修士論文

角錐体の体積に関する理論的及び実践的研究

三重大学大学院　教育学研究科

教育科学専攻　理数・生活系教育領域

213M029　中村亮太

2015 年（平成 27 年）2 月 13 日

目次

序章　本研究の目的と方法

第 1 節　本研究の目的

大学 3 年生の教育実地研究において、角錐の体積の公式を求める授業の補助に入らさせていただいた。その授業では、錐体・柱体の模型と見やすいように色のついた水を使い、錐体から柱体に水を移したときに、柱体のどのくらいの高さまで入るのかという形で授業を行っていた。使用した模型は一種類だけではなく、角錐・円錐それぞれでいくつかの種類の模型を使っており、そのどの立体でも同じ割合だけ入るということを学習した。錐体から柱体へ水を移したとき、柱体の高さのおよそ$\frac{1}{3}$の高さまで入ることから、錐体の体積が$\frac{1}{3}Sh$であることを求めた。

大学 4 年生では、蟹江幸博先生のもとで立体について学習した。その中で錐体の体積が本当に$\frac{1}{3}Sh$なのかという証明を行った。厳密性を求める証明の中で無限を扱っており、その内容を理解するのは容易ではなかった。他にも、古代中国の立体についても学習した。特にその立体の中の鼈臑（以下ひらがなで「べつどう」と表記する）という立体は三角柱への合同変換可能であることを学習した。立体の合同変換というのは、筆者にとって全く新しい観点であった。そもそも図形を分解し、再び組み立てるという考えが筆者にはなく、実際に模型を用いてどのように分解し、再び組み立てることを通して、その考え方のむずかしさを知ることができた。しかし、立体を分解し、別の立体に再び組み立てることを通して、より体積が求めやすい立体となることには大きな意味があるのではないかと考えた。

この 2 つの経験から、どのようにして錐体の体積の求め方を教えればよいのかという指導法に大きく関心を抱くようになった。水を使った実験で体積を求めるときは、同じ底面と高さをもつ錐体・柱体に対して、常にだいたい同じくらいの割合まで水が入ることが視覚的に示すことができる。しかし、そこには『だいたい同じくらいになる』という曖昧性が存在している。大学 4 年生で錐体の体積を厳密に求めたためかもしれないが、中学校の学習といえども曖昧性が入りにくいような別の指導法はないのかという視点・観点で新しい指導法を考察することにした。これが本論文の目的である。

では、どのようにすれば曖昧性がなくなるのか。曖昧性は、高さがだいたい$\frac{1}{3}$というところである。現在の指導法では、錐体の体積は柱体の体積Shの$\frac{1}{3}$であるという教え方である。筆者は$\frac{1}{3}Sh$の式の見方を変えて、$\frac{1}{3}Sh$を$\left(\frac{1}{3}h\right)S$、すなわちもとの錐体と同じ底面積をもち、$\frac{1}{3}$の高さをもつ直方体の体積と同じであるという考え方でも指導できるのではないかと考えた。この指導法ならば、もとの高さの$\frac{1}{3}$の高さで切断することから、だいたい$\frac{1}{3}$という曖昧さを感じさせない。

第 2 節　本研究の観点及び方法

本論文は目的を達成するためにこれまで行われてきた指導法について省みる。そもそも数学史において角錐の体積はどのように求められていたのか（第 1 章第 2 節)。そして数学教育ではそれをどのような方法で指導してきたかその指導法の変遷（第 1 章第 1 節)、また現在行われている指導法（第 2 章）を調べる。小学校では、角錐の体積は学習しないが第 4 章との関わり合いで、平面の等積変形の扱い方をここで扱っておく。次に数学的理論の考察を行う（第 3 章)。そして、実践を行うにあたって本研究に関する先行研究を省みてみる（第 4 章)。以上のことをかんがみて、実践の考察を行う（第 5 章）ことにする。

第１章　歴史的考察

本章では、学校教育における角錐の体積の求め方の変遷を知ることを目的とする。そのため学校数学を対象とし、教則や教授要目などの変遷にともなって、明治時代から戦前までの教科書における角錐の体積の扱い方及び数学史における角錐の体積の求め方について調べる。

第１節　教科書における歴史的考察

１．建設時代（明治５年から明治18年まで）の様相

「中學教則略」（明治5年9月8日（新暦では10月10日）番外布告）
下等中学教則

第六級
二　算術　　七　代數學　　八　幾何學
第五級
二　算術　　七　代數學　　八　幾何學
第四級
二　算術　　七　代數學　　八　幾何學
第三級
二　算術　　七　代數學　　八　幾何學
第二級
二　算術　　七　代數學　　八　幾何學
第一級
二　算術　　七　代數學　　八　幾何學

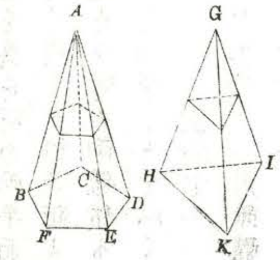
上等中学教則

第六級
四　幾何學　　五　代數學　　九　測量
第五級
四　幾何學　　五　代數學　　九　測量
第四級
三　幾何學　　四　代數學　　八　測量
第三級
三　幾何學　　四　代數學　　七　測量
第二級
三　幾何學　　四　代數學　　六　測量
第一級
四　測量

この「中學教則略」のもとでつくられた教科書に宮川保全譯 榎本長裕校『幾何新論續』がある。

四十七條　推論　両錐體あり高並に底面積相等しき時は各頂より相等距の處に於て底に平行せる両截面は等積なり

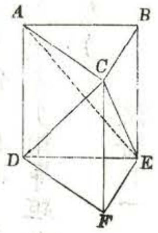
四十八條　設論十一　衆錐體あり底面積並に高相等しき時は體積亦相等し



A-BCDEF G-HIK の両錐體あり底面積並に高相等しき時は體積亦相等し

証　各頂より相等距の處に於て底に平行せる截面を作る時は其面積は相等し(四十七)今試に両截面を為せる所の両平面をして各底と平行に運行せしむる時は頂より相等距に至る毎に両截面相等しきを以て通過せる所の両體積も亦相等しき事知るべし故に此両體は高相等しきを以て體積相等し

四十九條　設論十二　三角錐體は底並に高相等しき所の三角柱體の三分一に等し

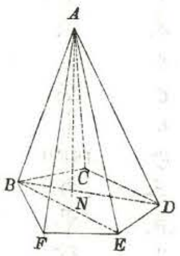


C-DEF の三角錐體並に ABC-DEF の三角柱體あり倶に DEF を底と為せる時は C-DEF は ABC-DEF の三分一に等し

証　ABC-DEF の三角柱體より C-DEF の三角錐體を截取せる時は C を頂と為し ABED の平行辺形を底と為せる所の四角錐體を餘し又 A C E の三点に通過して平面を作る時は C-ABED の錐體を分つて両三角錐體と為し而して其両體等積なり(四十八)何となれば各 ABED の平行辺形の半を底と為し且つ C の頂より ABED の底に至る垂線を高と為せばなり然るに C-ABE 即ち E-ABC の錐體は C-DEF の錐體と等積なり何となれば ABC DEF の両底相等しく高相同しければなり(四十八)故に三錐體は等積にして即ち設くる所の錐體は柱體の三分一に等し

五十條　推論　三角錐體の積は底と高の相乗の三分一に等し

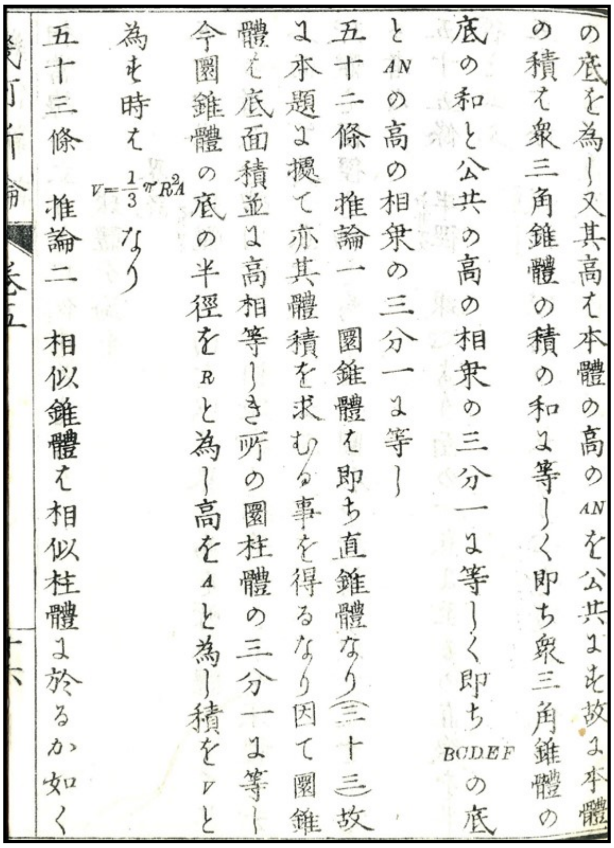
五十一條　設論十三　錐體の積は底と高の相乗の三分一に等し



A-BCDEF の錐體あり其體積は BCDEF の底と AN の高の相乗の三分一に等し

証　A の頂と底の對角線の BD BE に通過して衆平面を作る時は本體を分つて衆三角錐體と為し而して其衆底の和は本體

宮川保全譚　榎本長裕校　『幾何新論續』　明治10年2月出版


の底を為し又其高を本體の高のANを公共にも故に本體の積を衆三角錐體の積の和に等しく即ち衆三角錐體の底の和と公共の高の相乗の三分一に等しく即ちBCDEFの底とANの高の相乗の三分一に等し
五十二條　推論一　圜錐體を即ち直錐體なり（三十三）故に本題に據て亦其體積を求むる事を得るなり因て圜錐體を底面積並に高相等しき所の圜柱體の三分一に等し今圜錐體の底の半徑をRと為し高をAと為し積をVと為も時を $V=\frac{1}{3}\pi R^2A$ なり
五十三條　推論二　相似錐體を相似柱體に於るか如く

宮川保全譚　榎本長裕校　『幾何新論續』　明治 10 年 2 月出版

「教育令」公布（明治 12 年 9 月 29 日）

第 4 条

中學校ハ高等ナル普通學科ヲ授クル所トス

「教育令」改正（明治 13 年 12 月 28 日太政官布告第 59 號）

（中學校関係の条文は１つもない）

「中學校教則大綱」（明治 14 年 7 月 29 日文部省達第 28 號）

第 1 条

中學校ハ高等ノ普通學科ヲ授クル所ニシテ中人以上ノ業務ニ就クカ爲メ又ハ高等ノ學校ニ入ルカ爲メニ必須ノ學科ヲ授クルモノトス

第 3 条

初等中學科ハ修身、和漢文、英語、算術、代數、幾何、地理、歴史、生理、動物、植物、物理、化學、経済、簿記、圖畫及唱歌、體操トス
但唱歌ハ教授方等ノ整フヲ待テ之ヲ設クヘシ

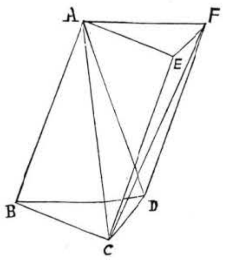
第 4 条

高等中學科ハ初等中學科ノ修身、和漢文、英語、簿記、圖畫及唱歌、體操ノ續ニ三角法、金石、本邦法令ヲ加ヘ又更ニ物理、化學ヲ授クルモノトス

コヲ証明シ以テV,V'ノ相等シキニ帰スルナリ蓋シ若シ$V-V'=\alpha$ナル時ハ乃$S-V$ト$S'-V'$ノ差ハαナル可ク従テ共ニ任意ノ微小ニ為シ能ハサレハナリ

之ニ由テ若シABCD圖象ノ錐體ナル時ハCD兩尖点ヲ經テAB及ニ平行スル二線ヲ引キ之ヲBCD底面ニ平行スルAEF平面ニ依テ截斷シ以テABCDEF柱體ヲ成ス

CFヲ聯結ス



然ラハ則柱體ハABCD CEAF FDCA三錐體ニ分割ス

然ルニ此三錐體中ABCD CEAF兩錐體ハBCD AEF等底上ニ在リテ且同高ヲ有スルニ因テ相等シ又ABCD FDCA兩錐體ハABD FAD等底上ニ在リテ且同高ナルヲ以テ相等シ故ニ各錐體ハ柱體ノ三分一ナリ故ニ三角錐體ノ容積ハ底面ノ積ヘ高度ヲ乗シタル立積ノ三分一ナリ

系理　凡錐體ノ容積ハ底面ノ積ヘ高度ヲ乗シタル立積ノ三分一ナリ

第廿二界説　截錐體ハ兩平行平面ノ中間ニ含有スル部分ナリ

第廿三界説　截柱體ハ平行セサル兩平面ノ中間ニ含有スル部分ナリ

第卅定理

截三角錐體ノ容積ヲ其高度及其底面積ノ兩項

其理由ハ此立體ハ之ト同高ニシテ且底面ノ和ハ其底面ニ相等シカル可キ諸三角柱體ニ分割スルヲ得可シ

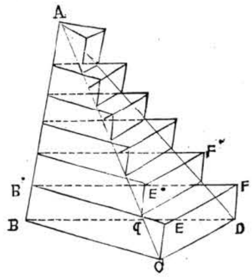
錐體ノ容積

第廿九定理

錐體ノ容積ハ其底面ノ積ヘ其高度ヲ乘シタル立積ノ三分一ナリ

ABCDヲ三角錐體トス

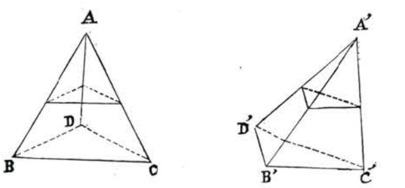
AC及ヲ若干等部ニ分割シ其分点ヲ經テBCD底面ニ平行スル諸平面ヲ引キ而CD及ヲ經又其諸平面トACD面ノ諸交界線ヲ經テAB及ニ平行スル諸平面ヲ引ク



然ラハ則錐體ノ容積ハGECDF等、柱體狀ノ諸立體ノ和ヲ以テBEF B'E'F'等諸柱體ノ容積ノ和ヨリ小ナリ然ルニ總テ此柱體狀ノ諸立體ノ和ハAC及ヲ成ル可ク大數ニ分割シ以テ任意ニ微小ニ為シ得可キ所ノBEF柱體ヨリ較小ナリ故ニ錐體ノ容積ハ其數ヲ無界ニ大ニ為セシ時ノ諸柱體ノ和ノ極限ナリ

尚又若シABCD A'B'C'D'兩錐體等底上ニ在リテ且等高ノモノナル時ハ其底面ヨリ相等シキ遠度ニ於ケル平面ハ等剖面ヲ作ル可シ（第廿三定理）之ニ由テ觀レハ此ノ如キ兩錐體ニ於テ右ニ畫ケル如クシテ成ル諸柱體ハ各別ニ相等シカル可シ故ニ諸

柱體ノ和ハ相等シカル可シ是故ニ等底且等高ノ錐體ハ相等シ



〔附言〕等底且等高ノ錐體ハ相等シトノ論証ヲ充分ニ通暁セントスルハ稍ヤ難シトス此論証ヲ左ノ如ク思察ス可シ VV'ヲ兩錐體ノ容積トシ此兩錐體ヲ本理ニ於ケル如ク平面ニ依テ截斷ストシ而諸柱體ノ和ヲSトS'トス然ラハ則第一ニハS-VトS'-V'ハ任意ニ微小ニ為シ得可キヿヲ証明シ而第二ニハSS'ノ相等シキ

ウィルソン　吉田健吾訳『立体幾何教科書』　明治16年4月出版

２．統制時代（明治 19 年から大正 6 年まで）の様相

「尋常中學校ノ學科及其程度」（明治 19 年 6 月 22 日文部省令第 14 號）

第 5 条

（1 年 4 時、2 年 4 時、3 年 4 時、4 年 4 時、5 年 3 時）

數學

算術　　比例及利息算

諸則ノ利用

代數　　釈義整數四則之數一次方程式自乗開平開立指數根數二次方程式準二次方程式比例等等差級數等比級數調和級數順列組合２項法對數

幾何　　定義公理直線直線形圓積平面立体角角錐角壔球圓錐圓壔

三角法　角度三角法比對數表用法三角形距離等ノ測法球面三角

大日本教育会雑誌　第 35 号（明治 19 年 7 月 15 日發行）より

第五級（第一年）四時間

算術　幾何初歩

第四級（第二年）四時間

算術ノ復習　代數　幾何

第三級（第三年）四時間

代數　幾何

第二級（第四年）四時間

代數　幾何

第一級（第五年）四時間

代數　三角法

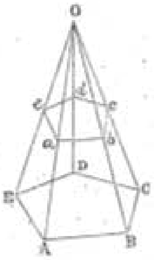
ナレハ此レ二倍ノ底及ヒ等シキ高サチ有ツ平行六面體ノ半ニ等シケレハナリ．

系二．任何壔ノ體積ハ其底及ヒ高サノ積ニ等シ何トナレハコレ三角錐ニ分チ得レハナリ．

補遺

第四設論　定義

若し錐（O—ABCDE）を底に平行する任何平面（abcde）にて截る時は其截面は底と相似なり．



證．AOB 平面ハ平行セル二ツノ平面 ABCDE, abcde チ截ルニヘ其交界 AB, ab ハ平行ス（XI. xvi）．

均シク BC, bc ハ平行ス．

此ニ由テ ABC 角ハ abc 角ニ等シ（XI. x）．

均シク ABCDE 多角形ノ他ノ各角ハ abcde ノ相應セル角ニ等シ．

又 ab ハ AB ニ平行スルニヘ ABO, abO 兩三角形ハ等角ナリ　此ニ由テ　AB : BO : : ab : bO (VI. iv).

均シク　BO : BC : : bO : bc.

故ニ　AB : BC : : ab : bc (*Ex aequali*).

均シク　BC : CD : : bc : cd, 等.

故ニ二ツノ多角形 ABCDE, abcde ハ等角形ニシテ等角傍ノ邊ハ比例度ナリ．

補遺

此に由て両形は相似なり．

系一．錐ノ稜及ヒ高サハ平行セル平面ニテ等數ニ分タルヘシ．

系二．錐ノ平行セル截面ノ比ハ頂ヨリ此平面ニ至ル距離ノ二乘比ナリ．

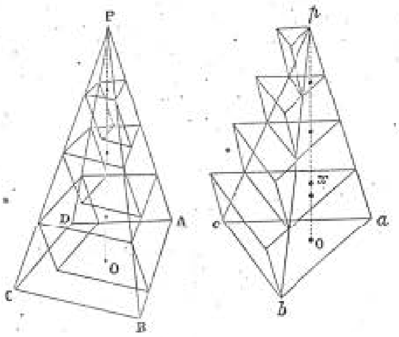
系三．二ツノ任何錐ニ於テ高サチ同シ比ニ分ツ處ノ二ツノ底ト平行セル截面ノ比ハ其二ツノ底ノ比ニ全シカルヘシ．

第五設論　定義

二つの錐（P—ABCD, p—abc）若し等しき高さ（PO, po）と等しき面積の底（ABCD, abc）を有つ時は其体積は相等し．

證．二ツノ錐若シ其體積相等シカラストセハ abc チ大ナル錐ノ底トシ ox チ等シキ底チ有ツ壔トシ且ツ其體積ハ二ツノ錐ノ差ニ等シカラシメヨ．然ル片等シキ高サ PO, po チ錐ノ底ニ平行スル平面ニテ各 ox ヨリ小ナル等シキ部分ニ分タシメヨ．然ル片ハ此各平面ニテ生セル截面ハ互ニ相等シカルヘシ（IV. 系三）．

今此等ノ截面チ底トシ其上ニ錐ノ高サノ等シキ部分チ高サトシテ壔チ作ルヘシ但シ P—ABCD ニ於テハ截



補遺

面ノ下ニ p—abc ニ於テハ截面ノ上ニ作ルヘシ．

然ル片ハ P—ABCD ニ於テル壔ノ和ハ其錐ヨリ小ニシテ p—abc ノ截面上ノ壔ノ和ハ p—abc ヨリ大ナルコ明カナリ．故ニ二ツノ錐ノ差ハ二種ノ壔ノ各和ノ差ヨリ小ナリ即チ p—abc 錐ノ最下ノ壔ヨリ小ナリ．

然ルニ此壔ノ高サハ ox ヨリ小ナリ（作法）．

此ニ由テ二ツノ錐ノ差ハ等底ノ一ニ等シキ底チ有チ且ツ ox ニ等シキ高サチ有ツ壔ヨリ小ナリ而ノ又二ツノ錐ノ差ハ此壔ニ等シ（設想）豈ニ其理アラソヤ．

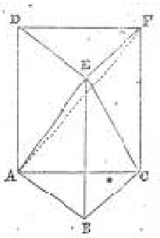
故に二つの錐の体積は相等し．

系一．三角錐 E—ABC の体積は同じ底及び同じ高さを有つ壔

二十七

ABC—DEF の体積の三分の一なり．

補遺



何トナレハ EAF 平面チ畫ク片ハ二ツノ錐 E—AFC, E—AFD ハ等シキ底 AFC, AFD チ有チ且ツ普通ノ高サチ有ツニヘ相等シ．而シテ又二ツノ錐 E—ABC, F—AEC ハ普通ノ底及ヒ等シキ高サチ有ツチ以テ相等シ．此ニ由テ E—ABC 錐ハ壔チ分テル三ツノ相等シキ錐ノ一ナリ．

故に E—ACB 錐は壔の三分の一なり．

系二．各々の錐の体積は等しき底及び等しき高さを有つ壔の体積の三分の一なり．

何トナレハ各々ノ錐ハ頂及ヒ底ノ對角線チ通ス平面ニテ若干數ノ三角錐ニ分チ得レハナリ．

第六設論　定義

圓壔の体積は其底の面積と高さとの積に等し．

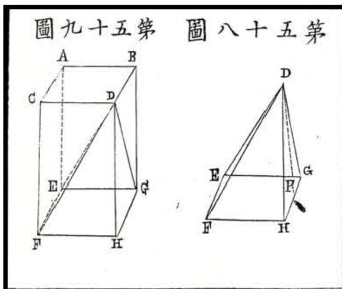
證．O チ圓底ノ中心トシ AOB 角チ無窮ニ小ナルモノトス故ニ AB 弧ハ直線ト致ノルチ得ヘシ．

然ル片ハ底ニ垂直ニシテ之チ OA, OB 線ニ於テ截ル處ノ平面ハ AOB 三角形チ底トシ圓壔ノ高サチ高サトナル三角壔ノ面ナルヘシ而ノ此壔ノ體積ハ AOB 三角

ジョイカセイ　長沢亀之助訳　『幾何学』　明治21年6月出版

今玆ニ之ヲ說明スル能ハズト雖、其確實ナルコトハ、敢テ疑フベキニアラザルナリ。

○第二十課　錐體ノ容積ノ測量、



第五十八圖　第五十九圖

(一)錐體トハ、一箇ノ底面ニテ界限シ、其各邊ハ頂點ト稱スル一點ニ集合スル所ノ立體ヲ云フ。例ヘバ第五十八圖ニ示セル、DEFGHノ如シ。今此錐體ハ第五十九圖ニ示セルABCDEFGHノ平行方形體ノ三分ノ一ニシテ、之ニ等シ

キ底面及高サヲ有スルモノナリ。錐體ノ高サトハ、其頂點ヨリ底面ヘ引キタル鉛直線DPナリ。此道理ハ總テ如何ナル錐體ニテモ、皆同ジクシテ、其正ナルト斜ナルトニ係ラザルモノトス。

(二)今玆ニ立體ニ關シテ學ビタル所ヲ再說スベシ。卽チ平行方形體又ハ三稜柱ノ容積ヲ求メント欲セバ、其底面ニ高サヲ乘ズベシ。而シテ錐體ノ容積ヲ求メント欲セバ、其底面ニ高サヲ乘ジテ之ヲ三分スベシ。

(三)總テ直線ト平面トヲ以テ界限セラレタル立

體ハ、平行方形體、又ハ三稜柱、又ハ錐體ニ分割スルコトヲ得ベシ。

(四)故ニ此三種ノ立體ノ容積ヲ測量スルコトヲ知レバ、其他如何ナル形狀ノ立體ニテモ、直線ト平面トヲ以テ界限セルモノナレバ、之ヲ測量スルコトヲ得ベキナリ。唯時アリテ長キ時間ト錯雜ナル手數ヲ要スルコトアルノミニテ、遂ニ之ヲ算出スルコトヲ得ベシ。

○第二十一課　曲線測量ノ原理

(一)今黑板上ニ波狀ヲ爲セル線、卽チ曲線ヲ畫カ

杉山文悟訳　『小学初等幾何初歩』　明治24年4月30日発行

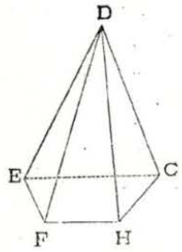
(2) 本課ノ前圖ニ於テ若シAB及ヒBC各$2\frac{2}{5}$寸ニシテAE及ヒCD $2\frac{2}{5}$寸AC二角ハ直角ナリトス而シテ若シBED三角面積ヲ$2\frac{2}{5}$平方寸トスレバ此平行体ノ体積幾何ナリヤ但シ正高ヲ五寸トス

(3) 弓形ノ要石(カナメイシ)ノ厚サ六寸ニシテ底面積三千四百五十六平方寸アリ由テ此体積ヲ求ム

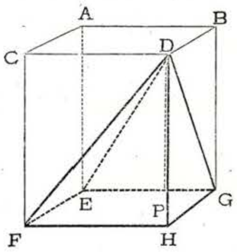
(4) 八面ヲ有スル材木ノ体積ハ如何シテ測リ得ルカ

第四十一課
角錐

第一圖ノ立体ハ面底CHFEノ四邊形



第二圖



ニシテ其傍面ハDHC DHF DFE DECノ三角形ヨリ成リ其三角形ハ一邊Dニ集マレルナリ此ノ如キモノヲ角錐ト云フ

定義第四十八 角錐トハ底面直線形ニシテ傍面ハ皆三角形ニテ預點ト稱スル一點ニ其三角頭ヲ集ムル立体ナリ

今角錐ハ同底ヲ有スル平行六面体ノ三分ノ一ナルコヲ證セン

第二圖ニ示セルABDCFHGEナル平行六面体ノD點

通シ同高ヲ有シテ之ヲ圖ノ如ク分截スレバDEFHGハ角錐ニシテ即チ平行六面体ノ三分一ナリ而シテDPハ此体ノ正高ナリ

角錐ガ直体ナルモ斜体ナルモトモニ同理ナルベシ

算法 角錐ノ体積ハ底面積ニ正高ヲ乘シタル積ノ三分ノ一ヲ以テ測ル可シ

凡ベテ直線及ヒ平面ニテ界セル立体ハ平行体或ハ角壔ニ分截セラルベシ

故ニ平行体角壔及ヒ角錐ノ体積ヲ測算スルコヲ知ルトキハ如何ナル直線体ノ体積モ測算シ得ベキナ

リ

練習 第三十一

(1) 角錐アリ其正高一丈八尺ニシテ地上底ノ各邊ハ二丈及ビ一丈五尺ノ矩形ナリ由テ此体積ヲ求ム

(2) 或ル角錐ハ底十三平方尺ニシテ其正高四丈五尺ナリ由テ此体積ヲ求ム

(3) 底ノ一邊一丈ナル正方形上ニ立ツ角錐アリ其体積ハ一千六百十六立方尺アリト云フ由テ其正高ヲ求ム

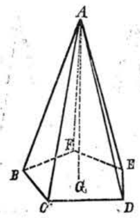
第四十二課
圓壔

佐久間文太郎　『教育初等幾何初歩』　明治24年5月10日発行

V=B×H

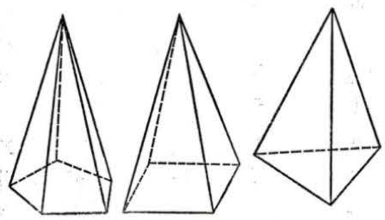
第三十六節　錐体

第百八條　錐体トハ若干ノ平面ニテ圍マレタル立体ニシテ、アル多角形ナル一面ノ外ハ、凡テノ面皆三角形ナルモノナリ、其多角形ナル一面ヲ錐体ノ底ト云ヒ、其底外ナル一角ヲ頂角ト云ヒ、頂角ヨリ底ヘノ垂線ヲ錐体ノ高サト云フ



