修士論文

最適化問題の近似解について

三重大学大学院　教育学研究科　教科教育専攻　209M011

宝来　美緒

2012 年 2 月 10 日

目次

序論

修士の学生として三重大学で数学を学ばせていただいている中で、2010 年に河南師範大学 Shen Pei-Ping 氏が半年間三重大学に滞在され、その半年の間に彼女らの論文、Global optimization for the sum of generalized polynomial fractional functions (2006) [S-Y]についての話を聞く機会を得た。

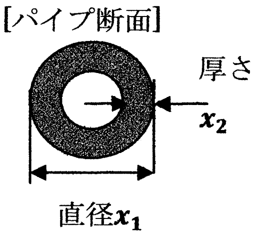
その際、私は数学の応用について大きな刺激を受けた。それまで私が学んだ数学は、主に存在と一意性を証明していくというものであったからである。問題を具体的に解くとどういう値になるか、という方法まで含んだ数学を学んだのはその時が生まれて初めてであった。もともと理論的背景よりも、具体的例の解法に興味のある私は、彼女らの論文に今までにない興味を覚え、何とか理解しようと努力した。

何度も彼女の元を訪ね、個人的に分からないところを教えてもらったが、私には非常に難解であった。彼女が帰国した後もその作業は続いた。そうして勉強する中で分かってきたことは、彼女らの行ったことは、目的関数・制約条件ともに多変数の一般化有理式の線形和とする大域的最適化問題の理論と具体的方法、アルゴリズムである、ということであった。

そこでまず考えたのが、目的関数・制約条件の中にあらわれる線形和をもっと拡張できないか、ということであった。現実社会の中で、私が学部で学んだ経済学においては、線形な関数が出るということはほとんどなく、関数というのは一回微分が正、つまり単調増加、二回微分が負、つまり凸性という INADA（稲田）条件と呼ばれる条件をつける関数がほとんどだからである(cf.[C-N.1],[C-N.2],[C-N.3])。

また、工学等を調べても、そのようなタイプの問題が多い。例えば工学の問題だが

問題：下図のような２本の鉄パイプ（トラス）で荷重 2W を
支える。下記の制約条件下において、最小の
鉄パイプの総重量を求めよ。
(最適化パラメーター:x_1, x_2, x_3, s)

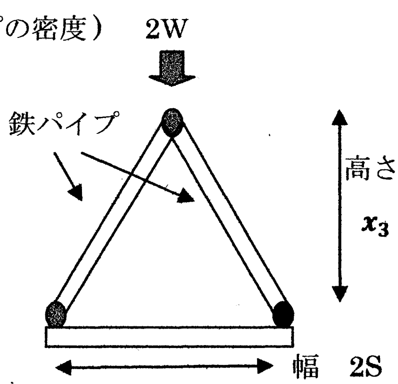


鉄パイプの総重量　$2\pi\rho\sqrt{x_1^2x_2^2s^2+x_1^2x_2^2x_3^2}$　(ρ:鉄パイプの密度)

制約条件 (b_1, b_2, b_3, b_4:正の実数定数)

- トラスの高さ制限　$x_3 - b_1 \le 0$
- パイプの厚さ制限　$\frac{x_1}{x_2} - b_2 \le 0$
- 重みによるトラスの変形を防ぐ条件

$$W\sqrt{s^2+x_3^2} - b_3x_1x_2x_3 \le 0$$



- パイプの変形を防ぐ条件

$$W(s^2+x_3^2)^2-b_4x_1x_3(x_1^2+x_2^2)\leq 0$$

- 非負条件　$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0$

のような問題はそのタイプである。この場合の単調増加かつ凸な関数とは$\sqrt{\ }$である。

また

$$\min \quad \sqrt{\frac{x_1}{x_2}+\frac{(x_2)^2}{x_1}+\log\left(\frac{x_1+(x_2)^2+x_3}{x_1-x_2}\right)^2},$$

$$\text{Subject to } e^{\frac{x_1}{x_2}}+e^{\frac{(x_2)^2}{x_1}}+\left(\frac{3x_1-(x_2)^2+x_3}{x_1+4x_2}\right)^2\leq 0$$

らも、同様の問題である。この場合の関数とは$\sqrt{\ }$、log や exp である。それらは、彼らの論文の対象、少なくとも見かけ上はそのタイプに入っていない。

そこで、彼女らの論文の目的関数・制約条件の中の線形和を INADA 条件を満たす関数たちの和にすればどうなるのであろうか、と思ったのがこの修士論文の出発点である。また、そのことがより彼女らの論文を理解することにつながるのではないかと思った。

拡張後の非線形問題形式は以下のものとなる。

h_j, h_{kj}を定義域内において一回微分が正、または負、exp との合成関数の二回微分が正または負な関数であるとする。そのとき、問題は以下である。

$$\min\ \omega(\mathbb{x})=\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x})}{a_j(\mathbb{x})}\right)$$

$$\text{subject to}\quad g_k(\mathbb{x})=\sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{d_{kj}(\mathbb{x})}{c_{kj}(\mathbb{x})}\right)\leq 0 \qquad (j=1,\dots,P\ ,\acute{j}=1,\dots,\acute{P}\ ,k=1,\dots,M)$$

ここで

$$a_j(\mathbb{x}):=\sum_{t=1}^{T_j^a}\beta_{jt}^a\prod_{i=1}^{N}x_i^{\gamma_{jti}^a}\ ,\ b_j(\mathbb{x}):=\sum_{t=1}^{T_j^b}\beta_{jt}^b\prod_{i=1}^{N}x_i^{\gamma_{jti}^b},c_{kj}(\mathbb{x}):=\sum_{t=1}^{T_{kj}^c}\beta_{kjt}^c\prod_{i=1}^{N}x_i^{\gamma_{kjti}^c}\ ,$$

$$d_{kj}(\mathbb{x}):=\sum_{t=1}^{T_{kj}^d}\beta_{kjt}^d\prod_{i=1}^{N}x_i^{\gamma_{kjti}^d}\qquad a_j(\mathbb{x})>0,b_j(\mathbb{x})>0,c_{kj}(\mathbb{x})>0,d_{kj}(\mathbb{x})>0$$

以下の条件を付ける。

$$\{h_j(y_j)\}'>0\ (j=1,\dots,K)\ \ \{h_j(y_j)\}'<0\ (j=K+1,\dots P)$$

$$\{h_{kj}(y_{kj})\}'>0\ (\acute{j}=1,\dots,K_k)\ \ \{h_{kj}(y_{kj})\}'<0\ (\acute{j}=1,\dots,P_k)$$

$$\{h_j\circ\exp(z_j)\}''>0\ \text{または}\{h_j\circ\exp(z_j)\}''<0$$

$$\{h_{kj}\circ\exp(z_{kj})\}''>0\ \text{または}\{h_{kj}\circ\exp(z_{kj})\}''<0$$

これらの問題の大域的最適解をShen氏らの論文にならい、以下の順で解いていくことを目的とする。

1. $a_j(x), b_j(x), c_{kj}(x), d_{kj}(x)$ をそれぞれ新しい変数で置き換え、元の問題と同等な問題となるようにある制約条件を加える。
2. 置き換えられた変数の数だけ拡張された次元において、問題の目的関数・制約関数ともに線形な関数に近似し、線形最適化問題に帰着させる。
3. 線形最適化問題を解き、その最適解が元の問題の近似解となるために、分枝限定アルゴリズムを用いて、近似解を求める。

結果、Shen氏らの論文との違いは、Shen氏らでは関数expの線形化だけでよかったが、本論文では、目的関数、制約条件にh_j, h_{kj} を入れたため、その関数の線形化を求める必要が出てくる。それさえ求められれば、ほぼ同様にShen氏らの手法は使用できるということが分かった。

具体的計算のためのアルゴリズムはShen氏らの論文に倣い、分枝限定アルゴリズムによる。線形化された問題での最小値を元に、元の非線形問題の最小値（ε 最適値）を求める。その概略を以下に記す。

① 目的関数を定義域内で上で記したように、下で抑える線形な関数で線形化する。
② 線形化した関数の最小値を求める。
③ ②で求めた最小値の ε 近傍をとる。
④ 目的関数が③の ε 近傍に入っていなければ、近似が十分でないので、定義域を2等分して、そのうち、最小値が含まれる領域のみで目的関数を線形化する。
⑤ ④の最小値の ε 近傍をとる。目的関数が、ε 近傍に入っていなければ、④へ。入っていれば、近似が十分できたということになる。このとき、どの値に対しても線形化した関数は必ず元の関数より小さいことより、線形化した最小値が、目的関数の最小値の ε 近似値となり、線形化した最小値をとる値が ε 近似解となる。

ただ残念なことに現在の私には、実際にこのアルゴリズムに従いプログラムを組み、コンピューターに実行させるだけの力がない。そのため、手計算で計算機を用いて実行できる範囲で、この方法でどのように解が近似されていくかの例をつけた。実際のプログラムを組んだ、多変数のあらわれる工学や経済学でのこの修士論文の適用できる具体的例での計算は修士後の課題としたい。

