乗算と仮数部のシフトから導かれる $[1,2)$ 上の変換の不変測度の研究

三重大学大学院教育学研究科　理数生活系教育領域
212M045　山口　知也

2014 年 2 月 13 日 提出

目次

1　はじめに

本論文に現れる写像 $\Psi_x : [1,2) \longrightarrow [1,2), \Phi_x : [1,2) \longrightarrow [1,2), x \in [1,2)$ は次の式とともに現れる.

(1) $t \in [1,2)$ に対し xt を

$$xt = 1.b_1b_2b_3 \cdots \times 2^m$$

と 2 進浮動小数点形式で表す ($m = 0$ または 1). このとき $\Psi_x(t) = 1.b_1b_2b_3 \cdots$ である; すなわち, $\Psi_x(t)$ は xt の仮数部である.

(2) $t \in [1,2)$ に対し xt を

$$xt = 1.b_1b_2b_3 \cdots b_s b_{s+1} b_{s+2} \cdots \times 2^m$$

と表す ($m = 0$ または 1). このとき $\Phi_x(t) = 1.b_{s+1}b_{s+2} \cdots$ である; すなわち $\Phi_x(t)$ は xt の仮数部の 1. 以下を s ビット左にシフトした数である.

表面的には, Ψ_x は Φ_x の特殊な場合 ($s = 0$) のように見えるが $\Phi'_x \geq c > 1$(expanding) であるのに対し Ψ'_x はそのような性質を持たないので, $n = 0, 1, 2, \cdots$ と変化させたときの Ψ_x^n と Φ_x^n の性質は大きく異なる. 本研究の目標は Ψ_x, Φ_x の不変測度 (定義は次節) を与える L^1 関数の一般形を, β 変換 $T_\beta : [0,1) \longrightarrow [0,1)$, $T_\beta(t) = \beta t - \lfloor \beta t \rfloor$ の不変測度を与える関数 $h_\beta(y) = \sum_{y < T_\beta^n(1)} \frac{1}{\beta^n}$ のように写像 Ψ_x, Φ_x を用いて具体的に求めることである. しかしながら Ψ_x, Φ_x では Ψ'_x, Φ'_x が 2 値であるため, 単値の T_β の場合と異なり解析が難しい. 本論文では Ψ_x, Φ_x および Φ_x を一般化した変換がマルコフ変換になる場合について解析を行い不変測度を求めている.

本論文の作成にあたっては熱心かつ丁寧に指導してくださった谷口礼偉特任教授および 6 年間多くの困難をともに乗り越えた研究仲間の西村美穂氏に深く感謝する次第である.

2　不変測度とPerron-Frobenius作用素

X を集合，T を写像とする．T が

$$^{\forall}x \in X\,; T(x) \in X$$

を満たすとき T を変換という．以下 $T : X \to X$ は変換とする．T が全単射であるとき T を可逆変換という．また $(X, \mathcal{S}, \mu)$ を測度空間とする．T が

$$^{\forall}A \in \mathcal{S}(X)\,; T^{-1}(A) \in \mathcal{S}(X)$$

を満たすとき T を可測変換という．可逆変換 T に対して T と T^{-1} が可測であるとき T を可逆可測変換という．T が可測で

$$^{\forall}A \in \mathcal{S}(X)\,; \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \tag{1}$$

が成り立つとき T を**保測**という．この場合 μ を T に対する**不変測度**という．μ が T に対する不変測度であるための条件 (1) は

$$^{\forall}g(\text{有界かつ可測});\ \int_X g(T(x))d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x) \tag{2}$$

と同等であることに注意しておく．(実際 (2) で $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$ とおけば (1) が得られ，g を単関数列で近似していけば (1) から (2) が得られる．) 保測であり可逆変換である変換を可逆保測変換という．$A \subset X$ が

$$^{\forall}x \in A\,; T(x) \in A\ (\text{すなわち}, T(A) \subset A)$$

を満たすとき A を正不変集合という．特に $T^{-1}(A) = A$ すなわち

$$x \in A \Leftrightarrow T(x) \in A$$

が成り立つとき集合 A を狭義 T 不変という．エルゴード理論において，狭義不変集合を不変あるいは T 不変と呼ぶ．保測変換 T に対して A が狭義 T 不変集合ならば，$\mu(A) = 0$ あるいは $\mu(A^c) = 0$ が成り立つとき T は**エルゴード的**であるという．$X = [a, b)\quad (0 \leq a < b < \infty)$ として X 上の Borel 集合族を $\mathfrak{B}$，$(X, \mathfrak{B})$ 上の Lebesgue 測度を λ，測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \lambda)$ 上の可積分関数全体のなす集合を L^1 とする．

定義 1. X 上の区分的に単調な C^1 級の写像 φ に対して Perron-Frobenius 作用素 $\mathfrak{L} : L^1 \longrightarrow L^1$ を，

$$(\mathfrak{L}f)(x) = \sum_{\varphi(y)=x} \frac{1}{|\varphi'(y)|} f(y)$$

で定義する．ただし，φ は各区間 $J_i = \langle b_i, b_{i+1} \rangle$ で単調でありその内点で微分可能かつ $X = \bigcup_i J_i$ とする．($\langle b_i, b_{i+1} \rangle$ は b_i, b_{i+1} を端点とする区間であり，各端点は区間に属することも属さないこともある．)

Perron-Frobenius 作用素に関する以下の命題の (ii) は本論文でしばしば使うので証明とともに記しておく [4]．φ_i を φ の各 J_i に制限した写像と定義する．

命題 1. (i) 可積分関数 f と有界可測関数 g に対して

$$\int_X g(\varphi(x))f(x)dx = \int_X g(y)(\mathfrak{L}f)(y)dy \tag{3}$$

(ii) φ が ρ を密度にもつ確率測度 μ を不変測度にもつための必要十分条件は

$$\mathfrak{L}\rho(x) = \rho(x)$$

が殆ど全ての x で成り立つことである．

証明. (i) を示す．(3) の左辺は

$$\int_X g(\varphi(x))f(x)dx = \sum_i \int_{J_i} g(\varphi(x))f(x)dx$$

となる．ここで $y = \varphi_i(x)$ と変数変換すると $dy = \varphi_i'(x)dx$ であるから

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\varphi_i'(x)}dy \\ &= \frac{1}{\varphi_i'(\varphi_i^{-1}(y))}dy \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{J_i} g(\varphi(x))f(x)dx &= \sum_i \int_{\varphi_i(J_i)} g(y)f(\varphi_i^{-1}(y))\frac{1}{|\varphi_i'(\varphi_i^{-1}(y))|}dy \\ &= \sum_i \int_X \mathbb{I}_{\varphi_i(J_i)}g(y)f(\varphi_i^{-1}(y))\frac{1}{|\varphi_i'(\varphi_i^{-1}(y))|}dy \\ &= \int_X g(y)(\mathfrak{L}f)(y)dy. \end{aligned}$$

よって (i) が示された．

(ii) を示す．(i) において $f(x) = \rho(x)$ とする．

$$\mathfrak{L}\rho(x) = \rho(x)$$

が殆ど全ての x について成り立つとすると

$$\begin{aligned} \int_X g(\varphi(x))\rho(x)dx &= \int_X g(y)\left(\mathfrak{L}\rho\right)(y)dy \\ &= \int_X g(y)\rho(y)dy \end{aligned}$$

となるので $d\mu(x)=\rho(x)dx$ は不変測度である．次に μ が $\rho(x)$ を密度にもつ不変測度とすると任意の有界可測関数 g に対して

$$\int_X g(\varphi(x))\rho(x)dx=\int_X g(x)\rho(x)dx$$

が成り立つ．ここで上式左辺は (1) より

$$\int_X g(\varphi(x))\rho(x)dx=\int_X g(y)\left(\mathfrak{L}\rho\right)(y)dy$$

であるので

$$\int_X g(y)\left(\mathfrak{L}\rho\right)(y)dy=\int_X g(x)\rho(x)dx$$

となる．上式で y を x と書き直して左辺に移項すると

$$\int_X g(x)((\mathfrak{L}\rho)(x)-\rho(x))dx=0$$

が任意の有界可測関数 g に対して成り立つことがわかる．よって

$$\mathfrak{L}\rho(x)=\rho(x)$$

が殆ど全ての x について成り立つ．したがって (ii) が成り立つ． □

この命題の (ii) は関数 φ の Perron-Frobenius 作用素 $\mathfrak{L}$ の不動点 ($\mathfrak{L}h=h$ を満たす h) は不変測度 μ を与えることを示している．一般に不動点関数 h を数式で直接表すことは困難であるので，適当な関数 g を選び，数列

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_x^k g\right\}$$

の極限関数を h とする [1]．以下では $g(t)=\mathbf{1}(t)$ として計算を行う．ただし，$\mathbf{1}(t)$ は恒等的に 1 をとる関数である．

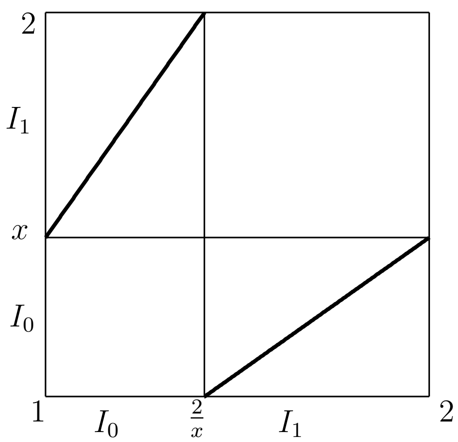
3 マルコフ変換 (I)

区間 $X=[1,2)$ 上の写像 $f:X\to X$ が以下の性質を持つとき，f は**マルコフ変換**であるという．

> 区間 $X=[1,2)$ のある分割 Δ
>
> $$\Delta\ :\ a_0=1<a_1<a_2<\cdots<a_n=2$$
>
> があり f は各区間 $I_i=(a_{i-1},a_i)$ をある区間 $(a_{j(i)},a_{k(i)})$ 上に 1 対 1 かつ連続に写像し，またその逆写像も連続である．

写像 $\Psi_x : [1,2) \to [1,2), x \in [1,2)$ を次で定義する．

$$\Psi_x(t) = \begin{cases} xt & (1 \le t < \frac{2}{x}) \\ \frac{1}{2}xt & (\frac{2}{x} \le t < 2) \end{cases}$$



$\Psi_x(t)$ の定義において，$1 \le t < \frac{2}{x}$ の場合は，$xt = 1.b_1b_2b_3 \cdots \times 2^m$ で $m = 0$ の場合に相当し，また $\frac{2}{x} \le t < 2$ の場合は，$m = 1$ の場合に相当する．この写像が導く Perron-Frobenius 作用素 $\mathfrak{L}_x : L^1 \to L^1$ は

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_x h)(t) &= \mathbb{I}_{[1,\Psi_x(1))}(t)\frac{2}{x}h\left(\frac{2t}{x}\right) + \mathbb{I}_{[\Psi_x(1),2)}(t)\frac{1}{x}h\left(\frac{t}{x}\right) \\ &= \mathbb{I}_{[1,x)}(t)\frac{2}{x}h\left(\frac{2t}{x}\right) + \mathbb{I}_{[x,2)}(t)\frac{1}{x}h\left(\frac{t}{x}\right) \end{aligned}$$

となる．ただし，$\mathbb{I}_{[a,b)}$ は区間 $[a,b)$ で 1 をとり，その他では 0 をとる関数である．この写像 Ψ_x は x が特別な値をとるときマルコフ変換になる．実際 $I_0 = [1, \frac{2}{x}), I_1 = [\frac{2}{x}, 2)$ であるので

$$\Psi_x(I_0) = I_1, \quad \Psi_x(I_1) = I_0$$

となるためには，$\Psi_x(1) = \frac{2}{x}$ が成り立てばよいが，$\Psi_x(1) = x$ であるので，$\frac{2}{x} = x$ すなわち $x = \sqrt{2}$ であればマルコフ変換になる．