本圖ノBCDEFナル一面ハ多角形ニシテ之ヲ底ト云フ、他ノ面ハ凡テABC ACD等ノ如ク三角形ニシテ底外ノ角Aハ

頂角ナリ、而シテ底BCDEF面ヘノ垂線AGハ高サナリ



第百九條　錐体ノ底三角形ナルモノヲ三角錐体ト云フ、第一圖ノ如シ

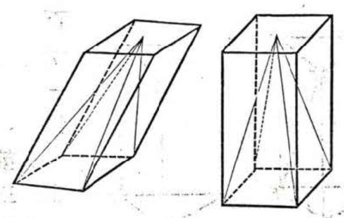
又底四角形ナルモノヲ四角錐体ト云フ、第二圖ノ如シ

又底五角形ナルモノヲ五角錐体ト云フ、第三圖ノ如シ

凡テ此ノ如ク其底ノ形ニ隨ヒテ錐体ノ名ヲ命ズルモノナリ

第百十條　兩錐体ハ其底面積ト高サト彼此互ニ相等

シキ𬼀、其体積相等シキモノナリ、其理次ノ如シ



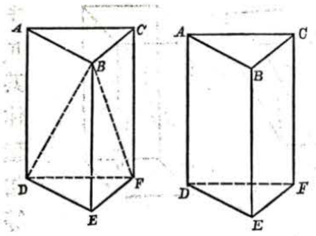
先ヅ次ノ第一圖ノ如ク、直柱体ノ上底ノ中央ニ頂角ヲ置キタル錐体ヲ容レタルモノヲ作リ、而シテ此全体ヲ第二圖ノ如ク傾斜セシムル𬼀ハ第二圖ノ如ク内容ノ錐体モ亦共ニ傾斜ス、而シテ全柱体ノ底、高サ、積ハ直ナルモ斜ナルモ變ズルヿナシ、依テ内容ノ錐体ノ底、高サ、積モ變化スルヿナキヲ知ルヲ得ベシ

依テ兩錐体ハ其底面積ト高サト彼此互ニ相等シキ𬼀

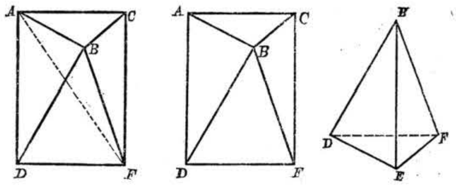
ハ其体積モ亦相等シキヿ明ナリ、尚ホ第百七條ヲ參考シ、同法ヲ施シテ試ムベシ

第三十七節　三角錐体積

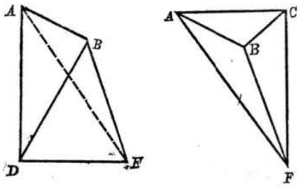
第百十一條　第一圖ABCDEFナル三角柱体ノBヨリD及ビFヘ線ヲ作リ、(第二圖)此線ニ沿ヒテ一平面ヲ以テ切斷スレバ第三圖ノBDEFナル三角錐体ト第四圖ノBADFCナル四角錐体トナル、而シテ此第四圖ノAヨリFヘ線ヲ作リ(第五圖)Bヨリ此AF線ニ向ヒテ一平面ニテ



田中矢徳　『高等小学幾何』　明治25年7月17日発行



此四角錐ヲ切斷スレバ第六、第七ノ兩三角錐体トナル、故ニ第一圖ナル原三角柱体ハ第三、第六、第七ナル三個ノ三角錐体ニ分タレタリ、此三角錐体ハ其体積皆相等シ、何トナレバ第三圖ト第六圖トハDEF ABCナル兩底ハ原三角柱ノ兩底ニシテ相等シク、而シテ高サハ何レモ原三角柱ノ高サト同ジナレバ等積ニシテ、又第六圖ト第七圖トノADF

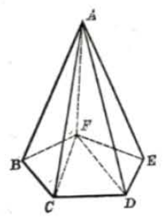


AFCナル兩底ハADFCナル原三角柱体ノ一傍面ナル直方形ヲ對角線AFヲ引キテ分チタルモノナレバ相等シク、且其兩底ヘBナル各項角ヨリ引ケル垂線(ADF AFCヲ各形ノ底トスル𪜈、其頂角Bヨリ其底ヘノ高サ)相等シケレバ是亦等積ニシテ則チ第三圖第六圖第七圖ナル三角錐体ハ相等シク、此各ハ原三角柱体ノ三分ノ一ナリ、故ニ三角錐体ノ積ハ之ト同底同高ナル三角柱体ノ積ノ三分ノ一ニ等シト云フヿヲ得ベシ、依テ之ヲ式ニ記スレバ左ノ如シ

三角錐体積$=\frac{底\times高}{3}$卽チ$V=\frac{1}{3}B\times H$

第三十八節　各種ノ錐体積

第百十二條　左圖ノABCDEFナル錐体ノ項角AヨリFC及ビFDヘ向ケ各一平面ヲ以テ此錐体ヲ切斷スル𪜈ハABFC. AFCD. AFDE.ナル三錐体ヲ得、

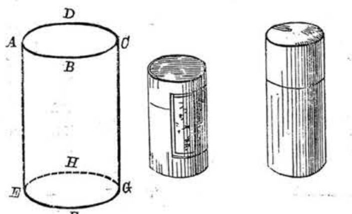


此三錐体ハ皆高サ相等シク、而シテ此全五角錐体ノ積ハ勿論此各三角錐体ノ積ノ和ナルベシ、然ルニ此各三角錐体ノ積ハ其各三角錐体ノ底面積ニ高サノ三分ノ一ヲ乘ゼシモノナリ、依テ全錐体ノ積

卽チ各三角錐体ノ積ノ和ハ各三角錐体ノ底面積ノ和即チ全錐体底面積ニ高サノ三分ノ一チ乘ジタルモノニ等シカルベシ、依テ其算式左ノ如シ

$V=\frac{1}{3}\times B\times H$

第三十九節　圓壔及ビ其体積



第百十三條　「ブリキ」ニテ作リタル茶入レ、又ハ竹筒、又ハ凝乳(コンデンスミルク)ヲ詰メタル鑵等ノ形ヲ圓壔ト云フ、コレ柱体ノ一種ナリ、故ニ又圓柱トモ云フ、依テ柱体ト等

ル向サヲ有スルカ

(10) 厚紙ニ網線ヲ書キテ方錐體ヲ作レ

(11) 大根ヲ以テ六角錐體ヲ作リ之ヲ前ニ示シタル三角錐體及ビ四角錐體ト比較シ又之ヲ六角柱ト比較セヨ

(12) 正六角形ノ底面ヲ有スル正立錐體ノ總テノ稜線ハ合シテ63尺ノ長サヲ有シ其底面ノ周圍ハ21尺アリトスレバ側稜及ビ底面ノ稜ハ各幾何ナルヤ

第三十二款　方錐體ノ面積及ビ體積ノ算法

方錐體ハ三角形或ハ多角形ヲ底面トナシ其側面ハ三角形ニシテ一尖ニ集合スルモノナリ故ニ其面ハ皆直線面

形ヨリ成リテ其表面ノ算法ハ甚容易ナリ即其各三角形ノ面積ヲ算シテ其和ニ底面積ヲ加フルニアリ

是ヨリ方錐體ノ體積ヲ算出セントス　茲ニ「ブリキ」ニテ互ニ底面幷ニ高サヲ相等シクスル三角錐體及ビ三角柱ノ底ノナキモノヲ造リ此錐體ヲ以テ柱體ヲ測ランニ先ヅ此「ブリキ」ノ錐體ニ水或ハ砂ヲ滿テ之ヲ柱體ノ中ニ注ギ試ムレバ錐體三杯ノ水或ハ砂ヲ以テ柱體ヲ充タスヲ見ルベシ仍テ錐體ハ之ト同底同高ノ柱體ノ三分一ニ等シキヲ見ル故ニ

各錐體ノ體積ハ其底面積ニ高サヲ乘ジ之ヲ三分シテ得ルモノナリ

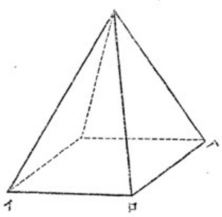
問題

学会指針社編　『幾何初歩全』　明治 25 年 8 月 30 日発行

錐ノ容積ヲ測ル法。

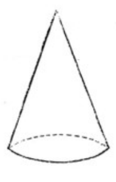
角錐幷ニ圓錐ノ容積ハ底面積ニ高サヲ乘シ之ヲ三分シテ知リ得ベシ。

例ヘバ第八十六圖ノ如キ角錐アリテ底面直方形ヲナシ(イロ)ノ長サ五寸、(ロハ)ノ長サ四寸錐ノ高サ六寸ナルトキハ五ニ四ヲ乘ジテ底面積二十平方寸ヲ得、此ノ數ニ六ヲ乘ジテ百二十立方寸ヲ得、之ヲ三分シテ角錐ノ容積四十立方寸ヲ得ルナリ。



第八十六圖

又第八十七圖ノ如キ圓錐アリテ高サ六寸底圓ノ半徑二寸ナルトキハ二ヲ自乘シ圓周率(三、一四)ヲ乘シテ底面積十二、五六平方寸ヲ得、此ノ數ニ六ヲ乘シ更ニ三分シテ圓錐ノ容積二十五、一二立方寸ヲ得ルナリ。


第八十七圖

浅田新太郎　『幾何小学』　明治 26 年 8 月 18 日発行

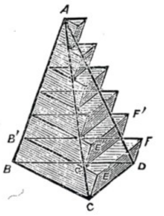
34　體　積　第三

錐體之體積

定理廿九

錐體ノ體積ハ底ト高ノ相乘ノ三分ノ一ニ等シ.

ABCD ヲ三角錐體トス.



AC ヲ若干等分シ其各分點ヲ通過シテ底 BCD ニ平行シテ若干ノ平面ヲ畫ク而シテ AB ニ平行シテ CD ヲ通過スル平面ヲ畫キ前ノ諸平面ト相交ハラシム以下此ノ如キ平面ヲ圖ノ如ク作ルベシ.

然ルヰ錐體ノ體積ハ BEF, B′E′F′ 等ノ諸柱體ノ體積ノ總和ヨリ小ナルコ諸柱體 GECDF 等ノ體積丈ケナリ.

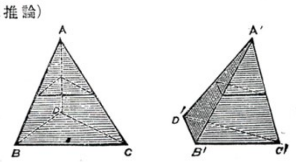
而シテ此 GECDF 等ノ諸柱體ノ和ハ柱體 BEF ヨリモ小ナルコ明ラカナリ,

而シテ柱體 BEF ハ AC ヲ意ノ如ク小サク無數ニ等分スルヰハ充分ニ微小ノモノトナルベシ.

故ニ錐體ノ積ハ此等分スル數ガ無究大トナルヰ其極限ハ前ノ諸柱體ノ總和ニ等シ.

又兩錐體 ABCD, A′B′C′D′ ガ等底,等高ナルヰ底ヨリ等距離ノ各截面ハ相等シ.（定理廿三推論）

故ニ此兩錐體上ニ作リタル諸柱體ハ相等シ之ニ由テ等底,等高ノ兩錐體 ABCD, A′B′C′D′ ハ其體積相等シ.



編　錐體之體積　35

今更ニ等底等高ノ兩錐體ハ相等シキコヲ下ニ示サン,

V, V′ ヲ此兩錐體トシ S, S′ ヲ前ノ如ク作リタル諸柱體ノ和トス.

然ルヰ (1) S−V 及ヒ S′−V′ ハ意ノ如ク小サクナシ得ヘキコ,

及ヒ (2) S=S′ ナルコヲ證明シ得ベシ,

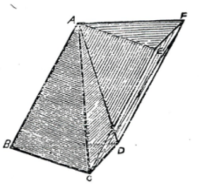
而シテ之ニ由テ V=V′ ナルコヲ知ル,

何トナレハ V−V′=a ナルヰ S−V, S−V′ ハ其差 a ナルガ故ニ雙方ヲ意ノ如ク小サクナサヾルヲ以テナリ.

等底等高ノ兩錐體ハ相等シキコハ巳ニ證シ得タリ是ヨリ最後ノ證明ヲナスコ次ノ如シ.

ABCD ヲ錐體トシ C, D ヲ通過シテ AB ニ平行線ヲ引キ BCD ニ平行シテ AEF 平面ヲ截リ ABCDEF 錐體ヲ作ル.

CF ヲ連結ス.



然ルヰ柱體ハ ABCD, CEAF 及ヒ FDCA ノ三錐體トナル.

但シ此内 BCD, AEF ノ底ガ相等シク且ツ等高ナルガ故ニ

ABCD=CEAF.

又 ABD, FAD ノ底ガ相等シ且ツ等高ナルカ故ニ ABCD=FDCA.

故ニ各錐體=$\frac{1}{3}$柱體.即チ三角錐=$\frac{1}{3}$×底×高.

推　論　或錐體ノ體積ハ其底ト高ノ相乘ノ三分ノ一ニ等シ定理廿八推論 (2) ノ如ク證シ得ベシ.

定　義

22. 截錐體 トハ錐體ノ底ニ平行シタル二平面ノ間ニ有タレタルモノヲイフ.

23. 截柱體 トハ柱體ノ底ニ平行セザル二面間ノ體也.

上野市吉訳述　『増補訂正再版うぃるそん氏立体幾何学』　明治 26 年 7 月 30 日発行

「尋常中學校ノ學科及其程度」改正（明治 27 年 3 月 1 日文部省令第 7 號）

第 5 条

（1 年 4 時、2 年 4 時、3 年 4 時、4 年 4 時、5 年 4 時）に変更のみ

故ニ直六面體 AG，CP ハ相等シ.

(v) 高サ及底面ガ相等シキ平行六面體ハ相等シ，相等シキ直六面體ニ等シキヲ以テナリ.

系 1. 相等シキ底面及相等シキ高サノ角壔ハ相等シ.

是ヨリ第五編ニ於ケルト同様ノ方法ニ由リテ下ノ命題ヲ證明スルヲ得:

系 2. 底面ガ相等シキ角壔ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ.

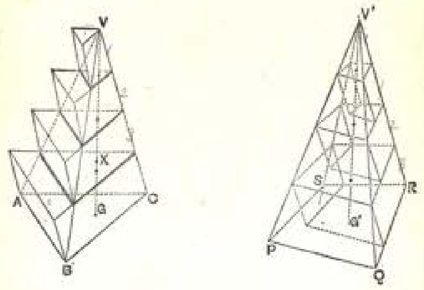
系 3. 高サガ相等シキ角壔ノ比ハ其ノ底面ノ比ニ等シ.

系 4. 二ツノ角壔ノ比ハ其ノ高サ及底面ノ比ノ相乘比ナリ.

定理 31. 相等シキ底面及相等シキ高サノ二ツノ角錐ハ相等シ.

V-ABC 及 V'-PQRS ハ二ツノ角錐ニシテ，其ノ底面 ABC，PQRS ガ相等シク，且其ノ高サ VG，V'G' ガ相等シトセヨ;

然ルトキハ二ツノ角錐ハ相等シカル可シ.



若シ此二ツノ角錐ガ相等シカラザレバ，
V-ABC ガ V'-PQRS ヨリ大ニシテ，其ノ體積ノ差ハ端面ガ ABC，高サガ GX ニ等シキ角壔ニ等シトセヨ;
二ツノ相等シキ高サ VG，V'G' ヲ各 GX ヨリ小ナル同數ノ相等シキ部分ニ分テ;
各ノ分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ヲ畫ケバ，
二ツノ角錐ノ相對應スル截リ口ハ相等シキコトハ VI，25 ニ由リテ明ナリ;
今各ノ截リ口ヲ端面トシ，角錐ノ高サヲ等分シタル各ノ部分ニ等シキ高サノ角壔ヲ作レ，
但シ V-ABC ニ於テハ各ノ角壔ヲ夫々ノ截リ口

ヨリ上ニ，又 V'-PQRS ニ於テハ夫々ノ截リ口ヨリ下ニ在ル樣ニセヨ;
然レバ角壔ハ皆相等シキ高サナルヲ以テ，相等シキ截リ口ヲ端面トシタル角壔ハ相等シ;　VI，30，系 1
故ニ V-ABC ノ方ノ角壔ノ和ハ V'-PQRS ノ方ノ角壔ノ和ヨリ最下ノ角壔ダケ大ナリ;
然ルニ V-ABC ノ方ノ角壔ノ和ハ角錐ヨリ大ニシテ，V'-PQRS ノ方ノ角壔ノ和ハ角錐ヨリ小ナルコト明ナリ;
故ニ角壔ノ和ノ差ハ角錐ノ差ヨリ大ナリ;
即 V-ABC ノ方ノ最下ノ角壔ハ同シ端面 ABC 及高サ GX ナル角壔ヨリ大ナリ;
然ルニ最下ノ角壔ノ高サハ角錐ノ高サヲ等分シタル部分ノ一ツナルヲ以テ，GX ヨリ小ナリ;
故ニ最下ノ角壔ハ端面 ABC 及高サ GX ナル角壔ヨリ大ナル能ハズ;
故ニ二ツノ角錐ハ相等シカラザル能ハズ，
即相等シ.

定理 32. 一ツノ三角壔ハ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツヲ得.

ABC-DEF ヲ三角壔トセヨ:
然ルトキハ之ヲ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツヲ得可シ.

平面 ACE，DCE ヲ畫ケバ，
角壔ハ三ツノ三角錐 EABC，EADC，EFCD ニ分タル;
而シテ角錐 EADC 及 EFCD ノ底面 ADC，FCD ハ相等シク，
高サハ何レモ E 點ヨリ平面 ACFD ヘノ距離ナルヲ以テ，
角錐 EADC，EFCD ハ相等シ;
又角錐 EABC 及 EFCD ノ底面 ABC，DEF ハ相等シク，
高サハ何レモ平面 ABC，DEF ノ距離ナルヲ以テ，
角錐 EABC，EFCD ハ相等シ:
故ニ角壔 ABC-DEF ハ三ツノ相等シキ角錐 EABC，EADC，EFCD ニ分タル.

系 1. 角錐ハ底面及高サガ相等シキ角壔ノ三分ノ一ナリ.

系 2. 二ツノ角錐ノ比ハ其ノ底面及高サノ比ノ相乘比ナリ.

菊池大麓　『初等幾何学教科書立体部』　明治 27 年 12 月 15 日発行

「中學校令」改正（明治 32 年 2 月 7 日勅令第 28 號）

第 1 条

中學校ハ男子ニ須要ナル高等普通教育ヲ爲スヲ以テ目的トス

第 11 条

中學校ノ學科及其ノ程度ニ關スル規則ハ文部大臣之ヲ定ム

附則

第 19 条

本令ハ明治 32 年 4 月 1 日ヨリ施行ス

「中學校令施行規則」（明治 34 年 3 月 5 日文部省令第 3 號）

第 1 章　學科及其ノ程度

第 1 条

中學校の學科目ハ修身、國語及漢文、外國語、歴史、地理、數學、博物、物理及化學、法制及經濟、圖畫、唱歌、體操トス

外國語ハ、英語、独語又ハ仏語トス

法制及經濟、唱歌ハ當分之ヲ缺クコトヲ得

第 7 条

數學ハ數量ノ關係ヲ明ニシ計算ニ習熟セシメ兼テ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス

數學ハ算術代數初歩及平面幾何ヲ授クヘシ

第一學年　三時

第二學年　三時

第三學年　五時

第四學年　五時

第五學年　四時

「中學校教授要目」（明治 35 年 2 月 6 日訓令第 3 號）文部大臣　理學博士菊池大麓

中學校教授要目

目次　本要目實施上ノ注意　修身　國語及漢文　外國語　歴史　地理　數學　博物　物理及化學　法制及經濟　圖畫　唱歌　體操

數　學

第一　　算術

第一學年　　　　毎週四時間

緒　論

　命數法　記數法　小數

整數及小數

　加減乘除

諸等數
　時間　めーとる法度量衡　尺貫法　本邦貨幣　外國度量衡及貨幣　諸等通法及命法
　諸等數ノ加減乘除
　英國度量衡及貨幣其ノ他十進法ニ依ラサル複雜ナル諸等數ハ分數ノ中或ハ分數ノ後ニ於テ便宜之ヲ授クルコトヲ得
整數ノ性質
　可約性　素數　約數　最大公約數　最小公倍數
分　數
　分數ノ主要ナル性質　約分　通分　分數ヲ小數ニ化スルコト　小數ヲ分數ニ化スルコト
　分數ノ加減乘除
比及比例
　比　比例
第二學年
比及比例ノ續キ
　連鎖法　比例配分　混合
割　合
　総説　歩合算　利息算其ノ他割合ニ關スル日用諸算
冪及根
　自乘冪及平方根　三乘冪及立方根　求積
第二　　　　代數
第二學年
緒　論
　記號ノ定義　代數式　結合ノ法則　定義ノ擴張　負數
整　式
　加減乘除
方程式
　一元一次方程式
第三學年
方程式ノ續キ
　多元一次ノ聯立方程式
整式ノ續キ
　分配ニ關スル公式　因數　最大公約數　最小公倍數
分數式
　分數式ノ基本性質　約分　通分　分數ノ加減乘除
方程式ノ續キ
　一次式ニ帰セシムルコトヲ得ヘキ一元方程式　一元二次方程式　二次式ニ帰セシムルコト

ヲ得ヘキ一元方程式　二次方程式ヲ含ミタル聯立方程式　方程式ノ解決ニ關スル釈義

第四學年

無理式

指數定義ノ擴張　無理數無理數ニ近似スル有理數値

比及比例

不名數ノ場合　量ノ場合（通訳スヘキ量、通約スヘカラサル量）　不尽數

級　數

等差級數　等比級數

順列及組合

二項定理

正整數ナル指數ノ場合

對　數

對數ノ基本性質　對數表

第三　　　幾何

第三學年

諸　論

直　線

角　平行線　三角形　平行四辺形

圓

圓ノ性質　中心ニ於ケル角　弦　弓形ニ於ケル角　切線　二ツノ圓　軌跡

第四學年

圓ノ續キ

内接形及外接形

面　積

直線形ノ面積ノ等同

比　例

等シキ比ノ定義　此定義ヨリ派生スル一般ノ定理

比例ノ應用

比例線　相似形

第五學年

比例ノ應用ノ續キ

面積　軌跡

平　面

直線及平面　立体角

多面体

角壔　角錐　正多面體

曲面體

球　圓壔　円錐

第四　　　三角法

第五學年

角ノ計リ方

六十分法

圓函數

鋭角ノ圓函數　圓函數相互ノ關係　余角ノ圓函數　格別ナル角ノ圓函數　眞數表

直角三角形ノ解法

圓函數ノ續キ

圓函數ノ一般ノ定義　圓函數相互ノ關係　圓函數ノ符号及大サノ變化　負角ノ圓函數　補角ノ圓函數

角ノ和ニ對スル公式

二ツノ角ノ和及差ノ圓函數　倍角及分角ノ圓函數　圓函數ノ積ニ對スル公式　圓函數ノ和及差ニ對スル公式

三角形ノ邊ト其ノ角ノ圓函數トノ關係

對數表ノ用法

三角形ノ解法

高サ距離等ノ測法及之ニ關スル實習

教授上ノ注意

一　數學ヲ授クルニハ常ニ正確ナル言語ヲ用ヒテ法則命題等ノ宣言證明ヲナシ正確ニ理會セシメンコトヲ力ムヘシ

二　算術ニ於テハ單ニ算法ヲ授クルニ止メス常ニ實算ヲ重ンジ正確ニ且迅速ニ計算シ得ルニ至ラシムヘシ

三　計算ニハ成ルヘク驗(タメ)シテ行ハシメ之ニ對スル自信ヲ深厚ナラシムヘシ

四　算術ノ例題ハ成ルヘク生業上適切ナルモノヲ選ヒ歩合算其ノ他日用諸算ニ關スル例題ヲ課スルニハ特ニ注意シテ其ノ事項ヲ説明スヘシ

五　算術ヲ授クル際法則ノ理由ヲ充分ニ理會セシメ難キ場合ニ於テハ單ニ其ノ一端ヲ指摘スルニ止メ直ニ法則其ノ物ニ移リ其ノ厳格ナル理由ノ説明ハ之ヲ代數ニ譲ルヘシ

六　代數ニ於テ一次方程式ヲ授クルニハ之ヲ一箇處ニ纒ムルコトナク其ノ最モ簡易ナルモノハ成ルヘク早ク之ヲ引用シテ代數ノ趣味ヲ得シムヘシ

七　幾何ヲ授クルニハ論理ノ厳格ヲ重ンスヘシ例ヘハ比例論ヲ授クル場合ノ如キ濫リニ簡易ニ就カントスル爲之ヲ省略ニ若ハ之ヲ曖昧ニ附シ去ル弊ニ陥ラントナスハ妨ナシ

八　作圖題ハ證明ノ聯絡上適當ノ處ニ於テ之ヲ授クヘシ

九　定理ノ形式其ノ相互ノ關係等ハ最初ニ於テ授クルヨリモ寧稍・進ミタル後便宜之ヲ授クルヲ可トス

十　三角法ニ於テ高サ距離等ノ測法ハ其ノ實習ト共ニ成ルヘク早ク之ヲ授ケテ興味ニ訴フルコトヲ要ス

十一　圓函數ハ初眞數ヲ用ヒ後對數ヲ用フルヲ可トス

十二　教授用備品ハ次ノ例ニ依ルヘシ

日時計　時計　羅針盤　めーとる法尺　三種比較尺　日本秤　めーとる法分銅　台秤　液量枡　めーとる法量器　外國度器　黒板用こんぱす　黒板用各種ノ定理　べえるにえー模型　ておどりっと　巻尺　ちぇーん　旗竿等

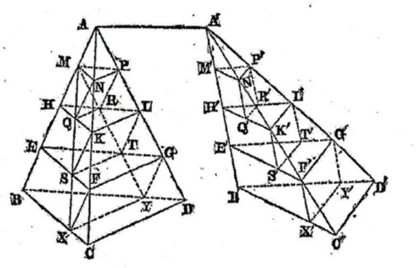
日本貨幣圖　外國貨幣圖　幾何立体ノ模型

第三節

角錐ノ體積

定理 XVI. 底ガ等積ニシテ高サガ相等シキ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シ。

題意. ABCD, A'B'C'D' ヲ二ツノ三角錐トシ,其底ノ三角形 BCD, B'C'D' ノ面積ハ相等シク, A,A' ヨリ底面マデノ距離モ亦相等シトス.此二ツノ角錐ノ體積ハ相等シカルベシ.



證明. 兩角錐ノ底ヲ同ジ平面上ニ置キテ兩體ヲ其同ジ側ニ置ク.

一ツノ角錐ノ一ツノ稜,例ヘバ AB ヲ若干ニ等分シ,各分點 E,H,M ヲ過ギリテ底ノ平面ニ平行スル平面

ヲ作リテ兩體ヲ截レバ同ジ平面ニ依リテ生ズル截斷面ノ積ハ相等シ.即チ EFG ト E'F'G', HKL ト H'K'L', MNP ト M'N'P' トハ何レモ等積三角形ナリ.(定理 IV 系 II)

相隣レル各截斷面ノ間ニ在リテ,截斷面ヲ底トシ,側稜ガ AB ニ平行スル角壔ヲ角錐 ABCD ノ内ニ作リ,側稜ガ A'B' ニ平行スル角壔ヲ A'B'C'D' ノ内ニ作レバ此等ノ角壔ノ高サハ皆相等シ.　(五編定理 XVIII 系)

故ニ角壔 BXYEFG ト角壔 B'X'Y'E'F'G' トハ其體積相等シ.　(定理 XIV 系 I)

同様ニ他ノ角壔モ皆二ツヅツ等積ナリ.

故ニ各角錐内ニ在ル角壔ノ體積ノ和ハ相等シ.而シテ此コトハ AB ヲ幾何ニ等分スルモ常ニ然リ.

分點ノ數ヲ漸次ニ多クナシテ同ジ作圖ヲ施セバ角壔ノ數モ漸次ニ多ク,其體積ノ和モ增加シテ角錐ノ體積トノ差ハ漸次ニ小サクナルベシ.

FX, KS, NQ ハ夫々 EB, HE, MH ニ等シク且ツ之ニ平行ス,而シテ　EB=HE=MH=AM　(作圖)

故ニ FX, KS, NQ ハ皆 AM ニ等シク且ツ之ニ平行ス.

故ニ四邊形 AMQN, NQSK, KSXF ハ皆平行四邊形ナリ.　(一編定理 XXXII)

故ニ MQ, QS, SX ハ皆 AC ニ平行ス.故ニ此等ノ直線ハ皆一ツノ直線ヲナシ,其直線ハ AC ニ平行ス.

同様ニ MR,RT,TY ハ AD ニ平行スル一ツノ直線ヲナス.