最後に、歴史的に目的関数、制約関数がともに非凸な関数による非線形最適化問題に対する解法については、現在、いくつかの解法が提案されている。比較的汎用なものとして「遺伝的アルゴリズム」がある。しかし、この方法は、条件によっては局所的最適解しか求められない、ということが指摘されている。今のところ提案されている解法は、関数の形、条件等によって解けたり、解けなかったりする、というのが現状であることを付け加えておく。

本修士論文を作成するに当たり、専門性に欠け、また出来の悪い私を親身にご指導下さった数学教室の教官方、事務の方には、言葉で言い尽くせないほどのお世話をおかけした。

例の構成につきご指摘を下さった露峰教授、アルゴリズムの理解につき、私のとんちんかんな質問にも丁寧なご指導を下さった谷口教授には感謝してもしきれないものである。

また、数学全般にわたり、厳しくご指導下さった蟹江教授、数学教育につき、暖かくご指導下さった中西、田中両教授に深く感謝したい

最後に、このような私をいつも支え続けてくれた家族と友人に心より感謝する。

第1章 目的関数・制約条件の中にあらわれる線形和の関数和への拡張

1−1　論文[S-Y]での問題形式

Shen 氏の論文で考察されている問題は以下の非線形な最適化問題である。そのことをまず復習しておこう。

$\mathbb{R}^N$の中の有界区間 X を考える。

$X := \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^N \mid 0 < \underline{x_i} \leq x_i \leq \overline{x_i} < \infty \quad i=1,2,\ldots\ldots,N\}$

本修士論文では、指数が負も含む実数の多項式の和を簡単のために一般化有理式と呼ぶ。

$a_j(\mathbb{x}), b_j(\mathbb{x}), g_k(\mathbb{x})$という X 上の多変数一般化有理式を与える。

$$a_j(\mathbb{x}) := \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^a}, \; b_j(\mathbb{x}) := \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^b}$$

$$g_k(\mathbb{x}) := \sum_{t=1}^{T_k^g} \beta_{kt}^g \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{kti}^g} \; (j = 1, \ldots, P \;\; k = 1, \ldots, M)$$

ここで$T_j^a, T_j^b, T_k^g \in \mathbb{N}$　$\beta_{jt}^a, \beta_{jt}^b, \beta_{kt}^g$を実数定数$(\neq 0)$　$\gamma_{jti}^a, \gamma_{jti}^b, \gamma_{kti}^g$を実数定数の指数$(\neq 0)$とし$a_j(\mathbb{x}) > 0, b_j(\mathbb{x}) > 0$　とする。

さらに X 上では

目的関数を

$\omega(\mathbb{x}) := \sum_{j=1}^P c_j \frac{b_j(\mathbb{x})}{a_j(\mathbb{x})}$　(c_j; 実数定数 $j = 1, \ldots, P$)　　と与え

$g_k(\mathbb{x}) \leq 0$ を制約条件とし、その制約領域を

$X_g := \{\mathbb{x} \in X \mid g_k(\mathbb{x}) \leq 0 \; (k=1,\ldots,M)\}$　　とする。

そのとき、問題は以下のものである。

問題(P)　X_gの中の$\omega(\mathbb{x})$の大域的な最適値を求めよ。

ここで大域的とは、局所的に最小値になるというのではなく、X_g の中の真の最小値ということである。従って各変数において、偏微分が０のところを求め、さらに２回微分を行い極大、極小の判定をするという局所的最適化問題とはその問題の質は根本的に異なる。それを具体的に解くことは非常に難しい。[S-Y]ではε近似解を探すという問題に置き換えて解かれている。さらに[S-Y]の優れているところは、データとして、実数定数及び指数さえあたえれば、すべてのタイプの問題にアルゴリズムを適応できるところである。

1－2　拡張後の問題

上の問題の非線形大域的最適化問題の目的関数・制約関数は一般化有利関数の線形和であるが、それらを一般化有利関数とある条件を満たす合成したものの線形和に拡張する。そこで、以下で考える問題は次である。

Xを1－1と同様に$\mathbb{R}^N$の有界な区間とする。

$X=\{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^N \mid 0 < \underline{x_i} \le x_i \le \overline{x_i} < \infty \quad i=1,2,\ldots\ldots,N\}$

$a_j(\mathbb{x}), b_j(\mathbb{x}), c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}), d_{k\acute{j}}(\mathbb{x})$も同様に一般化有理関数とする。

$$a_j(\mathbb{x}) \coloneqq \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^a}, b_j(\mathbb{x}) \coloneqq \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^b}, c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) \coloneqq \sum_{t=1}^{T_{k\acute{j}}^c} \beta_{k\acute{j}t}^c \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{k\acute{j}ti}^c},$$

$$d_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) \coloneqq \sum_{t=1}^{T_{k\acute{j}}^d} \beta_{k\acute{j}t}^d \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{k\acute{j}ti}^d} \quad (j=1,\ldots,P \ \acute{j}=1,\ldots,\acute{P} \ k=1,\ldots M)$$

ここで

$T_j^a, T_j^b, T_{k\acute{j}}^c, T_{k\acute{j}}^d \in \mathbb{N}, \beta_{jt}^a, \beta_{jt}^b, \beta_{k\acute{j}t}^c, \beta_{k\acute{j}t}^d$：実数定数$(\neq 0)$, $\gamma_{jti}^a, \gamma_{jti}^b, \gamma_{k\acute{j}ti}^c, \gamma_{k\acute{j}ti}^d$: 実数定数の指数$(\neq 0)$

$a_j(\mathbb{x}) > 0, b_j(\mathbb{x}) > 0, c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) > 0, d_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) > 0$ とする。

今、 $a_j(\mathbb{x}), b_j(\mathbb{x}), c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}), d_{k\acute{j}}(\mathbb{x})$ は閉領域Xで連続であるので

最小値、最大値が存在する。その最小値、最大値を $\underline{a_j}, \overline{a_j}, \underline{b_j}, \overline{b_j}, \underline{c_{k\acute{j}}}, \overline{c_{k\acute{j}}}, \underline{d_{k\acute{j}}}, \overline{d_{k\acute{j}}}$ とする。

これらは条件より正となる。

$\underline{a_j} \le a_j(\mathbb{x}) \le \overline{a_j}, \underline{b_j} \le b_j(\mathbb{x}) \le \overline{b_j}, \underline{c_{k\acute{j}}} \le c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) \le \overline{c_{k\acute{j}}}, \underline{d_{k\acute{j}}} \le d_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) \le \overline{d_{k\acute{j}}}$ となる。

$\left(\frac{\underline{b_j}}{\overline{a_j}}, \frac{\overline{b_j}}{\underline{a_j}}\right), \left(\frac{\underline{d_{k\acute{j}}}}{\overline{c_{k\acute{j}}}}, \frac{\overline{d_{k\acute{j}}}}{\underline{c_{k\acute{j}}}}\right)$において

$h_j(y_j), h_{k\acute{j}}(y_{k\acute{j}}): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (j=1,\ldots,P \ \acute{j}=1,\ldots,\acute{P} \ k=1,\ldots,M)$ を与えその上で

$\{h_j(y_j)\}' > 0 \ (j=1,\ldots,K) \ \{h_j(y_j)\}' < 0 \ (j=K+1,\ldots P)$

$\{h_{k\acute{j}}(y_{k\acute{j}})\}' > 0 \ (\acute{j}=1,\ldots,K_k) \ \{h_{k\acute{j}}(y_{k\acute{j}})\}' < 0 \ (\acute{j}=1,\ldots,P_k)$

であり、かつ

$\left(\log\frac{\underline{b_j}}{\overline{a_j}}, \log\frac{\overline{b_j}}{\underline{a_j}}\right), \left(\log\frac{\underline{d_{k\acute{j}}}}{\overline{c_{k\acute{j}}}}, \log\frac{\overline{d_{k\acute{j}}}}{\underline{c_{k\acute{j}}}}\right)$ において

$\{h_j \circ \exp(z_j)\}'' > 0$ または$\{h_j \circ \exp(z_j)\}'' < 0$

$\{h_{k\acute{j}} \circ \exp(z_{k\acute{j}})\}'' > 0$ または$\{h_{k\acute{j}} \circ \exp(z_{k\acute{j}})\}'' < 0$

とする。

目的関数を

$\omega(\mathbb{x}) \coloneqq \sum_{j=1}^P h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x})}{a_j(\mathbb{x})}\right)$ とし、

条件関数を

$$g_k(\mathbb{x}) \coloneqq \sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{d_{kj}(\mathbb{x})}{c_{kj}(\mathbb{x})}\right)\ (j = 1, \ldots, \acute{P}\ k = 1, \ldots, M)$$ とする。

そこで $g_k(\mathbb{x}) \leq 0$を制約条件とし、X の中の領域X_hを$g_k(\mathbb{x})$を使って次のように定義する。

$$X_h \coloneqq \{\mathbb{x} | g_k(\mathbb{x}) \leq 0 (\ k = 1, \ldots, M)\}$$

問題(P0) $\mathbb{x} \in X_h$ において

min $\omega(\mathbb{x})$を求める。

再び言うと、Shen 氏らの論文[S-Y]は「目的関数も条件関数も一般化有理式の線形和」という形の問題である。拡張した問題(P0)では、「目的関数も条件関数も一般化有理式とある種の関数の線形和」という形の問題である。

