end{array} \right.$$

命題 16 において , $r = -\alpha_1$ とすることにより , パラメータ α_1 を消去できる . また命題 17 を使い , $\alpha_1 = \alpha_2$ とした後に命題 16 を用いることにより , パラメータ α_2 を消去することができる .

注意 3 命題 16 , 命題 17 の変換を使うことで , (4.2) からパラメータ α_1, α_2 を消去できる .

4.2 $A_4^{(1)}$ 型笹野系と II 型パnulヴェ方程式

この節では , II 型パnulヴェ方程式について考える . ハミルトニアンを満たす微分方程式は (2.9) で与えられていた . この式の両辺を t について微分すると ,

$$H''\{H''' + 6(H')^2 + 2tH' - H\} = 0 \quad (4.7)$$

となる . $H'' \neq 0$ なら $H''' + 6(H')^2 + 2tH' - H = 0$ となる . これは $A_4^{(1)}$ 型笹野系のハミルトニアンが満たす微分方程式 (4.6) と同じとなる . ここで , (4.6) を満たす有理解と (2.9) を満たす有理解が 1 対 1 に対応していることを示す .

命題 18 h を $h'' \neq 0$ となる (2.9) の解とすると ,

$$p = -2h', \quad q = \frac{2h'' + \alpha + 1/2}{4h'} \quad (4.8)$$

は II 型パンルヴェ方程式

$$\begin{cases} q' = p - q^2 - \frac{t}{2}, \\ p' = 2qp + \alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$$

をみtas.

証明 (4.8) の p, q をそれぞれ t で微分したときに, 主張の形と一致していればいい. そこで, p' を計算する. (2.7) を用いると,

$$p' = -2h'' = 2qp + \alpha + \frac{1}{2}$$

となる. また (4.7) を用いると $h'' \neq 0$ より,

$$h''' + 6(h')^2 + 2th' - h = 0$$

が得られる. このことを踏まえ q' を計算すると,

$$\begin{aligned} q' &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h'''}{h'} - \left(\frac{h''}{h'} \right)^2 \right\} - \frac{h''(\alpha + 1/2)}{4(h')^2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h}{h'} - 6h' - 2t - \left(\frac{h''}{h'} \right)^2 \right\} - \frac{h''(\alpha + 1/2)}{4(h')^2} \\ &= p - q^2 - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

より主張が従う.

(証明終)

命題 19 $H' = 0$ もしくは $H'' = 0$ のとき P_{II} は有理解をもたない.

証明 $H' = 0$ のとき, $p = 0$ となることから,

$$q' = -q^2 - \frac{t}{2}$$

となる. しかし, この微分方程式において q を無限遠でローラン展開することができない. よって $H' = 0$ のとき有理解をもたない. 次に $H'' = 0$ の場合を考える. $H'' = 0$ より, $H' = k$ (k は定数) とおくことができる. ここで (2.8) より

$$p = -2k, \quad q = \frac{\alpha + 1/2}{4k}$$

となるが, この q は $P_{II}: q'' = 2q^3 + tq + \alpha$ を満たさない. 故に主張が成り立つ.

(証明終)

これらの命題 18, 命題 19 を用いると, $H'' \neq 0$ のとき笹野系のハミルトニアンが満たす微分方程式 (4.6) の有理解と, II 型パンルヴェ方程式の有理解が 1 対 1 に対応していることがわかる. このことから, $A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解はパンルヴェ第 II 方程式の解で記述することができる.

5 補足

ここまで, ベックルンド変換について述べてきた. この章ではベックルンド変換の有用性を示す意味で II 型行列パンルヴェ方程式と $A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解がどのように構成されているのかを紹介する. なお, 定理の証明や詳細は野田氏の論文を参照してもらいたい.

5.1 II 型行列パルヴェ方程式の有理解

野田氏は次のような

- (1) $q_1 = 0$ のとき,
- (2) $q_2 = 0$ のとき,
- (3) $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$ で,
 () ベックルンド変換 (命題 12, 命題 13) が定義できないとき,
 () ベックルンド変換 (命題 12, 命題 13) が定義できるとき

の 4 つの場合に分けて有理解を求めた .