三守守　『立体幾何学』　明治 36 年 9 月 28 日発行

此ノ如クMXハAC=平行シMYハAD=平行スルガ故=MX, MYノ定ムル平面ハAC, ADノ定ムル平面=平行ス。　(五編定理XVII)

而シテ此二平面ノ距離ハAMヨリモ小サシ,何トナレバAMハ此二平面=垂直ナラザレバナリ。

故=ABヲ分ツ分點ノ數ガ限リナク多クナレバ此二平面ノ距離ハ限リナク小サクナル。依リテ此平面ノ間=在ルMXYACDナル體ノ體積モ亦限リナク小サクナルベシ。然ル=角錐ABCDノ內=作レル角壔ノ體積ノ和ト,角錐ノ體積トノ差ハ此MXYACDナル體積ヨリモ小サキコトハ明白ナリ。故=分點ヲ十分多クスレバ角壔ノ體積ノ和ト角錐ノ體積トノ差ハ限リナク小サクナル。故=角壔ノ體積ノ和ノ極限ハ角錐ノ體積ナリ。

角錐A′B′C′D′及ビ其內=作レル角壔=就キテモ同ジコトナリ。

然ル=上=證明セシガ如ク,何レノ角錐=於テモ其內=作レル角壔ノ體積ノ和ハ相等シキコトハ,角壔ノ數ガ如何=大キクナルモ渝ハルコトナシ。故=角壔ノ數ガ無限=大キクナルトキノ極限=於テモ尙ホ然リ。　(四編定理V)

故=角錐ABCDト,角錐A′B′C′D′トハ其體積相等シ。

系。 三角錐ノ底ヲ變ズルコトナク其

頂點ヲ底ノ平面=平行スル直線上=於テ移シテモ其體積ハ變ズルコトナシ。

問題11。 同ジ平面上=在ラザル三ツノ相平行スル直線X, Y, Zアリ。Xノ上=一定ノ長サABヲ截リ,Yノ上=一點C, Zノ上=一點Dヲトリ,四面體ABCDヲ作レバC, Dガ夫々Y, Z上=在リテ移動スルモ四面體ノ體積ハ變ズルコトナシ。

問題12。 同ジ平面上=在ラザル二ツノ直線X及ビYアリ,Xノ上=一定ノ長サABヲトリ,Yノ上=一定ノ長サCDヲトリ,四面體ABCDヲ作レバAB, CDガ夫々X, Yノ上=在リテ移動シテモ四面體ノ體積ハ變ズルコトナシ。

定理XVII。 三角錐ノ體積ハ其底ト高サトノ相乘積ノ三分ノ一=等シ。

題意。 ABCDヲ三角錐トシBCDヲ其底トス。此體ノ體積ハΔBCDノ面積トA點ヨリBCDノ面ヘ下ス垂線トノ積ノ三分ノ一=等シカルベシ。

證明。 B點ヲ過ギリ,CA=平行=BB′直線ヲ作レバBD, BB′=テ一ツノ平面定マル。(五編定理I系II)

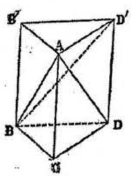
此平面ハAC=平行ス。　(五編定理XI)

此平面トABCノ平面ノ延長面及ビACDノ平面ノ延長面トノ交線ヲ夫々BB′, DD′トス。

又A點ヲ過ギリテBCDノ平面=平行=平面ヲ作リ上ノ三平面ト夫々AB′, AD′, B′D′=於テ交ハラシム。

此ノ如クシテ得ル所ノ體BCDB′AD′ハ角壔ナリ。

其故ハAC=平行=一ツノ直線ヲ作レバBB′モ此直線=平行シ,　(五編定理X)



AC ヲ含ム平面ACBB′, ACDD′及ビBB′ヲ含ム平面BDD′B′モ亦此直線=平行ス。　(五編定理XI)

而シテBCD, B′AD′ノ二平面ハ相平行ス。　(作圖)

故=BCDB′AD′ハ三角壔=シテ其底BCDハ與ヘラレタル角錐ノ底ナリ。又其高サハA點ヨリBCDノ平面ヘ下ス垂線=シテ與ヘラレタル角錐ノ高サナリ。

今此角壔ヨリ原ノ角錐ヲ取リ去レバABDD′B′トイフ體ヲ得。此體ハAヲ頂點トシ,平行四邊形BDD′B′ヲ底トスル四角錐ナリ。

之ヲA, B, D′ヲ含ム平面=テ截レバABDD′, ABB′D′ナル二ツノ三角錐ヲ得。此三角錐ノ底BDD′, BB′D′ハ相等シキ三角形ナリ。　(一編定理XXIX及ビXI)

其高サハA點ヨリBDD′B′ノ平面ヘ下ス垂線=シテ兩體=就キテ相同ジ。故=此二ツノ三角錐ハ等積ナリ。　(定理XVI)

又ABB′D′ト與ヘラレタル角錐ABCDトヲ比較セン。ABB′D′=於テハBヲ頂點ト見テB′AD′ヲ底ト見ルコトヲ得。依リテ其底ハ與ヘラレタル角錐ノ底BCD=等シク,其高サハB點ヨリB′AD′ノ平面ヘ下ス垂線ナルヲ以テA點ヨリBCDノ平面ヘ下ス垂線,即チ與ヘラレタル角錐ノ高サ=等シ。故=ABB′D′ノ體積ハ與ヘラレタル角錐ノ體積=等シ。　(定理XVI)

故=ABB′D′ノ體積ハ與ヘラレタル角錐ABCDノ體積=モ,又ABDD′ノ體積=モ等シ。

而シテ此三ツノ體ガ集マリテBCDB′AD′ナル角壔ヲナス。故=與ヘラレタル角錐ノ體積ハ此角壔ノ體積ノ三分ノ一=等シ。然ル=此角壔ノ體積ハ其底ナルΔBCDノ面積ト高サトノ相乘積=等シ,而シテ其高サハA點ヨリBCDノ平面ヘ下ス垂線=シテ與ヘラレタル角錐ノ高サ=等シ。故=三角錐ノ體積ハ其底ノ面積ト其高サトノ相乘積ノ三分ノ一=等シ。

問題13。 四面體ノ一ツノ稜ヲ含ミ之=對スル稜ノ中點ヲ過ギル平面ハ之ヲ二ツノ等積四面體=分ツ。

問題14。 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ之=對スル稜ヲ其二面角ヲナス面ノ積ノ比=分ツ。

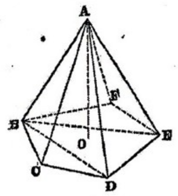
問題15。 正四面體ノ一邊ヲ知リテ其體積ヲ求ム

角錐ノ體積　95

ルコト。

定理XVIII。 角錐ノ體積ハ其底ト高サトノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

題意。 ABCDEF ヲ任意ノ角錐トシ,AO ヲ其高サトス。此體ノ體積ハ底 BCDEF ノ面積ト,高サ AO トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シカルベシ。



證明。 一ツノ側稜例ヘバ AB 及ビ之ト同ジ面ニ屬セザル他ノ各〻ノ側稜 AD, AE ヲ含ム平面ヲ作レバ與ヘラレタル體ヲ ABCD, ABDE, ABEF ノ三角錐ニ分ツ,其高サハ皆與ヘラレタル角錐ノ高サト同ジク AO ナリ。

然ルニ
$$\mathrm{ABCD}=\frac{1}{3}\Delta\mathrm{BCD}\times\mathrm{AO}$$
$$\mathrm{ABDE}=\frac{1}{3}\Delta\mathrm{BDE}\times\mathrm{AO}$$
$$\mathrm{ABEF}=\frac{1}{3}\Delta\mathrm{BEF}\times\mathrm{AO} \qquad (\text{定理 XVII})$$

之ヲ加ヘテ
$$\mathrm{ABCDEF}=\frac{1}{3}(\Delta\mathrm{BCD}+\Delta\mathrm{BDE}+\Delta\mathrm{BEF})\times\mathrm{AO}$$
或ハ
$$\mathrm{ABCDEF}=\frac{1}{3}\mathrm{BCDEF}\times\mathrm{AO}$$

系I。 角錐ノ體積ハ之ト底ノ面積ガ等シクシテ高サモ等シキ角壔ノ體積ノ

96　第六編。第三節

三分ノ一ニ等シ。

系II。 底ノ面積相等シク,高サモ相等シキ角錐ノ體積ハ相等シ。

系III。 底ノ面積ガ相等シキ角錐ノ體積ノ比ハ高サノ比ニ等シ。

系IV。 高サノ相等シキ角錐ノ體積ノ比ハ底ノ面積ノ比ニ等シ。

問題16. 正八面體ノ一邊ヲ知リテ其體積ヲ求ムルコト。

三守守　『立体幾何学』　明治36年9月28日発行

126　幾何學初步教科書

角形ニ分ナ得ルト共ニ之ヲ三角壔ニ分ツコトヲ得。其ノ體積ハ三角壔ノ體積ノ和ニ等シキヲ以テ角壔ノ底面積ガ sM, 高サガ tN ナル時ハ體積ハ stR ナリ。

112 角錐ノ體積ハ同ジ底面(端面)ノ上ニ立ツ所ノ同ジ高サノ角壔ノ體積ノ三分ノ一ニ等シ。故ニ角錐ハ其ノ底面積ガ sM, 高サガ tN ナレバ體積ハ $\frac{1}{3}st$R ナリ。

演習問題

1 四角壔形ノ量器中一升桝ノ端面ガ四寸九分四方(各邊ガ 4·9 寸ナル正方形)ナル時ハ其ノ高サハ何程ナル可キヤ。

2 截頭角錐ノ體積ヲ計算スル方法ヲ工夫セヨ。

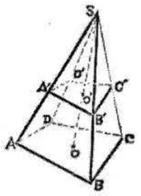
菊池大麓　『幾何学初步教科書』　明治37年8月31日発行

87. 定理七. 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ

(第一) 總テノ側稜及ビ高サハ相等シキ比ニ分タル.

(第二) 截面ハ底面ニ相似ナリ,而シテ其比ハ角錐ノ頂點ヨリ各ノ面マデノ距離ノ二乘比ニ等シ.

角錐 S—ABCD ノ底面 ABCD ニ平行ナル截リ口ヲ A'B'C'D' トシ此面ト高サ SO トノ交リヲ O' トセヨ.



然ルトキハ (第一)

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{SC}{SC'}=\cdots\cdots=\frac{SO}{SO'}$$

(第二) $ABCD \backsim A'B'C'D'$

且 $\dfrac{ABCD}{A'B'C'D'}=\left(\dfrac{SO}{SO'}\right)^2$ ナリ.

[生徒自ラ證明スベシ]

88. 系. 底面及ビ高サガ夫々相等シキ二ツノ角錐ヲ底面ニ平行ニシテ且頂點ヨリ等距離ニ於ケル平面ニテ截ルトキハ其截面ハ相等シ.

問題52. 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截リタル截面ヲシテ底面ノ半分ニ等シカラシムルコト.

89. 定義一三. 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニヨリテ截ルトキハ,此截面ト底面トノ間ニ在ル多面體ヲ截頭角錐或ハ角臺ト稱ス.

其截面及ビ角錐ノ底面ヲ共ニ截頭角錐ノ底面ト稱シ,角錐ノ側面,側稜,側高及ビ高サガ此兩底面ノ間ニ夾マレタル部分ヲ夫夫此截頭角錐ノ側面,側稜,側高及ビ高サト稱ス.

注意. 截頭直角錐ノ側面ハ皆合同ナル正梯形ナリ.

90. 定理八. 截頭直角錐ノ全側面積ハ兩底面ノ周ノ和ノ半分ト側高トノ積ニ等シ.

截頭直角錐ノ兩底面ノ周ヲ表ハス數ヲ夫々 p_1, p_2 トシ,側高ヲ表ハス數ヲ l トスレバ

$$全側面積=\frac{1}{2}l(p_1+p_2)$$

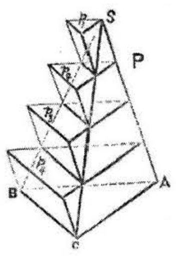
證明. [生徒自ラ證明スベシ]

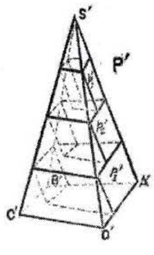
91. 系. 截頭直角錐ヲ兩底面ヨリ等距離ニ於ケル平面ニテ截リタル截面ノ周ヲ表ハス數ヲ p トスレバ　全側面積 $= lp$.

92. 定理九. 底面及ビ高サガ夫々相等シキ二ノ角錐ハ相等シ.

二ツノ角錐 P 及ビ P' ニ於テ其高サハ相等シク又底面 ABC……ハ A'B'C'……ニ等シトセヨ.

然ルトキハ　$P=P'$　ナルベシ.





證明. 若シ P, P' ガ等シカラザレバ何レカ大ナルベシ. 今　$P>P'$　ナリトセン.

側稜 SA, S'A' ヲ各 n 個ニ等分シ (圖ニ於テハ四等分) 各分點ヲ過リテ夫夫其底面ニ平行ナル平面ヲ作レ.

然レバ双方共 $n-1$ 個ノ截面ヲ得ベク,而シテ高サモ亦之ニヨリテ n 個ニ等分セラル　(87)

故ニ相隣ル截面ノ距離ハ皆相等シク高サノ $\frac{1}{n}$ ナリ.

而シテ頂點 S, S' ヨリ等距離ノ截面ハ相等シ.　(88)

今 P ノ方ニ於テ,各截面及ビ底面ノ上方ニ各之ヲ底

面トシテ角錐ノ高サノ $\frac{1}{n}$ ヲ高サトスル角墻ヲ作レ.

是等 n 個ノ角墻ヲ頂點 S ノ方ヨリ順次 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots p_{n-1}, p_n$ ト名ケヨ.

P' ノ方ニ於テハ各截面ノ下方ニ各之ヲ底面トシ角錐ノ高サノ $\frac{1}{n}$ ヲ高サトスル角墻ヲ作レ.

是等 $n-1$ 個ノ角墻ヲ頂點 S' ノ方ヨリ順次 $p_1', p_2', p_3' \cdots\cdots p_{n-1}$ ト名ケヨ.

底面及ビ高サガ夫々相等シキ二ツノ角墻ハ相等シキヲ以テ　(82)

$$p_1=p'_1,\quad p_2=p'_2,\quad p_3=p'_3,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p_{n-1}=p'_{n-1}.$$

而シテ　$P<p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1}+p_n$

　　　　$P'>p_1'+p_2'+p_3'+\cdots\cdots+p'_{n-1}$

ナルコ明ナリ.

$$\therefore\qquad P-P'<p_n$$

然ルニ p_n ハ ABC ヲ底面トシ角錐ノ高サノ $\frac{1}{n}$ ヲ高サトスル角墻ナルヲ以テ高サヲ小サクスルニ從テ之ヲ如何程ニテモ小サクスルコヲ得ルモノナリ.

然レバ n ヲ充分大ナル數ニナセバ p_n ハ如何程ニテモ小サクスルコトヲ得.

コレ P ガ P' ヨリ大ナリトイフコト即チ其差ガ有限ナリトイフコトノ假定ニ反ク.

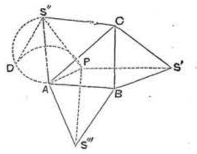
$$\therefore\ P=P'.$$

白井伯三郎　『初等幾何學教科書・立體之部』　明治 38 年 10 月 28 日発行

面 SBC ヲ平面 ABC ノ位置ニ來ルマデ BC ノ周リニ廻轉スレバ此ノ運動中ニ於テ直線 DS ハ絶エズ BC ニ垂線ナルコトヲ失ハズ.
故ニ二ツノ面ノ平面ガ合スルトキハ此ノ直線 DS ハ PD ノ延線上ニ於ケル DS′ トナルベシ. 依リテ四面體ノ面ノ一ツヲ此ノ面及ビ底面ニ共通ナル邊ノ周リニ廻轉シ底ノ平面ト合セシムレバ頂點,及ビ四面體ノ高サノ趾ハ廻轉ノ軸ニ垂線ナル直線上ニアリ.

今眞ノ大サニ於テ四面體ノ底面ヲ ABC トシ且倒サレタル三ツノ面ヲ BCS′, ACS″, ABS‴ トスレバ

$$AS''=AS''',\quad BS'=BS''',\quad CS'=CS''.$$



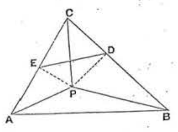
點 S′,S″,S‴ ヨリ對應邊上ニ垂線ヲ下セバ是等ノ三ツノ垂線ハ未知ノ頂點ノ射影ナル同一ノ點 P ニ於テ交ル. 加之ナラズ高サ SP ハ AS=AS″ ガ斜邊ナル直角三角形 APS ノ直角傍ノ一邊ナリ. 故ニ AS″ ヲ徑トシテ半圓周ヲ畫キ且 A ヲ中心トシテ弧 PD ヲ畫キ,而シテ S″D ヲ引ケバ此ノ直線ハ四面體ノ高サニ等シカルベシ.
稜ガ數ニテ與ヘラレタルトキハ此ノ作圖法ニ依リ四面體ノ高サヲ計算シ得ベク,依リテ此ノ體ノ體積ヲ定メ得可シ,然レドモ此ノ方法ハ次ノ方法ヨリ多少複雜ナリ.*

問 題 II.

四面體の體積を稜の函數にて計算せよ.

* じェー.ないべるぐ氏ニ依リテ示サレタリ.

ABC ヲ底ニ取リタル面トシ,P ヲ頂點 S ノ射影トシ,PD ヲ BC ニ垂線ニ,PE ヲ CA ニ垂線ニ引ク. 次ニ直線 DE, AP, BP, CP ヲ引ケバ是等ノ三ツノ終ノ直線ハ稜 AS=a', BS=b', CS=c' ノ射影ナリ. 加之ナラズ點 D,E ハソレゾレ CB, CA 上ニ於ケル頂點 S ノ射影ナリ[問題 I].



底面ノ邊ヲ a, b, c ニテ,距離 CD, CE ヲ x, y ニテ,直線 DE ヲ z ニテ表ハセバ次ノ如シ.

1°. $$z^2=x^2+y^2-(a^2+b^2-c^2)\frac{xy}{ab}^{*}. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

2°. SD ハ直角三角形 SDC, SDB ニ於ケル共通邊ナリ.

故ニ $$c'^2-x^2=b'^2-\overline{\mathrm{BD}}^2,$$

即チ $$c'^2-b'^2=(x+\mathrm{BD})(x-\mathrm{BD}),$$

然ルトキハ $$x+\mathrm{BD}=a$$

ナルヲ以テ $$x-\mathrm{BD}=\frac{c'^2-b'^2}{a}.$$

同様ニ $$y-\mathrm{AE}=\frac{c'^2-a'^2}{b}.$$

從ヒテ $$x=\frac{1}{2a}(a^2+c'^2-b'^2),\quad y=\frac{1}{2b}(b^2+c'^2-a'^2). \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

3°. 是等ノ値ヨリ方程式 (1) ハ次ノ如ク變ズ.

$$4a^2b^2z^2=b^2(a^2+c'^2-b'^2)^2+a^2(b^2+c'^2-a'^2)^2$$
$$-(a^2+b^2-c^2)(a^2+c'^2-b'^2)(b^2+c'^2-a'^2). \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

* 此ノ等式 (1) ヲ得ルニハ三角形 CED, CAB ニ於テ DE, AB ヲ計算スレバ可ナリ.

4°. 高サ SP ヲ ニテ表ハセバ

$$h^2=c'^2-\overline{\mathrm{CP}}^2.$$

然ルニ CP ハ三角形 CDE ニ外接スル圓ノ徑ナリ. 故ニ此ノ三角形ノ面積ヲ T′ トスレバ $xyz=2\mathrm{CP}.\mathrm{T}'$.

加之ナラズ三角形 ABC ノ面積ヲ T ニテ表ハセバ

$$\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}=\frac{xy}{ab}.$$

故ニ $$z=2\mathrm{CP}.\frac{\mathrm{T}}{ao}^{*}.$$

$$h^2=c'^2-\frac{1}{4\mathrm{T}^2}a^2b^2z^2.$$

而シテ (3) 式ニ依リ

$$16\mathrm{T}^2h^2=16\mathrm{T}^2c'^2-b^2(a^2+c'^2-b'^2)^2-a^2(b^2+c'^2-a'^2)^2$$
$$-(a^2+b^2-c^2)(a^2+c'^2-b'^2)(b^2+c'^2-a'^2). \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

5°. 四面體ノ體積ヲ V トスレバ.

$$16\mathrm{T}^2h^2=144\mathrm{V}^2.$$

加之ナラズ. $$16\mathrm{T}^2=-c^4+2(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2. \quad [参照 44]$$

故ニ所要ノ公式ハ
$$\left.\begin{aligned}&144\mathrm{V}^2=\\&[-c^4+2(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2]c'^2-b^2(a^2+c'^2-b'^2)^2-a^2(b^2+c'^2-a'^2)^2\\&+(a^2+b^2-c^2)(a^2+c'^2-b'^2)(b^2+c'^2-a'^2).\end{aligned}\right\}\ (5)$$

6°. 簡略ノ爲ニ上式ノ第二邊ヲ

$$\mathrm{A}a^2a'^2+\mathrm{B}b^2b'^2+\mathrm{C}c^2c'^2+\mathrm{D}$$

* コノ關係式ハ一層簡單ニ次ノ二式ヨリ得可シ.

$$z=\mathrm{CP}\sin \mathrm{C},\quad \mathrm{T}=\frac{1}{2}ab\sin \mathrm{C}.$$

44. ΔABC ノ各邊ヲ a, b, c トシ $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, 面積ヲ T トスレバ

$$16\mathrm{T}^2=16s(s-a)(s-b)(s-c)=-c^4+2(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2.$$

トスレバ次ノ如クナルコトヲ見ルハ容易ナリ.

$$\mathrm{A}=-a'^2+2(b^2+c'^2)-(a^2+c'^2-b'^2)-(a^2+b^2-c^2)$$
$$=b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2,$$
$$\mathrm{B}=-b'^2+2(a^2+c'^2)-(a^2+b^2-c^2)-(b^2+c'^2-a'^2)+b^2$$
$$=c^2+a^2-b^2+c'^2+a'^2-b'^2,$$
$$\mathrm{C}=-c^2+2(a^2+b^2)-a^2-c'^2+b'^2-b^2+a'^2$$
$$=a^2+b^2-c^2+a'^2+b'^2-c'^2,$$
$$\mathrm{D}=-(a^2-b^2)^2c'^2-b^2(a^2+c'^2)^2-a^2(b^2+c'^2)^2+a^2b^2(a^2+b^2-c^2)$$
$$+(a^2+b^2)^2c'^2+(a^2+b^2)c'^4-a^2b'^2c'^2-b^2c'^2a'^2-c^2a'^2b'^2$$
$$=-a^2b^2c^2-a^2b'^2c'^2-b^2c'^2a'^2-c^2a'^2b'^2.$$

7°. 故ニ終ニ $$144\mathrm{V}^2=(b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2)a^2a'^2$$
$$+(c^2+a^2-b^2+c'^2+a'^2-b'^2)b^2b'^2+(a^2+b^2-c^2+a'^2+b'^2-c'^2)c^2c'^2$$
$$-(a^2b^2c^2+a^2b'^2c'^2+b^2c'^2a'^2+c^2a'^2b'^2). \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (\mathrm{A})$$

[驗し] I. 四面體ガ正ナレバ (A) ノ第二邊ハ $2a^6$ トナル.

從ヒテ $$\mathrm{V}=\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}.$$ 此ハ正シキコトヲ知ル.

II. 三面角 S ガ三ツノ直角ノ面角ヨリ成ルトセヨ, 然ルトキハ

$$a^2=b'^2+c'^2,\quad b^2=c'^2+a'^2,\quad c^2=a'^2+b'^2.$$

此ノトキハ四面體ハ a', b', c' ヲ稜トセル直角體ノ $\frac{1}{6}$ ナリ.

故ニ $$\mathrm{V}=\frac{1}{6}a'b'c'.$$

V ヲ此ノ値ニテ置キ換ユレバ次ノ恒等式ヲ見出ス可シ.

$$2(a'^2+b'^2+c'^2)(a'^2b'^2+b'^2c'^2+c'^2a'^2)-(b'^2+c'^2)(c'^2+a'^2)(a'^2+b'^2)$$
$$-b'^2c'^2(b'^2+c'^2)-c'^2a'^2(c'^2+a'^2)-a'^2b'^2(a'^2+b'^2)=4a'^2b'^2c'^2,$$

即チ $$b'^2c'^2(b'^2+c'^2)+c'^2a'^2(c'^2+a'^2)+a'^2b'^2(a'^2+b'^2)$$
$$-(b'^2+c'^2)(c'^2+a'^2)(a'^2+b'^2)+2a'^2b'^2c'^2=0.$$

仏国カタラン氏　長沢亀之助訳補　『幾何学定理及問題』　明治38年　発行

III. 頂點 S ガ其ノ射影 P ト合スレバ稜 a', b', c' ハ AP, BP, CP トナル. V=0 ト置ケバ同一ノ平面内ニアル四點ノ相互ノ間ノ關係ヲ得可シ. 即チ

$$(b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2)a^2a'^2+(c^2+a^2-b^2+c'^2+a'^2-b'^2)b^2b'^2$$
$$+(a^2+b^2-c^2+a'^2+b'^2-c'^2)c^2c'^2$$
$$-(a^2b^2c^2+a^2b'^2c'^2+b^2c'^2a'^2+c^2a'^2b'^2)=0. \quad \dots \dots \dots \quad (B)$$

IV. 終ニ頂點 S ニ至ル稜 a', b', c' ガ同ジ長サ l ヲ有スル場合ヲ考フレバ (A) 式ハ　$144V^2=$

$$(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2)l^2-a^2b^2c^2$$

トナル. 底 ABC ノ面積ヲ T トスレバ括弧内ノ量ハ $16T^2$ ニ等シ.

故ニ
$$144V^2=16T^2l^2-a^2b^2c^2. \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (C)$$

此ノ結果ヲ驗スニハ, R ヲ底ニ外接スル圓ノ半徑トシ, h ヲ高サトスレバ
$$abc=4RT, \quad h^2=l^2-R^2$$
ナルコトヲ見レバ充分ナリ. 如何ニモ等式 (C) ハ
$$9V^2=T^2h^2$$
トナル. 故ニ
$$V=\frac{1}{3}Th.$$

[注意] 圖形 ABCP ハ AB 及ビ CP ガ對角線ナル四邊形 APBC ト考ヘ得可シ. 従ヒテ關係式 (B)* ハ單ナル四邊形ノ邊及ビ對角線ノ間ニ成リ立ツ所ノ關係ニ異ナラズ. 如何ニモ四邊形ニ就キテ記法ヲ整頓セムガ爲ニ前ノ記法ヲ

$$AP=a'=a, \quad BP=b'=b, \quad BC=a=c, \quad CA=b=d,$$
$$AB=c=x, \quad CP=c'=y,$$

* 此ハかるのーニ依リテ與ヘラレタリ.

ト變ズレバ等式 (B) ハ次ノ如ク變ズ.

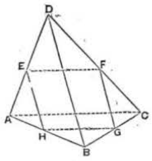
$$(d^2+x^2-c^2+b^2+y^2-a^2)c^2a^2+(x^2+c^2-d^2+y^2+a^2-b^2)d^2b^2$$
$$+(c^2+d^2-x^2+a^2+b^2-y^2)x^2y^2-(c^2d^2x^2+c^2b^2y^2+d^2y^2a^2+x^2a^2b^2)=0,$$

即チ
$$(a^2+b^2+c^2+d^2-x^2-y^2)x^2y^2+(a^2-d^2)(c^2-b^2)x^2$$
$$+(a^2-b^2)(c^2-d^2)y^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)(b^2d^2-a^2c^2)=0. \quad \dots \dots \quad (D)$$

コレ既知ノ關係式ナリ.

問題 III.

四面體 DABC を相對する稜 AC, BD に平行なる平面 P にて截り其の截口 EFGH をして最も大ならしめよ.

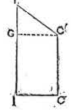


平面 P ハ BD ニ平行ナルヲ以テ此ノ平面ハ此ノ直線ニ平行ナル直線ニ従ヒテ面 ABD, CBD ヲ截ルベシ [參照 45].

同樣ニ平面 P ハ四面體ヲ稜 AC ニ平行ナル直線ニ従ヒテ截ルベシ.　故ニ四邊形 EFGH ハ平行四邊形ナリ. 然シテ角 HGF ハ稜 AC, BD ノ角ニ等シ. 従ヒテ此ノ平行四邊形ハ二邊 HG, GF 上ニ作リタル矩形ト同時ニ極大トナルベシ.

45. 二ツノ平面ノ交リニ平行ナル平面ニテ是等ノ平面ヲ截レバ其ノ交リハ前ノ二ツノ平面ノ交リニ平行ナリ.

リ IC ニ平行ナル C'G ヲ引ケバ CC'=II'−GI' ナルニ依リ $I'C'-\frac{GI'}{\sqrt{3}}$ ナル量ノ極小ヲ求ムレバ充分ナリ.