このように拡張することで Shen 氏の論文では取り扱うことのできない

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2} + \frac{(x_2)^2}{x_1}},\ e^{\frac{x_1}{x_2}} + e^{\frac{(x_2)^2}{x_1}},\ \left(\frac{3x_1 - (x_2)^2 + x_3}{x_1 + 4x_2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + (x_2)^2 + x_3}{x_1 - x_2}\right)^2$$ といった関数による最適化問題

を Shen 氏とほぼ同じ解法で取り扱うことが可能となる。

2章　問題の解法

以下ではε近似解の解法を記述する。ε近似解とは値をεで近似する解である。最適値をとる独立変数をεで近似するものではないことに注意する。

2−1　問題の変換

ここでは後に行う関数の線形化への前段階として、問題(P0)の同等な問題(P1)への変換について記す。
前段階として$\mathbb{R}^N$上の問題(P0)を同等な$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k}$上の問題(P1)へ変換する。ここで、次元が拡張されることに注意する。

(P0)は$\mathbb{R}^N$上の問題である。(P0)の$a_j(\mathbb{x}), b_j(\mathbb{x}), c_{kj}(\mathbb{x}), d_{kj}(\mathbb{x})$ を j, kj についてそれぞれ変数で置き換え、(P0)と同等な問題となるように制約条件を条件加える。ここで、変換した問題(P1)は$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k}$上の問題となる。

$\omega(\mathbb{x})$ $\left(=\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x})}{a_j(\mathbb{x})}\right)\right)$ の $a_j(\mathbb{x}), b_j(\mathbb{x})$ の代わりに変数l_j, m_jと置き換える。それを$\psi(\mathbb{l}, \mathbb{m})$と書く。

$\Psi(\mathbb{l}, \mathbb{m}) := \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j}{l_j}\right)$ (j=1,…,P)とし、次に$g_k(\mathbb{x}) := \left(\sum_{\acute{j}=1}^{\acute{P}_k} h_{k\acute{j}}\left(\frac{d_{k\acute{j}}(\mathbb{x})}{c_{k\acute{j}}(\mathbb{x})}\right)\right)$の$c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}), d_{k\acute{j}}(\mathbb{x})$の代わりに変数$s_{k\acute{j}}, t_{k\acute{j}}$と置き換える。簡単のため、同じ記号$g_k$で書く。

$g_k(\mathbb{s}, \mathbb{t}) := \sum_{\acute{j}=1}^{\acute{P}_k} h_{k\acute{j}}\left(\frac{t_{k\acute{j}}}{s_{k\acute{j}}}\right)$ ($\acute{j} = 1, \ldots, \acute{P}$ k=1,…,M)　とする

$\mathbb{R}^{2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k}$内の区間 H を$a_j(\mathbb{x}), b_j(\mathbb{x}), c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}), d_{k\acute{j}}(\mathbb{x})$の最小値・最大値を用いて次で定義する。

$H := \{(\mathbb{l}, \mathbb{m}, \mathbb{s}, \mathbb{t}) \in \mathbb{R}^{2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k} \mid \underline{a_j} \le l_j \le \overline{a_j}\ , \underline{b_j} \le m_j \le \overline{b_j}\ ,$

$\underline{c_{k\acute{j}}} \le s_{k\acute{j}} \le \overline{c_{k\acute{j}}}\ , \underline{d_{k\acute{j}}} \le t_{k\acute{j}} \le \overline{d_{k\acute{j}}}$(j=1,…,P $\acute{j} = 1, \ldots, \acute{P}$ k=1,…,M)}

以下ではこれが$\mathbb{l}, \mathbb{m}, \mathbb{s}, \mathbb{t}$の定義域となる。次に X× H内の領域$Z_H$を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
Z_H := \{&(\mathbb{x}, \mathbb{l}, \mathbb{m}, \mathbb{s}, \mathbb{t}) \in X \times H \mid \\
&g_k(\mathbb{s}, \mathbb{t}) \le 0 \ \ (k=1,\ldots,M) \\
&l_j - a_j(\mathbb{x}) \le 0, b_j(\mathbb{x}) - m_j \le 0 \ \ (j=1,\ldots,K) \\
&s_{k\acute{j}} - c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) \le 0, d_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) - t_{k\acute{j}} \le 0 \ \ (\acute{j}=1,\ldots,K_k, k = 1, \ldots, M) \\
&a_j(\mathbb{x}) - l_j \le 0,\ m_j - b_j(\mathbb{x}) \le 0 \ \ (j=K+1,\ldots,P) \\
&c_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) - s_{k\acute{j}} \le 0,\ t_{k\acute{j}} - d_{k\acute{j}}(\mathbb{x}) \le 0 \ \ (\acute{j}=K_k + 1, \ldots, \acute{P}_k, k = 1, \ldots, M)\}
\end{aligned}
$$

そこで、Z_H上の次の問題(P1)を考える。

問題(P1) $\left\{\begin{array}{l} Z_H\text{において} \\ \min\ \psi(\mathbb{l},\mathbb{m})\ \text{を求める。}\end{array}\right.$

そのとき(P0)と(P1)の同等性が以下で証明される。

定理 1　X 上の問題(P0)と X× H上の問題(P1)は同等の問題となる。

（証明）(P0)の最適解を$\mathbb{x}^*$とし、

$l_j^* \coloneqq a_j(\mathbb{x}^*), m_j^* \coloneqq b_j(\mathbb{x}^*)\ \ s_{kj}^* \coloneqq c_{kj}(\mathbb{x}^*),\ t_{kj}^* \coloneqq d_{kj}(\mathbb{x}^*)$

とすると

$$\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x}^*)}{a_j(\mathbb{x}^*)}\right) = \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^*}{l_j^*}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{d_{kj}(\mathbb{x}^*)}{c_{kj}(\mathbb{x}^*)}\right) = \sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{t_{kj}^*}{s_{kj}^*}\right) \le 0$$

(P1)の最適解を$(\mathbb{x}^\#,\mathbb{l}^\#,\mathbb{m}^\#,\mathbb{s}^\#,\mathbb{t}^\#)$とすると、制約条件より

j=1,…,K において

$0 < l_j^\# \le a_j(\mathbb{x}^\#), 0 < b_j(\mathbb{x}^\#) \le m_j^\#$　よって$0 < \frac{b_j(\mathbb{x}^\#)}{a_j(\mathbb{x}^\#)} \le \frac{m_j^\#}{l_j^\#}$

j=1,…,K_k , $k = 1, \dots, M$ において

$0 < s_{kj}{}^\# \le c_{kj}(\mathbb{x}^\#), 0 < d_{kj}(\mathbb{x}^\#) \le t_{kj}{}^\#$　よって$0 < \frac{d_{kj}(\mathbb{x}^\#)}{c_{kj}(\mathbb{x}^\#)} \le \frac{t_{kj}{}^\#}{s_{kj}{}^\#}$

j=K+1,…,P において

$0 < a_j(\mathbb{x}^\#) \le l_j^\#, 0 < m_j^\# \le b_j(\mathbb{x}^\#)$　よって$0 < \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \le \frac{b_j(\mathbb{x}^\#)}{a_j(\mathbb{x}^\#)}$

j=$K_k + 1, \dots, \acute{P}_k$, $k = 1, \dots, M$ において

$0 < c_{kj}(\mathbb{x}^\#) \le s_{kj}{}^\#, 0 < t_{kj}{}^\# \le d_{kj}(\mathbb{x}^\#)$　よって$0 < \frac{t_{kj}{}^\#}{s_{kj}{}^\#} \le \frac{d_{kj}(\mathbb{x}^\#)}{c_{kj}(\mathbb{x}^\#)}$

$\{h_j(y_j)\}' > 0\ (j = 1, \dots, K)\ \ \{h_j(y_j)\}' < 0\ (j = K+1, \dots P)$

$\{h_{kj}(y_{kj})\}' > 0\ (j = 1, \dots, K_k)\ \ \{h_{kj}(y_{kj})\}' < 0\ (j = 1, \dots, \acute{P}_k)$ より

j=1,…,P において　$h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x}^\#)}{a_j(\mathbb{x}^\#)}\right) \le h_j\left(\frac{m_j^\#}{l_j^\#}\right)$　ゆえに　$\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x}^\#)}{a_j(\mathbb{x}^\#)}\right) \le \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^\#}{l_j^\#}\right)$

$j = 1, \dots, \acute{P}_k (k = 1, \dots, M)$ において$h_{kj}\left(\frac{d_{kj}(\mathbb{x}^\#)}{c_{kj}(\mathbb{x}^\#)}\right) \le h_{kj}\left(\frac{t_{kj}{}^\#}{s_{kj}{}^\#}\right)$

ゆえに $\sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{d_{kj}(\mathbb{x}^\#)}{c_{kj}(\mathbb{x}^\#)}\right) \le \sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{t_{kj}^\#}{s_{kj}^\#}\right) \le 0$ よって$\mathbb{x}^\#$は(P0)の制約条件をみたす。