(1) の場合 : ハミルトン系に $q_1 = 0$ を代入して整理すると次のようになる .

$$\begin{cases} 0 = p_1 + q_2 - t, \\ q'_2 = -4q_2p_2 + 2\theta_2 + 1, \\ p'_2 = 2p_2^2 + q_2 - t, \\ \theta_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

この方程式系において q'_2, p'_2 の式に注目する . K を

$$K = -\frac{1}{2}q_2^2 - (2p_2^2 - t)q_2 + (2\theta_2 + 1)p_2$$

と定めると ,

$$\begin{cases} q'_2 = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \\ p'_2 = -\frac{\partial K}{\partial q_2} \end{cases}$$

と書けることがわかる . さらに , $(q_2, p_2, K, t) = (2\alpha P, -Q/(2\alpha), H/\alpha, \alpha s)$ ($\alpha^3 = -1/4$) と変換することにより ,

$$\begin{cases} \frac{dQ}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P}, \\ \frac{dP}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \end{cases}$$

と表すことができる . これは II 型パルヴェ方程式

$$\frac{d^2Q}{ds^2} = 2Q^3 + sQ + \theta_2$$

のハミルトン系である . よって q_2, p_2 は II 型パルヴェ方程式に帰着できることがわかった . Q, P において , II 型パルヴェ方程式のベックルンド変換を用いることで Q, P の有理解を構成することができる . このことから q_2, p_2 の有理解を構成することができる . そこで , $\theta_2 = 0, 1, 2$ の場合の有理解を求めると以下のよ

うになる．

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ のとき : } \begin{cases} Q = 0, \\ P = \frac{s}{2}. \end{cases} \iff \begin{cases} q_2 = t, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = 0. \end{cases}$$

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ のとき : } \begin{cases} Q = -\frac{1}{s}, \\ P = \frac{s^3 + 4}{2s^2}. \end{cases} \iff \begin{cases} q_2 = \frac{t^3 - 1}{t^2}, \\ p_1 = \frac{1}{t^2}, \\ p_2 = \frac{1}{2t}. \end{cases}$$

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ のとき : } \begin{cases} Q = -\frac{2(s^3 - 2)}{s(s^3 + 4)}, \\ P = \frac{s(s^6 + 20s^3 - 80)}{2(s^3 + 4)^2}. \end{cases} \iff \begin{cases} q_2 = \frac{t(t^6 - 5t^3 - 5)}{(t^3 - 1)^2}, \\ p_1 = \frac{3t(t^3 + 2)}{(t^3 - 1)^2}, \\ p_2 = \frac{2t^3 + 1}{2t(t^3 - 1)}. \end{cases}$$

(2) の場合： このとき，有理解が存在しない．

(3)(I) の場合： 方程式系 (3.11) が成り立つときであるので，線形方程式 (3.13) に帰着することができる．このとき，

$$\theta_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{2}, \theta_2 = 0$$

となることが野田氏によって示されている． $\theta_1 = 1/2$ とすると $(q_1, q_2) = (0, t)$ となり，(1) の場合と同じになる．この解に命題 15 のベックルンド変換を用いると有理解を構成することができる． $\theta_1 = 3/2, 5/2$ の場合の有理解は以下ようになる．

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \text{ のとき : } \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2t}, \\ q_2 = \frac{4t^3 - 1}{4t^2}, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = 0. \end{cases}$$

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{ のとき : } \begin{cases} q_1 = \frac{1}{t}, \\ q_2 = t, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = 0. \end{cases}$$

他にも同様にして有理解を求めることができる．詳しくは，野田氏の論文を参照されたい．

(3)(II) の場合： 便宜上 $q_1 = 0$ も解として認めることにすると， $\theta_1 = 1/2, \theta_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき (3.10) は一

意的な有理解を持つことがわかる．さらにこれと (1) で得られた結果より, (θ_1, θ_2) が

$$\theta_1 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad \theta_2 \in \mathbb{Z}, \quad 2\theta_1 + \theta_2 \geq 1$$

もしくは

$$\theta_1 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad \theta_2 \in \mathbb{Z}, \quad 2\theta_1 + \theta_2 \leq 0$$

のとき (3.10) は一意的な有理解を持ち, それ以外では有理解を持たないことが示せる．

5.2 $A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解

$A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解について次が成り立つ．

定理 3 $A_4^{(1)}$ 型笹野系のハミルトニアンを満たす微分方程式 (4.6) の有理解は

$$H = \frac{P'_n}{P_n} - \frac{t^2}{8} \quad (5.1)$$

で尽きる．ここで P_n は定義 10 の Yablonskii-Vorob'ev の多項式である．

また, (4.2) から z と H だけの関係式を求めると,

$$z' + z^2 + 2H' + \frac{t}{2} = 0 \quad (5.2)$$

となる．この関係式に (5.1) の H を代入すると,

$$z' + z^2 + 2 \left(\frac{P'_n}{P_n} \right)^2 = 0 \quad (5.3)$$

となる．(5.3) の解は以下で与えられることが, 野田氏によって示された．

定理 4 $A_4^{(1)}$ 型笹野系の z が満たす微分方程式 (5.3) の有理解は

$$z = \left(\log \frac{\lambda_n P_{n-1} + \mu_n P_{n+1}}{P_n} \right)'$$

で与えられる．ただし, λ_n, μ_n は任意定数である．

$A_4^{(1)}$ 型笹野系の x, y, w は (4.3) ~ (4.5) で与えられるように, z と H を用いて記述することができた．今, z と H の有理解の形が与えられたので x, y, w の有理解が求められ, $A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解が構成することが