不変測度を求める方法はたくさん持っていた方がよいので，以下の 2 つの方法で求める．

3.1 極限関数を求める方法

まず

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}^k\mathbf{1}\right\}(t)$$

を求めることによって，$\Psi_{\sqrt{2}}$ の不変測度を求めてみる．([1] では $\inf|\Psi'_x| > 1$ を仮定しているが $\Psi_{\sqrt{2}}$ では特にこの仮定が必要ない．)

$\mathfrak{L}^k_{\sqrt{2}}\mathbf{1}, k = 1, 2$ を求めてみる．

(i) $k = 1$ のとき

$$\left(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\mathbf{1}\right)(t) = \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\sqrt{2} + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) $k = 2$ のとき

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{L}^2_{\sqrt{2}}\mathbf{1}\right)(t) &= \left(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\left(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\mathbf{1}\right)\right)(t) \\ &= \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\sqrt{2}(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\mathbf{1})(\sqrt{2}\,t) + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\mathbf{1})\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\sqrt{2}\left(\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(\sqrt{2}\,t)\sqrt{2} + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(\sqrt{2}\,t)\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2} + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

また

$$\begin{aligned} 1 \le \sqrt{2}\,t < \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le t < 1 \\ \sqrt{2} \le \sqrt{2}\,t < 2 &\Leftrightarrow 1 \le t < \sqrt{2} \\ 1 \le \frac{t}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{2} \le t < 2 \\ \sqrt{2} \le \frac{t}{\sqrt{2}} < 2 &\Leftrightarrow 2 \le t < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

より (4) の式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} & \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\sqrt{2}\left(\mathbb{I}_{[\frac{1}{\sqrt{2}},1)}(t)\sqrt{2} + \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\sqrt{2} + \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ = \; & \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t) + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t) = \mathbf{1}(t) \end{aligned}$$

したがって

$$\left(\mathfrak{L}^k_{\sqrt{2}}\mathbf{1}\right)(t) = \begin{cases} \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\sqrt{2} + \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}} & (k = 2l+1) \\ \mathbf{1}(t) & (k = 2l) \end{cases} \tag{5}$$

となる．これより

$$\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}^k_{\sqrt{2}}\mathbf{1}\right\}(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2}\cdot\sqrt{2} & (1 \le t < \sqrt{2},\ n = 2m) \\ \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} & (\sqrt{2} \le t < 2,\ n = 2m) \\ \dfrac{n}{2} + \dfrac{n-1}{2}\cdot\sqrt{2} & (1 \le t < \sqrt{2},\ n = 2m+1) \\ \dfrac{n}{2} + \dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} & (\sqrt{2} \le t < 2,\ n = 2m+1) \end{cases}$$

となるので

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) & (1\le t<\sqrt{2},\ n=2m)\\ \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & (\sqrt{2}\le t<2,\ n=2m)\\ \frac{1}{2}\{1+(1-\frac{1}{n})\cdot\sqrt{2}\} & (1\le t<\sqrt{2},\ n=2m+1)\\ \frac{1}{2}\left\{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} & (\sqrt{2}\le t<2,\ n=2m+1)\end{cases}$$

である．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) & (1\le t<\sqrt{2})\\ \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & (\sqrt{2}\le t<2)\end{cases}$$

となる．この関数を改めて $h_{\sqrt{2}}(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}h_{\sqrt{2}}(t)&=\frac{1}{2}\left(\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)(1+\sqrt{2})+\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\sqrt{2}+\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}\tag{6}$$

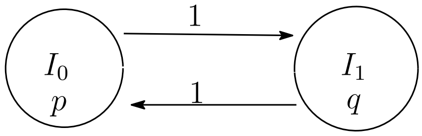
と表される．$h_{\sqrt{2}}$ が $\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}$ の不動点となることを確認しておく．

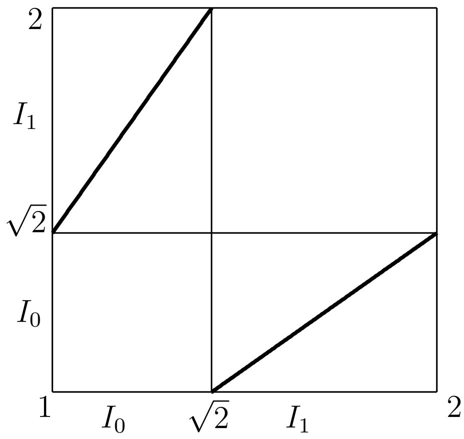
$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}h_{\sqrt{2}}\right)(t)&=\left((\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\left\{\mathbf{1}(\cdot)+\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(\cdot)\sqrt{2}+\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(\cdot)\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right)\right)(t)\\&=\frac{1}{2}\left(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\left(\mathbf{1}(\cdot)+\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\mathbf{1}(\cdot)\right)\right)(t)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}\mathbf{1}\right)(t)+\mathbf{1}(t)\right)\\&=h_{\sqrt{2}}(t).\end{aligned}$$

この極限による方法は Ψ_x がマルコフ変換でない場合にも適用可能であるが，一般には (5) のような周期性がないため計算が難しい．

3.2　マルコフ過程を用いる方法

この不動点関数 $h_{\sqrt{2}}$ は以下のマルコフ過程の概念を用いて導くこともできる．





I_0 にある確率を p，I_1 にある確率を q とする．I_0 上の点は必ず I_1 に行くので I_0から I_1 への推移確率は 1 である．同様に I_1から I_0 への推移確率は 1 である．p, q をこのマルコフ過程の定常確率とすると

$$p = q \times 1, \quad q = p \times 1$$

の関係が成り立たなければならない．したがって $p = q$である．また $p + q = 1$ なので $p = q = \frac{1}{2}$ となる．この確率が I_0, I_1 上にそれぞれ密度 d_0, d_1 で一様に分布していると考えれば

$$p = \int_{I_0} d_0 dx = (\sqrt{2} - 1) \times d_0 = \frac{1}{2}$$

$$d_0 = \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}),$$

$$q = \int_{I_1} d_1 dx = (2 - \sqrt{2}) \times d_1 = \frac{1}{2}$$

$$d_1 = \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

このとき $[1, 2)$ 上の関数 $d_0 \mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t) + d_1 \mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)$ は (6) により $h_{\sqrt{2}}$ に等しくなる．

マルコフ過程による方法は，写像 T がマルコフ変換のとき有効である．一般の写像 T に対しては，マルコフ変換 T_n, $n = 1, 2, \cdots$, で T を近似していく方法が有効と考えられるが，T_n が T に近づく程計算が複雑になっていくと予想される．

注意 1. $x=\sqrt{2}$ のとき，$(\mathfrak{L}u)=u$ を満たす密度関数は無限にある．実際，可測集合 $B\subset[1,\sqrt{2})$ は $\Psi_{\sqrt{2}}(B)\subset[\sqrt{2},2)$ であり $B\cap\Psi_{\sqrt{2}}(B)=\phi$ となる．このとき，B と $\Psi_{\sqrt{2}}(B)$ にそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ を与えるような，B および $\Psi_{\sqrt{2}}(B)$ 上で一様な確率密度関数

$$u(t)=\frac{1}{2|B|}\mathbb{I}_B(t)+\frac{1}{2|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}(t)$$

は $\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}$ の不動点関数になる (ただし $|B|$ は B の Lebesgue 測度である)．以下 $\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}u=u$ を示す.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}u)(t)=\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\frac{2}{\sqrt{2}}&\left(\frac{1}{2|B|}\mathbb{I}_B(\sqrt{2}\,t)+\frac{1}{2|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}(\sqrt{2}t)\right)\\&+\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2|B|}\mathbb{I}_B\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

$t\in[1,\sqrt{2})$ のとき $\sqrt{2}t=\Psi_{\sqrt{2}}(t)\in[\sqrt{2},2)$ であるので，上式右辺第 1 項は

$$\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}(\Psi_{\sqrt{2}}(t))=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_{[1,\sqrt{2})}(t)\mathbb{I}_B(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_B(t)$$

となる．同様に $t\in[\sqrt{2},2)$ のときは $\frac{t}{\sqrt{2}}=\Psi_{\sqrt{2}}(t)\in[1,\sqrt{2})$ であるので，上式右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2|B|}\mathbb{I}_B(\Psi_{\sqrt{2}}(t))&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2|B|}\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\mathbb{I}_{\Psi^{-1}_{\sqrt{2}}(B)}(t)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{|B|}\mathbb{I}_{[\sqrt{2},2)}(t)\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{|B|}\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}(t)\end{aligned}$$

となる．よって

$$(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}u)(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_B(t)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{|B|}\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}(t)$$

と表される．ここで $|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|=\sqrt{2}|B|$ であるので

$$(\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}u)(t)=\frac{1}{2|B|}\mathbb{I}_B(t)+\frac{1}{2|\Psi_{\sqrt{2}}(B)|}\mathbb{I}_{\Psi_{\sqrt{2}}(B)}(t)=u(t)$$

となる．したがって，$B\subset[1,2)$，$|B|<\sqrt{2}-1$ のとき $B\cup\Psi_{\sqrt{2}}(B)$ は，$[1,2)$ より測度が小さい不変集合になる．これから Ψ はエルゴード的でないことが分かる．

注意 2. 任意の $x\in[1,2)$ に対して $h(t)=\frac{1}{t}$ は Ψ_x に対する Perron-Frobenius 作用素 $\mathfrak{L}_x$ の不動点関数である．実際

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_xh)(t)&=\mathbb{I}_{[1,\Psi_x(1))}(t)\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{2t}+\mathbb{I}_{[\Psi_x(1),2)}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{t}\\&=\mathbb{I}_{[1,\Psi_x(1))}(t)\frac{1}{t}+\mathbb{I}_{[\Psi_x(1),2)}\frac{1}{t}\\&=\frac{1}{t}=h(t).\end{aligned}$$

この $h(t)$ は全ての $\Psi_x,x\in[1,2)$ について共通であるところが興味深い．

4　マルコフ変換 (II)

この節では簡単のため $\Phi_x(t) = 1.b_2b_3\cdots$，すなわち，仮数部の左シフト量が $1(s=1)$ の場合を扱う．($s>1$ の場合も同様に扱えるが計算が複雑になる．) 写像 $\Phi_x : [1,2) \to [1,2)$ を以下で定義する．

(1) $1 \le x < 1.5$ のとき

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} 2xt-1 & (1 \le t < \frac{3}{2x}) \\ 2xt-2 & (\frac{3}{2x} \le t < \frac{2}{x}) \\ xt-1 & (\frac{2}{x} \le t < 2) \end{cases}$$

(2) $1.5 \le x < 2$ のとき

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} 2xt-2 & (1 \le t < \frac{2}{x}) \\ xt-1 & (\frac{2}{x} \le t < \frac{3}{x}) \\ xt-2 & (\frac{3}{x} \le t < 2) \end{cases}$$

上の定義で，$\Phi_x(t) = 2xt\cdots$ は，$xt = 1.b_1b_2b_3\cdots \times 2^m$ で $m=0$ の場合に対応し，$\Phi_x(t) = xt\cdots$ は $m=1$ の場合に対応している．

4.1　極限関数を求める方法 (1)

(1) の場合 $(1 \le x < 1.5)$ を考える．この写像が導く Perron-Frobenius 作用素は

$$(\mathfrak{L}_x h)(t) = \mathbb{I}_{[1,2x-1)}(t)\left\{\frac{1}{2x}h\left(\frac{t+2}{2x}\right) + \frac{1}{x}h\left(\frac{t+1}{x}\right)\right\} \\ + \mathbb{I}_{[2x-1,2)}(t)\left\{\frac{1}{2x}h\left(\frac{t+1}{2x}\right) + \frac{1}{2x}h\left(\frac{t+2}{2x}\right)\right\}$$