(P0)の最適解は$\mathbb{x}^*$であるので

$$\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x}^*)}{a_j(\mathbb{x}^*)}\right) \le \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x}^\#)}{a_j(\mathbb{x}^\#)}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^*}{l_j^*}\right) = \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x}^*)}{a_j(\mathbb{x}^*)}\right) \le \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{b_j(\mathbb{x}^\#)}{a_j(\mathbb{x}^\#)}\right) \le \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^\#}{l_j^\#}\right)$$

ゆえに $\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^*}{l_j^*}\right) \le \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^\#}{l_j^\#}\right)$.....①

(P0)の最適解$\mathbb{x}^*$について

$l_j^* \coloneqq a_j(\mathbb{x}^*), m_j^* \coloneqq b_j(\mathbb{x}^*)\ \ s_{kj}^* \coloneqq c_{kj}(\mathbb{x}^*),\ t_{kj}^* \coloneqq d_{kj}(\mathbb{x}^*)$

とすると

$l_j^* - a_j(\mathbb{x}^*) \le 0, b_j(\mathbb{x}^*) - m_j^* \le 0$ (j=1,…,K)

$s_{kj}^* - c_{kj}(\mathbb{x}^*) \le 0, d_{kj}(\mathbb{x}^*) - t_{kj}^* \le 0$ (j=1,…,K_k)

$a_j(\mathbb{x}^*) - l_j^* \le 0,\ m_j^* - b_j(\mathbb{x}^*) \le 0$ (j=K+1,…,P)

$c_{kj}(\mathbb{x}^*) - s_{kj}^* \le 0,\ t_{kj}^* - d_{kj}(\mathbb{x}^*) \le 0$ (j=$K_k + 1, \dots, \acute{P}_k$)}

k=1,…,M において

$$g_k(\mathbb{x}^*) = \sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{d_{kj}(\mathbb{x}^*)}{c_{kj}(\mathbb{x}^*)}\right) = \sum_{j=1}^{\acute{P}_k} h_{kj}\left(\frac{t_{kj}^*}{s_{kj}^*}\right) = g_k(\mathbb{s}^*, \mathbb{t}^*) \le 0$$

ゆえに$(\mathbb{x}^*, \mathbb{l}^*, \mathbb{m}^*, \mathbb{s}^*, \mathbb{t}^*)$は(P1)の条件をみたす。

$(\mathbb{x}^\#, \mathbb{l}^\#, \mathbb{m}^\#, \mathbb{s}^\#, \mathbb{t}^\#)$は(P1)の最適解であるので

$$\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^\#}{l_j^\#}\right) \le \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^*}{l_j^*}\right).....②$$

① ,②より

$$\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^\#}{l_j^\#}\right) = \sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j^*}{l_j^*}\right)$$

ゆえに(P0)と(P1)は同等な問題である。

(証明終)

2−2 独立変数の指数関数での置き換え

次に一般化有理式の各項を線形な関数にするために、変数を指数関数で書き直す。
(P1)の目的関数、制約条件の変数、$x_i, l_j, m_j, s_{kj}, t_{kj}\left(j = 1, \dots, P\ j = 1, \dots, \acute{P}\ k = 1, \dots, M\right)$は正であることより、$x_i, l_j, m_j, s_{kj}, t_{kj}$を $\exp(y_n)\left(n = 1,2, \dots, N + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k\right)$で書き表すことができる。そこで、

$$y_i := \ln x_i\ ,y_{N+j} := \ln l_j\ ,\ y_{N+P+j} := \ln m_j\ ,$$
$$y_{N+2P+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j} := \ln s_{kj}\ ,y_{N+2P+\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j} := \ln t_{kj}$$
$$y \in \Omega^0 := \{\mathbb{y} \in \mathbb{R}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k} | \ln \underline{x_i} \le y_i \le \ln \overline{x_i}\ ,$$
$$\ln \underline{a_j} \le y_{N+j} \le \ln \overline{a_j}\ ,\ln \underline{b_j} \le y_{N+P+j} \le \ln \overline{b_j}$$
$$\ln \underline{c_{kj}} \le\ y_{N+2P+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j} \le \ln \overline{c_{kj}}\ ,$$
$$\ln \underline{d_{kj}} \le y_{N+2P+\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j} \le \ln \overline{d_{kj}}\ \}$$
とする。

$\mathbb{R}^N \times \mathrm{H}$上の一般化有理式の各項は$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2P+2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k}$上の線形関数となる。従って (P1) の目的関数$\psi(\mathbb{l}, \mathbb{m})$、(P1)の条件関数$g_k(\mathbb{s}, \mathbb{t})$、$l_j - a_j(\mathbb{x})$、$a_j(\mathbb{x}) - l_j$、$b_j(\mathbb{x}) - m_j$、,$m_j - b_j(\mathbb{x})$、$s_{kj} - c_{kj}(\mathbb{x}) c_{kj}(\mathbb{x}) - s_{kj}$、$d_{kj}(\mathbb{x}) - t_{kj}$ 、$t_{kj} - d_{kj}(\mathbb{x})$は、以下のように関数と exp(y)の合成関数の和で表すことができる。

$$\sum_{j=1}^{P} h_j\left(\frac{m_j}{l_j}\right) = \sum_{j=1}^{P} h_j \circ \exp\left(y_{N+P+j} - y_{N+j}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{P_k} h_{kj}\left(\frac{t_{kj}}{s_{kj}}\right) = \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \circ \exp\left(y_{N+2P+\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j} - y_{N+2P+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j}\right)$$

$$\left\{\begin{aligned}
& l_j - a_j(\mathbb{x}) = \exp\left(y_{N+j}\right) - \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^a y_i\right) \\
& \qquad (a_j(\mathbb{x}) - l_j = \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^a y_i\right) - \exp\left(y_{N+j}\right)\ ) \\
& b_j(\mathbb{x}) - m_j = \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^b y_i\right) - \exp\left(y_{N+P+j}\right) \\
& \qquad (m_j - b_j(\mathbb{x}) = \exp\left(y_{N+P+j}\right) - \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^b y_i\right)\ ) \\
& s_{kj} - c_{kj}(\mathbb{x}) = \exp\left(y_{N+2P+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j}\right) - \sum_{t=1}^{T_{kj}^c} \beta_{kjt}^c \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^c y_i\right) \\
& \qquad (c_{kj}(\mathbb{x}) - s_{kj} = \sum_{t=1}^{T_{kj}^c} \beta_{kjt}^c \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^c y_i\right) - \exp\left(y_{N+2P+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j}\right)\ ) \\
& d_{kj}(\mathbb{x}) - t_{kj} = \sum_{t=1}^{T_{kj}^d} \beta_{kjt}^d \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^d y_i\right) - \exp\left(y_{N+2P+\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j}\right) \\
& \qquad (t_{kj} - d_{kj}(\mathbb{x}) = \exp\left(y_{N+2P+\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k+\sum_{n=1}^{k-1} P_n+j}\right) - \sum_{t=1}^{T_{kj}^d} \beta_{kjt}^d \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{jti}^d y_i\right)\ )
\end{aligned}\right.$$

ここで、 $h_j(y_j), h_{kj}(y_{kj})$の仮定より

$\varphi_{mt}(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ (x > 0,\ \ m = 0,1,2, \ldots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)$を

$\varphi_{mt}'(x) > 0$ または $\varphi_{mt}'(x) < 0$

$\{\varphi_{mt} \circ \exp(y)\}'' > 0$ または $\{\varphi_{mt} \circ \exp(y)\}'' < 0$ と定義すると、

$\psi(\mathbb{l}, \mathbb{m}), g_k(\mathbb{s}, \mathbb{t}), l_j - a_j(\mathbb{x})$、$a_j(\mathbb{x}) - l_j$、$b_j(\mathbb{x}) - m_j$、,$m_j - b_j(\mathbb{x})$、$s_{kj} - c_{kj}(\mathbb{x})$、$c_{kj}(\mathbb{x}) - s_{kj}$、$d_{kj}(\mathbb{x}) - t_{kj}$ 、 $t_{kj} - d_{kj}(\mathbb{x})$ は

$$\sum_{t=1}^{T_m} \varphi_{mt} \circ \exp\left(\sum_{i=1}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k} \lambda_{mti} y_i\right) \ (\lambda_{mti}\text{: 実数定数})$$

の形で表わせる。

$\varphi_{mt} \circ \exp(\mathbb{y})$ を$f_{mt}(\mathbb{y})$とおいて

$$\phi_m(\mathbb{y}) := \sum_{t=1}^{T_m} f_{mt}\left(\sum_{i=1}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k} \lambda_{mti} y_i\right)$$

とする。すると結局

$\Phi_0(\mathbb{y})$は $\psi(\mathbb{l}, \mathbb{m})$, $\phi_m(\mathbb{y})(m = 1,2, \dots, M)$は$g_k(\mathbb{s}, \mathbb{t})$ を,

$\phi_m(\mathbb{y})(m = M+1, \dots, M+P)$は$l_j - a_j(\mathbb{x})$, または $a_j(\mathbb{x}) - l_j$を

$\phi_m(\mathbb{y})(m = M+P+1, \dots, M+2P)$は$b_j(\mathbb{x}) - m_j$, または$m_j - b_j(\mathbb{x})$を

$\phi_m(\mathbb{y})\left(m = M+2P+1, \dots, M+2P+\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k\right)$は $S_{kj} - c_{kj}(\mathbb{x})$,または$c_{kj}(\mathbb{x}) - s_{kj}$を