コノ結果ニ於テ C'G ヲ a ニテ, GI' ヲ x ニテ, $I'C'-\frac{GI'}{\sqrt{3}}$ ヲ z ニテ表ハセバ　$\sqrt{a^2+x^2}-\frac{x}{\sqrt{3}}=z$,

故ニ　$2x^2-2zx\sqrt{3}+3(a^2-z^2)=0$.

コノ二次方程式ハ z^2 ガ $\frac{2}{3}a^2$ ヨリ小ナルトキハ虚根ヲ有ス. 従ヒテ z ノ極小ハ $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ニシテ x ノ對應値ハ $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ナリ.

是ニ依リテ多面體の側面は稜 BB' と CC' との差が既知の邊 AB を以て作りたる正方形の對角線の四分の一なるとき最も小なることヲ知ル.

[注意] 今得タル所ノ多面體ハ蜜蜂ノ巣房ノ各ヽヲ構成スル所ノモノナリ.

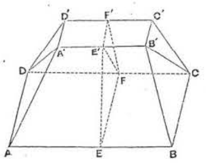
問題 XVII.

四面體に於て相對する稜の二組を與へ四面體が極大の體積を有する樣に他の二つの稜を定めよ.*

1°. 稜 AB, CD, AD, BC の各ヽが他の三つの和より小ならば是等の四つ, 及び二面角 BD, AC が直角なる四面體が恒に成り立つべし.

* 西暦 1874 年まるせいゆ大學ノ懸賞試驗ニ於テ月桂冠ヲ得タル同大學學生ぽーれ氏 [Paulet] ノ解法ノ一部ヲ摘記セリ.

但
$$AB=a=2^m.50, \quad BC=b=1^m.50,$$
$$A'B'=a'=1^m.50, \quad B'C'=b'=0^m.50,$$
$$高さ=h=0^m.50.^*$$



相對スル稜 A'B', CD ヲ過ル平面ヲ作リ多面體ヲ二ツノ三角壔 B'CC'A'DD', BB'CAA'D ニ分解シ其ノ各ヽヲ測ル爲ニ AB ニ垂直ナル一ノ平面 EFF'E' ヲ引ケバ其ノ平面 A'B'CD トノ交リ E'F ハ角壔ヲ垂直ニ截ル截口 △EE'F, △E'FF' ヲ定ム. 依リテ角壔ノ測度ニ關スル定理ハ

$$體積\ B'CC'A'DD'=\triangle E'FF'.\tfrac{1}{3}(A'B'+C'D'+CD),$$
$$體積\ BB'CAA'D=\triangle EE'F.\tfrac{1}{3}(AB+CD+A'B')$$

ヲ與フ. 即チ
$$體積\ B'CC'A'DD'=\triangle E'FF'.\tfrac{1}{3}(2a'+a),$$
$$體積\ BB'CAA'D=\triangle EE'F.\tfrac{1}{3}(2a+a').$$

梯形 EFF'E' ヲ分解セル三角形 E'FF', EE'F ハ高サ h ヲ有ス.

故ニ
$$\triangle E'EF'=\tfrac{1}{2}b'h, \quad \triangle E'FF=\tfrac{1}{2}bh,$$

従ヒテ
$$體積\ B'CC'A'DD'=\tfrac{1}{6}(2a'+a)b'h,$$
$$體積\ BB'CAA'D=\tfrac{1}{6}(2a+a')bh.$$

コレ等ノ二式ヲ加ヘテ所要ノ式
$$V=\tfrac{1}{6}[(2a+a')b+(2a'+a)b']h.$$

ヲ得. 與ヘラレタル例ニ於テハ
$$V=\tfrac{1}{6}[6.5.1.5+5.5.0.5]0.5=\overset{m}{1}.041.$$

* 此ノ形ト此ノ大サノ割合ガ堤防路ヲ築造スルモノナリ.

仏国カタラン氏　長沢亀之助訳補　『幾何学定理及問題』　明治 38 年　発行

而シテ　$\square KM=\square F'H'=\square FH=\square AC$

$F'K=B'O$

87. 系 1　任意の三角壔の體積は其底面と高さとの積に等し.

88. 系 2　任意の角壔の體積は其底面と高さとの積に等し.

89. 系 3　底面相等しき角壔の比は其高さの比に等し.

90. 系 4　高さ相等しき角壔の比は其底面の比に等し.

91. 系 5　二つの角壔の比は其底面の比と高さの比との積に等し.

92. 系 6　底面及び高さ夫々相等しき二つの角壔は相等し.

定理 32

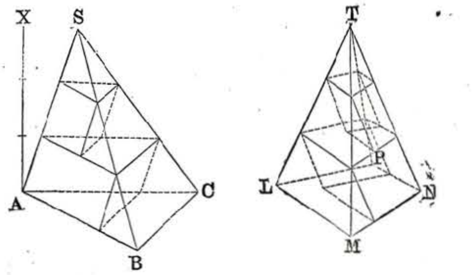
93. 底面及び高さ夫々相等しき二つの角錐は相等し.

S−ABC, T−LMNP ヲ二ツノ角錐トシ其底面

ABC, LMNP ハ相等シク而シテ同一ノ平面上ニ在リ且ツ其高サハ何レモ AX ナリトセヨ.

然ルトキハ　S−ABC=T−LMNP

證明　AX ヲ若干ノ部分ニ等分シ各分點ヲ通過シテ底面ニ平行ナル平面ヲ畫ケバ相對應スル截リ口ハ相等シ.　[74]



今二ツノ角錐内ニ各截リ口ヲ端面トシ AX ヲ等分シタル各部分ニ等シキ高サノ角壔ヲ作レ.

然レバ相等シキ截リ口ヲ端面トセル角壔ハ夫々相等シ.　[92]

故ニ S−ABC 及ビ T−LMNP 内ニ在ル角壔ノ和ヲ夫夫 V 及ビ V′ ニテ表ハセバ

$V=V'$

今 AX ヲ分チタル部分ノ數ヲ漸々增ストキハ V,V′

ハ漸々大キクナリ終ニ其部分ノ數ヲ極リナク大キクスルトキハ V 極限ハ S−ABC ニシテ V′ ノ極限ハ T−LMNP ナリ.

V 及ビ V′ ハ兩角錐內ニ在ル角壔ノ數ガ何程多クトモ常ニ相等シキヲ以テ其極限モ亦相等シ.

即チ　S−ABC=T−LMNP

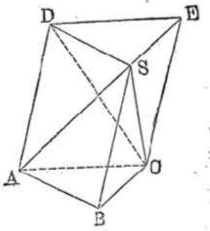
定理 33

94. 三角錐の體積は其底面と高さとの積の三分の一に等し.

S−ABC ヲ一ツノ三角錐トシ其底面 ABC 及ビ高サヲ夫々 m 及ビ h トスレバ

S−ABC ノ體積 $=\frac{1}{3}mh$

證明　ABC ヲ端面トシ SB ニ平行ナル直線ヲ側稜トシ高サハ S−ABC ノ高サニ等シキ角壔 ABC−DSE ヲ作レ.



此角壔ハ三角錐 S−ABC ト四角錐 S−ACED トノ和ニ等シ.

今二直線 SC, SD ノ平面 SCD ヲ作レバ

此平面ハ四角錐 S−ACED ヲ S−ACD, S−ECD ナル二ツノ三角錐ニ分ツ.

而シテ此二ツノ三角錐ハ其底面ナル三角形 ACD, ECD 相等シク高サ同一ナルヲ以テ相等シ.

倩 S−ECD ヲ底面ガ ESD ニシテ頂點ガ C ナル三角錐ト考フルコトヲ得.

由リテ　S−ECD=S−ABC　[93]

故ニ角壔 ABC−DSE ヲ組ミ立ツル所ノ S−ABC 等ノ三ツノ三角錐ハ皆相等シ.

故ニ　S−ABC=ABC−DSE ノ三分ノ一

而シテ　ABC−DSE ノ體積 $=mh$　[88]

故ニ　S−ABC$=\frac{1}{3}mh$

95. 系 1　任意の角錐の體積は其底面と高さとの積の三分の一なり.

96. 系 2　底面相等しき角錐の比は其高さの比に等し.

97. 系 3　高さ相等しき角錐の比は其底面の比に等し.

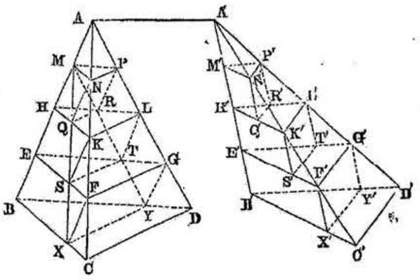
98. 系 4　二つの角錐の比は其底面の比と高さの比との積に等し.

第三節

角錐ノ體積

定理 14. 底ガ等積ニシテ高サガ相等シキ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シ。

ABCD,A′B′C′D′ ヲ二ツノ三角錐トシ,其底ノ三角形 BCD, B′C′D′ ノ面積ハ相等シク, A,A′ ヨリ底面マデノ距離モ亦相等シトス.此二ツノ角錐ノ體積ハ相等シカルベシ。



兩角錐ノ底ヲ同ジ平面上ニ置キテ兩體ヲ其同ジ側ニ置ク。

一ツノ角錐ノ一ツノ稜,例ヘバ AB ヲ若干ニ等分シ,各分點 E,H,M ヲ過ギリテ底ノ平面ニ平行スル平面ヲ作リテ兩體ヲ截レバ同ジ平面ニ依リテ生ズル截斷面ノ積ハ相等シ.即チ EFG ト E′F′G′, HKL ト H′K′L′, MNP ト M′N′P′ トハ何レモ等積三角形ナリ。

(定理 4 系 2)

相隣レル各截斷面ノ間ニ在リテ,截斷面ヲ底トシ,側稜ガ AB ニ平行スル角壔ヲ角錐 ABCD ノ內ニ作リ,側稜ガ A′B′ ニ平行スル角壔ヲ A′B′C′D′ ノ內ニ作レバ此等ノ角壔ノ高サハ皆相等シ。 (五編定理 18)

故ニ角壔 BXYEFG ト角壔 B′X′Y′E′F′G′ トハ其體積相等シ。 (定理 14 系 1)

同樣ニ他ノ角壔モ皆二ツヅツ等積ナリ。

故ニ各角錐內ニ在ル角壔ノ體積ノ和ハ相等シ.而シテ此コトハ AB ヲ幾何ニ等分スルモ常ニ然リ。

分點ノ數ヲ漸次ニ多クナシテ同ジ作圖ヲ施セバ角壔ノ數モ漸次ニ多ク,其體積ノ和モ增加シテ角錐ノ體積トノ差ハ漸次ニ小サクナルベシ。

FX, KS, NQ ハ夫々 EB, HE, MH ニ等シク,且ツ之ニ平行ス,而シテ EB=HE=MH=AM (作圖)

故ニ FX, KS, NQ ハ皆 AM ニ等シク,且ツ之ニ平行ス。

故ニ AM, NQ, KS, FX ハ皆相等シク,且ツ皆相平行ス。

故ニ四邊形 AMQN, NQSK, KSXF ハ皆平行四邊形ナリ。 (一編定理 33)

故ニ MQ, QS, SX ハ皆 AC ニ平行ス.故ニ此等ノ直線ハ皆一ツノ直線ヲナシ,其直線ハ AC ニ平行ス。

同樣ニ MR, RT, TY ハ AD ニ平行スル一ツノ直線ヲナス。

故ニ MX, MY ノ定ムル平面ハ AC, AD ノ定ムル平面ニ平行ス。 (五編定理 17)

而シテ此二平面ノ距離ハ AM ヨリモ大ナラズ。

故ニ AB ヲ分ツ分點ノ數ガ限リナク多クナレバ此二平面ノ距離ハ限リナク小サクナル.依リテ此平面ノ間ニ在ル MXYACD ナル體ノ體積モ亦限リナク小サクナルベシ.然ルニ角錐 ABCD ノ內ニ作レル角壔ノ體積ノ和ト,角錐ノ體積トノ差ハ此 MXYACD ナル體積ヨリモ小サキコトハ明白ナリ.故ニ分點ヲ十分多クスレバ角壔ノ體積ノ和ト角錐ノ體積トノ差ハ限リナク小サクナル.故ニ角壔ノ體積ノ和ノ極限ハ角錐ノ體積ナリ。

角錐 A′B′C′D′ 及ビ其內ニ作レル角壔ニ就キテモ同ジコトナリ。

然ルニ上ニ證明セシガ如ク,何レノ角錐ニ於テモ其內ニ作レル角壔ノ體積ノ和ハ相等シキコトハ,角壔ノ數ガ如何ニ大キクナルモ渝ハルコトナシ.故ニ角壔ノ數ガ無限ニ大キクナルトキノ極限ニ於テモ尙ホ然リ。 (四編定理 5)

故ニ角錐 ABCD ト,角錐 A′B′C′D′ トハ其體積相等シ。

系. 三角錐ノ底ヲ變ズルコトナク,其頂點ヲ底ノ平面ニ平行スル直線上ニ於テ移シテモ其體積ハ變ズルコトナシ。

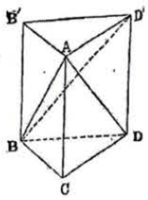
問題 6. 同ジ平面上ニ在ラザル三ツノ相平行スル直線 X, Y, Z アリ。X ノ上ニ一定ノ長サ AB ヲ截リ,Y ノ上ニ一點 C, Z ノ上ニ一點 D ヲトリ,四面體 ABCD ヲ作レバ C, D ガ夫々 Y, Z 上ニ在リテ移動シテモ四面體ノ體積ハ變ズルコトナシ。

定理 15. 三角錐ノ體積ハ其底ト高サトノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

ABCD ヲ三角錐トシ BCD ヲ其底トス。

三守守 『立体小幾何学』 明治 39 年 9 月 15 日発行

B點ヲ過ギリ,CAニ平行ニBB′直線ヲ作レバBD,BB′ニテ一ツノ平面定マル。(五編定理1系2)
此平面ハACニ平行ス。(五編定理11)
此平面トABC平面ノ延長面トノ交線ハBB′ナリ。又此平面トACD平面ノ延長面トノ交線ヲDD′トス。
又A點ヲ過ギリテBCDノ平面ニ平行ニ平面ヲ作リ上ノ三平面ト夫々AB′,AD′,B′D′ニ於テ交ハラシム。
此ノ如クシテ得ル所ノ體BCDB′AD′ハ角壔ナリ。
其故ハACニ平行ニ一ツノ直線ヲ作レバBB′モ此直線ニ平行シ, (五編定理10)
ACヲ含ム平面ACBB′, ACDD′及ビBB′ヲ含ム平面BDD′B′モ亦此直線ニ平行ス。(五編定理11)
而シテBCD, B′AD′ノ二平面ハ相平行ス。(作圖)



故ニBCDB′AD′ハ三角壔ニシテ其底BCDハ與ヘラレタル角錐ノ底ナリ。又其高サハA點ヨリBCDノ平面ヘ下ス垂線ニシテ與ヘラレタル角錐ノ高サナリ。
今此角壔ヨリ原ノ角錐ヲ取リ去レバABDD′B′トイ

フ體ヲ得。此體ハAヲ頂點トシ,平行四邊形BDD′B′ヲ底トスル四角錐ナリ。
之ヲA,B,D′ヲ含ム平面ニテ截レバABDD′, ABB′D′ナル二ツノ三角錐ヲ得。此三角錐ノ底BDD′, BB′D′ハ相等シキ三角形ナリ。(一編定理30及ビ11)
其高サハA點ヨリBDD′B′ノ平面ヘ下ス垂線ニシテ兩體ニ就キテ相同ジ。故ニ此二ツノ三角錐ハ等積ナリ。(定理14)
又ABB′D′ト與ヘラレタル角錐ABCDトヲ比較セン。
ABB′D′ニ於テハBヲ頂點ト見テB′AD′△ヲ底ト見ルコトヲ得。依リテ其底ハ與ヘラレタル角錐ノ底BCDニ等シク,其高サハB點ヨリB′AD′ノ平面ヘ下ス垂線ナルヲ以テA點ヨリBCDノ平面ヘ下ス垂線,即チ與ヘラレタル角錐ノ高サニ等シ。故ニABB′D′ノ體積ハ與ヘラレタル角錐ノ體積ニ等シ。(定理14)
故ニABB′D′ノ體積ハ與ヘラレタル角錐ABCDノ體積ニモ,又ABDD′ノ體積ニモ等シ。
而シテ此三ツノ體ガ集マリテBCDB′AD′ナル角壔ヲナス。故ニ與ヘラレタル角錐ノ體積ハ此角壔ノ體積ノ三分ノ一ニ等シ。然ルニ此角壔ノ體積ハ其底ナ

ル△BCDノ面積ト高サトノ相乘積ニ等シ,而シテ其高サハA點ヨリBCDノ平面ヘ下ス垂線ニシテ與ヘラレタル角錐ノ高サニ等シ。故ニ三角錐ノ體積ハ其底ノ面積ト其高サトノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

問題7. 四面體ノ一ツノ稜ヲ含ミ之ニ對スル稜ノ中點ヲ過ギル平面ハ之ヲ二ツノ等積四面體ニ分ツ。

問題8. 正四面體ノ一邊ヲ知リテ其體積ヲ求ムルコト。

系1. 一般ニ,角錐ノ體積ハ其底ト高サトノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

系2. 角錐ノ體積ハ之ト底ノ面積ガ等シクシテ高サモ等シキ角壔ノ體積ノ三分ノ一ニ等シ。

系3. 底ノ面積相等シク,高サモ相等シキ角錐ノ體積ハ相等シ。

系4. 底ノ面積ガ相等シキ角錐ノ體積ノ比ハ高サノ比ニ等シ。

系5. 高サノ相等シキ角錐ノ體積ノ比ハ底ノ面積ノ比ニ等シ。

問題9. 正八面體ノ一邊ヲ知リテ其體積ヲ求ムルコト。

三守守 『立体小幾何学』 明治39年9月15日発行

「中學校令施行規則」改正（明治 44 年 7 月 31 日文部省令第 26 號）

第 1 条

中學校の學科目ハ修身、國語及漢文、外國語、歴史、地理、數學、博物、物理及化學、法制及經濟、實業、圖畫、唱歌、體操トス

外國語ハ、英語、独語又ハ仏語トス

實業ハ農業、商業又ハ手工トス

法制及經濟、唱歌ハ当分之ヲ欠クコトヲ得

實業ハ随意科目ト爲スコトヲ得

第 7 条一項ヲ左ノ如ク改ム

數學ハ數量ニ關スル知識ヲ與ヘ計算ニ習熟セシメ應用ヲ自在ナラシメ兼テ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス

數學ハ算術代數初歩及平面幾何ヲ授クヘシ

第一學年　四時

第二學年　四時

第三學年　五時

第四學年　四時

第五學年　四時

「中學校教授要目」改正（明治 44 年 7 月 31 日文部省訓令第 15 號）

中學校教授要目

數　學

數學ハ算術、代數、幾何及三角法ニ分チ各學年ニ對シテ教授事項ヲ配當スト雖モ常ニ相互ノ聯絡ヲ圖リテ教授シ特ニ算術ニ關スル複雜ナル事項ハ代數及幾何ヲ授クル場合ニ之ヲ教授スヘシ

第一學年（毎週四時間）

・算　術

尋常小學校ニ於ケル算術トノ聯絡ヲ保チ整數、小數、諸等數、分數、歩合算ノ補習及練習ヲ爲サシメ且比例ヲ授クヘシ

第二學年（毎週四時間）

・代　數

負數

整數式

　四則　一次方程式　約數・倍數

分數式

　約分・通分　四則　分數方程式

第三學年（毎週五時間）

・代　數
開方
　開平　開立　二次方程式　無理式
・幾　何
直線
　角　平行線
直線形
　三角形　平行四辺形
圓
第四學年（毎週四時間）
・代　數
比例
　比　比例　複比例　比例配分　混合
級數
　等差級數　等比級數
・幾　何
比　例
　比例法　相似形
第五學年（毎週四時間）
・代　數
對數
百分算
　歩合　利息
・幾　何
平面
　平面ト直線　二面角　立体角
多面體
　角壔　角錐
曲面體
　圓壔　円錐　球
三角法
三角函數
　鋭角ノ三角函數　一般角ノ三角函數　二角ノ和及差ノ三角函數
三角形ノ解法
簡易ナル測量
注　意

一　數學ハ正確ニ理會セシムルノミナラス計算ニ熟シ應用ニ慣レシメンコトヲ要ス

二　算術ニ於テハ暗算及筆算ノ外ニ珠算ヲ併セ課スルモ妨ナシ

三　幾何ニ於ケル軌跡・作圖・面積及体積ハ適當ナル場合ニ於テ便宜之ヲ授クヘシ

$ABCD-IKLM=ABCD-PQRS$

$ABCD-PQRS=ABCD-EFGH$

$\therefore\ ABCD-IKLM=ABCD-EFGH$

系 1. 平行六面體ハ相等シキ底面及相等シキ高サノ直六面體ニ等シ

系 2. 角壔ハ相等シキ底面及相等シキ高サノ直六面體ニ等シ

系 3. 角壔ノ體積ヲ表ス數ハ底面積及高サヲ表ス數ノ相乘積ニ等シ

問題 6. 毎邊 2 寸ノ正三角形ヲ底面トスル高サ 12 寸ノ直三角壔ノ體積及側面積ヲ求ム

定義 10. 角錐トハ一ッノ面ヲ除キ其他ノ面ハ皆一點ニ於テ出會フ所ノ多面體ナリ. 其一ッノ面ヲ角錐ノ**底面**又ハ**端面**,其他ノ面ヲ角錐ノ**側面**,側面ノ出會フ點ヲ角錐ノ**頂點**,頂點ト底面トノ距離ヲ其**高サ**ト云フ

角錐ハ其端面ノ邊數ニヨリテ三角

錐,四角錐,五角錐等ニ區別ス

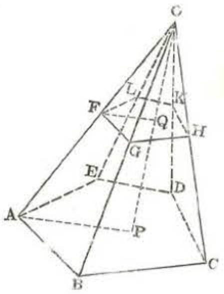
三角錐ハ又四面體ト云フ

定理 7. 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ切ル時ハ其切口ハ底面ニ相似ニシテ其面積ノ比ハ頂點ヨリノ距離ノ二乘比ニ等シ

$O-ABCDE$ ヲ角錐,$FGHKL$ ヲ底面ニ平行ナル切口,Q ヲ頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ノ交リトセヨ. 然ル時ハ $FGHKL \backsim ABCDE$

$FGHKL : ABCDE=\overline{OQ}^2 : \overline{OP}^2$

ナルベシ



證明 切口ト底面トハ平行ナルヲ以テ側面トノ交リハ平行ナリ卽チ

$FG \parallel AB,\ GH \parallel BC,\ HK \parallel CD$ 等ナリ

從ヒテ $\angle FGH=\angle ABC,\ \angle GHK=\angle BCD$ 等ナリ

卽チ切口ト底面トハ等角ナリ

次ニ $\triangle OAB$ ニ於テ $FG \parallel AB$ ナルヲ以テ

$FG : AB=OF : OA=OG : OB$

又 $\triangle OAP$ ニ於テ $FQ \parallel AP$

$\therefore\ OF : OA=OQ : OP$

從ヒテ $FG : AB=OQ : OP$

同様ニ $GH : BC=OQ : OP$

$HK : CD=OQ : OP$ 等

$\therefore\ FG : AB=GH : BC=HK : CD$ 等

卽チ切口ト底面トハ等角ニシテ對應邊ガ比例ヲナス,故ニ相似ナリ

次ニ $FGHKL \backsim ABCDE$

$\therefore\ FGHKL : ABCDE=\overline{FG}^2 : \overline{AB}^2$

然ルニ $FG : AB=OQ : OP$

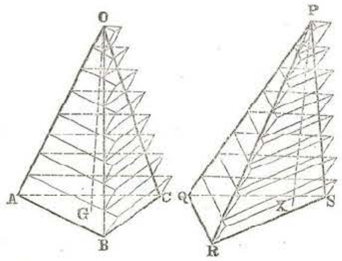
$\therefore\ \overline{FG}^2 : \overline{AB}^2=\overline{OQ}^2 : \overline{OP}^2$

從ヒテ $FGHKL : ABCDE=\overline{OQ}^2 : \overline{OP}^2$

系 底面及高サノ相等シキ二ッノ角錐ヲ頂點ヨリ相等シキ距離ニ於テ底面ニ平行ナル平面ニテ切ル時ハ其切口ハ相等シ

定理 8. 底面及高サノ相等シキ三角錐ハ相等シ

二ッノ三角錐 $O-ABC,\ P-QRS$ ノ底面 $ABC,\ QRS$ 相等シク高サ $OG,\ PX$ 相等シトセヨ,然ル時ハ其體積相等シカルベシ



證明 OG,PX ノ各ヲ n 等分シ其各分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニテ切ル時ハ其對應スル切口ハ相等シ. 次ニ底面及各切口ノ上ニ角錐ノ高サノ n 分ノ一ヲ高サトスル角壔ヲ作レバ其對應スル角壔ハ相等シ故ニ其和モ亦相等シ,而シテコレ等ノ角壔ノ和ハ元ノ三角錐ヨリモ側面 $OBC,\ PRS$ ノ外側ニアル三角壔ニ似タル n 個ノ多面體ノ和ダケ大ナリ,然ルニコレ等ノ n 個ノ多面體ノ

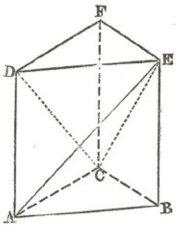
森岩太郎 『女子師範学校幾何教科書』 明治 44 年 11 月 1 日発行

(190)　第六篇　立體

和ハ最下ノ三角壔ヨリモ小ナリ,而シテ此最下ノ三角壔ハ之ヲ大キクスレバ何程ニテモ小サクスルコトヲ得. ツマリ角錐ハ之ヲ限リナク大キクシタル時此等ノ角壔ノ和ニ等シトスルコトヲ得,故ニ二ッノ角錐ハ相等シ

定理 9. 三角壔ハ三ッノ相等シキ三角錐ニ分ツコトヲ得

ABC−DEFヲ三角壔トセヨ,然ル時ハ三ッノ相等シキ三角錐ニ分ツコトヲ得ベシ



證明　DEトCトヲ過ル平面及A,C,Eノ三點ヲ過ル平面ニテ切ルトキハ二ッノ角錐E−ABC, C−DEFノ底面ハ元ノ三角壔ノ端面ニシテ相等シク高サハ兩端面間ノ距離ニシテ相等シ,故ニ此二ッノ角錐ハ相等シ

次ニ今一ッノ角錐C−ADEヲE−ABC卽チC−ABEニ比ブルニ其底面AED, ABEハ平行四邊形ノ對角

多　面　體　(191)

線ニヨリテ分タレタル部分ニシテ相等シク其高サハC點ト平面ABEDトノ距離ニシテ相等シ故ニ此兩三角錐ハ相等シ,卽チ三ッノ三角錐ハ相等シ

系 1. 三角錐ハ同ジ底面及相等シキ高サノ三角壔ノ三分ノ一ニ等シ

系 2. 角錐ハ同ジ底面及相等シキ高サノ角壔ノ三分ノ一ニ等シ

系 3. 角錐ノ體積ヲ表ス數ハ底面積及高サヲ表ス數ノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ

問題 7. 底面ガ毎邊2寸ノ正方形,側面ハ何レモ正三角形ナル角錐ノ側面積及體積ヲ求ム

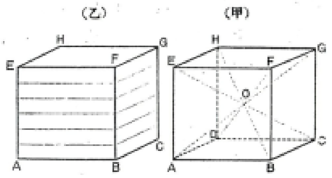
問題 8. 端面ハ正三角形ニシテ高サハ其一邊ニ等シキ直三角壔ヲ一ッノ頂點ト之ニ對スル稜トヲ含ム平面ニテ切ルトキハ其切口ト端面トノ比ハ$\sqrt{7}:\sqrt{3}$ニ等シ

森岩太郎　『女子師範学校幾何教科書』　明治44年11月1日発行

多　面　體　(83)

三角錐,四角錐,五角錐等ニ區別ス…

84. 角錐ノ體積　立方體ハ甲圖ノ如クOヲ共通ノ頂點トスル六ッノ相等シキ四角錐ニ,又乙圖ノ如ク六ッノ相等シキ直六面體卽チ四角壔ニ分ツコトヲ得故ニ其ノ一ッノ角錐ハ一ッノ角壔ニ等シ而シテ兩者ノ底面ハ立方體ノ面ニシテ相等シケレドモ角壔ノ高サハ角錐ノ高サノ三分ノ一ニ等シ何トナレバ前者ハ立方體ノ稜ノ六分ノ一,後者ハ其ノ二分ノ一ナレバナリ. 是ニ由テ四角錐ハ同ジ底面ノ上ニ立ッ三分ノ一ノ高サノ角壔ニ等シ. コレハ其ノ他ノ角錐ニツキテモ異ナリ,故ニ一般ニ