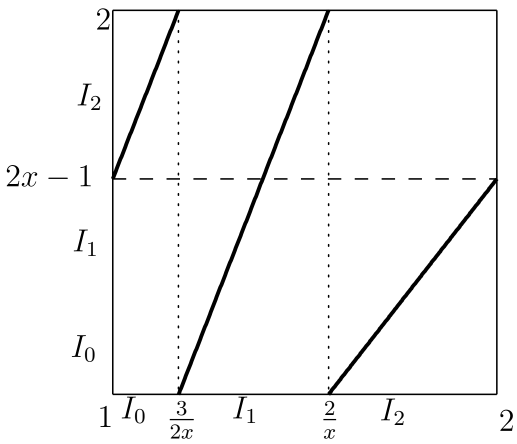
である．ここで $I_0 = [1, \frac{3}{2x}), I_1 = [\frac{3}{2x}, \frac{2}{x}), I_2 = [\frac{2}{x}, 2)$ とすると，$\Phi_x(2) = 2x-1 = \frac{2}{x}$ であれば (すなわち $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ であれば),

$$\begin{cases} \Phi_x(I_0) = I_2 \\ \Phi_x(I_1) = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \\ \Phi_x(I_2) = I_0 \cup I_1 \end{cases}$$

となり，$\Phi_x(t)$ はマルコフ変換となる．以下

$$\hat{x} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

とする．



このとき

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)$$

を求める．$\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{k}\mathbf{1}, k=1,2,3,4$ を求めてみると

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{1}{\hat{x}}+\frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\\
\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{2}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{3}{2\hat{x}^2}+\frac{1}{4\hat{x}^2}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\\
\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{3}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{7}{4\hat{x}^3}+\frac{5}{8\hat{x}^3}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\\
\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{4}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{19}{8\hat{x}^4}+\frac{9}{16\hat{x}^4}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)
\end{aligned}$$

となる．これから $\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{n}\mathbf{1}\right)(t)=p_n+q_n\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)$ とおいたとき，

$$p_n=\frac{1}{\hat{x}}(p_{n-1}+q_{n-1}),\quad q_n=\frac{1}{2\hat{x}}(p_{n-1}-q_{n-1})$$

すなわち

$$\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{n}\mathbf{1}\right)(t)=\frac{1}{\hat{x}}(p_{n-1}+q_{n-1})+\frac{1}{2\hat{x}}(p_{n-1}-q_{n-1})\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)$$

の関係があると予想される．実際この関係式は

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_{\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(\cdot))(t) &= \mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\left(\frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-2,2)}(t)+\frac{1}{\hat{x}}\mathbb{I}_{[\hat{x}-1,1)}(t)\right)\\
&\quad+\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t)\left(\frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,3)}(t)+\frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,3)}(t)\right)\\
&= \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)+\frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t)+\frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t)$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^n\mathbf{1}\right)(t) &= \mathfrak{L}_{\hat{x}}\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{n-1}\mathbf{1}\right)(t) \\
&= \mathfrak{L}_{\hat{x}}\left(p_{n-1} + q_{n-1}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(\cdot)\right)(t) \\
&= p_{n-1}(\mathfrak{L}_{\hat{x}}\mathbf{1})(t) + q_{n-1}(\mathfrak{L}_{\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(\cdot))(t) \\
&= p_{n-1}\left(\frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\right) + q_{n-1}\left(\frac{1}{2\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t)\right) \\
&= \frac{1}{\hat{x}}p_{n-1} + \frac{1}{2\hat{x}}p_{n-1}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) + \frac{1}{2\hat{x}}q_{n-1} + \frac{1}{2\hat{x}}q_{n-1}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t) \\
&= \frac{1}{\hat{x}}p_{n-1} + \frac{1}{2\hat{x}}p_{n-1}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) + \left(\frac{1}{\hat{x}} - \frac{1}{2\hat{x}}\right)q_{n-1} + \frac{1}{2\hat{x}}q_{n-1}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t) \\
&= \frac{1}{\hat{x}}\left(p_{n-1} + q_{n-1}\right)\frac{1}{2\hat{x}}p_{n-1}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) - \frac{1}{2\hat{x}}q_{n-1} + \frac{1}{2\hat{x}}q_{n-1}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t) \\
&= \frac{1}{\hat{x}}\left(p_{n-1} + q_{n-1}\right) + \frac{1}{2\hat{x}}(p_{n-1} - q_{n-1})\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)
\end{aligned}$$

により得られる．(p_n, q_n) と (p_{n-1}, q_{n-1}) の関係式を行列を用いて表すと

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{x}} & \frac{1}{\hat{x}} \\ \frac{1}{2\hat{x}} & -\frac{1}{2\hat{x}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\hat{x}}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2\hat{x}}\right)^n\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る．ここで $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．A の固有多項式を $g_A(\lambda)$ とおくと

$$g_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^2 - \lambda - 4$$

となる．$g_A(\lambda) = 0$ を解くと $\lambda = 2\hat{x}, -\frac{2}{\hat{x}}$ を得る．

(i) $\lambda = 2\hat{x}$ のときの固有空間 $W(2\hat{x}; A)$ は

$$W(2\hat{x}; A) = \left\{c\begin{pmatrix} 2\hat{x}+1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big| c \in \mathbb{R}\right\}$$

となる．

(ii) $\lambda = -\frac{2}{\hat{x}}$ のときの固有空間 $W(-\frac{2}{\hat{x}}; A)$ は

$$W\left(-\frac{2}{\hat{x}}; A\right) = \left\{c\begin{pmatrix} 1-\frac{2}{\hat{x}} \\ 1 \end{pmatrix}\Big| c \in \mathbb{R}\right\}$$

となる．したがって $\dim(W(2\hat{x};A)) + \dim(W(-\frac{2}{\hat{x}};A)) = 2$ となり A は対角化可能である．$P = \begin{pmatrix} 2\hat{x}+1 & 1-\frac{2}{\hat{x}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \dfrac{\hat{x}}{\hat{x}+4}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\hat{x}}-1 \\ -1 & 2\hat{x}+1 \end{pmatrix}$ であり，$B \equiv P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2\hat{x} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\hat{x}} \end{pmatrix}$ より

$$
\begin{aligned}
A^n &= PB^nP^{-1} \\
&= \tfrac{\hat{x}}{\hat{x}+4}\begin{pmatrix} 2\hat{x}+1 & 1-\frac{2}{\hat{x}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2\hat{x})^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\hat{x}}-1 \\ -1 & 2\hat{x}+1 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{\hat{x}}{\hat{x}+4}\begin{pmatrix} (2\hat{x})^n(2\hat{x}+1) - \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) & (2\hat{x})^n(2\hat{x}+1)\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n(2\hat{x}+1)\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) \\ (2\hat{x})^n - \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n & (2\hat{x})^n\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n(2\hat{x}+1) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2\hat{x}}\right)^n \tfrac{\hat{x}}{\hat{x}+4}\begin{pmatrix} (2\hat{x})^n(2\hat{x}+1) - \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) & (2\hat{x})^n(2\hat{x}+1)\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n(2\hat{x}+1)\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) \\ (2\hat{x})^n - \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n & (2\hat{x})^n\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\hat{x}}\right)^n(2\hat{x}+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{x}} \\ \frac{1}{2\hat{x}} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{\hat{x}}{\hat{x}+4}\begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{x}}\left\{(2\hat{x}+1) - \left(\frac{-1}{\hat{x}^2}\right)^n\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right)\right\} + \frac{1}{2\hat{x}}\left\{(2\hat{x}+1)\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) + \left(\frac{-1}{\hat{x}^2}\right)^n(2\hat{x}+1)\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right)\right\} \\ \frac{1}{\hat{x}}\left\{1-\left(\frac{-1}{\hat{x}^2}\right)^n\right\} + \frac{1}{2\hat{x}}\left\{\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) + \left(\frac{-1}{\hat{x}^2}\right)^n(2\hat{x}+1)\right\} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので $n \to \infty$ のとき p_n, q_n は収束する．その極限をそれぞれ p, q とすると

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{x}}(2\hat{x}+1) + \frac{1}{\hat{x}}(2\hat{x}+1)\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) \\ \frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2\hat{x}+1)\left\{\frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{\hat{x}}\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right)\right\} \\ \frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\left(1-\frac{2}{\hat{x}}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．特に

$$
p : q = 2\hat{x}+1 : 1 = 1 : \frac{1}{2\hat{x}+1} = 1 : \hat{x}-1
$$

であることが分かる (最後の等号では $2\hat{x}^2 = \hat{x}+2$ を使った)．以上の準備のもとで

$$
\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\hat{x}}^k\mathbf{1}\right\}(t)
$$

を求める．

$$
\begin{aligned}
\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\hat{x}}^k\mathbf{1}\right\}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\hat{x}}(p_k+q_k) + \frac{1}{2\hat{x}}(p_k-q_k)\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\right) \\
&= \frac{1}{\hat{x}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}p_k + \sum_{k=0}^{n-1}q_k\right) + \frac{1}{2\hat{x}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}p_k\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}q_k\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\right)
\end{aligned}
$$

となるので

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\frac{1}{\hat{x}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}q_k\right)+\frac{1}{2\hat{x}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}q_k\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\right)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\frac{1}{\hat{x}}\left(p+q\right)+\frac{1}{2\hat{x}}\left(p-q\right)\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)$$

となる.

補題 1.

$$\frac{1}{\hat{x}}(p+q):\frac{1}{2\hat{x}}(p-q)=1:\hat{x}-1$$

である.

証明. $p:q=1:\hat{x}-1$ より $q=p(\hat{x}-1)$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{x}}(p+q):\frac{1}{2\hat{x}}(p-q)&=\frac{1}{\hat{x}}(p+p(\hat{x}-1)):\frac{1}{2\hat{x}}(p-p(\hat{x}-1))\\&=\frac{1}{\hat{x}}(p+p\hat{x}-p):\frac{1}{2\hat{x}}(p-p\hat{x}+p)\\&=p:\frac{p}{2\hat{x}}(2-\hat{x})\\&=1:\frac{1}{2\hat{x}}(2-\hat{x})\\&=1:\hat{x}-1\quad(2=2\hat{x}^2-\hat{x}\text{を使う}).\end{aligned}$$

□

この補題と次の命題より上述の

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\frac{1}{\hat{x}}\left(p+q\right)+\frac{1}{2\hat{x}}\left(p-q\right)\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)$$

は $(\mathfrak{L}_{\hat{x}}h)(t)$ の不動点関数であることがわかる.

命題 2. 正数 c,d が $c:d=1:\hat{x}-1$ を満たしていれば

$$h(t)=c+d\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)$$

は $\mathfrak{L}_{\hat{x}}$ の不動点関数である.