$\phi_m(\mathbb{y})\left(m = M+2P+\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k+1, \dots, M+2P+2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k\right)$は$d_{kj}(\mathbb{x}) - t_{kj}$, または $t_{kj} - d_{kj}(\mathbb{x})$を表す。すると、(P1)の目的関数$\psi(\mathbb{l}, \mathbb{m})$は$\Phi_0(\mathbb{y})$であり、条件関数は$\phi_m(\mathbb{y})$ $(m = 1, \dots, M+2P+2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)$ と表せる。

そこで

$\Omega_\phi^0 := \{\mathbb{y} \in \Omega^0 | \phi_m(\mathbb{y}) \leq 0 \ (m = 1,2, \dots, M+2P+2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)\}$

とすると

(P1)は以下の(P2)の問題と焼き直すことができる。

問題(P2) $\begin{cases} \mathbb{y} \in \Omega_\phi^0 \text{において} \\ \min\ \Phi_0(\mathbb{y}) \text{を求める} \end{cases}$

次に(P2)の目的関数・条件関数$\phi_m(\mathbb{y})$を線形化近似することで、Shen 氏らの論文では exp であったのがここでは、exp と関数の合成関数になることに注意する。

証明のあらすじはほぼ Shen 氏らと同様である。

2−3 各$\phi_m(\mathrm{y})$の線形化について

問題(P2)の目的関数、制約条件$\phi_m(\mathrm{y})(m = 0, \ldots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)$は非線形な関数である。$\Omega_\phi^0$において、$\phi_m(\mathrm{y})(m = 0, \ldots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)$を下で抑えるような線形な関数で近似することで、(P2)を線形最適問題に帰着させ、(P2)の最適値の下限を求めることで、最適値の ε 近似値を求める。そのために $f_{mt}\left(\sum_{i=1}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k} \lambda_{mti} y_i\right)$ を以下の様に線形化する。

$j= 1, \ldots, N \quad \acute{j} = 1, \ldots, \acute{P} \quad k = 1, \ldots, M$ について

$\underline{y_i} := \ln \underline{x_i}\ , \overline{y_i} := \ln \overline{x_i}$

$\underline{y_{N+j}} := \ln \underline{a_j}\ , \overline{y_{N+j}} := \ln \overline{a_j}$

$\underline{y_{N+P+j}} := \ln \underline{b_j}\ , \overline{y_{N+P+j}} := \ln \overline{b_j}$

$\underline{y_{N+2P+\sum_{n=1}^{k-1}P_n+\acute{j}}} := \ln \underline{c_{k\acute{j}}}\ , \overline{y_{N+2P+\sum_{n=1}^{k-1}P_n+\acute{j}}} := \ln \overline{c_{k\acute{j}}}$

$\underline{y_{N+2P+\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k+\sum_{n=1}^{k-1}P_n+\acute{j}}} := \ln \underline{d_{k\acute{j}}}$

$\overline{y_{N+2P+\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k+\sum_{n=1}^{k-1}P_n+\acute{j}}} := \ln \overline{d_{k\acute{j}}}$

とする。

$\Omega^q \subset \Omega^0 \quad \Omega^q := \{ \mathrm{y} \in \mathbb{R}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k} | \underline{y_i} \le \underline{y_i^q} \le y_i \le \overline{y_i^q} \le \overline{y_i}$

$\left(i = 1,2, \ldots N + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k\right)\}$

$Y_{mt}^{\Omega^q} := \sum_{i=1}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k} \lambda_{mti}\, y_i$

$\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}} := \sum_{i=1}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k} \min\{\lambda_{mti}\underline{y_i^q}, \lambda_{mti}\overline{y_i^q}\}$

$\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}} := \sum_{i=1}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k} \max\{\lambda_{mti}\underline{y_i^q}, \lambda_{mti}\overline{y_i^q}\}$

$\left(m = 0,1,2, \ldots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k,\ t = 1, \ldots, T_m\ \right)$とする。

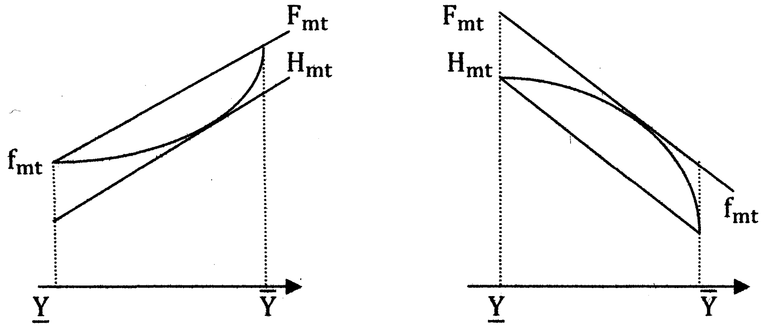
$(f_{mt}'(y) > 0$ または$f_{mt}'(y) < 0)$ かつ

$(f_{mt}''(y) > 0$ または$f_{mt}''(y) < 0\ )$より

$f_{mt}(Y_{mt}^{\Omega^q})$は$\left[\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right]$で単調な凸関数である。

よって$\left[\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right]$において$f_{mt}(Y_{mt}^{\Omega^q})$を平行に上と下で抑える

一次関数$F_{mt}^{\Omega^q}(Y_{mt}^{\Omega^q}), H_{mt}^{\Omega^q}(Y_{mt}^{\Omega^q})$が存在する。



$$F_{mt}^{\Omega^q}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right) := \frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) - f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(Y_{mt}^{\Omega^q} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) + f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)$$

とする。

$f_{mt}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right)$は$\left[\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right]$で連続、$\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)$で微分可能であるので

$f_{mt}\left(c_{mt}^{\Omega^q}\right) = \frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) - f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}$ となる$c_{mt}^{\Omega^q} \in \left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)$が存在する。

($f_{mt}''(y) > 0$ または$f_{mt}''(y) < 0$) より

$f_{mt}'\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right)$は$\left[\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right]$で単調増加または単調減少であるので

逆関数、$f_{mt}'^{-1}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right)$が存在する。よって、

$$c_{mt}^{\Omega^q} = f_{mt}'^{-1}\left(\frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) - f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\right)$$

$H_{mt}^{\Omega^q}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right) := \frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) - f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(Y_{mt}^{\Omega^q} - c_{mt}^{\Omega^q}\right) + f_{mt}\left(c_{mt}^{\Omega^q}\right)$ とする。

$$L_{mt}^{\Omega^q}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right) := \begin{cases} H_{mt}^{\Omega^q}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right) & (f_{mt}''(y) > 0) \\ F_{mt}^{\Omega^q}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right) & (f_{mt}''(y) < 0) \end{cases}$$

とすると

$$f_{mt}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right) \geq L_{mt}^{\Omega^q}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}\right)$$

$^\forall y \in \Omega^q$

$$\phi_m(y) = \sum_{t=1}^{T_m} f_{mt}(y) \geq \sum_{t=1}^{T_m} L_{mt}^{\Omega^q}(y)$$

そこで次の線形化された大域的最適化問題を考える。

$L_m^{\Omega^q}(y) := \sum_{t=1}^{T_m} L_{mt}^{\Omega^q}(y)$ とする。

問題 LRP(Ω^q): $=\begin{cases} \min L_0^{\Omega^q}(y)\text{を求める} \\ \text{subject to } L_m^{\Omega^q}(y) \le 0 \\ (m = 1,2,\dots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k) \end{cases}$

とすると、LRP(Ω^q)は(P2)の関数、$\phi_m(y)$を下で抑える関数で粗く線形化した問題となる。

(P2)の制約条件をみたすΩ^qの点はLRP(Ω^q)の定義より、LRP(Ω^q)の制約条件もみたす。
次が成り立つ。

補題 1　LRP(Ω^q)の値は、Ω^q上における(P2)の値のよりも小さい。

（証明）上記 LRP(Ω^q)の定義より明らかである。

更に収束につき次が成り立つ。

補題 2　$\Omega^{q+1} \subset \Omega^q \subset \cdots \subset \Omega^0 \subset \mathbb{R}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k}$, $\bigcap_{q=1}^{\infty} \Omega^q = \{y^*\}$ とする。

$^\forall y \in \Omega^q$ について、$f_{mt}(y), F_{mt}^{\Omega^q}(y), H_{mt}^{\Omega^q}(y)$ を考える。$(y = Y_{mt}^{\Omega^q})$

このとき、$m = 0,1,2,\dots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k,\ t = 1,\dots,T_m$ において

$q \to \infty$ ならば

$\max_{y\in\Omega^q}\left|F_{mt}^{\Omega^q}(y) - f_{mt}(y)\right| = 0$ かつ $\max_{y\in\Omega^q}\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y) - f_{mt}(y)\right| = 0$

（証明）$\underline{y^q} := \left\{y \in \Omega^q \middle| \min\left(\lambda_{mti}\underline{y_i^q}, \lambda_{mti}\overline{y_i^q}\right) i = 1,\dots, N + 2P + 2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k\right\}$