定理48. 角錐は同じ底面の上に立つ三分の一の高さの角壔に等し故ニ

角錐ノ體積ハ底面積及高サヲ表ス

(84)　第十一章

數ノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ

問題131. 直四角壔ノ底面ハ一尺二寸ニ九寸ノ矩形ニシテ高サ二尺ナルトキハ其ノ體積及全面積各何程ナルカ

問題132. 底面ハ毎邊二寸ノ正三角形ニシテ高サハ六寸ノ三角錐ノ體積如何

問題133. 立方體ノ全面積1734平方寸ナルトキハ其ノ體積如何

森岩太郎　『女学校用幾何学新教科書』　大正1年11月3日発行

86 多面體

又 $A'E' \parallel AE$ （定理六,系二）

故ニ $SA' : SA = SE' : SE$

從テ $A'B' : AB = SE' : SE$

故ニ截面ト底面トノ相似ノ比ハ

$SE' : SE$

ニ等シ。

系一。 角錐ノ底面ニ平行ナル二ツノ截面ノ面積ノ比ハ頂點ト截面トノ距離ノ比ノ平方比ニ等シ。

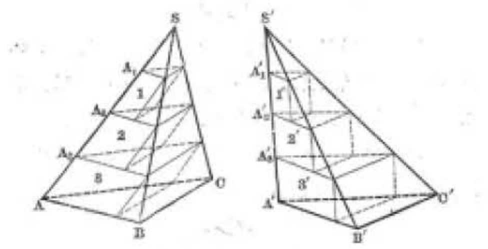
系二。 底面ガ等積ニシテ高サガ相等シキ二ツノ角錐ヲソレゾレ其頂點ヨリ相等シキ距離ニ於テ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキ,二ツノ截面ハ等積ナリ。

37. 角錐ノ體積。

定理三十二。 底面積及ビ高サノソレゾレ相等シキ二ツノ三角錐ハ等積ナリ。

角錐 87

證。底面積ノ數値ハイヅレモ a,高サノ數値ハイヅレモ h ナル二ツノ三角錐 S-ABC, S'-A'B'C' ノ體積ノ數値ヲソレゾレ V, V' トセヨ。



第一圖

三角錐 S-ABC ノ高サヲ任意ノ個數(例ヘバ四ツ)ニ等分シ,各分點ヲ通リ,底ニ平行ナル平面ヲ作リ,側稜 SA ト A_1, A_2, A_3 ニ於テ交ハラシメヨ。三角錐 S'-A'B'C' ニ於テモ同樣ノ作圖ヲナストキハ,二ツノ角錐ニ於ケル截面ハ一ツヅツ等積ナリ(定理三十一,系二)。

三角錐 S-ABC ニ於テ此等ノ截面ヲ底トシ, A_1A_2, A_2A_3, A_3A ヲ側稜トセル三角壔(1),(2),(3)(第一圖)ヲ作

83 多面體

ルトキハ,此等三ツノ三角壔ハ全ク角錐ノ内部ニアル階段狀ノ立體ヲ作ル。此立體ノ體積ヲ P トセヨ。然ラバ

$$V > P$$

又三角錐 S'-A'B'C' ニ於テモ同樣ノ作圖ヲナシ,三ツノ角壔(1')(2')(3')(第一圖)ヲ作ルトキハ,三角壔(1),(2),(3)ハソレゾレ三角壔(1')(2')(3')ト等底等高ナルガ故ニ S'-A'B'C' ノ内部ニ出來タル階段狀ノ立體ノ體積ハ P ニ等シ。故ニ

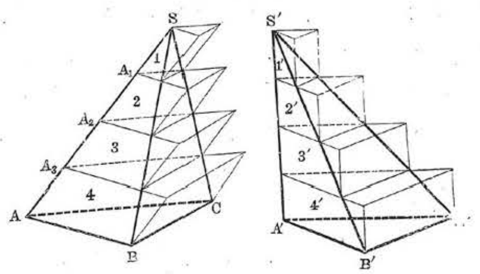
$$V' > P$$

次ニ又三角錐 S-ABC ニ於テ A_1, A_2, A_3 ヲ通ル截面及ビ底面 ABC ヲ底トシ, A_1S, A_2A_1, A_3A_2, AA_3 ヲ側稜トセル三角壔(1),(2),(3),(4)(第二圖)ヲ作ルトキハ此等ノ四ツノ三角壔ハ三角錐 S-ABC ヨリモ大ナル一ツノ階段狀ノ立體ヲ作ル。其體積ヲ Q トセヨ。然ラバ

$$Q > V$$

又第二ノ三角錐ニ於テモ同樣ノ作圖ヲナストキハ,此三角錐ヨリモ大ナル立體ヲ得,其體積ハ Q ニ等シ。故ニ

角錐 89



第二圖

$$Q > V'$$

即チ V, V' ハイヅレモ P ヨリハ大キク, Q ヨリハ小ナリ。故ニ V, V' ノ差ハ $Q-P$ ヨリモ小ナリ。サテ角錐 S-ABC ニ於テ作レル二組ノ三角壔ノ中,同ジ番號ヲ有スルモノハ等底等高ナルガ故ニ等積ナリ。故ニ $Q-P$ ハ三角壔(4)ノ體積ニ等シク,此三角壔ハ ABC ヲ底トシ,角錐ノ高サノ四分ノ一ニ等シキ高サヲ有スルガ故ニ

$$Q-P=\frac{ah}{4}$$

從テ V, V' ノ差ハ $\frac{ah}{4}$ ヨリモ小ナリ。

サテ角錐ノ高サヲ幾分スルトモ同樣ノ結果ヲ得

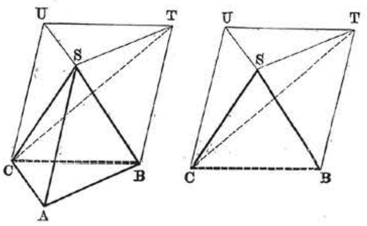
高木貞治 『新式幾何教科書(立体)』 大正 5 年 12 月 2 日発行

ベキガ故ニ,n ヲ如何ナル整數トスルトモ,V,V' ノ差ハ $\frac{ah}{n}$ ヨリハ小ナリ。是故ニ V,V' ノ差ハ零ナリ。何トナラバ假ニ V,V' ノ差ガ零ナラズトスルトキハ,n ヲ充分ニ大ナル整數トナシテ,$\frac{ah}{n}$ ヲ此差ヨリモ小ナラシムルコトヲ得ベケレバナリ。故ニ V,V' ハ相等シ。

定理三十三。 角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

證。(第一) 三角錐ノ場合。

三角錐 S-ABC ノ底面ヲ底面トシ,側稜 SA ヲ一ツノ側稜トセル三角壔 ABC-STU ヲ作レ。



此三角壔ハ三角錐 S-ABC ト等底等高ニシテ此三角錐ト四角錐 S-BCUT トヲ接合シテ作レル立

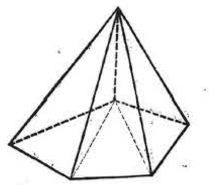
體ナリ。

平面 SCT ヲ作リ,此四角錐ヲ二ツノ三角錐 S-CTU (卽チ C-STU) 及ビ S-CTB(卽チ C-BST)ニ分テ。三角壔 ABC-STU ヲ組ミ立ツル三ツノ三角錐ノ中,S-ABC ト C-STU トハ等底等高ナルガ故ニ等積ナリ(定理三十二)。又 S-ABC 卽チ C-BSA ト C-BST トモ等底等高ナルガ故ニ等積ナリ。

故ニ三角錐 S-ABC ノ體積ハ之ト同ジ底面及ビ等シキ高サヲ有スル一ツノ三角壔 ABC-STU ノ體積ノ三分ノ一ニ等シ從テ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ(定理三十)。

(第二) 任意ノ角錐ノ場合。

任意ノ角錐ノ底面ヲ幾ツカノ三角形ニ分チ,此角錐ヲ此等ノ三角形ヲ底面トシ,同一ノ頂點ヲ有スル同數ノ三角錐ニ分ツコトヲ得。ヨリテ定理三十(第二)ト同ジヤウニシテ本定理ノ正シキヲ知ルベシ。



系一。 底面積及ビ高サノソレゾレ

相等シキ二ツノ角錐ハ等積ナリ。

系二。 體積及ビ底面積ノ相等シキ二ツノ角錐ハ相等シキ高サヲ有ス。

注意。 任意ノ多面體ハ之ヲ幾ツカノ角錐ニ分ツコトヲ得。ヨリテ其體積ヲ求ムルコトヲ得。

問題

1. 四面體ノ一ツノ稜ヲ含メル平面ハ,此稜ニ對スル稜ト四面體ノ體積トヲ相等シキ比ニ分ツ。

2. 四面體 ABCD ノ二ツノ頂點 A,B ヲ固定シ,他ノ二ツノ頂點 C,D ヲソレゾレ稜 AB ニ平行ナル直線 x,y ノ上ニ於テ動カストキ,四面體ノ體積ハ不易ナリ。

3. 上ノ問題ニ於テ,AB ノ上ノ一點 L ヨリソレゾレ x,y ヘ下セル垂線ノ足ヲ M,N トスルトキハ,四面體 ABCD ノ體積ハ三角形 LMN ノ面積ト稜 AB ノ長サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

4. 四面體 ABCD ノ體積ハ相對スル稜 AB, CD トソレゾレ平行ニシテ等長ナル二ツノ邊ヲ有ス

ル平行四邊形ノ面積ト此等ノ稜ノ共通垂線ノ長サトノ積ノ六分ノ一ニ等シ。

5. 四面體ノ二ツノ相對スル稜ノ長サヲ變ヘズシテ,之ヲ二ツノ定直線上ニ於テ動カストキ,四面體ノ體積ハ不易ナリ。

6. 角錐ノ底面積ハ S,高サハ h ナリ。底ニ平行ナル平面ニテ此角錐ヲ截リ,體積ガ半分ナル角錐ヲ得ントス。頂點ト截面トノ距離及ビ截面積ヲ求メヨ。

38. 角錐臺。

定義。 底面ト之ニ平行ナル截面トノ間ニ夾マレタル角錐ノ一部分ヲ**角錐臺**(又ハ截頭角錐)トイヒ,角錐ノ底面及ビ截面ヲ角錐臺ノ二ツノ**底面**,其間ノ距離ヲ角錐臺ノ高サトイフ。

角錐臺ノ二ツノ底面ハ相似ナル多角形ニシテ,側稜(及ビ側面)ノ延長ハ同一ノ點ヲ通ル。

定理三十四。 角錐臺ノ體積ハ其二ツノ底ノ面積及ビ二ツノ底ノ面積ノ比例中項ノ和ト高サトノ積ノ三分ノ

高木貞治　『新式幾何教科書(立体)』　大正 5 年 12 月 2 日発行

等シ。

其故ハ任意ノ角壔ハ之ヲ同高ナル若干ノ三角壔ニ分チ得レバナリ。

系二. 角壔ノ體積ハ其直截面ト側稜トノ乘積ニ等シ。

系三. 等底等高ノ角壔ハ相等シク,等高(又ハ等底)ノ角壔ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シ。

問 1. 正三角壔アリ,底ノ一邊 a 尺ニシテ高サ h 尺ナリ,體積幾立方尺ナルカ。

問 2. 正六角壔アリ,底ノ一邊一寸二分ニシテ側稜ノ長サ二寸五分ナリ,體積幾立方寸ナルカ。

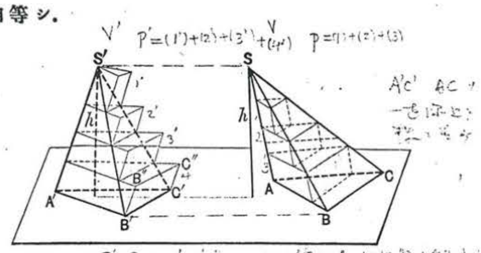
〔陸士〕

問 3. 三角壔ノ體積ハ其一側面ト其對稜上ノ一點ヨリ此面ヘ下セル垂線トノ乘積ノ半ニ等シ。

261. 定理十三. 等底(ABC, A′B′C′)等高(h)ナル二ツノ三角錐(S−ABC, S′−A′B′C′)ハ等積ナリ。

證明. 兩三角錐ヲ共ニ同一ノ平面上ニ置キ,稜SAヲ n 等分シ,其各分點ヲ通過シ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ兩角錐ノ截面ハ二ツヅヽ夫

夫相等シ。



三角錐S−ABCニ於テ,各截面ヲ上底トシ稜SAノ各部分ヲ夫々其一稜トスル $n-1$ 箇ノ三角壔ヲ作リ,又S′−A′B′C′ニ於テモ同樣ノ作圖ヲナストキハ,是等兩體ニ於ケル三角壔ハ夫々相等シ。

今三角錐S−ABC, S′−A′B′C′ノ體積ヲ夫々V, V′トシ,其各ノ內部ニ作リタル上記ノ $n-1$ 箇ノ三角壔ノ體積ノ和ヲPトスレバ,

$$P<V \quad 及ビ \quad P<V'.$$

n ヲ大ナラシムルトキハPハ前ヨリ大トナリVＶ及ビV′ニ近迫ス。何トナレバ例ヘバ n ヲ前ノ二倍トナサバ,各角壔ハ二ツトナリ,其一ツハ前者ノ半分ニシテ他ノ一ツハコレヨリ大ナレバナリ。

次ニ又三角錐S′−A′B′C′ニ於テ n 箇ノ三角壔

ヲ作リ,其下底ヲ夫々三角錐ノ底面及ビ各截面タラシメ,且其一稜ヲ夫々S′A′ノ各部分タラシメ,同樣ニ又S−ABCニ於テモ n 箇ノ三角壔ヲ作ルトキハ,是等兩體ニ於ケル三角壔ノ和ハ相等シ。今其體積ノ和ヲQトスレバ

$$Q>V \quad 及ビ \quad Q>V'.$$

而シテ n ヲ大ナラシムレバQトV及ビV′トノ差ハ如何樣ニモ小ナラシムルヲ得ベシ。

サテ Q−P ハ三角壔 A′B″C″ ニシテ,其底面ハ三角形A′B′C′ニシテ其高サハ $\dfrac{h}{n}$ ナリ。

故ニ n ヲ大ナラシムルコトニヨリテ Q−P ハ如何樣ニモ小ナラシムルコトヲ得。

然ルニ $P<V<Q$ 及ビ $P<V'<Q$ ナル故

$$V \sim V' < Q-P.$$

故ニVトV′トハ相等シカラザルベカラズ。

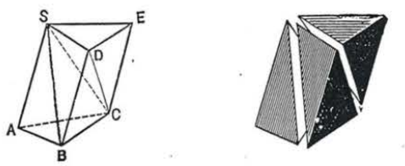
其故ハ若シ然ラズトシ其差ヲDトセバ,Dガ如何ニ小ナリトモ,之ヨリ大ナルベキ Q−P ヲ却テ之ヨリ小ナラシムルヲ得ベケレバナリ。

故ニ $\qquad V=V'.$

問. 平行四邊形ヲ底トスル四角錐ノ頂點ト底

ノ對角線トヲ含ム平面ハ其四角錐ヲ二等分ス。

262. 定理十四. 三角壔(ABC−SDE)ハ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得。



證明. 此三角壔ハSヲ共通ノ頂點トスル三ツノ三角錐S−ABC, S−BCD, S−CDEニ分ツヲ得。

而シテ第一ト第二トハ等底SAB, SBDヲ有シCヲ共通ノ頂點トスルモノト見ルヲ得ルヲ以テ,等底等高ナリ,故ニ相等シ。

同樣ニ第二ト第三モ相等シ。

從テ是等三ツノ三角錐ハ等積ナリ。

系一. 三角錐ハ等底等高ノ三角壔ノ三分ノ一ニ等シ。

系二. 角錐ハ等底等高ノ角壔ノ三分ノ一ニ等シ。

從テ角錐ノ體積ヲV,底面積ヲB,高サヲ h トセ

林鶴一 『中等教育幾何学教科書(立体部)』 大正6年12月21日発行

バ　　　$V=\frac{1}{3}Bh$　　　ナリ。

系三.　等高(又ハ等底)ナル二ツノ角錐ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シ。

問 1.　底面ノ各邊四寸ニシテ高サ一尺五寸ナル正六角錐ノ體積ヲ求メヨ　〔熊工〕

問 2.　稜ノ長サ a ナル正四面體ノ體積ヲ表ハス式ヲ誘導シ,且稜ガ 2 尺ナルモノノ體積ヲ立方寸ノ下四桁マデ正確ニ計算セヨ。〔東北大工助〕

*問 3.　四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ對稜ヲ其兩側面ノ比ニ分ツ。〔陸士,大工,名工〕

問 4.　相似角錐ノ比ハ其相似比ノ三乘比ニ等シ,一般ニ相似多面體ノ比モ亦然リ。(74 頁問 2 參照)。

263. 定理十五. **角錐臺ノ體積ハ,兩底ト其比例中項トノ和ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。**

證明.　V ヲ角錐臺ノ體積, a^2 及ビ b^2 ヲ其兩底ノ面積トス。

今此角錐臺ノ側面ヲ延長シテ生ズル角錐ノ高サヲ SP トシ,兩底トノ交點ヲ夫々 P 及ビ H トセバ, V ハ二ツノ角錐ノ差ナルヲ以テ,

$$V=\frac{SP}{3}\times a^2-\frac{SH}{3}\times b^2.$$

林鶴一　『中等教育幾何学教科書(立体部)』　大正 6 年 12 月 21 日発行

練　習　問　題

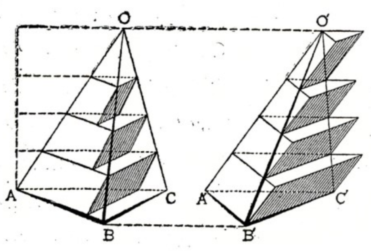
(1)　角壔ノ體積ハ,ソノ直截面ト側稜トノ積ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(2)　底面ガ菱形ナル平行六面體ノ高サ a ニシテ又ソノ底面ノ一邊及ビ一對角線モ a ニ等シト云フ。ソノ體積ヲ求ム。

(3)　一ツノ斜角壔ノ底面ハ 20, 側稜ハ 10, ソノ傾キハ 45° ナルトキ, ソノ體積ヲ求ム。

(4)　一ツノ角壔ノ底面ハ 10, ソノ側稜ノ底面上ニ於ケル正射影ハ 2, ソノ傾キハ 30° ナリ。角壔ノ體積ヲ求ム。

305　定理 139　底面ト高サトガ相等シキ二ツノ三角錐ハ相等シ。



O−ABC 及ビ O′−A′B′C′ ヲ相等シキ底面 ABC,

A′B′C′ ヲ有シ, 且相等シキ高サヲ有スル二ツノ三角錐トシ, ソノ體積ヲソレゾレ V 及ビ V′ トス。

然ルトキハ　V = V′　ナルベシ。

(證明)　二ツノ三角錐ノ各ノ高サヲ同ジ數ニ等分シ, ソノ各分點ヲ過リテ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ, 兩角錐ニ於テ對應スル截面ハソレゾレ相等シ。　(定理 132, 系 2)

今角錐 O−ABC ニ於テハ, ソノ各截面ヲ上ノ底面トシ, 二ツノ隣レル截面ノ距離ヲ高サトシ, OA ニ平行ナル側稜ヲ有スル三角壔ヲ作ル。又角錐 O′−A′B′C′ ニ於テハ, ソノ各截面及ビ角錐ノ底面ヲ下ノ底面トシ, 二ツノ隣レル截面ノ距離ヲ高サトシ, O′A′ ニ平行ナル側稜ヲ有スル三角壔ヲ作ル。然ルトキハ O′−A′B′C′ ニ於ケル最下ニアル三角壔ヲ除ケバ, 兩角錐ニ於テ對應スル截面ヲ底面トスル二ツノ三角壔ハソレゾレ相等シ。故ニ角錐 O−ABC ニ於ケル各三角壔ノ和ヲ P トシ, 角錐 O′−A′B′C′ ニ於ケル各三角壔ノ和ヲ P′ トスレバ, P′ ト P トノ差ハ O′−A′B′C′ ノ最下ニアル三角壔ニ等シ。而シテコノ最下ニアル三角壔ハ各三角錐ノ高サヲ等分スル數ヲ増ストキハ如何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得。卽チ P′−P ハ如何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得。

黒田稔　『幾何学教科書(立体)』　大正 6 年 11 月 2 日発行

然ルニ　$P' > V'$,　$P < V$.

故ニ　モシ V ト V' トガ相等シカラズシテ $V' > V$ トスレバ $V'-V$ ハ一定ノ正量ニシテ

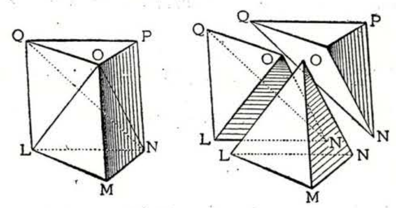
$$P'-P > V'-V$$

ナラザルベカラズ。然レドモコレ不合理ナリ。何トナレバ如何程ニテモ小ナラシメ得ル量 $P'-P$ ガ常ニ一定ノ正量 $V'-V$ ヨリ大ナルコトハ不可能ノコトナレバナリ。

故ニ $V' > V$ ナル能ハズ。同様ニ $V > V'$ ナル能ハズ。

因ツテ $V' = V$.

306 定理140　三角錐ノ體積ハ,ソノ底面ト高サトノ積ノ三分一ノニ等シ。



三角錐 O−LMN ノ體積ヲ V, ソノ高サヲ h, ソノ底面 LMN ヲ B トス。

然ルトキハ　$V = \frac{1}{3}B \times h$　ナルベシ。

(證明)　LMN ヲ底面トシ, OM ニ等シク且コレニ平行ナル側稜ヲ有スル三角壔 OPQ−MNL ヲ作ル。

然ルトキハ　コノ三角壔ハ 三角錐 O−LMN 及ビ 四角錐 O−LNPQ ヨリ成ル。

今 OQ, ON ヲ含ム平面ニテ 四角錐 O−LNPQ ヲ截ルトキハ, 二ツノ三角錐 O−LNQ 及ビ O−NQP ヲ得。

然ルニ　角錐 O−LNQ = 角錐 O−NQP　(定理 139)

角錐 O−NQP ハ角錐 N−QOP ト考フルヿヲ得。

角錐 N−QOP = 角錐 O−LMN.　(定理 139)

故ニ　三ツノ三角錐ハ相等シ。

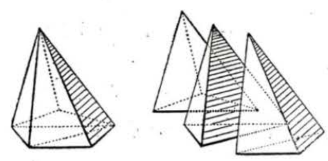
従ツテ 三角錐 O−LMN ハ 三角壔 OPQ−MNL ノ三分ノ一ナリ。

然ルニ三角壔 OPQ−MNL ノ體積ハ $B \times h$ ニ等シ。(定理 138)

故ニ　三角錐ノ體積ハ　$\frac{1}{3}B \times h$　ニ等シ。

即チ　$V = \frac{1}{3}B \times h$.

【系1】 任意ノ角錐ノ體積ハ, ソノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



〔三角錐ニ分チテ證明スルコトヲ得。〕

【系2】 底面及ビ高サガ相等シキ二ツノ角錐ハ相等シ。

【系3】 底面相等シキ二ツノ角錐ノ比ハ, ソノ高サノ比ニ等シク, 高サ相等シキ二ツノ角錐ノ比ハソノ底面ノ比ニ等シ。

練　習　問　題

(1)　一邊6分ナル正三角形ヲ底面トスル角錐アリ, ソノ一ツノ側稜ハ15分ニシテ, コノ側稜ト底面トナス角ハ30°ナリ。角錐ノ體積ヲ求ム。

(2)　正六角錐ノ底面ノ一邊ハ6寸, 高サハ8寸ナルトキ, ソノ體積ヲ求ム。

(3)　えじぷとノ大ぴらみつど(Pyramid of Ghizeh)ハ正四角錐ニシテ, ソノ底面ノ一邊ハ233米突, 高サハ146.5米突ナリ。ソノ體積ヲ求ム。又ソノ一立方米突ノ平均ノ重サヲ3噸ト假定スルトキハ, ソノ重量幾何ナルカ。

黒田稔　『幾何学教科書(立体)』　大正6年11月2日発行

３．改造精神検討実施時代（大正 7 年から昭和 14 年まで）の様相

「中學校令」改正（大正 8 年 2 月 6 日勅令第 11 號）

第 1 条

中學校ハ男子ニ須要ナル高等普通教育ヲ爲スヲ以テ目的トシ特ニ國民道徳ノ養成ニ力メヘキモノトス

第 9 条

中學校ノ修業年限ハ五年トス

　中學校ニハ補習科ヲ置クコトヲ得

　中學校ニハ特別ノ必要アル場合ニ於テ予科ヲ置クコトヲ得

補習科及予科ニ關スル規則ハ文部大臣之ヲ定ム

「中學校令施行規則中改正」（大正 8 年 3 月 29 日文部省令第 7 號）

数学には特に影響しない

［大正 13 年の中學校數學教授要目改正ノ趣旨］(34)

本省ハ現時ノ社會ノ要求ト教育ノ實際トニ鑑ミ中學校教育ニ於ケル數學科ノ陶冶的價値ト實用的價値ヲ一層増進向上セシメ本科教授ノ効果ヲ完ウセシメンガタメ別項ノ如ク其ノ要目ヲ改正セリ。改正ノ要點次ノ如シ

一．中學校ニ於テ授クル算術・代數・幾何及三角法ハソレゾレ獨立ノ一科ヲ成スモノナリトスル見地ヲ採ラズ此等ハ中學校ノ數學ノ部面ヲ成スモノ從テ彼此自由ニ相融通スベキモノナリトノ見地ヨリ教材ヲ配當シ、之ニ依テ一面ニハ生徒ヲシテ分科ノ區分ニ拘泥スルコトナク自由ニ其ノ數學的思考ヲ働カシメ、他面ニハ教授ノ能率ヲ一層高メンコトヲ期セリ。唯ダ要目ヲ揚グル便宜上數ヲ對象トスル意味ニテ算術ト代數トヲ合セテ算術及代數トシ、圖形ヲ對象トスル意味ニテ幾何ト三角法トヲ合セテ幾何及三角法トセリ。

二．新ニ若干ノ數學的觀念方法及原理ヲ加ヘ以テ數學ト人生トノ交渉ヲ一層深ク理解セシメ、生徒ノ數學的洞察ヲ更ニ高メンコトヲ期セリ。

三．中學校ニ於ケル數學教授ノ目的ト第ニ項ニ掲グル目的ヲ達スルタメノ必要トニ照ラシテ教材ノ或ルモノハ從來ヨリモ輕減シ或ハ分合シ、比較的價値乏シキ教材ハコレヲ全然削除セリ。

四．第一學年ヨリ第四學年マデノ舊要目ニ揚ゲタル教材ノ大要ヲ教授シ、第五學年ニ於テハ特ニ數學ノ實際的應用ヲ顧慮シツツ既習事項ノ總括及補充ヲ行ヒ以テ生徒ノ數學的知識ニ統一ヲ與ヘ且コレヲ確實ニシ、應用ノ力ヲ養ハンコトヲ期セリ。

五．舊要目ヨリモ稍詳シタ項目ヲ掲ゲ以テ内容ヲ窺知スルニ容易ナラシメタリ。

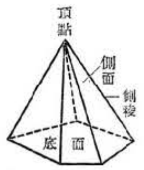
六．教授上ノ諸注意ヲ詳述シク實際ニ中學校ノ數學教授ニ關與スルモノノ参考ニ供セリ

7. 圓壔形枡ハ徑及ビ深サヲ同一ニスベキ定メナリ。之ニヨレバ一升桝ノ徑幾許ナルカ。

8. 底面ノ一邊ガ2尺ナル正六角壔ノ高サ5尺ナルトキ,其ノ體積ヲ計算セヨ。

69. 角錐。

一ツノ多角形ト,其ノ各邊ヲ底邊トシ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トニテ圍マレタル多面體ヲ角錐トイフ。

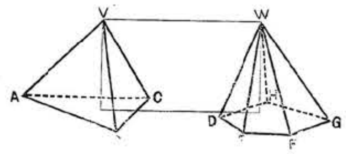


此ノ多角形ヲ角錐ノ**底面**,三角形ヲ**側面**,側面ト側面トノ交リヲ**側稜**,側面ノ共有スル一點ヲ**頂點**,頂點ト底面トノ距離ヲ**高サ**トイフ。