証明. $c=1,d=\hat{x}-1$ の場合すなわち

$$h_{\hat{x}}(t)=1+(\hat{x}-1)\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)$$

が $\mathfrak{L}_{\hat{x}}$ の不動点となることを確認すれば十分である．

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_{\hat{x}} h_{\hat{x}}) &= \mathfrak{L}_{\hat{x}}\left(\mathbf{1} + (\hat{x}-1)\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(\cdot)\right)(t) \\
&= (\mathfrak{L}_{\hat{x}}\mathbf{1})(t) + (\hat{x}-1)(\mathfrak{L}_{\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(\cdot))(t) \\
&= \frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2x}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) + (\hat{x}-1)\left(\frac{1}{2\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t)\right) \\
&= \frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) + (\hat{x}-1)\frac{1}{2\hat{x}} + (\hat{x}-1)\frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t) \\
&= \frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\hat{x}} + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t) - \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[2\hat{x}-1,2)}(t) \\
&= \frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2\hat{x}}\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\hat{x}} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}(t) - \mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\right) - \frac{1}{2\hat{x}}\left(\mathbf{1}(t) - \mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)\right) \\
&= \frac{1}{\hat{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\hat{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\hat{x}} + \left(\frac{1}{2\hat{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\hat{x}}\right)\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t) \\
&= 1 + \left(\frac{1}{\hat{x}} - \frac{1}{2}\right)\mathbb{I}_{[1,2\hat{x}-1)}(t)
\end{aligned}
$$

ここで

$$\frac{1}{\hat{x}} - \frac{1}{2} = \frac{4}{1+\sqrt{17}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}-3}{4} = \hat{x} - 1$$

となるので $h_{\hat{x}}$ は $\mathfrak{L}_{\hat{x}}$ の不動点となる． $\square$

注意 3. $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{x}} & \frac{1}{\hat{x}} \\ \frac{1}{2\hat{x}} & -\frac{1}{2\hat{x}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$ において p_n, q_n がそれぞれ p, q に収束することを仮定すれば $p : q = 1 : \hat{x}-1$ となることは容易に計算される．実際上式で $p_n \to p, q_n \to q$ とすれば

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{x}} & \frac{1}{\hat{x}} \\ \frac{1}{2\hat{x}} & -\frac{1}{2\hat{x}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2\hat{x}}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2\hat{x}}\begin{pmatrix} 2p+2q \\ p-q \end{pmatrix}$$

となるので p, q に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} (1-\frac{1}{\hat{x}})p - \frac{1}{\hat{x}}q = 0 \\ -\frac{1}{2\hat{x}}p + \left(1+\frac{1}{\hat{x}}\right)q = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} (\hat{x}-1)p - q = 0 \\ -p + (2\hat{x}+1)q = 0 \end{cases}$$

を得る． $\hat{x} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ なのでこの連立方程式は非自明解を持ち $p : q = 1 : \hat{x}-1$ となる．

4.2　極限関数を求める方法 (2)

次に (2) の場合 ($1.5 \leq x < 2$) を考える．

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} 2xt - 2 & (1 \leq t < \frac{2}{x}) \\ xt - 1 & (\frac{2}{x} \leq t < \frac{3}{x}) \\ xt - 2 & (\frac{3}{x} \leq t < 2) \end{cases}$$

この写像が導く Perron-Frobenius 作用素は

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_x h)(t) = \mathbb{I}_{[1,2x-2)}(t) &\left\{ \frac{1}{x} h\left(\frac{t+1}{x}\right) + \frac{1}{x} h\left(\frac{t+2}{x}\right) \right\} \\ &+ \mathbb{I}_{[2x-2,2)}(t) \left\{ \frac{1}{2x} h\left(\frac{t+2}{2x}\right) + \frac{1}{x} h\left(\frac{t+1}{x}\right) \right\}\end{aligned}$$

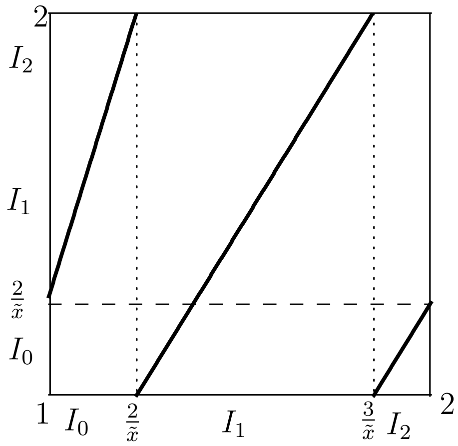
である．ここで $I_0 = [1, \frac{2}{x}), I_1 = [\frac{2}{x}, \frac{3}{x}), I_2 = [\frac{3}{x}, 2)$ とすると，$\Phi_x(2) = 2x - 2 = \frac{2}{x}$ であれば (すなわち $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であれば),

$$\begin{cases} \Phi_x(I_0) = I_1 \cup I_2 \\ \Phi_x(I_1) = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \\ \Phi_x(I_2) = I_0 \end{cases}$$

となり，$\Phi_x(t)$ はマルコフ変換となる．以下

$$\tilde{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

とする．



このとき

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{L}_{\tilde{x}}^k \mathbf{1} \right\} (t)$$

を求める．$\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{k}\mathbf{1}, k=1,2,3,4$ を求めてみると

$$
\begin{aligned}
\left(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{3}{2\tilde{x}} + \frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t) \\
\left(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{2}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{5}{2\tilde{x}^{2}} + \frac{1}{2\tilde{x}^{2}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t) \\
\left(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{3}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{4}{\tilde{x}^{3}} + \frac{1}{\tilde{x}^{3}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t) \\
\left(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{4}\mathbf{1}\right)(t) &= \frac{13}{2\tilde{x}^{4}} + \frac{3}{2\tilde{x}^{4}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)
\end{aligned}
$$

となる．これから $\left(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{n}\mathbf{1}\right)(t) = p_n + q_n\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)$ とおいたとき，

$$
p_n = \frac{1}{2\tilde{x}}(3p_{n-1}+q_{n-1}), \quad q_n = \frac{1}{2\tilde{x}}(p_{n-1}-q_{n-1})
$$

すなわち

$$
\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{n}\mathbf{1}\right)(t) = \frac{1}{2\tilde{x}}(3p_{n-1}+q_{n-1}) + \frac{1}{2\tilde{x}}(p_{n-1}-q_{n-1})\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)
$$

の関係があると予想される．実際この関係式は 4.1 節と同様に計算して

$$
(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(\cdot))(t) = \frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t)
$$

であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
\left(\mathfrak{L}_{\hat{x}}^{n}\mathbf{1}\right)(t) &= \mathfrak{L}_{\tilde{x}}\left(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{n-1}\mathbf{1}\right)(t) \\
&= \mathfrak{L}_{\tilde{x}}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(\cdot)\right)(t) \\
&= p_{n-1}(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}\mathbf{1})(t) + q_{n-1}(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(\cdot))(t) \\
&= p_{n-1}\left(\frac{3}{2\tilde{x}} + \frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)\right) + q_{n-1}\left(\frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t)\right) \\
&= \frac{1}{2\tilde{x}}(3p_{n-1}+q_{n-1}) + \frac{1}{2\tilde{x}}(p_{n-1}-q_{n-1})\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)
\end{aligned}
$$

により得られる．(p_n, q_n) と (p_{n-1}, q_{n-1}) の関係式を行列を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{\tilde{x}} & \frac{1}{2\tilde{x}} \\ \frac{1}{2\tilde{x}} & -\frac{1}{2\tilde{x}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\tilde{x}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2\tilde{x}}\right)^{n}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．C の固有多項式を $g_C(\lambda)$ とおくと

$$
g_C(\lambda) = |\lambda E - C| = \lambda^2 - 2\lambda - 4
$$

となる．$g_C(\lambda) = 0$ を解くと $\lambda = 2\tilde{x}, -\frac{2}{\tilde{x}}$ を得る．

i) $\lambda = 2\tilde{x}$ のときの固有空間 $W(2\tilde{x}; C)$ は

$$W(2\tilde{x}; C) = \left\{ c \begin{pmatrix} 2\tilde{x}+1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．

ii) $\lambda = -\frac{2}{2\tilde{x}}$ のときの固有空間 $W(-\frac{2}{\tilde{x}}; C)$ は

$$W\left(-\frac{2}{\tilde{x}}; C\right) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{\tilde{x}} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．したがって $\dim(W(2\tilde{x}; C)) + \dim(W(-\frac{2}{\tilde{x}}; C)) = 2$ となり C は対角化可能である．$Q = \begin{pmatrix} 2\tilde{x}+1 & 1-\frac{2}{\tilde{x}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $Q^{-1} = \dfrac{\tilde{x}}{\tilde{x}+4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\tilde{x}}-1 \\ -1 & 2\tilde{x}+1 \end{pmatrix}$ であり，$D \equiv Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} 2\tilde{x} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\tilde{x}} \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}
C^n &= QD^nQ^{-1} \\
&= \tfrac{\tilde{x}}{\tilde{x}+4} \begin{pmatrix} 2\tilde{x}+1 & 1-\frac{2}{\tilde{x}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2\tilde{x})^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\tilde{x}}-1 \\ -1 & 2\tilde{x}+1 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{\tilde{x}}{\tilde{x}+4} \begin{pmatrix} (2\tilde{x})^n(2\tilde{x}+1) - \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n \left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) & (2\tilde{x})^n(2\tilde{x}+1)\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n (2\tilde{x}+1)\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \\ (2\tilde{x})^n - \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n & (2\tilde{x})^n\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n (2\tilde{x}+1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2\tilde{x}}\right)^n \tfrac{\tilde{x}}{\tilde{x}+4} \begin{pmatrix} (2\tilde{x})^n(2\tilde{x}+1) - \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n \left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) & (2\tilde{x})^n(2\tilde{x}+1)\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n (2\tilde{x}+1)\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \\ (2\tilde{x})^n - \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n & (2\tilde{x})^n\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) + \left(-\frac{2}{\tilde{x}}\right)^n (2\tilde{x}+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{x}} \\ \frac{1}{2\tilde{x}} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{\tilde{x}}{\tilde{x}+4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{x}} \left\{ (2\tilde{x}+1) - \left(\frac{-1}{\tilde{x}^2}\right)^n \left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \right\} + \frac{1}{2\tilde{x}} \left\{ (2\tilde{x}+1)\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) + \left(\frac{-1}{\tilde{x}^2}\right)^n (2\tilde{x}+1)\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \right\} \\ \frac{1}{\tilde{x}} \left\{ 1 - \left(\frac{-1}{\tilde{x}^2}\right)^n \right\} + \frac{1}{2\tilde{x}} \left\{ \left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) + \left(\frac{-1}{\tilde{x}^2}\right)^n (2\tilde{x}+1) \right\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので $n \to \infty$ のとき p_n, q_n は収束する．その極限をそれぞれ p, q とすると

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{x}}(2\tilde{x}+1) + \frac{1}{\tilde{x}}(2\tilde{x}+1)\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \\ \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{1}{2\tilde{x}}\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2\tilde{x}+1)\left\{ \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{x}}\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \right\} \\ \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{1}{2\tilde{x}}\left(1-\frac{2}{\tilde{x}}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．特に

$$p : q = 2\tilde{x}+1 : 1 = 1 : \frac{1}{2\tilde{x}+1} = 1 : 2\tilde{x} - 3$$

であることが分かる (最後の等号では $\tilde{x}^2=\tilde{x}+1$ を使った). 以上の準備のもとで

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)$$

を求める.

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\tilde{x}}(3p_k+q_k)+\frac{1}{2\tilde{x}}(p_k-q_k)\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)\right)\\&=\frac{1}{2\tilde{x}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}3p_k+\sum_{k=0}^{n-1}q_k\right)+\frac{1}{2\tilde{x}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}p_k\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)-\sum_{k=0}^{n-1}q_k\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)\right)\end{aligned}$$

となるので

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\frac{1}{2\tilde{x}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}3p_k+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}q_k\right)+\frac{1}{2\tilde{x}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}q_k\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)\right)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\frac{1}{2\tilde{x}}(3p+q)+\frac{1}{2\tilde{x}}(p-q)\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)$$

となる.

補題 2.

$$\frac{1}{2\tilde{x}}(3p+q):\frac{1}{2\tilde{x}}(p-q)=1:2\tilde{x}-3$$

である.

証明. $p:q=1:2\tilde{x}-3$ より $q=p(2\tilde{x}-3)$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tilde{x}}(3p+q):\frac{1}{2\tilde{x}}(p-q)&=\frac{1}{2\tilde{x}}(p+p(2\tilde{x}-3)):\frac{1}{2\tilde{x}}(p-p(2\tilde{x}-3))\\&=2p\tilde{x}:-2p\tilde{x}+4p\\&=2\tilde{x}:-2\tilde{x}+4\\&=1:-1+\frac{2}{\tilde{x}}\\&=1:2\tilde{x}-3\quad(1=\tilde{x}^2-\tilde{x}\text{を使う}).\end{aligned}$$

□

この補題と次の命題より上述の

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{L}_{\tilde{x}}^{k}\mathbf{1}\right\}(t)=\frac{1}{2\tilde{x}}(3p+q)+\frac{1}{2\tilde{x}}(p-q)\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)$$

は $(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}h)(t)$ の不動点関数であることがわかる.