$\overline{y^q} := \left\{y \in \Omega^q \middle| \max\left(\lambda_{mti}\underline{y_i^q}, \lambda_{mti}\overline{y_i^q}\right) i = 1,\dots, N + 2P + 2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k\right\}$ とする。

$\Omega^{q+1} \subset \Omega^q \subset \cdots \subset \Omega^0$,Ω^qの分割方法（Ω^{q+1}はΩ^qを二等分したどちらかの領域：以下の分枝限定アルゴリズムに記載）より、$q \to \infty$ ならば $\underline{y^q} \to y^*, \overline{y^q} \to y^*$

よって、$\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}} = \sum_{i=1}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k} |\lambda_{mti}| \left(\overline{y_i^q} - \underline{y_i^q}\right) \to 0$

$$\left|F_{mt}^{\Omega^q}(y) - f_{mt}(y)\right| = \left|F_{mt}^{\Omega^q}(Y_{mt}^{\Omega^q}) - f_{mt}(Y_{mt}^{\Omega^q})\right|$$

$$= \left| \frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) - f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}} \left(Y_{mt}^{\Omega^q} - \underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) + f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right) - f_{mt}(Y_{mt}^{\Omega^q}) \right|$$

$\left[\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right]$ で$\left|F_{mt}^{\Omega^q}(y) - f_{mt}(y)\right|$は凹関数であり、$c_{mt}^{\Omega^q} \in \left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}, \overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)$において

$\max_{y\in\Omega^q}\left|F_{mt}^{\Omega^q}(y) - f_{mt}(y)\right|$となる。よって

$$\max_{y\in\Omega^q}\left|F_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right| = \left|F_{mt}^{\Omega^q}(c_{mt}^{\Omega^q})-f_{mt}(c_{mt}^{\Omega^q})\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(c_{mt}^{\Omega^q}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}(c_{mt}^{\Omega^q})\right|$$

$\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}=\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}$ ，$c_{mt}^{\Omega^q}=\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}$ （$0<\theta_{mt}^{\Omega^q}<1$）とすると、

$q\to\infty$ ならば　$h_{mt}^{\Omega^q}\to 0$

$$\left|\frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(c_{mt}^{\Omega^q}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}(c_{mt}^{\Omega^q})\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{h_{mt}^{\Omega^q}}\left(\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right|$$

$$=\left|f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right|$$

$$\xrightarrow{q\to\infty}\left|f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|=0$$

$$\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right| = \left|H_{mt}^{\Omega^q}(Y_{mt}^{\Omega^q})-f_{mt}(Y_{mt}^{\Omega^q})\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(Y_{mt}^{\Omega^q}-c_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}(c_{mt}^{\Omega^q})-f_{mt}(Y_{mt}^{\Omega^q})\right|$$

$\left[\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}},\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right]$ で$\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right|$は凸関数であり、$Y_{mt}^{\Omega^q}=\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}$または$\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}$において

$\max_{y\in\Omega^q}\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right|$となる。

(ｉ)$Y_{mt}^{\Omega^q}=\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}$のとき、$\max_{y\in\Omega^q}\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right|$となるとすると、

$$\max_{y\in\Omega^q}\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right| = \left|H_{mt}^{\Omega^q}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-c_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}(c_{mt}^{\Omega^q})-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{h_{mt}^{\Omega^q}}\left(-\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|$$

$$=\left|-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right|$$

$$\xrightarrow{q\to\infty}\left|-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\theta_{mt}^{\Omega^q}+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|=0$$

(ⅱ) $Y_{mt}^{\Omega^q}=\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}$のとき、$\max_{y\in\Omega^q}\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right|$となるとすると、

$$\max_{y\in\Omega^q}\left|H_{mt}^{\Omega^q}(y)-f_{mt}(y)\right|=\left|H_{mt}^{\Omega^q}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-c_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}\left(c_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\overline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}-\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}-\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right.$$
$$\left.-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)}{h_{mt}^{\Omega^q}}\left(1-\theta_{mt}^{\Omega^q}\right)h_{mt}^{\Omega^q}+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right|$$

$$=\left|f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)\left(1-\theta_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\left(1-\theta_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+\theta_{mt}^{\Omega^q}h_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}+h_{mt}^{\Omega^q}\right)\right|$$

$$\xrightarrow{q\to\infty}\left|f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\left(1-\theta_{mt}^{\Omega^q}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\left(1-\theta_{mt}^{\Omega^q}\right)+f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)-f_{mt}\left(\underline{Y_{mt}^{\Omega^q}}\right)\right|=0$$

証明終

補題 3　補題 2 の仮定が成り立つとき、$q\to\infty$ ならば、

$m=0,1,2,\dots,M+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k$ において　$\max_{y\in\Omega^q}\left|L_m^{\Omega^q}(y)-\phi_m(y)\right|\to 0$

（証明） 定理 2 と$L_m^{\Omega^q}(\mathbb{y}), \phi_m(\mathbb{y})$の定義より明らかである。

以上でもともとの非線形最適化問題は、下で粗く線形化することで線形最適化問題 LRP(Ω^q)に近似された。

以下では、LRP(Ω^q)がもともとの関数の ε 近似解を与えるために、区間を次々に半分に切っていって解を探すという分枝限定アルゴリズムを採用する。まず、分枝限定アルゴリズムについて説明し、その後分枝限定アルゴリズムでもともとの問題の ε 近似解が得られていることを証明する。min$L_0^{\Omega^q}(\mathbb{y})$の値が、大域的なmin$\phi_0(\mathbb{y})$の値の ε 近似値となるために、以下の分枝限定アルゴリズムを採用する。簡単に分枝限定アルゴリズムを説明しておこう。

第3章　具体的計算のためのアルゴリズム

3−1 分枝限定アルゴリズムについて

このアルゴリズムは、はじめの$\mathbb{R}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k}$の閉領域$\Omega^0$を二等分に区切り、有効な領域で問題を考察し、また有効な領域を二等分し考察する。ということの繰り返しを行う。
以下に記された STEP1〜STEP2 までの一連の作業をワンサイクルとして考察を行う。

最初のサイクルを 0 段階、k+1 回目のサイクルを k 段階　と記すこととする。
k 段階で考察対象となる$\mathbb{R}^{N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k}$次元の直方体の番号を$q_{(k)}$とし、その集合を$Q_k$とする。ただし、Shen 氏らの論文[S-Y]では STEP3、STEP4 の$Q_k \to Q_{k+1}$において、$\tilde{Q}_{(k)}, \dot{Q}_{(k)}$という２段階を置かずに直接行っている。本修士論文は、その STEP を分かりやすくするために、彼女らの STEP を２段階に分けて、また新しい記号を用いて STEP3、STEP4 を詳しく書いた。アルゴリズムはよく知られている分枝限定アルゴリズムである。

STEP0

- $k=0$とし、$q_{(0)}=0$とする。$Q_0=\{q_{(0)}\}=\{0\}, \Omega^{q(k)}=\Omega^0$となる。
- 近似幅 ε の値を決める。
- 上限値V^*の初期値を∞とする。
- LRP($\Omega^{q(0)}$)を解き、その解と最小値を$(\hat{y}(\Omega^{q(0)}), LB_0)$　と表す。
- 下限の初期値をLB_0とする。
- $\hat{y}(\Omega^{q_0})$が(P2)における$\phi_m(y) \le 0 \quad (m=1,2,\ldots,M+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k)$ を満たせば、$V^*=\phi_0\left(\hat{y}(\Omega^{q(0)})\right)$と更新する。
  このとき、もし$V^* - \varepsilon \le LB_0 \le V^*$となれば、
  $V^* - \varepsilon \le \min\phi_0(y) \le V^*$となるので、$LB_0, V^*$が(p2)の ε 近似値となる。よってこの場合はここでアルゴリズムは終了。
  それ以外は STEP1 へ進む。

STEP1

閉領域$\Omega^{q(k)}$を各$i\left(i=1,2,\ldots N+2P+2\sum_{k=1}^{M}\acute{P}k\right)$のうち、$\left[\underline{y_i}, \overline{y_i}\right]$

が一番大きい i について$\left[\underline{y_i}, \frac{\underline{y_i}+\overline{y_i}}{2}\right]$と$\left[\frac{\underline{y_i}+\overline{y_i}}{2}, \overline{y_i}\right]$に二等分して、

$\Omega^{q(k)}$を$\Omega^{q(k)0}, \Omega^{q(k)1}$に二等分する。

STEP2

$\nu=0,1$ とし

$$\underline{\Phi_m}(\nu) := \sum_{f_{mt}'(y)>0} f_{mt}\left(\underline{Y}_{mt}^{\Omega^{q(k)\nu}}\right) + \sum_{f_{mt}'(y)<0} f_{mt}\left(\overline{Y}_{mt}^{\Omega^{q(k)\nu}}\right)$$

$$(\mathrm{m}=1,2,\ldots,\mathrm{M}+2\mathrm{P}+2\sum_{k=1}^{M}\acute{\mathrm{P}}\,\mathrm{k})$$

を求め、 $^{\exists}\mathrm{m},\mathrm{s.t.}\ \underline{\Phi_m}(\nu)>0$ であれば、その m について