できる．そこで， $n = 1, n = 2$ の場合の有理解をあげておく．

$$n = 1 \text{ のとき : } \left\{ \begin{array}{l} H = -\frac{t^2}{8}, \\ z = \frac{\mu}{\lambda + \mu t}, \\ x = \frac{\mu\{2(\alpha_1 - \alpha_2) - 1\}}{\lambda\mu t + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda + \mu t)}, \\ y = \frac{\{2(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda + \mu t) - \lambda + \mu t\}\{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda + \mu t) + \lambda - \mu t\}}{8\lambda\mu}, \\ w = \frac{(\lambda + \mu t)\{\lambda + \mu t - 4\alpha_2(\lambda - \mu t) - 4(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\lambda + \mu t)\}}{8\lambda\mu}. \end{array} \right.$$

$$n = 2 \text{ のとき : } \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{1}{t} - \frac{t^2}{8}, \\ z = \frac{2\mu t^3 - \lambda - 4\mu}{t(\lambda + \mu t^3 + 4\mu)}, \\ x = -\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda + 4\mu - 2\mu t^3) + 3(\lambda - 4\mu + 2\mu t^3)}{t\{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda + 4\mu + \mu t^3) + 3(\lambda - 4\mu - \mu t^3)\}}, \\ y = \frac{\{2(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda + 4\mu + \mu t^3) - 3(\lambda - 4\mu - \mu t^3)\}\{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda + 4\mu + \mu t^3) + 3(\lambda - 4\mu - \mu t^3)\}}{72t^2\lambda\mu}, \\ w = -\frac{(\lambda + 4\mu + \mu t^3)\{4(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\lambda + 4\mu + \mu t^3) + 12\alpha_2(\lambda - 4\mu - \mu t^3) - 9(\lambda + 4\mu + \mu t^3)\}}{72t^2\lambda\mu}. \end{array} \right.$$

参考文献

- [1] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I, *Physica*, **2D** (1981), 306 - 352.
- [2] M. Jimbo and T. Miwa Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, *Physica*, **2D** (1981), 407 - 448.
- [3] 川上 拓志, 坂井秀隆, 中村 あかね, 4 次元 Painlevé 型方程式の退化図式, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数方程式論アブストラクト.
- [4] 川上 拓志, 行列 Painlevé 方程式, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数方程式論アブストラクト.
- [5] 川上 拓志, private note.
- [6] Y. Murata, Rational solutions of the second and the fourth equations of Painlevé, *Funkcial. Ekvac.* **28** (1985), 1 - 32.
- [7] 野田真司, $A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解の分類, 三重大学大学院修士論文, (2012).
- [8] 野海 正俊, パンルヴェ方程式とは?, *数学の楽しみ*, **9**, (1998), 101 - 116.
- [9] 野海 正俊, パンルヴェ方程式 - 対称性からの入門 -, 朝倉書店 (すうがくの風景 4), (2000).
- [10] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math.*, **33** (1986), 575 - 618.
- [11] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations III, *Math. Ann.*, **275** (1986), 221 - 255.
- [12] 岡本 和夫, パンルヴェ方程式序説, *上智大学数学講究録*, **19** (1985).
- [13] 岡本 和夫, Painlevé の方程式, *数学*, **32** (1980), 30 - 43.
- [14] 坂井 秀隆, モノドロミー保存変形と 4 次元パンルヴェ型方程式, *数理解析研究所講究録*, **1662** (2009), 65 - 72.
- [15] 坂井 秀隆, モノドロミー保存変形と 4 次元 Painlevé 型方程式, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数方程式論アブストラクト.
- [16] Y. Sasano, Coupled Painlevé II system in dimension four and the systems of type $A_4^{(1)}$, *Tohoku Math. J.*, **58** (2006), 529 - 548.
- [17] Y. Sasano : On some Hamiltonian structures of coupled Painlevé systems in dimension four, preprint, arXiv:0704.2863.
- [18] 梅村 浩, Painlevé 方程式の既約性について, *数学*, **40** (1988), 47 - 61.
- [19] 梅村 浩, Painlevé 方程式と古典関数, *数学*, **47** (1995), 341 - 359.
- [20] 渡辺 文彦, パンルヴェ方程式, *数理科学* 9 月号, (1996), 37 - 45.