命題 3. 正数 m, n が $m : n = 1 : 2\tilde{x} - 3$ を満たしていれば

$$h_{\tilde{x}}(t) = m + n\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)$$

は $\mathfrak{L}_{\tilde{x}}$ の不動点関数である．

証明. $m = 1, n = 2\tilde{x} - 3$ の場合すなわち

$$h_{\tilde{x}}(t) = 1 + (2\tilde{x} - 3)\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t)$$

が $\mathfrak{L}_{\tilde{x}}$ の不動点となることを確認すれば十分である．

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_{\tilde{x}} h_{\tilde{x}}) &= \mathfrak{L}_{\tilde{x}} \left(\mathbf{1} + (2\tilde{x} - 3)\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(\cdot)\right)(t) \\
&= (\mathfrak{L}_{\tilde{x}}\mathbf{1})(t) + (2\tilde{x} - 3)(\mathfrak{L}_{\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(\cdot))(t) \\
&= \frac{3}{2\tilde{x}} + \frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t) + (2\tilde{x} - 3)\frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t) \\
&= \frac{3}{2\tilde{x}} + \frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t) + \mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t) - \frac{3}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t) \\
&= \frac{3}{2\tilde{x}} + \frac{1}{2\tilde{x}}\mathbb{I}_{[1,2\tilde{x}-2)}(t) + \left(\mathbf{1} - \mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t)\right) - \frac{3}{2\tilde{x}}\left(\mathbf{1} - \mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t)\right) \\
&= 1 + \left(\frac{2}{\tilde{x}} - 1\right)\mathbb{I}_{[2\tilde{x}-2,2)}(t)
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{2}{\tilde{x}} - 1 = \frac{4}{1 + \sqrt{5}} - 1 = \sqrt{5} - 2 = 2\tilde{x} - 3$$

となるので $h_{\tilde{x}}(t)$ は $\mathfrak{L}_{\tilde{x}}$ の不動点となる． □

4.3 マルコフ過程を用いる方法

マルコフ過程の定常測度の概念を用いて $h_{\hat{x}}, h_{\tilde{x}}$ を求める方法 (3.2 節の方法) については，次節で Φ_x を一般化した変換 T について解析を行うので，ここでは省略する．

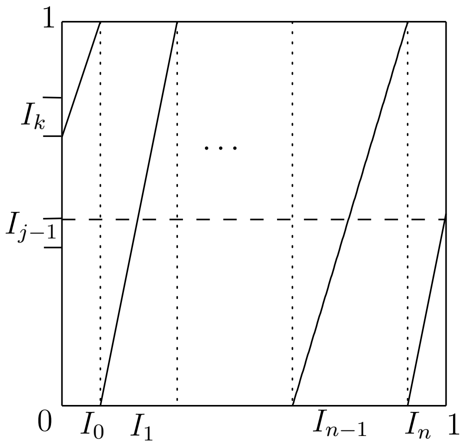
5 マルコフ変換 (III)

本節では写像 Φ_x を一般化した写像 T について考える．一般性を考慮して $X = [0, 1)$ とする．区間 $X = [0, 1)$ のある分割 Δ

$$\Delta \,:\, a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} = 1$$

に対し，区間を $I_0 = [a_0, a_1), I_1 = [a_1, a_2), \cdots, I_n = [a_n, a_{n+1})$ とする．写像 $T(x)$ を以下のように定義する．

$$
T(x) = \begin{cases}
\alpha x + (1 - \alpha a_1) & (x \in I_0) \\
\beta_1 (x - a_1) & (x \in I_1) \\
\vdots & \\
\beta_i (x - a_i) & (x \in I_i) \\
\vdots & \\
\beta_{n-1}(x - a_{n-1}) & (x \in I_{n-1}) \\
\gamma (x - a_n) & (x \in I_n)
\end{cases}
$$



$T(x)$ のグラフ

ただし

$$
\alpha < \frac{1}{|I_0|}, \quad \beta_i = \frac{1}{|I_i|}\,(i = 1, 2, \cdots n-1), \quad \gamma < \frac{1}{|I_n|}
$$

である．変換 T では，直線部分の傾きに自由度があることを注意しておく．この写像が導く Perron-Frobenius 作用素は，$y \in [0,1)$ に対して $T(x_i) = y,\ x_i \in I_i,$ とすれば

$$
(\mathfrak{L}h)(y) = \tfrac{1}{\alpha} h(x_0) \mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) + \tfrac{1}{\beta_1} h(x_1) + \cdots + \tfrac{1}{\beta_{n-1}} h(x_{n-1}) + \tfrac{1}{\gamma} h(x_n) \mathbb{I}_{[0,T(1))} \quad (7)
$$

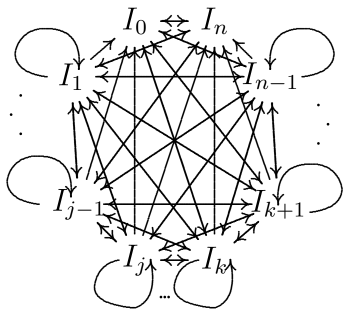
である．$T(x)$ が

$$
T(I_0) = I_k \cup \cdots \cup I_n, \quad T(I_n) = I_0 \cup \cdots \cup I_{j-1}
$$

を満たすとき $T(x)$ はマルコフ変換となる．以下，マルコフ過程の概念を用いて不動点関数を求める．I_0 にある確率を p_0，I_1 にある確率を $p_1, \cdots, I_{n-1}$ にある確率を p_{n-1}，I_n にある確率を p_n とする．

5.1 マルコフ過程を用いる方法 (1)

まず $j < k$ のときを考える．$I_s\,(1 \le s \le n-1)$ から $I_t\,(1 \le t \le n-1)$ への推移確率は $|I_t|$ である．I_0 から $I_t\,(k \le t \le n)$ への推移確率は $\frac{|I_t|}{|T(I_0)|}$ であり，I_n から $I_t\,(0 \le t \le j-1)$ への推移確率は $\frac{|I_t|}{|T(I_n)|}$ である．このとき $p_0, p_1, \cdots p_{j-1}, p_j, \cdots, p_{k-1}, p_k, \cdots, p_n$ をマルコフ過程の定常確率とすると以下の等式が成り立つ．



$$
\begin{aligned}
p_0 &= |I_0|p_1 + |I_0|p_2 + \cdots + |I_0|p_{n-1} + \frac{|I_0|}{|T(I_n)|}p_n,\\
p_1 &= |I_1|p_1 + |I_1|p_2 + \cdots + |I_1|p_{n-1} + \frac{|I_1|}{|T(I_n)|}p_n,\\
&\vdots\\
p_{j-1} &= |I_{j-1}|p_1 + |I_{j-1}|p_2 + \cdots + |I_{j-1}|p_{n-1} + \frac{|I_{j-1}|}{|T(I_n)|}p_n,\\
p_j &= |I_j|p_1 + |I_j|p_2 + \cdots + |I_j|p_{n-1},\\
&\vdots\\
p_{k-1} &= |I_{k-1}|p_1 + |I_{k-1}|p_2 + \cdots + |I_{k-1}|p_{n-1},\\
p_k &= \frac{|I_k|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_k|p_1 + |I_k|p_2 + \cdots + |I_k|p_{n-1},\\
&\vdots\\
p_n &= \frac{|I_n|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_n|p_1 + |I_n|p_2 + \cdots + |I_n|p_{n-1}.
\end{aligned}
$$

$p_1, \cdots, p_n$ の式に対しそれぞれ $|I_0|, |I_1|, \cdots, |I_{j-1}|, |I_j|, \cdots, |I_{k-1}|, |I_k|, \cdots, |I_n|$ で両辺割ると

$$
\begin{aligned}
\frac{p_0}{|I_0|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|}, \qquad (8)\\
\frac{p_1}{|I_1|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{p_{j-1}}{|I_{j-1}|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|}, \\
\frac{p_j}{|I_j|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, \qquad (9) \\
&\vdots \\
\frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, \\
\frac{p_k}{|I_k|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, \\
&\vdots \\
\frac{p_n}{|I_n|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる．これより

$$
\frac{p_0}{|I_0|} = \frac{p_1}{|I_1|} = \cdots = \frac{p_{j-1}}{|I_{j-1}|}, \quad \frac{p_j}{|I_j|} = \cdots = \frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|}, \quad \frac{p_k}{|I_k|} = \cdots = \frac{p_n}{|I_n|}
$$

がわかる．ここで

$$
A = \frac{p_0}{|I_0|} = \frac{p_1}{|I_1|} = \cdots = \frac{p_{j-1}}{|I_{j-1}|}, \quad B = \frac{p_j}{|I_j|} = \cdots = \frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|}, \quad C = \frac{p_k}{|I_k|} = \cdots = \frac{p_n}{|I_n|}
$$

とおくと (8)(9)(10) より

$$
\begin{aligned}
A - B &= \frac{p_n}{|T(I_n)|} = \frac{|I_n|}{|T(I_n)|} \cdot \frac{p_n}{|I_n|} = \frac{|I_n|}{|T(I_n)|} C \qquad (11) \\
C - B &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} = \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} \cdot \frac{p_0}{|I_0|} = \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} A \\
C &= \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} A + B \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となる．(12) を (11) に代入すると

$$
A - B = \frac{|I_n|}{|T(I_n)|} \left(\frac{|I_0|}{|T(I_0)|} A + B \right)
$$

となる．この式を変形すると

$$
\left(1 - \frac{|I_n||I_0|}{|T(I_n)||T(I_0)|} \right) A = \left(1 + \frac{|I_n|}{|T(I_n)|} \right) B
$$

$$
A = \frac{1 + \frac{|I_n|}{|T(I_n)|}}{1 - \frac{|I_n||I_0|}{|T(I_n)||T(I_0)|}} B = \frac{|T(I_n)||T(I_0)| + |T(I_0)||I_n|}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|} B = \frac{|T(I_0)|(|T(I_n)| + |I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|} B
$$

を得る．この式を (12) に代入すると

$$
\begin{aligned}
C &= B + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} \cdot \frac{|T(I_0)|(|T(I_n)| + |I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|} B \\
&= \left(1 + \frac{|I_0|(|T(I_n)| + |I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|}\right) B \\
&= \frac{|T(I_n)|(|T(I_0)| + |I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|} B
\end{aligned}
$$

となるので

$$
A : B : C = \frac{|T(I_0)|(|T(I_n)| + |I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|} : 1 : \frac{|T(I_n)|(|T(I_0)| + |I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|}.
$$

ここで

$$
h(y) = \tfrac{|T(I_0)|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|} \mathbb{I}_{I_0 \cup \cdots \cup I_{j-1}}(y) + \mathbb{I}_{I_j \cup \cdots \cup I_{k-1}}(y) + \tfrac{|T(I_n)|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|} \mathbb{I}_{I_k \cup \cdots \cup I_n}(y) \tag{13}
$$

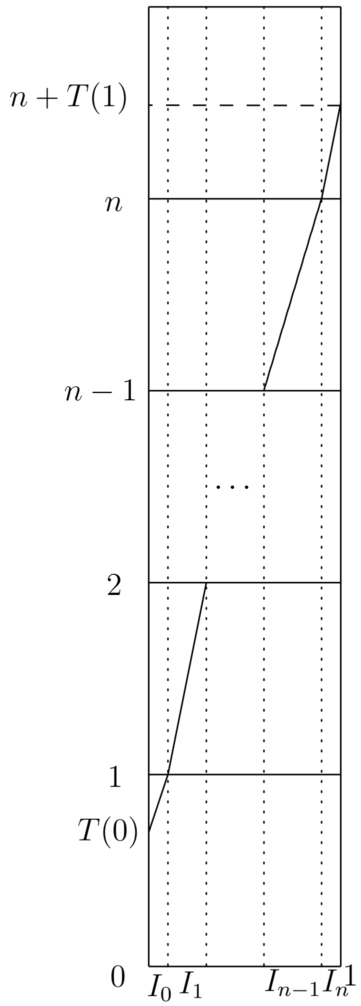
と定める．

命題 4. $h(y)$ は $T(x)$ に対する Perron-Frobenius 作用素 $\mathfrak{L}$ の不動点関数である．

証明. 簡単のため

$$
\hat{A} = \tfrac{|T(I_0)|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}, \quad \hat{C} = \tfrac{|T(I_n)|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|} \tag{14}
$$

とおく．さらに関数 $G(x)$ を $G(x) = T(x) + \sum_{i=0}^{n} i\mathbb{I}_{I_i}(x)$ と定める．$G(x)$ のグラフは次に示す.