$0<\underline{\Phi_m}\leq\Phi_m$となり、該当する$\Omega^{q(k)\nu}$において(P2)に

適していないため、その$\Omega^{q(k)\nu}$を考察領域から除く。

STEP3

- 残った$\Omega^{q(k)\nu}$について LRP($\Omega^{q(k)\nu}$)を解き、その解と最小値を$\left(\hat{y}\left(\Omega^{q(k)\nu}\right),\mathrm{LB}_{q(k)\nu}\right)$と表す。
- $\hat{y}\left(\Omega^{q(k)\nu}\right)$が(P2)における$\phi_m(y)\leq 0$　(m= 1,2, ...,

  $\mathrm{M}+2\mathrm{P}+2\sum_{k=1}^{M}\acute{\mathrm{P}}\,\mathrm{k})$ を満たせば、$V^*=\min\{V^*,\phi_0\left(\hat{y}\left(\Omega^{q(k)\nu}\right)\right)$

  に更新する。このとき残っている領域番号の集合を$\tilde{Q}_{(k)}$とし、その元を$\tilde{q}_{(k)}$と表す。
- $\mathrm{LB}_{\tilde{q}_{(k)}}>V^*$となる$\Omega^{\tilde{q}(k)}$を考察領域から除く。このときに残っている領域番号の集合を$\dot{Q}_{(k)}$とし、その元を$\dot{q}_{(k)}$と表す。

STEP4

- $Q_{k+1}:=\dot{Q}_{(k)}-\left\{\dot{q}_{(k)}\in\dot{Q}_{(k)}|\mathrm{LB}_{\dot{q}_{(k)}}>V^*-\ \varepsilon\right\}$

  とする。

  もし$Q_{k+1}=\emptyset$であれば、V^*が最適値で、最適解y^*は

  $y^*\in\kappa_0$

  $$\kappa_0:=\{y\in\Omega^{\dot{q}(k)}|V^*=\phi_0(y)\ \ \mathrm{s.t.}\ \phi_m(y)\leq 0$$
  $$(\mathrm{m}=1,2,\ldots,\ \mathrm{M}+2\mathrm{P}+2\sum_{k=1}^{M}\acute{\mathrm{P}}\,\mathrm{k})\}$$

  となる。
- $Q_{k+1}\neq\emptyset$であるとき($\mathrm{LB}_{\dot{q}_{(k)}}\leq V^*-\ \varepsilon$ となる$\Omega^{\dot{q}(k)}$が存在するとき、$k=k+1$とする。

STEP5

$\mathrm{LB}_{q(k)}:=\min\{\mathrm{LB}_{q(k)}\}$とする。$\min\{\mathrm{LB}_{q(k)}\}$となる$\Omega^{q(k)}$を選び STEP1 へ進む。

以下にこうして得られた解はもともとの最適化問題の ε 近似解になっていることを証明し、さらに ε が 0 に近づくときに解が収束しているということを証明する。つまりアルゴリズムの収束について記す。

定理 2　(P2)は大域的最適解をもつとする。近似幅 ε について

(ⅰ)　$\varepsilon>0$のとき

アルゴリズムは有限回の反復で終了し、Φ_0^*を(P2)の大域的最適値とする、(P2)の大域的 ε 近似解y^*とし、$V^*=\phi_0(y^*)$とすると　$V^*-\ \varepsilon\ \leq\Phi_0^*\leq V^*$

(ⅱ)　$\varepsilon\to 0$のとき

$\{\varepsilon_n\}$を近似幅 ε の数列とし、$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots . > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \cdots > 0$,$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ とする。アルゴリズムによって求められる各ε_nについての(P2)のε_n近似解となる $\mathbb{y}$ を $\mathbb{y}_n$ とする。このとき、$\mathbb{y}_n$ の集積点が(P2)の大域的最適解となる。

(証明)

（ｉ） アルゴリズムの構成より明らかである。

（ⅱ） 各ε_nについての(P2)のε_n近似解となる$\phi_0(\mathbb{y})$の上限値をV_n^*とすると

$$\phi_0(\mathbb{y}_n) \in [V_n^* - \varepsilon,\ V_n^*]$$

$\mathbb{y}_n$ は有界閉集合上の点列であるので、収束する部分列$\{\mathbb{y}_{ni}\}$をもつ。

$\lim_{i\to\infty} \mathbb{y}_{ni} = \mathbb{y}^*$ とする。

$$V_{ni}^* - \varepsilon_{ni} \le \phi_0(\mathbb{y}_{ni}) \le V_{ni}^*$$

$i \to \infty$ ならば$ni \to \infty$　よって　$\lim_{ni\to\infty} \varepsilon_{ni} = 0$

V_n^* は有界な単調減少数列であるので収束する。

$\lim_{n\to\infty} V_n^* = \Phi_0^*$ とする。

$$\lim_{i\to\infty}(V_{ni}^* - \varepsilon_{ni}) \le \lim_{i\to\infty} \phi_0(\mathbb{y}_{ni}) \le \lim_{i\to\infty} V_{ni}^*$$

$\phi_0(\mathbb{y})$は連続関数なので、$\lim_{i\to\infty} \phi_0(\mathbb{y}_{ni}) = \phi_0(\mathbb{y}^*)$　よって

$\Phi_0^* \le \phi_0(\mathbb{y}^*) \le \Phi_0^*$　すなわち$\phi_0(\mathbb{y}^*) = \Phi_0^*$

また $^\forall m$ について　$\phi_m(\mathbb{y}_n) \le 0$　$\phi_m(\mathbb{y})$ は連続であるので

$$\lim_{n\to\infty} \phi_m(\mathbb{y}_n) = \phi_m(\mathbb{y}^*) \le 0$$

となる。

証明終

第4章　計算例

この章では、上のアルゴリズムを説明するため、手計算で扱える例を 2 つあげ、どのように解が近似されているのかを説明する。

4－1　例1

次の問題を考える。

$$\text{(P0)}\quad \begin{cases} \min\ 10\sin x^2 - \ln x \\ \text{subject to}\quad \sqrt{\frac{\pi}{4}} \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

この式をx^2をx_2、xをx_1と置きなおして、同等な問題(P1)へ変換を行う。

$$\text{(P1)}\quad \begin{cases} \min\ 10\sin x_2 - \ln x_1 \\ \text{subject to}\quad \sqrt{\frac{\pi}{4}} \le x_1 \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \qquad\qquad \frac{\pi}{4} \le x_2 \le \frac{\pi}{2} \\ \qquad\qquad {x_1}^2 - x_2 \le 0 \end{cases}$$

問題を線形化して解くために、x_1をe^{y_1}, x_2をy_2と置きなおし、問題(P2)へ変換する。

$$\text{(P2)}\quad \begin{cases} \min\ 10\sin y_2 - y_1 \\ \text{subject to}\quad \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4} \le y_1 \le \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} \\ \qquad\qquad \frac{\pi}{4} \le y_2 \le \frac{\pi}{2} \\ \qquad\qquad e^{2y_1} - y_2 \le 0 \end{cases}$$

上記問題を関数電卓を使用して計算を行った。ここでは$\pi = 3.1416$とし、小数第四位までの値を採用した。

$\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4} \le y_1 \le \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} \le y_2 \le \frac{\pi}{2}$ を小数点表示すると

$-0.1208 \le y_1 \le 0.2258$, $0.7854 \le y_2 \le 1.5708$ である。

[0 段階]

- 最初の全体の区間（-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $0.7854 \le y_2 \le 1.5708$）を$\Omega^0$とする。
- 上限値V*の初期値を∞とする。
- Ω^0において、目的関数 $10\sin y_2 - y_1$と条件関数 $e^{2y_1} - y_2$を線形化する。

  $10\sin y_2 - y_1$の線形化：$-y_1 + 3.7292y_2 + 4.1421$

  $e^{2y_1} - y_2$の線形化：$2.2663y_1 - y_2 + 0.9915$
- LRP(Ω^0)を解く。下限の初期値$\mathrm{LB}_0 = 7.1619$　となる。

このことから、最適値は7.1619から∞までの間にあることが分かる。

- y_2の閉区間[0.7854 , 1.5708]を[0.7854 , 1.1781]と[1.1781 , 1.5708]二等分して、
  Ω^0を

  Ω^{00}:（-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $0.7854 \le y_2 \le 1.1781$）

  Ω^{01}:（-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $01.1781 \le y_2 \le 1.5708$）

  と二等分する。

- Ω^{00}, Ω^{01}について LRP(Ω^{00}) , LRP(Ω^{01}) をそれぞれ解くと、下限値が7.1736となる。下限値がある領域をΩ^1とする。

このことから、最適値は7.1736 から∞までの間にあることが分かる。

[1 段階]

- Ω^1（-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $0.7854 \le y_2 \le 1.1781$）を

  Ω^{10}: (-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $0.7854 \le y_2 \le 0.9817$)

  Ω^{11}:（-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $0.9817 \le y_2 \le 1.1781$）

  と二等分する。

- Ω^{10}, Ω^{11}について LRP(Ω^{10}) , LRP(Ω^{11}) をそれぞれ解くと、下限値が7.1807となる。

このことから、最適値は7.1807 から∞までの間にあることが分かる。

以下同様にアルゴリズムを繰り返し、４段階目で$(y_1 , y_2) = (-0.0774, 0.8665)$において上限値$V^* = \phi_0(\hat{y}(\Omega^4)) = 7.8523$に更新される。この時の下限値は7.1844となる。
従って、最適値は 7.1844から 7.8523 までの間にあることが分かる。