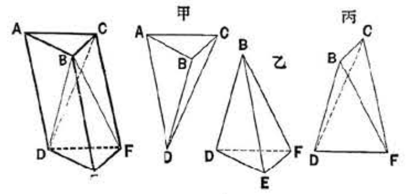
定理 40. 底面ガ相等シク高サモ相等シキ二ツノ角錐ノ體積ハ相等シ。

例ヘバV-ABCトW-DEFGHトノ二ツノ角錐ノ高サ相等シク且底面ABCトDEFGHト相等

シキトキハ體積相等シ。(此ノ證明ハ複雜ナレバ略ス)。



今任意ノ三角壔ABC-DEFハ常ニ圖ノ如キ三ツノ三角錐ニ分チ得ベク,此ノ中甲ト乙トハ底



面ABC≡DEFニシテ,高サハ共ニ兩端面間ノ距離ナレバ亦相等シク,隨テ體積ハ相等シ。又甲ト丙トモ底面ADC≡FCDニシテ,高サハ共ニBヨリ平面ACD, CFDマデノ距離ナレバ亦相等シク,隨テ體積相等シ。

故ニ三ツノ角錐ハ其ノ體積相等シ。卽チ三角錐D-ABCハ三角壔ABC-DEFノ三分ノ一ナリ。

サレバ三角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シキヲ知ル。故ニ定理40ヨリ,

定理 41. 任意ノ角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ナリ。

70. 圓錐。

直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ之ヲ回轉スルトキ生ズル立體ヲ**直圓錐**トイフ。

回轉軸ヲ直圓錐ノ**軸**トイフ。斜邊ノ回轉ニヨリテ生ジタル面ハ**側面**ニシテ,他ノ邊ノ回轉ニヨリテ生ジタル面ハ**底面**ナリ。軸ノ長サヲ**高サ**トイフ。

圓錐ノ底面ハ圓ナルガ故ニ,邊ノ數ノ無限ニ多キ正多角形ト見做スコトヲ得ベク,隨テ底面ノ半徑ヲr,圓錐ノ高サヲhトスルトキハ,定理41ニヨリテ

$$圓錐ノ體積=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

圓錐ノ側面ヲ展開スルトキハ,一ツノ扇形ヲ

得ベク,扇形ノ弧ノ長サハ底面ノ周ニ等シキガ故ニ,

圓錐ノ側面積ハ斜邊ト底面ノ周トノ積ノ半ニ等シ。

71. 圓臺。

直圓錐ノ底面ニ平行ナル平面ニテ其ノ直圓錐ノ頂點ノ方ヲ截リ去リタル立體ヲ**截頭圓錐**又ハ**圓臺**トイフ。

今圓臺ノ上半徑ヲr,下半徑ヲR,其ノ高サヲh,斜高ヲgトスルトキハ

$$圓臺ノ體積=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$$

$$圓臺ノ側面積=\pi g(R+r)$$

ニヨリテ計算スベシ。

問題

9. 埃及ノ最大ナルぴらみっどハ正四角錐ニシテ,高サ481呎强,底面ノ一邊ノ長サ755呎强アリトイフ。其ノ體積ヲ計算セヨ。

林鶴一 『女子幾何教科書』 大正10年2月15日発行

體ノ相對スル二ッノ稜ヲ含ム平面ニヨリテノ切口ニ相異ナルモノ幾種アルカ,且其ノ各ノ面積ヲ求メヨ。

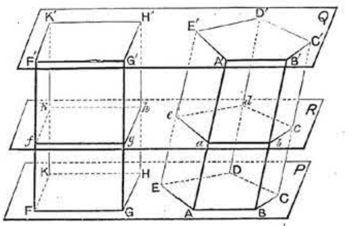
次ニ掲グルハ體積ニ關スル基本ノ定理ニシテ證明ヲ要セズシテ眞ナリト假定ス。

定理 5. 二ッノ平行ナル平面間ニアル二ッノ立體ガ,其ノ平面ニ平行ナル平面ニテ切ラルヽトキ,常ニ相等シキ切口ヲ生ズルトキハ,其ノ二ッノ立體ノ體積ハ相等シ。

定理 6. 角壔ノ體積ハ其ノ底面積及高サヲ表ス數ノ積ニ等シ。

ABCDE-A′B′C′D′E′ ヲ角壔トセヨ,然ルトキハ其ノ體積ハ底面積ト高サトノ相乘積ニ等シカルベシ。

【證明】此ノ角壔ト相等シキ底面及相等シキ高サヲ有スル直六面體 FGHK-F′G′H′K′ ヲ作リ,同ジ平面P上ニ置ケバ,二ッノ立體ハ高サ相等シキヲ以テ,他ノ端面ハPニ平行ナル一ッノ平面Q上ニアリ。



Pニ平行ナル任意ノ平面Rニテ二ッノ立體ヲ切リ,其ノ切口ヲ abcde, fghk トスレバ

$abcde=ABCDE,\quad fghk=FGHK$　(定理 2.)

然ルニ　$ABCDE=FGHK$　$\therefore\ abcde=fghk$

卽チPニ平行ナル平面ニヨリテノ切口常ニ相等シ,故ニ此ノ二ッノ立體ノ體積相等シ。(定理 5.)

而シテ直六面體ノ體積ハ底面積及高サヲ表ス數ノ積ニ等シ,故ニ角壔ノ體積モ亦其ノ底面積及高サヲ表ス數ノ積ニ等シ。

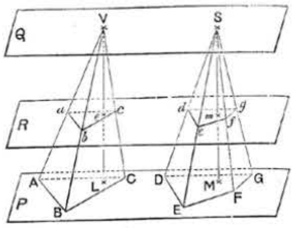
問題 6. 底面ハ各邊4寸ノ正三角形ニシテ,高サ12寸ノ直角壔アリ,其ノ體積及側面積各幾何ナルカ。

定理 7. 底面相等シク高サ相等シキ二ッノ角錐ノ體積ハ相等シ。

V-ABC, S-DEFG ヲ底面相等シク高サ相等シキ

二ッノ角錐トセヨ。然ルトキハ其ノ體積相等シカルベシ。

【證明】二ッノ角錐ヲ同ジ平面P上ニ置ケバ,其ノ高サ相等シキヲ以テ,頂點ハPニ平行ナル平面Q上ニアリ。今Pニ平行ナル任意ノ平面Rニヨリテノ切口ヲ夫々 abc, defg トシ,高サ VL, SM トノ交點ヲ l, m トセヨ,然ルトキハ



$abc : ABC = Vl^2 : VL^2$　(定理 3.)

同様ニ　$defg : DEFG=Sm^2 : SM^2$

然ルニ　$VL \parallel SM$　$\therefore\ Vl : VL = Sm : SM$

故ニ又　$Vl^2 : VL^2=Sm^2 : SM^2$

$\therefore\ abc : ABC=defg : DEFG$

然ルニ　$ABC=DEFG$　$\therefore\ abc=defg$

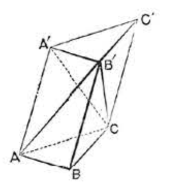
卽チPニ平行ナル平面ニヨリテノ切口ハ常ニ相等シ,故ニ此ノ二ッノ角錐ノ體積ハ相等シ。(定理 5.)

定理 8. 三角壔ハ相等シキ三ッノ角

錐ニ分ツコトヲ得。

ABC-A′B′C′ ヲ三角壔トセヨ,然ルトキハ,三ッノ相等シキ三角錐ニ分ツコトヲ得ベシ。

【證明】CトA′B′トヲ含ム平面及B′トACトヲ含ム平面ニテ切レバ,三ッノ三角錐 C-A′B′C′, B′-ABC, B′-A′AC ヲ得其ノ中初メノ二ッハ底面 A′B′C′, ABC 相等シク,高サハ元ノ兩端面間ノ距離ニシテ相等シ,ユヱニ其ノ體積ハ相等シ。次ニ第一ノ C-A′B′C′ ヲ B′-A′CC′ トシ,之ヲ第三ト比ブレバ,其ノ底面 A′CC′, A′AC ハ平行四邊形ノ對角線ニテ分タレタル部分ニシテ相等シク,高サハ共通ノ頂點B′ヨリ平面 A′ACC′ ニ至ル距離ニシテ相等シ,故ニ其ノ體積相等シ,卽チ此ノ三ッノ角錐ハ相等シ。



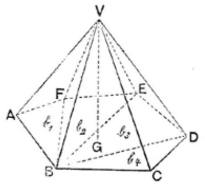
系 1. 三角錐ノ體積ハ其ノ底面積及高サヲ表ス數ノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

系 2. 任意ノ角錐ノ體積ハ其ノ底

190　第六章　立體

面積及高サヲ表ス數ノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

V-ABCDEF ヲ任意ノ角錐トシ,底面ノ一ツノ頂點 B ヨリ對角線ヲ引キ,其ノ各對角線ト頂點トヲ含ム平面ヲ作レバ,元ノ角錐ハ幾ツカノ三角錐ニ分タル。今元ノ角錐ノ底面積ヲ b, 高サヲ h トシ,三角錐ノ底面積ヲ夫々 b_1, b_2, b_3……トスレバ,コレ等ノ三角錐ノ高サハ何レモ h ナルヲ以テ,元ノ角錐ノ體積ハ



$$\frac{1}{3}b_1h+\frac{1}{3}b_2h+\frac{1}{3}b_3h+\cdots\cdots=\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots)h=\frac{1}{3}bh$$

問題7. 高サ相等シキ二ツノ角壔又ハ角錐ノ比ハ,其ノ底面ノ比ニ等シク,底面相等シキ二ツノ角壔又ハ角錐ノ比ハ,其ノ高サノ比ニ等シ。

問題8. 稜ノ長サ12寸ノ立方體ノ一ツノ頂點ニ出會フ三ツノ稜ノ他ノ端ヲ過ル平面ニテ之ヲ二ツノ部分ニ分ツトキ,其ノ各部ノ體積ヲ求ム。

問題9. 稜ノ長サ 6cm. ナル正四面體ノ高サ及

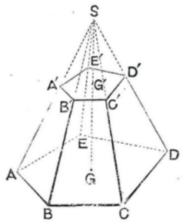
多面體　191

體積ヲ求メヨ。

定理9. 截頭角錐ノ體積ハ兩端面ノ面積ト其ノ比例中項トノ和ニ,高サヲ乘ジタル積ノ三分ノ一ニ等シ。

ABCDE-A'B'C'D'E' ヲ截頭角錐トシ,其ノ下端面ノ面積ヲ b, 上端面ノ面積ヲ b', 高サヲ h, 體積ヲ V トセヨ,然ルトキハ $V=\frac{1}{3}(b+\sqrt{bb'}+b')h$ ナルベシ。

【證明】切リ取ラレタル上部ノ角錐ノ高サヲ x トセヨ。然ルトキハ



$$V=\frac{1}{3}b(h+x)-\frac{1}{3}b'x$$
$$=\frac{1}{3}\{bh+(b-b')x\}$$

又　$b:b'=(h+x)^2:x^2$　(定理3.)

$$\therefore\quad \frac{h+x}{x}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b'}}$$

$$\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}{\sqrt{b'}}=\frac{b-b'}{\sqrt{b'}(\sqrt{b}+\sqrt{b'})}$$

$$\therefore\quad (b-b')x=\sqrt{b'}(\sqrt{b}+\sqrt{b'})h=\sqrt{bb'}h+b'h$$

之ヲ上式 V ノ値ニ代入シテ

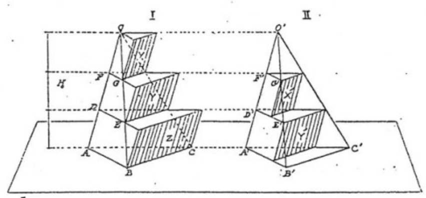
$$V=\frac{1}{3}(bh+\sqrt{bb'}h+b'h)=\frac{1}{3}(b+\sqrt{bb'}+b')h$$

森岩太郎　『女子幾何学教科書』　大正12年1月15日発行

58　角錐ノ體積

14 角錐ノ體積

定理 底面ト高サトガ相等シキ二ツノ三角錐ハ相等シ。



二ツノ三角錐 O-ABC ト O'-A'B'C' トニ於テ底面 ABC ハ A'B'C' ニ等シク高サガ共ニ H ナリトス。

證明 O-ABC ト O'-A'B'C' トガ等シカラズトセバソノ何レカ一方ガ大ナラザルベカラズ。

O-ABC > O'-A'B'C' ト假定セヨ。

H ヲ n 等分シ各分點ヲ通リ底面ニ平行ナル平面ヲ引クトキハ相對應スル截面ハ相等シ。

故ニ圖ノ如ク各截面ヲ底面トスル三角壔ヲ作ルトキハソノ相對應スル截面ヲ底面トセル三角壔ハ相等シ。即チ　X=X',　Y=Y'

然ルニ　O-ABC<X+Y+Z,　O'-A'B'C'>X'+Y'.

故ニ　(O-ABC)−(O'-A'B'C')<X+Y+Z−(X'+Y')=Z

第二章　多面體ノ體積　59

サテ此三角壔 Z ハ n ヲ限リナク大ナラシムルトキハ其高サハ限リナク小トナリソノ極限ニ於テハ0トナル。

然ルニ假定ノ如ク二ツノ三角錐ニ大サノ差アリトセバ此差ハZヨリ小ナラザルベカラズ。

是不合理ナリ。

故ニ O-ABC ト O'-A'B'C' トハ等シカラザルベカラズ。

即チ　O-ABC=O'-A'B'C'

問　題

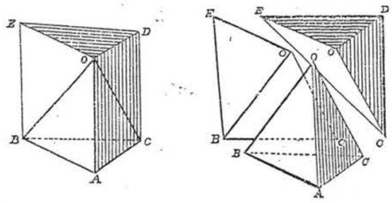
53 同一平面上ニ在ラザル三平行線ノ一ツノ上ニ一定ノ長サABヲトリ他ノ二ツノ上ニ夫々點C,Dヲ任意ニトルトキハ四面體 ABCD ノ體積ハ一定ナリ。

(53' 一平面上ニ在ラザル二直線上ニ夫々一定ノ長サノ線分 AB, CD ヲ任意ノ位置ニトルトキハ四面體 ABCD ノ體積ハ一定ナリ。

広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『中等教育立体幾何学教科書』　大正12年3月30日発行

60　角錐ノ體積

定理 三角錐ノ體積ハ其底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



三角錐 O–ABC ニ於テ其底面ヲ a トシ高サヲ h トセバ其體積ハ $\frac{1}{3}ah$ ナリ。

證明 AB, CD, AO ヲ三稜トスル三角壔 ABC–OED ヲ作ルトキハ此角壔ハ三角錐 O–ABC ト四角錐 O–BCDE トノ和ニ等シ。

四角錐 O–BCDE ヲ二ツノ三角錐 O–BCE ト O–CDE トニ分ツトキハソレ等ノ底面 BCE ハ CDE ニ等シク,且高サガ共通ナルヲ以テ

O–BCE＝O–CDE

又三角錐 O–BCE, O–ABC ノ頂點ヲ共ニ C トセバ底面 BEO ハ底面 ABO ニ等シク,且高サガ共通ナルヲ以テ O–BCE＝O–ABC

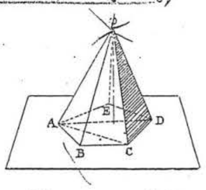
故ニ　O–ABC＝$\frac{1}{3}$ABC–ODE

第二章　多面體ノ體積　61

然ルニ　ABC–ODE＝ah

故ニ　O–ABC＝$\frac{1}{3}ah$

系 多角錐ノ體積ハ其底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



問　題

54 一邊ノ長サガ 6 糎ナル正三角形ヲ底トスル正角錐アリ。

其側稜ガ底面トナス角ハ 45°ナリ。其體積ヲ求メヨ。

55 底面ガ正方形ニシテ高サガ h 糎,全表面積ガ t 平方糎ナル正角錐ノ體積ヲ求メヨ。

(54) 四邊形 ABCD ヲ底トシ高サ 20 糎ナル角錐アリ。　AB＝9 糎,

BC＝12 糎,　CD＝14 糎,

AD＝14 糎,　AC＝15 糎,

ナリ。其體積ヲ求メヨ。

(55) 一邊ノ長サ a 糎ナル正方形ヲ底面トシ全表面積ガ t 平方糎ナル正角錐ノ體積ヲ求メヨ。

62　角錐ノ體積

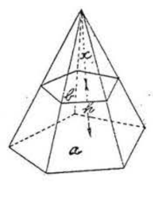
56 兩底ノ面積ガ夫々 a, b ニシテ高サ h ナル角錐臺ノ體積ヲ v トセバ

$$v=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b)$$

(56) 上底,下底ガ夫々 4 平方糎, 9 平方糎ニシテ高サ 5 糎ナル三角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

注意 各側稜ヲ延長シテ角錐ヲ作リソノ角錐ノ頂點ト上底トノ距離ヲ x トセバ

$$a:b=(x+h)^2:x^2$$



57 兩底ノ一邊ノ長サハ夫々 6 糎, 8 糎ニシテ側稜ガ 9 糎ナル正三角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

58 一ツノ角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其截リトリタル角錐トモトノ角錐トノ比ハソレ等ノ高サノ三乘比ニ等シ。

(57) 正六角錐臺ノ上底下底ノ一邊ハ夫々 6 糎, 10 糎ニシテ側稜ハ 5 糎ナリ。其體積ヲ求メヨ。

(58) 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ之ヲ二等分セヨ。

広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『中等教育立体幾何学教科書』　大正 12 年 3 月 30 日発行

大正 13 年の中學校數學教授要目（草案）

第一學年	毎週四時
算術及代數	備　　考
整數小數分數	諸等數ノ計算ヲ附隨セシム
比　　比例 　歩合算　利息算	各學年ヲ通ジ機會アル毎ニ應用問題中ニ加ヘテ授ク
代數的表示　公式	
ぐらふ	
負數	
整式ノ四則	
一元一次方程式	
聯立一次方程式	三元以上ノ場合ハ簡單ニ取扱フカ又ハ後學年ニ於テ補フ
幾何	
簡易ナル平面圖形ノ作圖 　簡易ナル立體模型ノ作製	定規兩脚器物差分度器等ヲ使用セシム
長サ、角、面積及體積ノ測定	
角　垂線　平行線	直觀的ニ取扱フ

第二學年	毎週四時
算術及代數	
一元一次式ノ變化及其ノぐらふ	是ニ關聯シテ一元一次不等式ヲ取扱フ　函數ナル語ヲ授クルモ可ナリ
因數	
一元二次方程式	
分數式	最大公約數、最小公倍數ヲ求メルコトハ是ニ附隨シテ授ケ連續除法ニ依ル方法ハ第五學年ニ讓ル
分數方程式	
比　比例	形式的ナル比例式ノ證明問題ハ簡單ニ取扱フ
幾何	
三角形　平行四辺形	
圓　弓形	
切線　割線	
内接形　外接形	

第三學年	毎週五時
算術及代數	

無理数　開平	平方根表・立方根表等ノ使用法ヲ授ク
一元二次方程式	根ト係數ノ關係ヲ用ユル問題及虚數ニ關スル計算ハ第五學年ニ讓ル
分數方程式	
無理方程式	
一元二次式ノ變化及其ノぐらふ	是ニ關聯シテ一元二次不等式及ぐらふニ依ル方程式ノ解法ヲ簡單ニ取扱フ
互ニ比例スル量及反比例スル量	函數關係ニ注意シテ授ク

幾何

二ツノ圓

軌跡　作圖題

面積

比例線　相似形

第四學年　　　毎週四時

算術及代數

聯立方程式

等差級数　等比級数

對數

歩合算　利息算

幾何

鋭角ノ正弦餘弦及正切 直角三角形ノ解法	幾何學的關係ノ考究ニ便ナル場合ニハ之ヲ應用セシム

圓周率

直線　平面

三面角　立體角

角壔　角錐

圓壔　圓錐

球

第五學年　　　毎週四時

算術及代數

順列　組合	指數ガ正數ナル場合ノ二項定理ヲモ授ク
確率	初歩觀念ヲ與フ

幾何及三角法

一般角ノ三角函數

二角ノ和及差ノ三角函數

三角形ノ邊ト角トノ關係

三角形ノ解法

測量大意　　　　　　　　　　　　　簡易ナル測量ノ實習ヲ課ス

既習事項ノ總括及補充

注意

一．數學教授ニ於テハ形式的技巧的教材ヲ輕減シテ實際ニ適切ナル教材ヲ加ヘ且常ニ獨創力ノ養成ニ留意スベシ。

二．教授事項ハ算術及代數、幾何、三角法ニ分チテ配當スト雖常ニ相互ノ連絡ヲ圖リ彼此相融通シテ教授スベク又教授事項ノ排列ハ必ズシモ教授ノ順序ヲ示セルモノニ非ザルガ故ニ第五學年ノ外ハ各學年ニ配當シタル教授事項ヲ適宜按排シテ授クルモ可ナリ。

三．函數觀念ノ涵養ハ數學教授全體ニ亙リ初學年ヨリ之ヲ努ムベク、ぐらふハ函數觀念ヲ直觀的ナラシムル補助トシテ取扱ハルベキモノナルコトニ注意スベシ。

四．數ノ計算ハ各學年ヲ通ジ特ニ意ヲ用ヒテ練習スベク殊ニ概算近似値ノ計算及ビ暗算ノ練習ニハ力ヲ注グベシ。又算盤、計算尺等ノ使用ニモ慣レシムベシ。

五．代數式ノ計算ハ簡易ナル代數式ニツイテ確實且迅速ニ行フコトヲ努メ形式的ニ複雜ニシタル代數式ノ計算ハ之ヲ避クベシ。分數方程式・無理方程式・聯立方程式ハ簡易ナルモノニ止メ、根ガ不盡根數ニテ現ハレタル場合之ヲ其ノ近似値ニテ表ハスコトモ意ヲ用ヒテ練習スベシ。文字方程式ニ關スル事項ハ項目トシテ特ニ掲グルコトハセザレドモ公式ノ主格ヲ變換スルコト及具體的ノ問題ニ關シテ諸變量間ノ關係ヲ方程式ニ表ハシ之ヲ其ノ中ノ一ツノ變量ニ關シテ解クコトノ練習ハ適當ノ機會ニ於テ課スベシ。

六．一般ニ幾何ノ定理ハ重要ナルモノヲ選ビ軌跡及作圖題ハ成ルベク簡易ナルモノニ止メ適當ノ時期ニ之ヲ課スベク、基本定理ノ若干ハ公理的ニ取扱ヒテ可ナリ。面積體積等ニ關スル事項ハ實測ト連關セシムベク又求積ノ近似的方法ヲモ授クルヲ可トス。

七．三角法ニ於テハ生徒ヲシテ記憶セシムベキ公式ハ成ルベク少クスベク、或定理ハ圖形ニ依リ直觀的ニ認メシメテ可ナリ。三角恒等式並ニ方程式ハ三角形ノ解法ヲ考究スルニ必要ナル程度ニ於テ之ヲ取扱ヒ幾何學的關係ヲ考究スルニ三角函數ヲ用フルコトハ努メテ練習スベシ。

八．既習事項ノ總括補充ニ際シテハ常ニ實際的應用ヲ顧慮シテ主要ノ點ヲ綜括補充シ生徒ノ數學的知識ニ系統脈絡アラシムベシ。函數ノ變化及ぐらふニ關シテ總括及補充スルニ際シ微分積分ノ觀念ヲ與ヘ、方程式ヲ用ヒテ幾何學的圖形ヲ考究スル方法ノ一斑ヲ授クルモ可ナリ。

トキト然ラザルトキトアリ．相交ハルトキハ兩線ハ同一ノ平面上ニアリ．之ニ反シテ相交ハラザルトキハ更ニ二ツノ場合ヲ生ズ．

(i) 同一平面上ニアルトキ．兩線ハ互ニ平行ナリ．

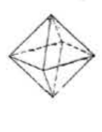
(ii) 同一平面上ニナキトキ．兩線ハ交ハラザレドモ平行ナラズ．

例ヘバ教室ニ於テ,天井ト床トヲ平行ナル平面ト考ヘ,天井ニハ南北ニ,床ニハ東西ニ直線ヲ引ケバ,兩線ハ交ハラザレドモ平行ナラズ．

角壔, 角錐

5. 角壔

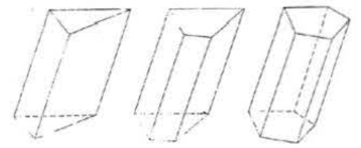
若干ノ多角形ニヨリテ圍マレタル空間ノ一部分ヲ**多面體**トイフ．而シテ其多角形ヲ多面體ノ**面**トイヒ,多角形ノ邊ヲ**稜**トイフ．



多面體ノ中ニテ下圖ニ示スガ如ク,二面ガ互ニ平行ニシテ他ノ面ガ皆平行四邊形ナルトキ

之ヲ**角壔**トイフ．而シテ此平行ナル二面ヲ**底面**,他ノ平行四邊形ヨリナル面ヲ**側面**トイヒ,側面ト側面トヲ界セル稜ヲ**側稜**トイフ．

角壔ハ底面ガ三角形,四角形,五角形等ナルニ從ヒ之ヲ三角壔,四角壔,五角壔等ニ區別ス．



注意 1. 角壔ノ兩底面ハ合同ナル多角形ナリ．

注意 2. 三,四,五角壔ハ夫々 5, 6, 7 個ノ面ヨリナル．一般ニ n 角壔ノ面ノ數ハ $n+2$ ナリ．

6. 角壔ノ體積

角壔ニ於テ一ツノ底面上ノ點ヨリ他ノ底面ニ下セル垂線ノ長サヲ角壔ノ**高サ**トイフ．

角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シ．

即チ

角壔ノ體積＝底面×高

7. 直角壔

角壔ノ中ニテ側稜ガ底面ニ垂直從テスベテノ側面ガ矩形ナルモノヲ特ニ**直角壔**トイフ．

直角壔ニ於テハ側稜ガ高サニ等シキヲ以テ其體積ハ次ノ如シ．

直角壔ノ體積＝底面×側稜

問　　題

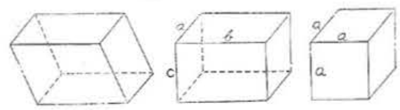
1. 正三角壔(底面ガ正多角形ナル直角壔ヲ正角壔トイフ)アリ．底面ハ一邊 2 糎ナル正三角形ニシテ,側稜ノ長サハ 8 糎ナリトイフ．其體積如何．
2. 前題ニ於テ其表面積如何．

8. 平行六面體

四角壔ニ於テ底面ガ平行四邊形ナルトキ,其六ツノ面ハ總テ平行四邊形トナル．此ヲ**平行**

六面體トイフ．

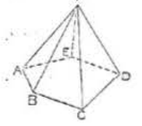
平行六面體ノ中ニテ總テノ面ガ矩形トナレルモノ,即チ底面ガ矩形ナル直四角壔ヲ**直六面體**トイヒ,其特別ノ場合トシテ總テノ面ガ正方形ナルモノヲ**立方體**トイフ．



直六面體ハ底ガ矩形ナル直四角壔ナルヲ以テ一點ニ會セル三稜ノ長サヲ a, b, c トスレバ其體積ハ abc ナリ．從テ一稜ガ a ナル立方體ノ體積ハ a^3 ナリ．

9. 角錐

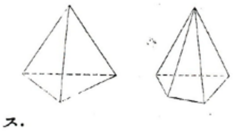
ABCDE ヲ多角形トシ,V ヲ其平面外ノ一點トス．V ト多角形ノ各頂點トヲ結ビテ生ズル三角形 VAB, VBC,……VEA ト多角形 ABCDE トニヨリテ圍マレタル多面體ヲ**角錐**トイフ．而シテ V ヲ**頂點**,ABCDE ヲ**底面**トイヒ,頂點ヨリ底面ヘ下セル垂線ヲ**高サ**トイフ．



園正造　『女子新幾何』　大正 13 年 10 月 9 日発行

110　女子新幾何

角錐ハ底面ガ三角形,四角形,五角形等ナルニ從テ之ヲ三角錐,四角錐,五角錐等ニ區別ス.



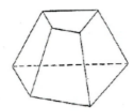
角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。即チ

$$角錐ノ體積=\frac{1}{3}(底面\times高)$$

注意 三,四,五角錐ハ夫々4,5,6個ノ面ヨリナル. 一般ニn角錐ノ面ノ數ハ$n+1$ナリ. 而シテ四ツノ面ヨリナル多面體ハ三角錐ノ外ニ存在セズ. 從テ四面體トイヘバ三角錐ニ外ナラズ.

10. 截頭角錐

角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ,其截リ口ハ底面ニ相似ナル多角形トナル. 此截リ口ト底面トノ間ニアル角錐ノ部分ヲ**截頭角錐**又ハ**角錐臺**トイフ. 而シテ截リ口ノ一點ヨリ底面ヘ下セル垂線ヲ其**高サ**トイフ.



附　録　111

底面積ヲB,截リ口ノ面積ヲB′,高サヲhトスレバ其體積ハ次ノ如シ.

$$截頭角錐ノ體積=\frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{B.B'})$$

問　題

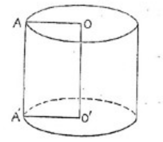
3. 截頭角錐アリ. 底面及截リ口ノ面積ガ夫々12平方糎,3平方糎ニシテ高サ10糎ナリトイフ. 其體積如何.