$G(x)$ のグラフ

(7) に (13) を代入すると

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \tfrac{1}{\alpha}h(x_0)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) + \tfrac{1}{\beta_1}h(x_1) + \cdots + \tfrac{1}{\beta_{n-1}}h(x_{n-1}) + \tfrac{1}{\gamma}h(x_n)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left(\hat{A}\cdot\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{j-1}}(x_0) + \mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_{k-1}}(x_0) + \hat{C}\cdot\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(x_0)\right)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) \\
&\quad + \tfrac{1}{\beta_1}\left(\hat{A}\cdot\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{j-1}}(x_1) + \mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_{k-1}}(x_1) + \hat{C}\cdot\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(x_1)\right) \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \tfrac{1}{\gamma}\left(\hat{A}\cdot\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{j-1}}(x_n) + \mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_{k-1}}(x_n) + \hat{C}\cdot\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(x_n)\right)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left(\hat{A}\cdot\mathbb{I}_{[G(0),G(a_j))}(0+y) + \mathbb{I}_{[G(a_j),G(a_k))}(0+y) + \hat{C}\cdot\mathbb{I}_{[G(a_k),G(a_{n+1}))}(0+y)\right)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) \\
&\quad + \tfrac{1}{\beta_1}\left(\hat{A}\cdot\mathbb{I}_{[G(0),G(a_j))}(1+y) + \mathbb{I}_{[G(a_j),G(a_k))}(1+y) + \hat{C}\cdot\mathbb{I}_{[G(a_k),G(a_{n+1}))}(1+y)\right) \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \tfrac{1}{\gamma}\left(\hat{A}\cdot \mathbb{I}_{[G(0),G(a_j))}(n+y) + \mathbb{I}_{[G(a_j),G(a_k))}(n+y) + \hat{C}\cdot \mathbb{I}_{[G(a_k),G(a_{n+1}))}(n+y)\right)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left(\hat{A}\cdot \mathbb{I}_{[T(0),j))}(0+y) + \mathbb{I}_{[j,k)}(0+y) + \hat{C}\cdot \mathbb{I}_{[k,n+T(1)))}(0+y)\right)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) \\
&\quad + \tfrac{1}{\beta_1}\left(\hat{A}\cdot \mathbb{I}_{[T(0),j)}(1+y) + \mathbb{I}_{[j,k)}(1+y) + \hat{C}\cdot \mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(1+y)\right) \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \tfrac{1}{\gamma}\left(\hat{A}\cdot \mathbb{I}_{[T(0),j)}(n+y) + \mathbb{I}_{[j,k)}(n+y) + \hat{C}\cdot \mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(n+y)\right)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{A}\left(\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[T(0),j))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) + \tfrac{1}{\beta_1}\mathbb{I}_{[T(0),j)}(1+y) + \cdots\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \tfrac{1}{\beta_{n-1}}\mathbb{I}_{[T(0),j)}(n-1+y) + \tfrac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[T(0),j)}(n+y)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[j,k))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) + \tfrac{1}{\beta_1}\mathbb{I}_{[j,k)}(1+y) + \cdots\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \tfrac{1}{\beta_{n-1}}\mathbb{I}_{[j,k)}(n-1+y) + \tfrac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[j,k)}(n+y)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right) \\
&\quad + \hat{C}\left(\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) + \tfrac{1}{\beta_1}\mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(1+y) + \cdots\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \tfrac{1}{\beta_{n-1}}\mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(n-1+y) + \tfrac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(n+y)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right).
\end{aligned}
$$

第 1 項において $T(0) \le y < 1 \le j$ より

$$\mathbb{I}_{[T(0),j))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) = \mathbb{I}_{[T(0),1)}(y).$$

$j < n$ より $\mathbb{I}_{[T(0),j)}(n+y) = 0$ である．$0 \le l + y < j$ を満たす整数 l は $l = 0, 1, \cdots, j-1$ である．よって第 1 項は

$$\hat{A}\left(\frac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) + \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{j-1}}\right)$$

となる．第 2 項においては $0+y < j$ より $\mathbb{I}_{[j,k)}(0+y) = 0$，$k < n$ より $\mathbb{I}_{[j,k)}(n+y) = 0$ である．よって第 2 項は

$$\frac{1}{\beta_j} + \cdots + \frac{1}{\beta_{k-1}}$$

となる．第 3 項では $l = k, \cdots, n-1$ について $\mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(l+y) = 1$ である．また $\mathbb{I}_{[k,n+T(1))}(n+y) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) = 1$ である．(証明.($\Rightarrow$)　$k \le n+y < n+T(1) \Leftrightarrow k - n \le 0 \le y < T(1)$．　($\Leftarrow$)　$0 \le y < T(1) \Leftrightarrow k \le n \le n+y < n+T(1)$) よって第 3 項は

$$\hat{C}\left(\frac{1}{\beta_k} + \cdots + \frac{1}{\beta_{n-1}} + \frac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right)$$

となる．したがって $(\mathfrak{L}h)(y)$ は

$$(\mathfrak{L}h)(y) = \hat{A}\left(\frac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) + \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{j-1}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\hat{C}\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right) \tag{15}$$

となる．この $(\mathfrak{L}h)(y)$ を (i) $0 \leq y < T(1)$，(ii) $T(1) \leq y < T(0)$，(iii) $T(0) \leq y < 1$ の 3 つの場合に分けて考える．(ii) の結果を用いて (i), (iii) を示すので (ii) を先に示しておく．

(ii) $T(1) \leq y < T(0)$ のとき (15) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)=0$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)=0$ より

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \hat{A}\left(\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}\right)+\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\hat{C}\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)\\
&= \hat{A}(|I_1|+\cdots|I_{j-1}|)+(|I_j|+\cdots+|I_{k-1}|)+\hat{C}(|I_k|+\cdots+|I_n|)\\
&= \hat{A}(|T(I_n)|-|I_0|)+(1-|T(I_0)|-|T(I_n)|)+\hat{C}(|T(I_0)|-|I_{n-1}|)\\
&= 1+(\hat{A}-1)|T(I_n)|-\hat{C}|I_n|+(\hat{C}-1)|T(I_0)|-\hat{A}|I_0|\\
&= 1+\left(\tfrac{|T(I_0)|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}-1\right)|T(I_n)|-\tfrac{|T(I_n)|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}|I_n|\\
&\qquad+\left(\tfrac{|T(I_n)|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}-1\right)|T(I_0)|-\tfrac{|T(I_0)|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}|I_0| \quad ((14)\text{ より})\\
&= 1+\tfrac{|T(I_n)||I_n|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}-\tfrac{|T(I_n)||I_n|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\\
&\qquad+\tfrac{|T(I_0)||I_0|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}-\tfrac{|T(I_0)||I_0|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\\
&= 1 \qquad\qquad (16)\\
&= h(y).
\end{aligned}$$

(i) $0 \leq y < T(1)$ のとき (15) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)=0$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)=1$ より

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \hat{A}\left(\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}\right)+\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\hat{C}\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&= \hat{A}\left(\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}\right)+\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\hat{C}\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}\right)+\frac{\hat{C}}{\gamma}\\
&= 1+\frac{\hat{C}}{\gamma} \quad ((16)\text{ より})\\
&= 1+\frac{|I_n|}{|T(I_n)|}\cdot\frac{|T(I_n)|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|} \quad \left(\gamma=\frac{|T(I_n)|}{|I_n|}\text{および (14) より}\right)\\
&= 1+\frac{|I_n|(|I_0+T(I_0)|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\\
&= \frac{|T(I_0)|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\\
&= h(y)
\end{aligned}$$

(iii) $T(0) \le y < 1$ のとき (15) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) = 1$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) = 0$ より

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \hat{A}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{j-1}}\right) + \left(\frac{1}{\beta_j} + \cdots + \frac{1}{\beta_{k-1}}\right) + \hat{C}\left(\frac{1}{\beta_k} + \cdots + \frac{1}{\beta_{n-1}}\right) \\
&= \hat{A}\left(\frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{j-1}}\right) + \left(\frac{1}{\beta_j} + \cdots + \frac{1}{\beta_{k-1}}\right) + \hat{C}\left(\frac{1}{\beta_k} + \cdots + \frac{1}{\beta_{n-1}}\right) + \frac{\hat{A}}{\alpha} \\
&= 1 + \frac{\hat{A}}{\alpha} \quad \text{((16) より)} \\
&= 1 + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} \cdot \frac{|T(I_0)|(|T(I_n)| + |I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|} \quad \left(\alpha = \frac{|T(I_0)|}{|I_0|}\text{および (14) より}\right) \\
&= \frac{|T(I_n)|(|T(I_0)| + |I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)| - |I_n||I_0|} \\
&= h(y)
\end{aligned}
$$

となる．以上より任意の $y \in [0,1)$ について

$$
(\mathfrak{L}h)(y) = h(y)
$$

となる．よって $h(y)$ は不動点関数である．

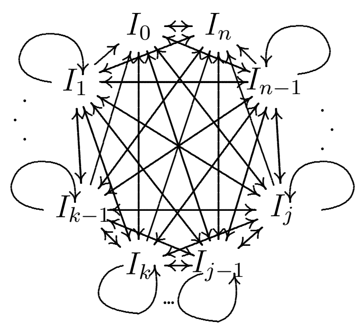
□

5.2 マルコフ過程を用いる方法 (2)

次に $j > k$ の場合を考える．この場合

$$
T(I_0) \cap T(I_n) = I_k \cup \cdots \cup I_{j-1} \tag{17}
$$

であることに注意する．$I_s\,(1 \le s \le n-1)$ から $I_t\,(1 \le t \le n-1)$ への推移確率は $|I_t|$ である．I_0 から $I_t\,(k \le t \le n)$ への推移確率は $\frac{|I_t|}{|T(I_0)|}$ であり，I_n から $I_t\,(0 \le t \le j-1)$ への推移確率は $\frac{|I_t|}{|T(I_n)|}$ である．このとき $p_0, p_1, \cdots p_{j-1}, p_j, \cdots, p_{k-1}, p_k, \cdots, p_n$ をマルコフ過程の定常確率とすると以下の等式が成り立つ．



$$
\begin{aligned}
p_0 &= |I_0|p_1 + |I_0|p_2 + \cdots + |I_0|p_{n-1} + \frac{|I_0|}{|T(I_n)|}p_n,\\
p_1 &= |I_1|p_1 + |I_1|p_2 + \cdots + |I_1|p_{n-1} + \frac{|I_1|}{|T(I_n)|}p_n,\\
&\vdots\\
p_{k-1} &= |I_{k-1}|p_1 + |I_{k-1}|p_2 + \cdots + |I_{k-1}|p_{n-1} + \frac{|I_{k-1}|}{|T(I_n)|}p_n,\\
p_k &= \frac{|I_k|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_k|p_1 + |I_k|p_2 + \cdots + |I_k|p_{n-1} + \frac{|I_k|}{|T(I_n)|}p_n,\\
&\vdots\\
p_{j-1} &= \frac{|I_{j-1}|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_{j-1}|p_1 + |I_{j-1}|p_2 + \cdots + |I_{j-1}|p_{n-1} + \frac{|I_{j-1}|}{|T(I_n)|}p_n,\\
p_j &= \frac{|I_j|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_j|p_1 + |I_j|p_2 + \cdots + |I_j|p_{n-1},\\
&\vdots\\
p_n &= \frac{|I_n|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_n|p_1 + |I_n|p_2 + \cdots + |I_n|p_{n-1}.
\end{aligned}
$$