$\varepsilon = 0.7$とすると、$V^* - \varepsilon = 7.8523 - 0.7 = 7.1523 < 07.5153$
よって上限値V*: 7.8523は最小値の ε 近似値となり、その値をとる点$(-0.0774, 0.8665)$が ε

近似解となる。

4－2　例 2

次の問題を考える。

$$
\text{(P0)}\quad
\begin{cases}
\min\ \sin x^2 - \ln x \\
\text{subject to}\ \ \sqrt{\frac{\pi}{4}} \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{cases}
$$

この式をx^2をx_2、xをx_1と置きなおして、同等な問題(P1)へ変換を行う。

$$
\text{(P1)}\quad
\begin{cases}
\min\ \sin x_2 - \ln x_1 \\
\text{subject to}\ \ \sqrt{\frac{\pi}{4}} \le x_1 \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
\qquad \frac{\pi}{4} \le x_2 \le \frac{\pi}{2} \\
\qquad {x_1}^2 - x_2 \le 0
\end{cases}
$$

問題を線形化して解くために、x_1をe^{y_1}, x_2をy_2と置きなおし、問題(P2)へ変換する。

$$
\text{(P2)}\quad
\begin{cases}
\min\ \sin y_2 - y_1 \\
\text{subject to}\ \ \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4} \le y_1 \le \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} \\
\qquad \frac{\pi}{4} \le y_2 \le \frac{\pi}{2} \\
\qquad e^{2y_1} - y_2 \le 0
\end{cases}
$$

ここではπ = 3.1416とし、小数第四位までの値を採用した。

$\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4} \le y_1 \le \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$ ，$\frac{\pi}{4} \le y_2 \le \frac{\pi}{2}$ を小数点表示すると

$-0.1208 \le y_1 \le 0.2258$ ，$0.7854 \le y_2 \le 1.5708$ である。

[0 段階]

STEP 0

- 最初の全体の区間（$-0.1208 \le y_1 \le 0.2258$ ，$0.7854 \le y_2 \le 1.5708$）を$\Omega^0$とする。
- 上限値V^*の初期値を∞とする。
- Ω^0において、目的関数 $\sin y_2 - y_1$と条件関数 $e^{2y_1} - y_2$を線形化する。

$\sin y_2 - y_1$の線形化：$-y_1 + 0.1865y_2 + 0.707$

$e^{2y_1} - y_2$の線形化：$2.2663y_1 - y_2 + 0.855$

- LRP(Ω^0)を解き、下限の初期値$\mathrm{LB}_0 = 0.7615$　となる。

このことから、最適値は0.7615から∞までの間にあることが分かる。

- y_2の閉区間[0.7854 , 1.5708]を[0.7854 , 1.1781]と[1.1781 , 1.5708]に二等分して、Ω^0を

  Ω^{00}:　(-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $0.7854 \le y_2 \le 1.1781$)

  Ω^{01}:　(-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $1.1781 \le y_2 \le 1.5708$)

  と二等分する。
- Ω^{00}, Ω^{01}について LRP(Ω^{00}) , LRP(Ω^{01}) をそれぞれ解くと、下限値は 0.7705 となる。下限値がある領域をΩ^1とする。

このことから、最適値は0.7705から∞までの間にあることが分かる。

[1 段階]

- Ω^1（$-0.1208 \le y_1 \le 0.2258$, $1.1781 \le y_2 \le 1.5708$）を

  Ω^{10}: (-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $1.1781 \le y_2 \le 1.3744$)

  Ω^{11}: (-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $1.3744 \le y_2 \le 1.5708$)

  と二等分する。
- Ω^{10}, Ω^{11}について LRP(Ω^{10}) , LRP(Ω^{11}) をそれぞれ解くと、下限値は 0.7735 となる。下限値がある領域をΩ^2とする。

このことから、最適値は0.7735から∞までの間にあることが分かる。

[2 段階]

- Ω^2 (-0.1208≤ $y_1 \le 0.2258$, $1.3744 \le y_2 \le 1.1781$) を

  Ω^{20}: (-0.1208≤ $y_1 \le 0.0525$, $1.3744 \le y_2 \le 1.178$)

  Ω^{21}: (0.0525≤ $y_1 \le 0.2258$, $1.3744 \le y_2 \le 1.178$)

  と二等分する。
- Ω^{20}, Ω^{21}についてLRP(Ω^{20}) , LRP(Ω^{21}) をそれぞれ解くと下限値は0.7735となる。
- $\widehat{\mathrm{Y}}(\Omega^{20}) = (y_1 , y_2) = (0.0525, 1.3744)$ において、上限値V^*を$\Phi_0(\widehat{\mathrm{Y}}(\Omega^{20})) = 0.9282$ に更新する。したがって、最適値は 0.7735 から 0.9282 までの間にあることが分かる。

$\varepsilon = 0.2$とすると、$V^* - \varepsilon = 0.9282 - 0.2 = 0.7282 < 0.7735$
よって上限値V^*: 0.9282は最小値のε近似値となり、その値をとる点(0.0525,1.3744)がε近似解となる。

5章　今後の課題

5−1 アルゴリズムの考察

例を手計算でこのアルゴリズムのとおりに実行して、次のことが分かった。一つは Shen 氏らの方法を採用したプログラムでは、初めの段階（0 段階）で$\hat{y}(\Omega^{q_0})$が(P2)における $\phi_m(y) \le 0$　(m= 1,2, ..., $M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k$) を満たすことはほとんどない、ということである。従って上限値は区間を何回か切っていくことではじめて出てくるものである。
たとえば、例 1 においては区間を 5 回切って、例 2 については 3 回切ってはじめて上限値が出てくる。

更に上限値V^*の値をとる点は、問題(P1)では制約条件に適した点であるが、その点は、問題(P0)の制約条件に適しているかどうかはわからない。なぜならば、問題(P0)の制約条件を満たすのは、定理 1 より、$\phi_m(y) = 0(m = M+1,, \dots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)$の点である。よって、問題(P1)では制約条件に適した点が問題(P0)の解となっているかどうかはわからない。しかし、ε を小さくしていけば、問題(P0)の解に近づくということである。従って、4 章の例で書いた「その値をとる点」というのも近似的なものである。

更に半分に次々と切っていった区間の中で本当に大切なのは、$\phi_m(y) \le 0$　$(m = M + 1,, \dots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)$ではなく、$\phi_m(y) = 0$　$(m = M + 1,, \dots, M + 2P + 2\sum_{k=1}^{M} \acute{P}k)$となるところであるので、$m \ge M + 1$については$\phi_m(y) > 0$ となる区間をも除けるのである。従って、$\phi_m(y)$を上から近似する問題を求め、それが負ならば除く、という条件を付けると、もっと調べるべき区間は少なくなるのではないか、と思う。

よって修正するアルゴリズムはとして$m \ge M + 1$について$\phi_m(y)$を上から近似する関数$\overline{L}_m(y)$も求め、$\overline{L}_m(y)$の最大値を求め、それが負なら除くという項を STEP2,STEP3 に加えたらどうであろうか、ということが提案できる。そのことにより計算スピードがどのように変化するかは今後の課題としたい。

5−2　今後の研究課題

今後の研究課題として、上記アルゴリズムの提案をプログラミングすることに取り組みたい。もしプログラミングが成功すれば、それによって計算スピードがどのように変化するか検証し、工学における実用問題でアルゴリズムの有効性を確かめたい。

特に工学の分野における以下の課題

（1）　OFDM 信号の非線形回線下における PAPR (Peak to Averaged Power Ratio) 特性軽減方式

（2）　移動通信環境下における伝送路推定方式

（３）　通信環境に応じたユーザごとの変調方式・周波数スロット割り当て方式

といった課題に対して、この研究結果、またそれを拡張・改善したものを使って、課題の改善提案をしたいと考えている。

参考文献

[S-Y] Shen, Pei-Ping,; Yuan, Gui-Xia ,Global optimization for the sum of generalized polynomial fractional functions. *Math. Methods Oper. Res.* 65 (2007), no. 3, 445–459, 90C32 (90C30)

[C-N 1]Cai, Dapeng; Nitta, Takashi Gyoshin, Limit of the solutions for the finite horizon problems as the optimal solution to the infinite horizon optimization problems. *J. Difference Equ. Appl.* 17 (2011), no. 3, 359–373. (Reviewer: Alexander J. Zaslavski), 49K40 (39A60 91B62)

[C-N 2]Cai, Dapeng; Nitta, Takashi Gyoshin, Optimal solutions to the infinite horizon problems: constructing the optimum as the limit of the solutions for the finite horizon problems. *Nonlinear Anal.* 71 (2009), no. 12, e2103–e2108. (Reviewer: Mikhail I. Sumin), 49M05 (49K40)

[C-N 3]Okumura Ryuhei; Cai, Dapeng; Nitta, Takashi Gyoshin, Transversality conditions for infinite horizon optimality: higher order differential problems. *Nonlinear Anal.* 71 (2009), no. 12, e1980–e1984, 49K27