4. 高サhナル截頭角錐ニ於テ底面及截リ口ガ正方形ニシテ其邊ガ夫々a,bナルトキ,其體積如何.

直圓壔,直圓錐

11. 直圓壔

矩形OO′A′Aノ一邊OO′ヲ軸トシ,之ヲ廻轉スルトキ,OA, O′A′ノ畫ク二ツノ圓トAA′ノ畫ク面トニヨリテ圍マレタル空間ノ一部分ヲ**直圓壔**トイフ. 而シテAA′ノ畫ク面ヲ**側面**トイヒ,OA,O′A′ノ畫ク二



園正造　『女子新幾何』　大正13年10月9日発行

340　直觀幾何教授ノ理論ト實際

ヒマス。上ノ圖ハ五角錐デアリマス。

〔豫備問題1〕 ドンナ形ヲ正四角錐トイヒマスカ。

〔豫備問題2〕 正角錐ノ定義ヲ述ベナサイ。

角錐ノ底面ガ正多角形デ,頂點カラ底面ヘ下シタ垂線ノ足ガ底面ノ中心ト一致スルトキ,コレヲ**正角錐**トイヒマス。

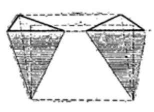
問　角壔ト角錐トノ分類上ノ相異ヲ述ベナサイ。

2. 角壔ノ體積

〔實驗〕 與ヘラレタ二ツノ三角錐形ノ容器ニ就テ底面積ヲ計算シテ比較ナサイ。高サハ如何。(1)

今ソノ一方ニ粟ヲ滿シコレヲ他方ニ移シ換ヘナサイ。

二ツノ容積ニハ如何ナル關係ガアリマスカ。



底面ト高サトガ共ニ相等シイ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

〔實驗〕 上ノ三角錐ノ一ツト等底等高ノ直三角壔形ノ容器ヲトリ,コレニソノ三角錐ニ滿シタ粟ヲ入レナサイ。幾回デ滿チマスカ。

三角錐ノ體積ハコレト等底等高ノ三角壔ノ體積ノ$\frac{1}{3}$デアル。從テ

三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。

第四章　角壔　角錐　341

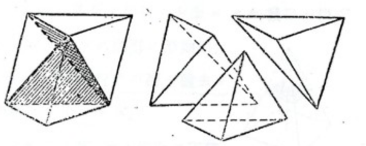
即チ

底面積ヲS高サヲh體積ヲVトスレバ

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

デアリマス。

問　右ノ圖ニ示ス如ク三角壔ハ三ツノ等積ナ三角錐ニ分ケルコトガ出來マス。コレニヨツテ上ノ法則ヲ知ルコトモ出來マス。

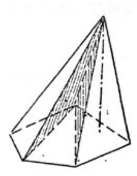


三ツノ三角錐ガ等積ナ理由ヲ考ヘナサイ。

〔豫備問題〕 多角錐ノ體積ハ如何ニシテ求メラレマスカ。

多角錐ハコレヲ等高ナ幾ツカノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。從ツテ

角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。



コノ法則ハ等底等高ノ壔形ト錐形ノ容器ノ容積ヲ驗スルコトニヨリ,又ハ角壔ノ截斷デ直接ニ知ルコトモ出來マス。(2)

問1, 與ヘラレタ模型ニ就テソノ體積ヲ測定ナサイ。

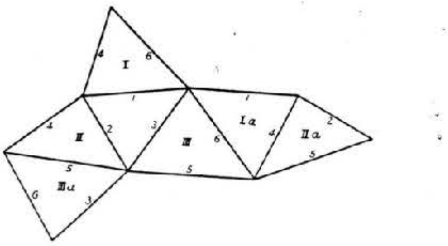
問2, 埃及ノピラミッドノ一ツハ高サ151米デ,底面ハ一邊240米ノ正方形デアリマス。コノ體積幾立方米デスカ。若シ全體

国本東九郎　『直観幾何教授ノ理論ト実際』　大正14年5月15日発行

Vを中心としbを半徑とする圓とAを中心としABを半徑とする圓との交點をBとし三角形VABを定める，同様にして三角形VCBを定める。さうすると之が展開圖である。

糊ではり合はして作るには，上の展開圖に折目を入れはり合せばよい。又糊を用ひずに組み合はして作るには展開圖から第

第百八十五圖



百八十五圖のやうな圖を作ればよい。圖に於て同じ數字を附せる線は同長なることを示す。又之を組む方法につきては§154を參照せよ。

注意。 第百八十五圖に於て各の三角形を正三角形とすると正四面體が得られる。

§ 183. 等底等高の三角錐の體積。

實驗。 前節の方法を應用してブリキを以て底面全等にして高さ等しく，傾きの異なる（即ち第百八十三圖のOの位置の異なる底のない二つの三角錐を作れ。兩方の三角錐の頂點を下に向け一方に粟を一ぱい入れ，他の三角錐にあけてみると矢張り一ぱいになる。之によつて次の事がわかる。

等底等高の三角錐の積體は等しい。

其理由。 三角錐は紙のやうに薄いものを積み重ねて作られて居ると考へることが出來る。之を一方の側から押してずらすと等底等高で形の違ふ三角錐が出來る。其體積はもとの體積に等しい事は明瞭である。

§ 184 等底等高の三角壔と三角錐との體積關係。

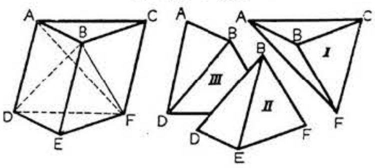
實驗。 前節に用ひた三角錐と等底等高の中空角壔を作れ。但し一方の底面丈けは取つて置く。此二つの容積を比較する爲めに角錐で粟を量り角壔に入れみよ。さすれば三ばいにて角壔は一ぱいになることがわかる。

之によつて次の事が知られる。

三角錐の體積は之と等底等高の三角壔の三分の一である。從て三角錐の體積を求めるには，其底面積に高さを乘じ三分すればよい。

其理由。 三角壔は第百八十六圖に示すやうに三つの三角錐に分つことが出來る。此三つの體積は相等しい。何となればIとIIとは底面等しく（即ABC=DEF）且つ高さも相等しい。又IIとIIIに於てはF

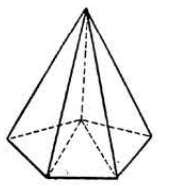
第百八十六圖



を頂點と考へると底面と高さが等しいから體積が等しい。依て三つの三角錐が相等しい。

注意。 §182の方法に從ひ，上の三つの三角錐の模型を別々に作り之を組合して，本節の說明に用ひる模型を作ることが出來る。但し三角壔がABC−DEFが直角壔であるやうにするが簡單である。

第百八十七圖



§ 185. 一般角錐の體積。

如何なる角錐でも，第百八十七圖に示すやうに等高の三角錐に分つことが出來る。故に

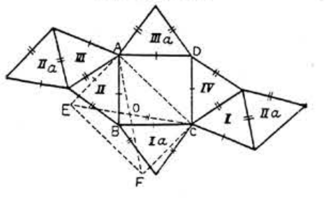
一般に角錐の體積を求むるには底面積に高さを乘じ三分すればよい。

注意。 角錐の模型を用ひて實際に其體積を測る爲めに底面積及び高さを測る方法は，§174に於て斜角壔に就いて述べた方法と同樣である。

§ 186. 立方體を六つの等しき四角錐に分つこと。

實驗。 第百八十八圖に示す如く厚紙の上に正方形ABCDを描き，其對角線ACを引き，ACを一邊とし正方形の一邊を他の邊とするAEFC矩形を描き，其二つの對角線の交點をOとする。正方形の一邊とOCとを以て圖に

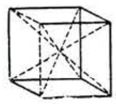
第百八十八圖



示す如く三角形を連接して描き，餘の部分を切り去り，折目を

入れ，番號に從うて組み合すと一つの四角錐が出來る。之と全く等しき四角錐五個を作り，第百八十九圖に示すやうに組み合してみると立方體が出來る之によつて此立方體は此角錐の六倍であることがわかる。故に此角錐と等底等高の直方體の體積は角錐の三倍であることがわかる。從て此特別の場合に於て§184のことが成り立つことがわかる。

第百八十九圖



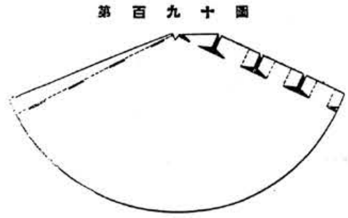
§ 187. 圓錐。

角錐の底面に相當する面が多角形でなく，圓である場合には圓錐と云ふ。さうして其頂點が底面の中心を通り底面に垂直な直線中に在る場合には直圓錐，然らざる場合には斜圓錐と云ふ。

§ 188. 厚紙にて直圓錐の模型を作ること。

直圓錐の模型を作るには，紙を第百九十圖に示すやうに切り，

第百九十圖



圓壔を作りしときと同樣に組み合せばよい。

§ 189. 直圓錐の側面積。

直圓錐の側面を展開してみると扇形となる。さうして其弧は圓錐の底面の周に等しく，其半徑は圓錐の側高と云ふ。故に§139により

シテ多面體ABCDE–FGHKLトA′B′C′D′E′–F′G′H′K′L′トハ相對應スル總テノ部分(面,稜,角等)夫夫明ニ相等シクシテ重ネ合スコトヲ得,卽チ全等ナリ.

此等ノ全等ナル兩多面體ノ各ヲ多面體ABCDE–F′G′H′K′L′ヨリ引キ去リタルモノ卽チ上記ノ直角壔ト斜角壔トハ相等シ.　卽チ定理ハ眞ナリ.

系.　斜角壔ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ直截面ノ面積及側稜ノ長サヲ表ス數ノ積ニ等シ.

例　　題

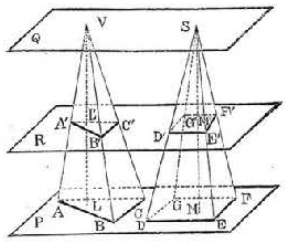
1.* 直截面ノ面積及側稜ノ夫夫相等シキ二ツノ角壔ハ相等シ.

2. 側稜ノ長サ5糎,直截面ハ一邊ノ長サ4糎ナル正六角形ナル角壔ノ體積ヲ求ム.

54. 定理九. 底面及高サガ夫夫相等シキ二ツノ角錐ノ體積ハ相等シ.

假設　角錐V–ABC, S–DEFG ニ於テ底面ABC, DEFGノ面積ハ相等シク,其ノ高サVL, SMハ相等シキモノトセヨ.

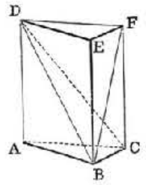
終結　然ルトキハV–ABCトS–DEFGトハ其ノ



體積相等シカルベシ.

證明　(かゔぁりえりノ原則ヲ用フレバ容易ナリ.　詳細ハ學生諸子ニ委ス)

55. 定理十. 三角壔ハ相等シキ三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得.



假設　ABC–DEFヲ三角壔トセヨ.

終結　然ルトキハABC–DEFハ相等シキ三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得ベシ.

證明　頂點B, D, Fノ定ムル平面ト,B, C, Dノ定ムル平面トニヨリテ此ノ三角壔ハ三ツノ三角錐D–ABC, B–DEF, D–BCFニ分タル.

而シテ三角錐D–ABC, B–DEFニ於テ底面ABC, DEFハ相等シク,且其ノ高サモ亦明ニ相等シ.

$$\therefore\ \text{D–ABC}=\text{B–DEF}$$

又B–DEFハD–BEFニ同ジ,故ニ同樣ニシテ

$$\text{B–DEF}=\text{D–BCF}$$

$$\therefore\ \text{D–ABC}=\text{B–DEF}=\text{D–BCF}$$

卽チ定理ハ眞ナリ.

系 I.　三角錐ハ之ト底面及高サノ夫夫相等シキ三角壔ノ三分ノ一ニ等シ.

系 II.　三角錐ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ底面積ト高サトヲ表ス數ノ積ノ三分ノ一ニ等シ.

系 III.　角錐ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ底面積ト高サトヲ表ス數ノ積ノ三分ノ一ニ等シ.

例　　題

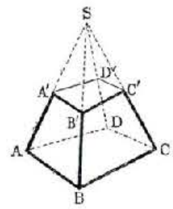
1. 底面ノ一邊ガ6糎ニシテ高サガ10糎ナル正四角錐ノ體積ヲ求ム.

2. 底面積ガ30平方寸ニシテ體積ガ40立方寸ナル角錐ノ高サヲ求ム.

3. 埃及ノ大ぴらみっどノ底面ハ一邊200米ノ正方形ニシテ其ノ側面ハ何レモ正三角形ナリト云フ.　其ノ體積ヲ求ム.

56. 定理十一. 角錐臺ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ兩底面ノ面積ヲ表ス數及其

ノ比例中項ノ和ト高サヲ表ス數トノ積ノ三分ノ一ニ等シ.



假設　角錐臺AC′ノ體積ヲ表ス數ヲV,兩底面ABCD, A′B′C′D′ノ面積ヲ表ス數ヲ夫夫b^2, b'^2トシ,高サヲ表ス數ヲhトセヨ.

終結　然ルトキハ

$$V=\frac{1}{3}h(b^2+bb'+b'^2)$$

ナルベシ.

證明　此ノ角錐臺ノ側面ヲ延長スルコトニヨリテ生ズル角錐ノ頂點ヲSトシ,角錐S–A′B′C′D′ノ高サヲ表ス數ヲxトセヨ.　然ルトキハ角錐S–ABCDノ高サヲ表ス數ハ$h+x$ニ等シ.　而シテ角錐臺ノ體積ハS–ABCD, S–A′B′C′D′ノ差ニ等シ.

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}(h+x)b^2-\frac{1}{3}xb'^2$$

$$=\frac{1}{3}\{(h+x)b^2-xb'^2\}\ \ldots\ldots\ (1)$$

然ルニ　$$\frac{b'^2}{b^2}=\frac{x^2}{(h+x)^2}$$　(定理四,系)

之ヨリ　$$\frac{b'}{x}=\frac{b}{h+x}=\frac{b-b'}{h}$$

国本元治　『新撰中等教育立体幾何学教科書』　大正14年12月25日発行

68　新撰中等教育立體幾何

∴ $h+x=\frac{hb}{b-b'}$, $x=\frac{hb'}{b-b'}$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{hb^3}{b-b'}-\frac{hb'^3}{b-b'}\right)$$
$$=\frac{1}{3}h\frac{b^3-b'^3}{b-b'}$$
$$\therefore\ V=\frac{1}{3}h(b^2+bb'+b'^2)$$

問　題　V

1. 三角壔ヲ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツ仕方ハ幾通アルカ.

2. 二ツノ角錐ノ比ハ底面ノ比ト高サノ比トノ相乘比ニ等シ.

3. 四面體ノ內部ニ一點ヲ求メ此ノ點ト各稜トヲ含ム平面ニヨリ之ヲ四ツノ相等シキ四面體ニ分テ.

4. 正六角錐アリ,高サ 8 米,底面ノ各邊 5 米ナルトキハ,側稜ノ長サ及體積何程ナルカ.

5. 三角臺アリ,其ノ兩底面ノ三邊ヲ表ス數ガ夫夫 $a, b, c; a', b', c'$ ニシテ其ノ高サヲ表ス數ガ h ナルトキ,其ノ體積ヲ表ス數ヲ求ム.

第二編　多面體　69

6. 正六角錐臺アリ,其ノ兩底面ノ一邊ハ夫夫 5.4 糎, 7.2 糎ニシテ高サハ 4.5 糎ナリトス.

(一) 體積ヲ求ム.

(二) 之ト等シキ體積ヲ有シ,底面ノ一邊 12 糎ナル正三角壔ノ高サヲ求ム.

(三) 各側面ヲ延長シテ生ズル角錐ノ高サ及體積ヲ求ム.

第三章　正多面體

57. 定義. 總テノ面ガ全等ナル正多角形ニシテ且總テノ立體角ガ皆相等シキ多面體ヲ**正多面體**ト云フ.

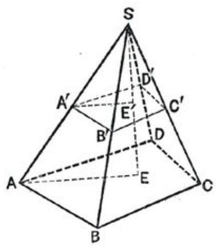
58. 定理十二. 正多面體ハ五種アリ,而シテ唯五種ニ限ル.

證明 先ヅ一ツノ多面角ハ三ツ以上ノ面ヲ有シ,且其ノ面角ノ和ハ四直角ヨリモ小ナリ. 故ニ正多面體ノ面ハ $\frac{4}{3}$ 直角ヨリモ小ナル內角ヲ有スル正多角形ヨリ成ル. 偖正六角形ノ內角ハ $\frac{4}{3}$ 直角ニ等シク,邊數ガ之ヨリモ多キ正多角形ノ內角

国本元治　『新撰中等教育立体幾何学教科書』　大正 14 年 12 月 25 日発行

44　多　面　體

[證明] 角錐S-ABCD ノ底面 ABCD ニ平行ナル截面ヲ A′B′C′D′ トセヨ. 又頂點 S カラ底面ヘノ垂線 SE ト截面トノ交ハリヲ E′ トセヨ. 然ラバ截面ノ邊 A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ ハソレゾレ底面ノ邊 AB, BC, CD, DA ニ平行デアル(定理 3)カラ截面ト底面トハ等角ナル多角形デアル(定理 5).



又　$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}$, $\frac{SA'}{SA}=\frac{SE'}{SE}$

故ニ　$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SE'}{SE}$

同樣ニ　$\frac{B'C'}{BC}=\frac{SE'}{SE}$, ……

故ニ截面ト底面トハ相似デ,相似ノ比ハ $\frac{SE'}{SE}$ ニ等シイ.

$\boxed{系}$ 角錐ノ底面ニ平行ナル二ツノ截面ノ面積ノ比ハ頂點ト截面トノ距離ノ比ノ平方ニ等シイ.

角　錐　45

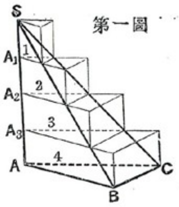
25. 角錐ノ體積.

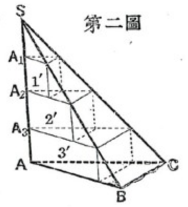
$\boxed{定理20}$ 角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

[證明] (第一) 三角錐ノ場合.

三角錐 S-ABC ノ底面積ヲ M,高サヲ h トセヨ. 三角錐ノ高サヲ n 等分シテ其ノ各分點ヲ通ッテ底面ニ平行ナル截面ヲ作リ,側稜 SA ト A_1, A_2,……デ交ハラシメヨ.

此等ノ截面ト底 ABC ノ上ニ A_1S, A_2A_1, A_3A_2, ……ヲ側稜トスル三角壔 1, 2, 3, ……, n (第一圖デハ $n=4$)ヲ作レバ,此等ノ三角壔ハ合シテ三角錐 S-ABC ヨリモ大ナル階段狀ノ立體ヲ生ズル. 其ノ體積ヲ P トシ,三角錐 S-ABC ノ體積ヲ V トスレバ,　$V<P$





高木貞治　『新式幾何教科書(立体)』　大正 15 年 10 月 31 日発行

又 $A_1, A_2, \dots$ ヲ通ル截面ヲ上底トシ,$A_1A_2, A_2A_3, \dots$ ヲ側稜トスル三角壔(第二圖ノ 1', 2', 3')ヲ作レバ,此等ノ三角壔ハ全ク角錐ノ內部ニアル階段狀ノ立體ヲ作ル. 其ノ體積ヲ Q トスレバ,

$$V>Q$$

即チ $P>V>Q$

Q ニ於ケル各三角壔ハソレゾレ P ニ於ケル同ジ番號ノ三角壔ト等積デアルガ,Q ニ於テハ三角壔ノ數ガ一ツ少ナイ. 即チ P ニ於ケル最終番號ノモノト等積ナルモノガナイ. 故ニ

$$P-Q=\frac{Mh}{n}$$

隨テ $P-V<\frac{Mh}{n}$

サテ截面ノ數 n ヲ次第ニ增セバ,$\frac{Mh}{n}$ ハ如何程ニモ小サクナルカラ,V ハ n ガ限リナク大キクナルトキノ P ノ極限ニ等シイ. 然ルニ此ノ極限ハ次ノヤウニシテ求メルコトガ出來ル.

P ニ於ケル三角壔 1, 2, ……, n ノ底面ハソレゾレ $M\times\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ M\times\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \dots\dots M\times\left(\frac{n}{n}\right)^2$ デ(定理19, 系),高サハ皆 $\frac{h}{n}$ ニ等シイカラ,

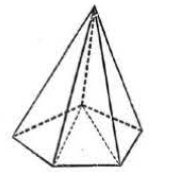
$$P=\frac{Mh}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{Mh}{n^3}\left(1^2+2^2+\dots\dots\dots\dots+n^2\right)$$
$$=\frac{Mh}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad\text{(代數學參照)}$$
$$=\frac{Mh}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{Mh}{3}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)$$

故ニ
$$P-\frac{Mh}{3}=\frac{Mh}{3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)$$
$$<\frac{Mh}{3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{Mh}{3}\times\frac{3}{n}=\frac{Mh}{n}$$

即チ $P-\frac{Mh}{3}<\frac{Mh}{n}$

故ニ n ガ限リナク增ストキノ P ノ極限ハ $\frac{Mh}{3}$ デアル.

隨テ $V=\frac{Mh}{3}$



(第二) 任意ノ角錐ノ場合.

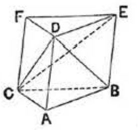
學生自ラナセ. 同ジ頂點ヲ有スル三角錐ニ分割セヨ.

[系] 等底,等高ナル角錐ハ等積デアル.

[注意] 任意ノ多面體ハソレヲ角錐ニ分割シテ其ノ體積ヲ求メルコトガ出來ル.

問題(1) 三角壔 ABC-DEF ヲ三ツノ三角錐

D-ABC, D-CEF, D-CEB ニ分割スレバ,其等ハ等積デアル.

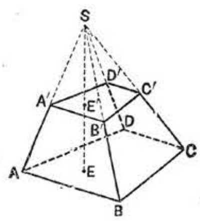


問題(2) 一ツノ角錐カラ底面ニ平行ナル平面ガ截リ取ル角錐ノ體積ハ頂點カラ截面ヘノ距離ノ立方ニ比例スル.

26. 角錐臺.

定義 底面ト之ニ平行ナル截面トノ間ニ夾マレル角錐ノ一部分ヲ**角錐臺**(又ハ**截頭角錐**)トイヒ,角錐ノ底面ト截面トヲ角錐臺ノ二ツノ底面,其ノ間ノ距離ヲ**高サ**トイフ.

定理21 角錐臺ノ體積ハ二ツノ底面ノ面積ト二ツノ底面ノ面積ノ比例中項トノ和ニ高サヲ掛ケタ積ノ三分ノ一ニ等シイ.



即チ F, F' ヲ角錐臺 ABCD-A'B'C'D' ノ二ツノ底面積,h ヲ高サ,V ヲ體積トスレバ,

$$V=\frac{1}{3}h\left(F+\sqrt{FF'}+F'\right)$$

[證明] 原角錐ノ頂點 S カラ角錐臺ノ底面ヘ

ノ垂線ヲ SE, SE' トシ,其ノ長サヲ x, x' トセヨ. 然ラバ角錐臺ノ體積ハ角錐 S-ABCD ト角錐 S-A'B'C'D' トノ體積ノ差ニ等シイ.

即チ $V=\frac{1}{3}(xF-x'F')\qquad h=x-x'$

サテ $\frac{x'}{x}=k$ ト置ケバ,

$$\frac{F'}{F}=k^2\qquad\text{(定理19, 系)}$$

由テ $x'=kx,\quad F'=k^2F,\quad \sqrt{FF'}=kF$

故ニ
$$V=\frac{1}{3}xF\left(1-\frac{x'}{x}\cdot\frac{F'}{F}\right)=\frac{1}{3}xF(1-k^3)$$
$$=\frac{1}{3}x(1-k)\cdot F(1+k+k^2)$$
$$=\frac{1}{3}(x-kx)(F+kF+k^2F)$$
$$=\frac{1}{3}(x-x')(F+\sqrt{FF'}+F')$$

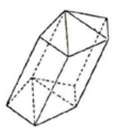
故ニ
$$V=\frac{1}{3}h\left(F+\sqrt{FF'}+F'\right)$$

問 題 第 三

(1) 邊ノ長サガ a ナル正三角形デ圍マレタ四

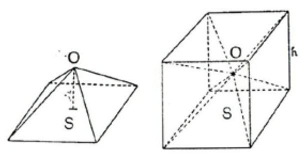
高木貞治 『新式幾何教科書(立体)』 大正15年10月31日発行

IV　角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シイ。



多角壔ハ三角壔ニワケラレルカラ三角壔ノ體積ノ求メ方デ計算サレ,即チ體積ハ(**底面**×**高サ**)ニ等シイ。

V　角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。



立方體ノ對角線ノ交點ヲOトスルト立方體ハOヲ頂點トシテ各面ヲ底面トシタ6ツノ四角錐ニ分割サレル。

各四角錐ハ合同デアツテソノ底面ハ立方體ノ底面ト等シク高サハ$\frac{1}{2}$デアル。

故ニ立方體ノ底面積ヲ S, 高サヲ h トスルト

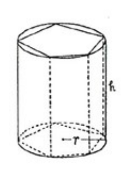
立方體ノ體積 $=Sh$

故ニ四角錐ノ體積 $=\frac{Sh}{6}$

所ガ四角錐ノ高サヲ h' トスルト $2h'=h$ ダカラ

四角錐ノ體積 $=\frac{S\times 2h'}{6}=\frac{Sh'}{3}$

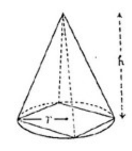
VI　直圓壔ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シイ。



圓壔ニ內接スル正多角壔ヲ考ヘルト,コノ正多角壔ノ邊數ガ無限ニ多クナルト圓壔ニ一致スル。即チ圓壔ノ體積ハ角壔ノ體積ヲ求メル計算カラ求メルコトガ出來ル。即チ

直圓壔ノ體積=底面×高サ$=\pi r^2h$

VII　直圓錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。



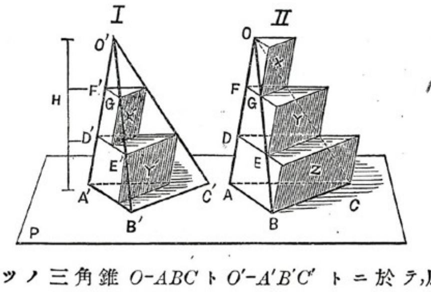
圓錐ニ內接スル正多角錐ヲ考ヘ,コノ正多角錐ノ邊數ヲ無限ニ多クスルト圓錐ニ一致スルカラ圓錐ノ體積ハ角錐ノ體積ヲ求メル計算カラ求メルコトガ出來ル。

即チ　直圓錐ノ體積$=\frac{底面積\times高サ}{3}=\frac{\pi r^2h}{3}$

津山三郎　『中等教育女子幾何』　昭和3年12月27日発行

23. 角錐ノ體積

定理　底面ト高サトノ相等シキ二ツノ三角錐ハ相等シ。



二ツノ三角錐 $O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トニ於テ,底面 ABC ハ $A'B'C'$ ニ等シク,高サガ共ニ H ナリトス。

證明　$O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トガ等シカラズトスレバ,ソノ何レカ一方ガ大ナラザルベカラズ。

今　$O\text{-}ABC>O'\text{-}A'B'C'$　ト假定セヨ。

Hヲn等分シ,各分點ヲ通リ底面ニ平行ナル平面ヲ引クトキハ,相對應スル截面ハ相等シ。

故ニ圖ノ如ク,各截面ヲ底面トスル三角壔ヲ作ルトキハ,ソノ相對應スル截面ヲ底面トセル三角壔ハ相等シ。即チ　$X=X'$,　$Y=Y'$

然ルニ　$O\text{-}ABC<X+Y+Z$,　$O'\text{-}A'B'C'>X'+Y'$

故ニ　$(O\text{-}ABC-(O'\text{-}A'B'C')<X+Y+Z-(X'+Y')=Z$

サテ此ノ三角壔Zハnヲ限リナク大ナラシムルトキハ,其ノ高サハ限リナク小トナリ,其ノ極限ニ於テハ0トナル。

然ルニ假定ノ如ク,二ツノ三角錐ニ大サノ差アリトスレバ,此ノ差ハZヨリ小ナラザルベカラズ.之レ不合理ナリ。

故ニ $O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トハ等シカラザルベカラズ。

即チ　$O\text{-}ABC=O'\text{-}A'B'C'$.