$p_1, \cdots, p_n$ の式に対しそれぞれ $|I_0|, |I_1|, \cdots, |I_{k-1}|, |I_k|, \cdots, |I_{j-1}|, |I_j|, \cdots, |I_n|$ で両辺割ると

$$
\begin{aligned}
\frac{p_0}{|I_0|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|}, \qquad (18)\\
\frac{p_1}{|I_1|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|},\\
&\vdots\\
\frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|},\\
\frac{p_k}{|I_k|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|}, \qquad (19)\\
&\vdots\\
\frac{p_{j-1}}{|I_{j-1}|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|},\\
\frac{p_j}{|I_j|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1},\\
&\vdots\\
\frac{p_n}{|I_n|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

となる．これより

$$\frac{p_0}{|I_0|}=\frac{p_1}{|I_1|}=\cdots=\frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|},\quad \frac{p_k}{|I_k|}=\cdots=\frac{p_{j-1}}{|I_{j-1}|},\quad \frac{p_j}{|I_j|}=\cdots=\frac{p_n}{|I_n|}$$

がわかる．ここで

$$A=\frac{p_0}{|I_0|}=\frac{p_1}{|I_1|}=\cdots=\frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|},\quad B=\frac{p_k}{|I_k|}=\cdots=\frac{p_{j-1}}{|I_{j-1}|},\quad C=\frac{p_j}{|I_j|}=\cdots=\frac{p_n}{|I_n|}$$

とおくと (18)(19)(20) より

$$B-A=\frac{p_0}{T(I_0)}=\frac{|I_0|}{|T(I_0)|}\cdot\frac{p_0}{|I_0|}=\frac{|I_0|}{|T(I_0)|}A \tag{21}$$

$$B-C=\frac{p_n}{|T(I_n)|}=\frac{|I_n|}{|T(I_n)|}\cdot\frac{p_n}{|I_n|}=\frac{|I_n|}{|T(I_n)|}C \tag{22}$$

となる．

(21)，(22) を変形すると

$$B=\left(1+\frac{|I_0|}{|T(I_0)|}\right)A=\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}A$$

$$B=\left(1+\frac{|I_n|}{|T(I_n)|}\right)C=\frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}C$$

となるので

$$A=\frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|}B,\quad C=\frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|}B$$

と表せる．すなわち

$$A:B:C=\frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|}:1:\frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|}$$

を得る．ここで

$$h(y)=\frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y)+\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_{j-1}}(y)+\frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|}\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_n}(y) \tag{23}$$

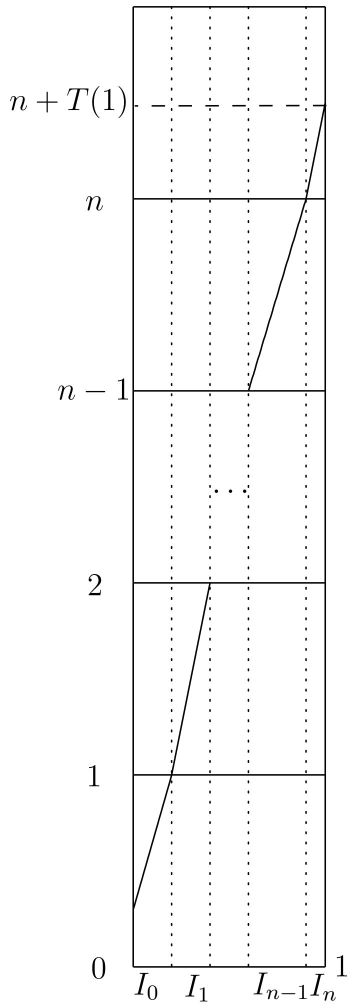
と定める．

命題 5. $h(y)$ は $T(x)$ に対する Perron-Frobenius 作用素 $\mathfrak{L}$ の不動点関数である．

証明. 簡単のため

$$\tilde{A}=\frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|},\quad \tilde{C}=\frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|} \tag{24}$$

とおく．さらに $G(x) = T(x) + \sum_{i=0}^{n} i\mathbb{I}_{I_i}(x)$ と定める．



$G(x)$ のグラフ

(7) に (24) を代入すると

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{\alpha}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(x_0) + \mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_{j-1}}(x_0) + \tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_n}(x_0)\right)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) \\
&\quad + \tfrac{1}{\beta_1}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(x_1) + \mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_{j-1}}(x_1) + \tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_n}(x_1)\right) \\
&\qquad\vdots \\
&\quad + \tfrac{1}{\gamma}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(x_n) + \mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_{j-1}}(x_n) + \tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_n}(x_n)\right)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{[G(0),G(a_k))}(0+y) + \mathbb{I}_{[G(a_k),G(a_j))}(0+y) + \tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{[G(a_j),G(a_{n+1}))}(0+y)\right)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) \\
&\quad + \tfrac{1}{\beta_1}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{[G(0),G(a_k))}(1+y) + \mathbb{I}_{[G(a_k),G(a_j))}(1+y) + \tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{[G(a_j),G(a_{n+1}))}(1+y)\right) \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \tfrac{1}{\gamma}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{[G(0),G(a_k))}(n+y)+\mathbb{I}_{[G(a_k),G(a_j))}(n+y)+\tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{[G(a_j),G(a_{n+1}))}(n+y)\right)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{[T(0),k))}(0+y)+\mathbb{I}_{[k,j)}(0+y)+\tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{[j,n+T(1)))}(0+y)\right)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)\\
&\quad + \tfrac{1}{\beta_1}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{[T(0),k)}(1+y)+\mathbb{I}_{[k,j)}(1+y)+\tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(1+y)\right)\\
&\qquad \vdots\\
&\quad + \tfrac{1}{\gamma}\left(\tilde{A}\cdot\mathbb{I}_{[T(0),k)}(n+y)+\mathbb{I}_{[k,j)}(n+y)+\tilde{C}\cdot\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(n+y)\right)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\\
&= \tilde{A}\left(\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[T(0),k))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)+\tfrac{1}{\beta_1}\mathbb{I}_{[T(0),k)}(1+y)+\cdots\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\tfrac{1}{\beta_{n-1}}\mathbb{I}_{[T(0),k)}(n-1+y)+\tfrac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[T(0),k)}(n+y)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right)\\
&\quad + \left(\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[k,j))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)+\tfrac{1}{\beta_1}\mathbb{I}_{[k,j)}(1+y)+\cdots\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\tfrac{1}{\beta_{n-1}}\mathbb{I}_{[k,j)}(n-1+y)+\tfrac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[k,j)}(n+y)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right)\\
&\quad + \tilde{C}\left(\tfrac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)+\tfrac{1}{\beta_1}\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(1+y)+\cdots\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\tfrac{1}{\beta_{n-1}}\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(n-1+y)+\tfrac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(n+y)\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right).
\end{aligned}
$$

第 1 項において $T(0)\le y<1\le k$ より

$$\mathbb{I}_{[T(0),k))}(0+y)\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)=\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y).$$

$k<n$ より $\mathbb{I}_{[T(0),k)}(n+y)=0$ である．$0\le l+y<k$ を満たす整数 l は $l=0,1,\cdots,k-1$ である．よって第 1 項は

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)+\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)$$

となる．第 2 項においては $0+y<k$ より $\mathbb{I}_{[k,j)}(0+y)=0$，$k<n$ より $\mathbb{I}_{[k,j)}(n+y)=0$ である．よって第 2 項は

$$\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}$$

となる．第 3 項では $l=j,\cdots,n-1$ について $\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(l+y)=1$ である．また $\mathbb{I}_{[j,n+T(1))}(n+y)=1\Leftrightarrow\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)=1$ である．(証明.($\Rightarrow$)　$j\le n+y<n+T(1)\Leftrightarrow j-n\le 0\le y<T(1)$.　($\Leftarrow$)　$0\le y<T(1)\Leftrightarrow j\le n\le n+y<n+T(1)$) よって第 3 項は

$$\tilde{C}\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right)$$

となる．したがって $(\mathfrak{L}h)(y)$ は

$$(\mathfrak{L}h)(y)=\tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)+\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}\right)+\tilde{C}\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right) \tag{25}$$

となる．この $(\mathfrak{L}h)(y)$ を (i) $0 \leq y < T(1)$，(ii) $T(0) \leq y < T(1)$，(iii) $T(0) \leq y < 1$ の 3 つの場合に分けて考える．(ii) の結果を用いて (i), (iii) を示すので (ii) を先に示しておく．

(ii) $T(0) \leq y < T(1)$ のとき (25) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) = 1$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) = 1$ より

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}\right)+\tilde{C}\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&= \tilde{A}(\frac{1}{\alpha}+|I_1|+\cdots|I_{k-1}|)+(|I_k|+\cdots+|I_{j-1}|)+\tilde{C}(|I_j|+\cdots+|I_{n-1}|+\frac{1}{\gamma})\\
&= \tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha}+1-|T(I_0)|-|I_0|\right)\\
&\qquad +(|T(I_0)|+|T(I_n)|-1)+\tilde{C}\left(\frac{1}{\gamma}+1-|T(I_n)|-|I_n|\right) \quad \text{((17) に注意する)}\\
&= -1+\tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)+\tilde{C}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+(1-\tilde{A})|T(I_0)|-\tilde{A}|I_0|+(1-\tilde{C})|T(I_n)|-\tilde{C}|I_n|\\
&= -1+\frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|}\cdot\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}+\frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|}\cdot\frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}\\
&\qquad +\left(\frac{|T(I_0)|+|I_0|-|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|}\right)|T(I_0)|-\frac{|T(I_0)||I_0|}{|T(I_0)|+|I_0|}\\
&\qquad +\left(\frac{|T(I_n)|+|I_n|-|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|}\right)|T(I_n)|-\frac{|T(I_n)||I_n|}{|T(I_n)|+|I_n|}\\
&\qquad\qquad (\alpha=\frac{|T(I_0)|}{|I_0|},\gamma=\frac{|T(I_n)|}{|I_n|}\text{および (24) より})\\
&= -1+1+1+0+0\\
&= 1 \qquad (26)\\
&= h(y).
\end{aligned}$$

(i) $y < T(0)$ のとき (25) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) = 0$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) = 1$ より

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \tilde{A}\left(\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}\right)+\tilde{C}\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&= -\frac{\tilde{A}}{\alpha}+\tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)\\
&\qquad +\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{j-1}}\right)+\tilde{C}\left(\frac{1}{\beta_j}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&= 1-\frac{\tilde{A}}{\alpha} \quad \text{((26) より)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} \cdot \frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)| + |I_0|} \\
&= 1 - \frac{|I_0|}{|T(I_0)| + |I_0|} \\
&= \frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)| + |I_0|} \\
&= h(y).
\end{aligned}
$$

(iii) $T(1) < y$ のとき (25) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) = 1$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) = 0$ より

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{\beta_k} + \cdots + \frac{1}{\beta_{j-1}}\right) + \tilde{C}\left(\frac{1}{\beta_j} + \cdots + \frac{1}{\beta_{n-1}}\right) \\
&= -\frac{\tilde{C}}{\gamma} + \tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{k-1}}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{\beta_k} + \cdots + \frac{1}{\beta_{j-1}}\right) + \tilde{C}\left(\frac{1}{\beta_j} + \cdots + \frac{1}{\beta_{n-1}} + \frac{1}{\gamma}\right) \\
&= 1 - \frac{\tilde{C}}{\gamma} \quad \text{((26) より)} \\
&= 1 - \frac{|I_n|}{|T(I_n)|} \cdot \frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)| + |I_n|} \\
&= 1 - \frac{|I_n|}{|T(I_n)| + |I_n|} \\
&= \frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)| + |I_n|} \\
&= h(y)
\end{aligned}
$$

となる．以上より任意の $y \in [0, 1)$ について

$$(\mathfrak{L}h)(y) = h(y)$$

となる．よって $h(y)$ は不動点関数である．

□

5.3 マルコフ過程を用いる方法 (3)

最後に $j = k$ の場合を考える．この場合，$\mathfrak{L}h = h$ の証明において (16), (26) 式にある「$= 1$」の部分がないので，今までの証明を見直す必要がある．命題 4 において $j = k$ と考えると，$p_0, p_1, \cdots p_{k-1}, p_k, \cdots, p_n$ をマルコフ過程の定常確率とするときに成り立つ等式は

$$p_0 = |I_0|p_1 + |I_0|p_2 + \cdots + |I_0|p_{n-1} + \frac{|I_0|}{|T(I_n)|}p_n,$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= |I_1|p_1 + |I_1|p_2 + \cdots + |I_1|p_{n-1} + \frac{|I_1|}{|T(I_n)|}p_n, \\
&\vdots \\
p_{k-1} &= |I_{k-1}|p_1 + |I_{k-1}|p_2 + \cdots + |I_{k-1}|p_{n-1} + \frac{|I_{k-1}|}{|T(I_n)|}p_n, \\
p_k &= \frac{|I_k|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_k|p_1 + |I_k|p_2 + \cdots + |I_k|p_{n-1}, \\
&\vdots \\
p_n &= \frac{|I_n|}{|T(I_0)|}p_0 + |I_n|p_1 + |I_n|p_2 + \cdots + |I_n|p_{n-1},
\end{aligned}
$$

である．$p_1, \cdots, p_n$ の式に対しそれぞれ $|I_0|, |I_1|, \cdots, |I_{k-1}|, |I_k|, \cdots, |I_n|$ で両辺割ると

$$
\begin{aligned}
\frac{p_0}{|I_0|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|}, \qquad (27) \\
\frac{p_1}{|I_1|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|}, \\
&\vdots \\
\frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|} &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + \frac{p_n}{|T(I_n)|}, \\
\frac{p_k}{|I_k|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, \\
&\vdots \\
\frac{p_n}{|I_n|} &= \frac{p_0}{|T(I_0)|} + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

となる．これより

$$
\frac{p_0}{|I_0|} = \frac{p_1}{|I_1|} = \cdots = \frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|}, \quad \frac{p_k}{|I_k|} = \cdots = \frac{p_n}{|I_n|}
$$

がわかる．ここで

$$
A = \frac{p_0}{|I_0|} = \frac{p_1}{|I_1|} = \cdots = \frac{p_{k-1}}{|I_{k-1}|}, \quad C = \frac{p_k}{|I_k|} = \cdots = \frac{p_n}{|I_n|}
$$

とおくと (27)(28) より

$$
\begin{aligned}
A - C &= \frac{p_n}{|T(I_n)|} - \frac{p_0}{|T(I_0)|} \\
&= \frac{|I_n|}{|T(I_n)|} \cdot \frac{p_n}{|I_n|} - \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} \cdot \frac{p_0}{|I_0|} \\
&= \frac{|I_n|}{|T(I_n)|}C + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|}A
\end{aligned}
$$

となる．この式を変形すると

$$\left(\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}\right)A=\left(\frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}\right)C$$

となるので

$$A:C=\frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}:\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}.$$

$$h(y)=\frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y)+\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(y) \tag{29}$$

と定める．

命題 6. $h(y)$ は $T(x)$ に対する Perron-Frobenius 作用素 $\mathfrak{L}$ の不動点関数である．

証明. 簡単のため

$$\check{A}=\frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|},\quad \check{C}=\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|} \tag{30}$$

とおくと，

$$(\mathfrak{L}h)(y)=\check{A}\left(\frac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)+\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\check{C}\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)\right) \tag{31}$$

となる (この式は (15)(25) 式で右辺の第 2 項を除いた式である)．この $\mathfrak{L}h$ を (i) $0\le y<T(1)$，(ii) $T(1)\le y<1$ の 2 つの場合に分けて考える．

(i) $0\le y<T(1)$ のとき (31) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y)=0$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y)=1$ より

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y)&=\check{A}\left(\frac{1}{\beta_1}+\cdots+\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)+\check{C}\left(\frac{1}{\beta_k}+\cdots+\frac{1}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&=\check{A}\left(|T(I_n)|-|I_0|\right)+\check{C}\left(|T(I_0)|-|I_n|+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&=\frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}\left(|T(I_n)|-|I_0|\right)+\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}\left(|T(I_0)|-|I_n|+\frac{|I_n|}{|T(I_n)|}\right)\\
&=|T(I_n)|+|I_n|-\frac{|I_0|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)|}+|T(I_0)|+|I_0|\\
&\qquad-\frac{|I_n|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_0)|}+\frac{|I_n|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|}\\
&=1+(|I_n|+|I_0|)-\frac{|I_0|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)|}-\frac{|I_n|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_0)|}+\frac{|I_n|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|}\\
&\qquad\qquad(|T(I_n)|+|T(I_0)|=1\text{ より})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \frac{|T(I_n)||T(I_0)|(|I_n| + |I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|} - \frac{|T(I_0)||I_0|(|T(I_n)| + |I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|} \\
&\qquad - \frac{|T(I_n)||I_n|(|T(I_0)| + |I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|} + \frac{|I_n|(|T(I_0)| + |I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|} \\
&= 1 + \frac{|I_n|(|T(I_0)| + |I_0|) - |I_n||I_0|(|T(I_n)| + |T(I_0)|)}{|T(I_n)||T(I_0)|} \\
&= 1 + \frac{|I_n|}{|T(I_n)|} \\
&= \frac{|T(I_n)| + |I_n|}{|T(I_n)|} \qquad (32)\\
&= h(y).
\end{aligned}
$$

(ii) $T(1) \le y < 1$ のとき (31) は $\mathbb{I}_{[T(0),1)}(y) = 1$，$\mathbb{I}_{[0,T(1))}(y) = 0$ より

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}h)(y) &= \breve{A}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{k-1}}\right) + \check{C}\left(\frac{1}{\beta_k} + \cdots + \frac{1}{\beta_{n-1}}\right) \\
&= \breve{A}\left(\frac{1}{\beta_1} + \cdots + \frac{1}{\beta_{k-1}}\right) + \check{C}\left(\frac{1}{\beta_k} + \cdots + \frac{1}{\beta_{n-1}} + \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{\breve{A}}{\alpha} - \frac{\check{C}}{\gamma} \\
&= \frac{|T(I_n)| + |I_n|}{|T(I_n)|} - \frac{\check{C}}{\gamma} + \frac{\breve{A}}{\alpha} \quad ((32)\text{ より}) \\
&= \frac{|T(I_n)| + |I_n|}{|T(I_n)|} - \frac{|I_n|}{|T(I_n)|}\left(1 + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|}\right) + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} \cdot \frac{|T(I_n)| + |I_n|}{|T(I_n)|} \\
&= \left(1 + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|}\right)\frac{|T(I_n)| + |I_n|}{|T(I_n)|} - \frac{|I_n|}{|T(I_n)|}\left(1 + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|}\right) \\
&= 1 + \frac{|I_0|}{|T(I_0)|} \\
&= \frac{|T(I_0)| + |I_0|}{|T(I_0)|} \\
&= h(y)
\end{aligned}
$$

となる．以上より任意の $y \in [0,1)$ について

$$(\mathfrak{L}h)(y) = h(y)$$

となる．よって $h(y)$ は不動点関数である．

$\square$

以上の結果をまとめれば次の定理を得る．

定理 1. $T(x)$ は,

$$T(I_0) = I_k \cup \cdots \cup I_n, \quad T(I_n) = I_0 \cup \cdots \cup I_{j-1}$$

を満たすマルコフ変換とする．T に対応する Perron-Frobenius 作用素を $\mathfrak{L}$ とするとき以下が成り立つ．

(i) $j < k$ のとき

$$h(y) = \frac{|T(I_0)|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{j-1}}(y)+\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y)+\frac{|T(I_n)|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(y)$$

は $\mathfrak{L}$ の不動点関数である．

(ii) $j > k$ のとき

$$h(y) = \frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y)+\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_{j-1}}(y)+\frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|}\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_n}(y)$$

は $\mathfrak{L}$ の不動点関数である．

(iii) $j = k$ のとき

$$h(y) = \frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y)+\frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(y)$$

は $\mathfrak{L}$ の不動点関数である．

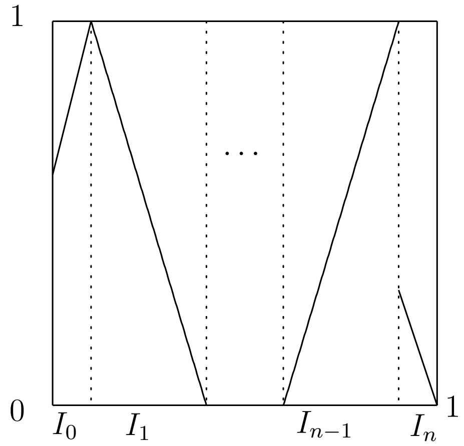
定理 1 の証明を見れば，α, β_i, γ は必ずしも正である必要がないことが分かる．すなわち $X = [0, 1)$ 上の関数 $\tilde{T}(x)$ を以下で定める:

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} \alpha x + (1-\alpha a_1) & (x \in I_0) \\ \beta_1(x-a_1) & (x \in I_1) \\ \vdots & \\ \beta_i(x-a_i) & (x \in I_i) \\ \vdots & \\ \beta_{n-1}(x-a_{n-1}) & (x \in I_{n-1}) \\ \gamma(x-a_n) & (x \in I_n) \end{cases}$$

ただし，

$$|\alpha| < \frac{1}{|I_0|}, \quad |\beta_i| = \frac{1}{|I_i|}, i = 1, 2, \cdots, n-1, \quad |\gamma| < \frac{1}{|I_n|}$$

である．



このとき以下が成り立つ.

系 1. $\tilde{T}(x)$ が $\tilde{T}(I_0) = I_k \cup \cdots \cup I_n, \quad \tilde{T}(I_n) = I_0 \cup \cdots \cup I_{j-1}$ を満たすマルコフ変換のとき

(i) $j < k$ のとき

$$h(y) = \frac{|T(I_0)|(|T(I_n)|+|I_n|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{j-1}}(y)+\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y)+\frac{|T(I_n)|(|T(I_0)|+|I_0|)}{|T(I_n)||T(I_0)|-|I_n||I_0|}\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(y)$$

は $\tilde{T}(x)$ の不変測度を与える.

(ii) $j > k$ のとき

$$h(y) = \frac{|T(I_0)|}{|T(I_0)|+|I_0|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y) + \mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_{j-1}}(y) + \frac{|T(I_n)|}{|T(I_n)|+|I_n|}\mathbb{I}_{I_j\cup\cdots\cup I_n}(y)$$

は $\tilde{T}(x)$ の不変測度を与える.

(iii) $j = k$ のとき

$$h(y) = \frac{|T(I_n)|+|I_n|}{|T(I_n)|}\mathbb{I}_{I_0\cup\cdots\cup I_{k-1}}(y) + \frac{|T(I_0)|+|I_0|}{|T(I_0)|}\mathbb{I}_{I_k\cup\cdots\cup I_n}(y)$$

は $\tilde{T}(x)$ の不変測度を与える.

参考文献

[1] A. Lasota and J. A. Yorke: On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 186 (1973), pp. 481-488.

[2] C. E. Silva: Invitation to ergodic theory, American Mathematical Society (2007).

[3] H. Yaguchi and I. Kubo: A new nonrecursive pseudorandom number generator based on chaos mappings, Monte Carlo Methods Appl., vol. 14 (2008), pp. 85-98.

[4] 久保泉, 矢野公一: 力学系, 岩波書店 (2006).

[5] 谷口礼偉, 高嶋恵三, 上田澄江: 新しい非再帰型擬似乱数生成法とその応用, 統計数理研究所共同リポート 235 (2010).