問　題

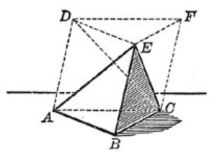
13. 同一平面上ニ在ラザル三平行線ノ一ツノ上ニ一定ノ長サ AB ヲトリ,他ノ二ツノ上ニ夫々點 C,D ヲ任意ニトルトキハ四面體 $ABCD$ ノ體積ハ一定ナリ。

(13) 一平面上ニ在ラザル二直線上ニ夫々一定ノ長サノ線分 AB,CD ヲ任意ノ位置ニトルトキハ四面體 $ABCD$ ノ體積ハ一定ナリ。

広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『新制立体幾何学』　昭和4年11月10日発行

72 第二篇 多面體

定理 三角錐ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



三角錐 E-ABC ニ於テ,其ノ底面ヲ a トシ,高サヲ h トスレバ其ノ體積ハ $\frac{1}{3}ah$ ナリ。

證明 AB,BE,BC ヲ三稜トスル三角壔 ABC-DEF ヲ作ルトキハ,此ノ角壔ハ三角錐 E-ABC ト四角錐 E-ACFD トノ和ニ等シ。

四角錐 E-ACFD ヲ二ツノ三角錐 E-ACD ト E-CFD トニ分ツトキハ,ソレ等ノ底面 ACD ハ DCF ニ等シク,且高サガ共通ナルヲ以テ

$$E\text{-}ACD=E\text{-}CFD$$

又三角錐 E-ACD, E-ABC ハ頂點 C ヲ共有シ底面 EAD ハ底面 EAB ニ等シキヲ以テ $E\text{-}ACD=E\text{-}ABC$

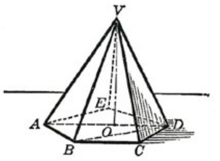
故ニ $E\text{-}ABC=\frac{1}{3}ABC\text{-}DEF$

角錐ノ體積 73

然ルニ $ABC\text{-}DEF=ah$

故ニ $E\text{-}ABC=\frac{1}{3}ah.$

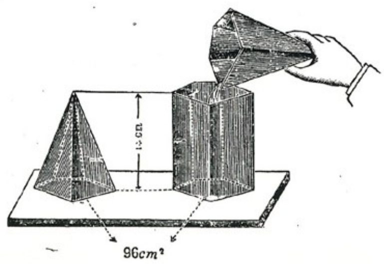
系 多角錐ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



14. 埃及ニアル「ギゼー」ノ「ピラミッド」(63頁問題3)ノ體積ヲ求メヨ。

(14) 底面積等シク,且高サ等シキ角錐ト角壔ノ體積ノ關係如何。從ッテ圖ノ如キ實驗ヲナセバ角錐ノ水ガ何杯ニテ角壔ヲ滿タシ得ルカ。

又此ノ角錐及ビ角壔ノ體積ヲ求メヨ。

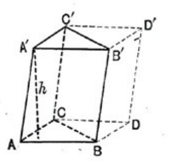


広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『新制立体幾何学』　昭和4年11月10日発行

56 第二篇 多面體

定理三十一 三角壔 (ABC−A′B′C′) ノ體積ハ其ノ底面 (ABC) ト高サ (h) トノ積ニ等シイ.

證明 平行四邊形 ABDC ト A′B′D′C′ ヲ作リ, DD′ ヲ結ビテ平行六面體 AD′ ヲ作レバ,三角壔 ABC′ ハ此ノ平行六面體ノ半分デアル。



故ニ 三角壔 $ABC'=\frac{▱ABDC}{2}\times h$ (定理二十九系)

$=\triangle ABC\times h$

系一 角壔ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ニ等シイ。

(何トナレバ任意ノ角壔ハ之ト等高ナル若干ノ三角壔ニ分ケルコトガデキルカラデアル。)

系二 角壔ノ體積ハ其ノ直截面ト側稜トノ積ニ等シイ。 (定理二十八)

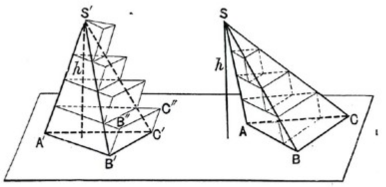
系三 等底等高ノ角壔ハ相等シク, 等高(又ハ等底)ノ角壔ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ。

問 正三角壔ガアッテ,其ノ底ノ一邊ハ a 米デ高サハ h 米デアル,其ノ體積ハ幾立方米デアルカ。又正六角壔ニ就イテ同ジ問題ヲ解ケ。

第二章 角壔及ビ角錐ノ體積 57

23. 角錐ノ體積

定理三十二 等底 (ABC, A′B′C′) 等高 (h) ナル二ツノ三角錐 (S−ABC, S′−A′B′C′) ハ等積デアル.



證明 兩三角錐ノ高サヲ n 等分シ,各分點ヲ通リ夫々底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ,兩角錐ノ截面ハ二ツヅツ夫々相等シイ。(定理二十二系二)

三角錐 S−ABC ニ於テ,各截面ヲ上底トシ稜 SA ノ各部分ヲ夫々其ノ一稜トスル ($n-1$) 箇ノ三角壔ヲ作リ,又三角錐 S′−A′B′C′ ニ於テモ同樣ノ作圖ヲナストキハ,此等ノ兩體ニ於ケル三角壔ハ夫々相等シイ。

今三角錐 S−ABC, S′−A′B′C′ ノ體積ヲ夫々 V, V′ トシ,其ノ各々ノ內部ニ作ッタ上ノ ($n-1$) 箇ノ三角壔ノ體積ノ和ヲ P トスレバ,

$\therefore$ P<V 及ビ P<V′

林鶴一　『新制立体幾何教科書』　昭和5年2月2日発行

n ヲ大ナラシメルトキハPハ前ヨリ大トナリ，V及ビV′ニ近迫スル。何トナレバ，例ヘバnヲ前ノ二倍トスレバ各角壔ハ二ツトナリ，其ノ一ツハ前者ノ半分デ他ノ一ツハ半分ヨリ大トナルカラデアル。

次ニ又兩三角錐ニ於テ，上ノ各截面ヲ下底トシ，稜SA, S′A′ノ各部分ヲ夫々其ノ一稜トスルn箇ノ三角壔ヲ作レバ，兩三角錐ニ於ケル此等ノ三角壔ノ和ハ相等シイ。其ノ體積ノ和ヲQトスレバ，

$$Q>V \quad 及ビ \quad Q>V'$$

ソシテnヲ大ナラシメルトキハQハ前ヨリ小トナリV及ビV′ニ近迫スル。

サテ Q−P ハ三角壔A′B′C″即チ $\triangle A'B'C'\times\frac{h}{n}$ ニ等シイ。

故ニnヲ大ナラシメルコトニヨッテ Q−P ハ如何樣ニモ小ナラシメルコトガデキル。

然ルニ $P<V<Q$ 及ビ $P<V'<Q$ デアルカラ，

$$V\sim V'<Q-P$$

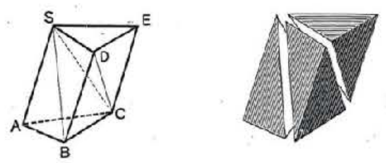
故ニVトV′トハ相等シクナケレバナラナイ。

何トナレバ若シサウデナイトシテ其ノ差ヲdトスレバ，dガ如何ニ小デアルトモ之ヨリ大ナルベキ Q−P ヲ却テ之ヨリ小ナラシメルコトガデキルカラデアル。

問 **1.** 平行四邊形ヲ底トスル四角錐ノ頂點ト底ノ對角線トヲ含ム平面ハ四角錐ヲ二等分スル。

注意 上ノ證明法ハ三角錐ニ限ラズ一般ノ角錐ニ適用スルコトガデキル。故ニ一般ニ等底等高ナル角錐ハ等積デアル。

定理 三十三 **三角壔(ABC−SDE)ハ之ヲ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ケルコトガデキル.**



證明 三角壔 ABC−SDE ハSヲ共通ノ頂點トスル三ツノ三角錐 S−ABC, S−BCD, S−CDE ニ分ケルコトガデキル。

ソシテ第一ト第二トハ等底 SAB, SBD ヲ有シCヲ共通ノ頂點トスルモノト見ルコトガデキ

ルカラ等積デアル。

同樣ニ第二ト第三トモ等積デアル。

從ツテ此等ノ三ツノ三角錐ハ等積デアル。

系一 三角錐ハ等底等高ノ三角壔ノ三分ノ一ニ等シイ。

系二 角錐ハ之ト等底等高ノ角壔ノ三分ノ一ニ等シイ。

從ツテ角錐ノ體積ヲVトシ，底面積ヲB，高サヲhトスレバ，

$$V=\frac{1}{3}Bh$$

系三 等高(又ハ等底)ナル二ツノ角錐ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ。

問 **2.** 稜ノ長サガaデアル正四面體ノ體積ヲ表ハス公式ヲ求メヨ。

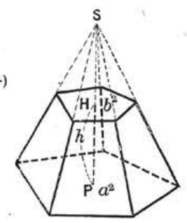
問 **3.** 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ對稜ヲ其ノ兩側面ノ比ニ分ケル。

定理 三十四 **角錐臺ノ體積ハ兩底ト其ノ比例中項トノ和ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.**

證明 Vヲ角錐臺ノ體積トシ，a^2及ビb^2ヲ其ノ兩底ノ面積，hヲ其ノ高サトスル。

今側面ヲ延長シテ生ズル角錐ノ頂點Sヨリ底

ヘ下シタ垂線ト兩底トノ交點ヲ夫々P及ビHトスレバ，Vハ二ツノ角錐ノ差デアルカラ，



$$V=\frac{1}{3}SP\times a^2-\frac{1}{3}SH\times b^2$$

然ルニ $\frac{a^2}{\overline{SP}^2}=\frac{b^2}{\overline{SH}^2}$ (定理二十二系一)

故ニ $\frac{a}{SP}=\frac{b}{SH}$

$$=\frac{a-b}{SP-SH}=\frac{a-b}{h}$$

故ニ $SP=\frac{ah}{a-b}$, $SH=\frac{bh}{a-b}$

故ニ $V=\frac{a^3h}{3(a-b)}-\frac{b^3h}{3(a-b)}=\frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)}$

$$=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

問 **4.** 正角錐臺ガアル，兩底面ハ一邊ノ長サガ夫夫$15m$, $20m$デアル正六角形デ，高サハ$12m$デアルトイフ。其ノ體積ハ幾ラカ。

問 題 5

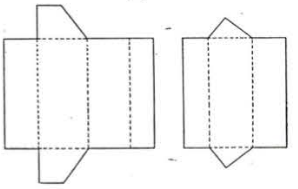
1. 直六面體ガアル，其ノ對角線ノ長サハ$14cm$デ三稜ノ長サノ比ハ 2:3:6 ニ等シイトイフ。此ノ直

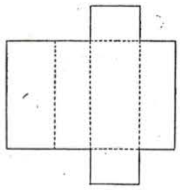
林鶴一 『新制立体幾何教科書』 昭和5年2月2日発行

(3) は一つの直三角壔を適當に切斷すると一つの直方體に變化し得る模型の展開圖を示したものです。

(4) は(3) で示された直方體の完成されたもので結局前の斜角壔はこの等底，等高の直方體と等體積となるわけです。

(3)

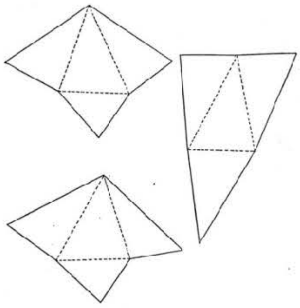




〔注意〕 本節の問題は大へん難かしいもので模型の助を借りなければ生徒によく理解させることは困難だらうと思ひます。よつてかゝる模型を工夫して見た次第です。生徒には問題の意味をよく解させる爲には最初に證明用の模型は出さずに前の斜三角壔と直方體とを示しこの一つの立體は如何なる關係にあるか，即ち等底，等高の關係にあることをよく理解させ其後證明用模型を示した方がよいと思ひます。又等底なることを一見して生徒に解させる方法は平面幾何模型で大體説明してありますから參照して下さい。

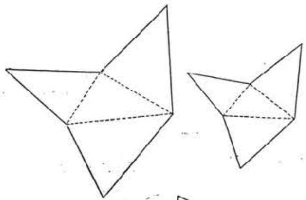
第十二節 三角壔を三つの三角錐に分割する時の展開圖

〔説明〕 本模型展開の組合せの出來上つたときこれを重ねるには餘程工夫しなければなりません。

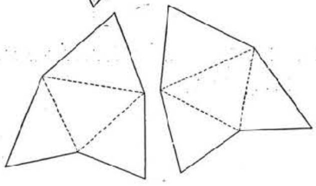


第十三節 相似兩多面體及び對稱形兩多面體，正三角壔，正四角錐の展開圖

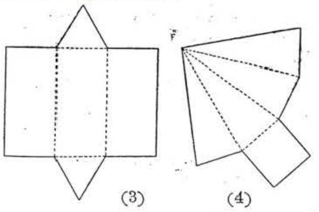
(1)



(2)



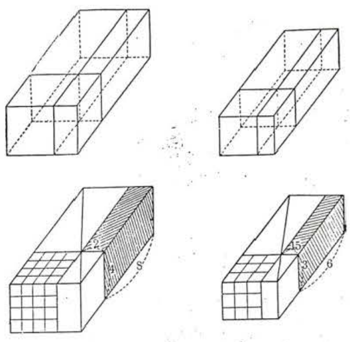
〔説明〕 (1) は相似四面體の模型展開圖 (2)は面對稱四面體 (3) は正三角壔，(4 は正四角錐の夫々の展開圖です。



(3)　(4)

第十四節 相似多面體の體積比説明器

〔説明〕 相似多面體の體積の比は對應邊の3乘比に等しの理論證明はなかなか難かしくて出來ないものであり教科書の註を見ても一般的抽象的でとても生徒には解りません。よつて自分はこの問題の證明器として右圖に示すやうなものを考察しました。作り方は或る單位體積の立方倍を有する二つの相似斜三角壔をとり其の二つのものを直三角壔に變化し直三角壔を直方體に變化し直方體を立方體に變化し遂に二つの相似斜三角壔の體積の比を考へる代りに二つの立方體の體積の比を考へさせるやうにしたのです。



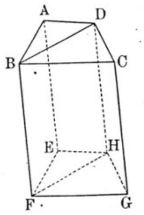
本圖では圖が色々複雜してゐますから省略しましたが縞の引かれた直方體が卽ち斜三角壔の變化されたものであり，この直方體が立方體になつて

大坂一二 『高等尋常新制小学幾何学新研究』 昭和5年5月17日発行

356　第二篇　數材解說

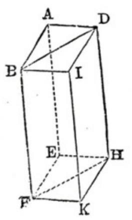
て1點から出る對角線は n−3 あります。そして n−2 の三角形に分けられます。故にn角壔は n−2 の角壔に分けられます。

〔研究〕角壔の定義を尙一度述べますと，兩底面が平行で側面が若干の平行四邊形から出來てゐます。このことから平行四邊形の對邊 AG, BH, CI……等は皆平行なことが解ります。



〔53頁　(8)〕角壔は之と底面積と高さが等しい直方體に等しい。

〔證明〕四角壔 ABCD−EFGH を BF, DH を含む平面で截り二つの三角壔 ABD−EFH と BCD−FGH とに分けます。今 ABD−EFH の三角壔をとつて考へます。ABD 面上に ABID を作り，これを平行四邊形とします。同様にEFKHなる平行四邊形を作ります。そして I, K を結ぶと ABID−EFKH は平行六面體となります。然るに，この三角壔 ABD−EFH は平行六面體 ABID−EFKH の半分です。(6問) 然るに平行六面體は等底等高の直方體の體積に等しいのです。(52頁，5) 故に，三角壔 ABD−EFH の體積は EFKH の半分を底面とし，高さを高さとする直方體に等しい。換言すれば三角壔 ABD−EFH の體積は三角形 EFH と等積なる底面を有し，高さを高さとする直方體に等しい。



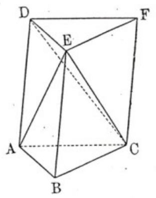
然るに四角壔はこれ等二つの三角壔の和である故，四角壔の體積は底面に等しい底を有し，高さを高さとする直方體に等積なりと云ふことが出來ます。立體模型を參考として下さい。

〔53頁　9)〕三角壔 ABC−DEF を EA, EC を含む平面と EC, ED を含む平面で截ると，三つの三角錐に分たれる。其の中で CDEF は EABC

第五章　高等科第二學年數材解說　357

とも，ECDA とも底面と高さが等しい。

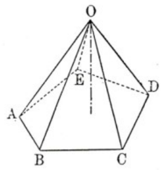
〔證明〕EA, EC は相交つてゐますから，一つの平面上にあります。EC, ED も同様一つの平面上にあります。よつて圖のやうにそれ等の平面でもつて角壔を截ります。三角錐 C−ABE と三角錐 C−AED とは等底等高です。卽ち三角形 ABE と三角形 ADE とは合同で面積相等しく，二つの三角錐は底平面及び頂點 C を共有してゐますから等高です。



三角錐 C−AFD 卽ち E−ACD と三角錐 E−CFD とは亦等底等高です。三角錐 C−ABE 卽ち E−ABC と三角錐 E−CFD 卽ち C−DEF とは又等底等高です。何れの二つをとるも，夫々等底等高の角錐です。

〔研究〕角錐といふのは一つの多角形と其の邊を夫々底邊とし，其の平面外の1點を頂點とする三角形との圍む多面體です

多角形を ABCDE とし，その平面外の1點をOとして角錐を作ります。これを O−ABCDE と表はします。ABCDE を底面，頂點から底面に下した垂線の長さを高さと云ひます。數多の三角形を側面，OA, OB…… 等を側稜と云ひます。多角形の邊數に從つて三角錐，四角錐等と云ひます。角錐の中に正角錐と云ふのがありますが，それは底面が正多角形で垂線の足が正多角形の中心に來るやうな角錐を云ひます。



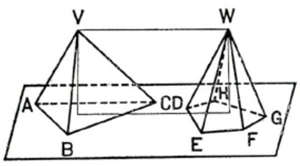
第十二節　相　似　形

〔54頁　(1)〕一つの多面體の立體角が面數等しい他の多面體の立體角とそれぞれ同じ順に全等で，對應する面をなす多角形が相似形で，對應する

大坂一二　『高等尋常新制小学幾何学新研究』　昭和5年5月17日発行

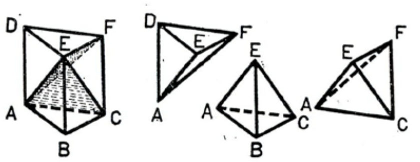
160　女子最新幾何

底面積ト高サトノ相等シイ二ツノ角錐ノ體積ハ相等シイ。



例　角錐 V−ABC, ト角錐 W−DEFGH トノ高サガ相等シク,底面 ABC, DEFGノ面積ガ相等シイトキハ,コノ二ツノ角錐ノ體積ハ相等シイ。(コノ證明ハ本書ノ程度外デアルカラ省ク)

$\boxed{\text{定理56}}$　三角錐ノ體積ハ等底等高ノ三角壔ノ體積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。



【證明】 三角壔 ABC−DEF ヲ EAC, EAF ノ二ツノ平面デ截レバ,E−ABC, A−DEF, E−ACF ノ三ツノ三角錐ヲ得ル。

E−ABC＝A−DEF (何故カ) 又 A−DEF ハ E−ADF トモ見做スコトガ出來ル。

E−ADF＝E−ACF (何故カ)

第七編　立體體積　161

∴　E−ABC＝A−DEF＝E−ACF

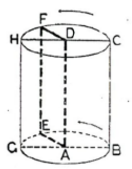
∴　E−ABC＝$\frac{1}{3}$DEF−ABC

系　角錐ノ體積ハ等底,等高ノ角壔ノ體積ノ$\frac{1}{3}$デアル。

99. 直圓壔

定義　矩形ノ一邊ヲ軸トシテ之ヲ回轉スルトキニ生ズル立體ヲ**直圓壔**ト云フ。

例　▭ABCD ガ一邊 AD ヲ軸トシテ廻轉シテ出來タ立體 BEG−CFH ハ直圓壔デ, AD ノ對邊 BC ニヨツテ生ズル曲面ト, AB, DC ニヨツテ生ズル合同ナル圓トニヨツテ圍マレル。



AD ヲ**軸**, BC ヲ**母線**,ソノ圓ヲ**底面**又ハ**端面**,ソノ曲面ヲ**側面**,兩底面ノ距離ヲ**高サ**ト云フ。

100. 直圓壔ノ體積・面積

$\boxed{\text{定理57}}$　直圓壔ノ體積Vハ底面積Sト高サhトノ積ニ等シイ。又側面積aハ母線lト底面ノ周トノ積ニ等シイ。

【證明】 直圓壔ノ底面ナル圓ハ邊ノ數ガ限リナク多クナツタ正多角形ノ極限デアルカラ,底面ガ正n邊形ナ

桜井ミキ　『女子最新幾何』　昭和5年12月5日発行

∴ V=S×H

§ 77〔問題〕(9) P.53 **三角壔ABC−DEFハEA, ECヲ含ム平面ト, EC, EDヲ含ム平面デ截ルト三ツノ三角錐ニ分タレル。其ノ中デC−DEFハE−ABCトモ, E−CDAトモ底面ト高サガ等シイ。**

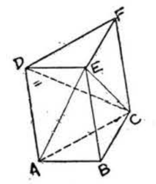
〔定義〕 三角錐, 四角錐, 角錐

三角形ノ三ツノ邊ヲ底邊トシ, 三角形ノ平面ニナイ一點ヲ頂點トシテ三ツノ三角形ヲ作ルトキ, 元ノ三角形ト是等ノ三ツノ三角形トノ圍ム立體ヲ三角錐トイフ。

四角形ノ四ツノ邊ヲ夫々底邊トシ, 四角形ノ平面ニナイ一ツノ點ヲ頂點トシテ四ツノ三角形ヲ作ルトキ, 元ノ四角形トコレ等ノ三角形ノ圍ム立體ヲ四角錐トイフ。

一般ニ多角形ノ邊ヲ底邊トシ, 多角形ノ平面ニナイ一點ヲ頂點トシテn個ノ三角形ヲ作ルトキ, 元ノ多角形ト是等ノ三角形トデ圍ム立體ヲn角錐トイフ。

〔證明〕



EC, ED ヲ含ム平面デ截ツテ出來ル立體ノ C ヲ頂點ト見レバ DEF ヲ底面デアル三角錐C−DEFガ出來ル。

ソノトキ殘ル立體ニ於テ, C ヲ頂點ト見, ABED ヲ底面ト見レバ四角錐C−ABEDガ出來ル。

コノ四角錐ヲEA, ECヲ含ム平面デキレバ, Eヲ頂點トシ, ABCヲ底面トスル三角錐E−ABCト, Eヲ頂點トシ, CDAヲ底面トスル三角錐E−CDAトガ出來ル。

(285)

C−DEFノ底面DEFハE−ABCノ底面ABCト合同デ, 高サハ何レモ平行ナル二ツノ平面ABCトDEFノ距離デアルカラ相等シイ。

C−DEF點ヲ頂點トシ, CDFヲ底面ト見レバ, 高サハ E ヨリ平面ACFD ニ下シタ垂線ノ長サトナル。

E−CDA ノ高サモ亦Eヨリ同ジ平面ニ下シタ垂線デアル。

三角形CDFトACDハ合同デアル。

故ニコノ二ツノ三角錐ノ高サト底面ハ相等シイ。

〔備考〕

高さと底面が等しい二つの三角錐の體積は相等しい。

今C−DEF と E−ABC とは相等しいことは明かである。三角錐C−DEFのEを頂點と見て, CDFを底面と見る三角錐E−CDFとE−ACD とは高さが等しく, 底面が合同であるから, 體積は等しい。

故にこの三つの三角錐の體積は相等しい。

故に三角壔は, 等積な三つの三角錐に分つことが出來るし, 三角錐は之と底面が等しく, 高さも等しい。三角壔の體積の三分の一に等しい。

(286)

第十節　角錐。圓錐。

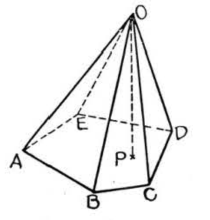
教授の目的

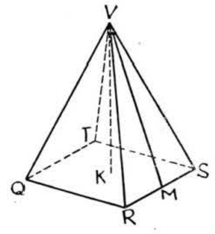
角錐及び圓錐に就いても前教課と同樣實物又は模型の觀察より出發して其の性質を發表せしめ各種の名稱及び定義を教授し更に角壔圓壔の體積と角錐, 圓錐の體積との關係を說明して角錐, 圓錐の求積法を指導する。本教材も又展開圖を描いてその立體模型を作製する作業を課しかゝる立體の截斷面に關する指導をも合せ課すべきである。

教材の取扱

§ 54〔問題〕(1) P.52 **角錐ハドンナ立體カ。正角錐ハドンナ角錐カ。下ノ圖デ角錐ノ頂點, 側面, 底面, 側稜, 高サヲ示セ。又正角錐ノ斜高ヲ示セ。**

解答 (i) 多角形の面と3以上の三角形の面とより成り, 三角形





の面は何れも同一の頂點を有し多角形の各邊を底邊とする立體を角錐といふ。

(ii) 底面が正多角形であつて頂點が底面の中心に於ける垂線上にある角錐を正角錐と云ふ。

(iii) 多角形の面上の圖に於ては ABCDE の面を其の角錐の底面,

(373)

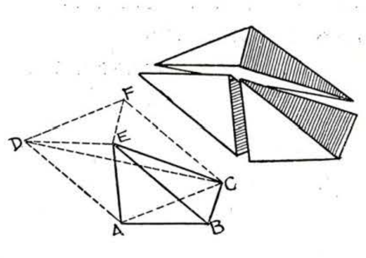
と云ひ。同一點を共有する三角形の面を側面, 側面の交り例へば OA,OB……等を側稜, 側稜の共通頂點 O を角錐の頂點, 頂點 O より底面に ABCD に至る距離 OB をその角錐の高さと云ふ。

(iv) 正角錐例へば V−QRST の側面は全等なる二等邊三角形であつて, この二等邊三角形の高さ例へば VM を其の斜高と云ふ。

注意 角錐は底面の邊の數によつて之を三角錐, 四角錐, 五角錐等と云ふ。三角錐は特に之を四面體と云ふこともある。

§ 55 (問題) (2) P.52 **角錐ノ體積ハ同ジ底面, 同ジ高サノ角壔ノ體積ノ$\frac{1}{3}$デアル。**

解答 AB,BE,BC を三稜とする三角壔 ABC−DEF を作るときは



此の角壔は三角錐 E−ABC と四角錐E−ACFDとに分けることが出來る。四角錐 E−ACFDを二つの三角錐 E−ACD と E−CFD とに分けると共等の底面 ACD は DCF に等しく, 高さが共通であるからこの二つの三角錐は等しい。

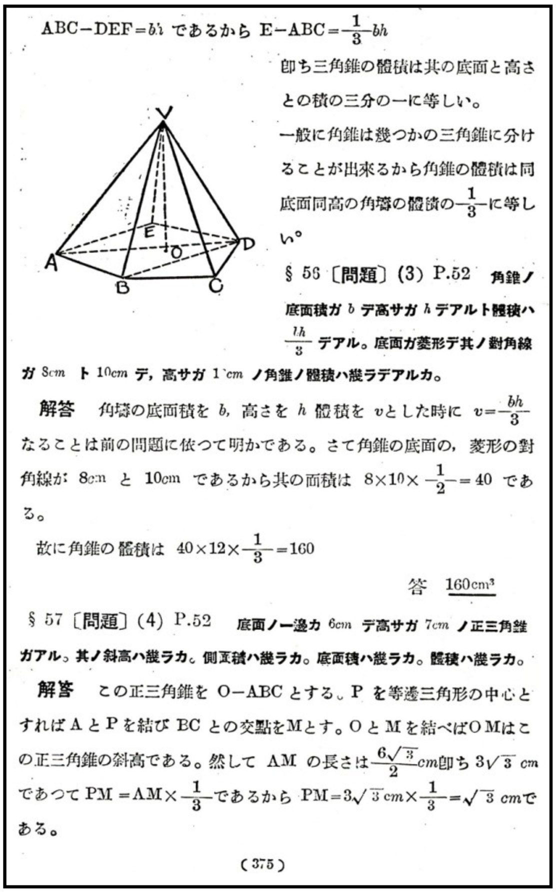
又三角錐 E−ACD, E−ABC は頂點 C を共有し底面 EAD は底面 EAB に等しいからこの二つの三角錐は等しい。

故に　$E-ABC=\frac{1}{3}ABC-DEF$

今三角錐 E−ABC に於て其の底面を b とし高さを h とする。

(74)

岩下吉衛　高木佐加枝　『高等科一・二・三幾何の教授法及問題詳解』　昭和5年10月1日発行



ABC−DEF$=bh$ であるから E−ABC$=\frac{1}{3}bh$

即ち三角錐の體積は其の底面と高さとの積の三分の一に等しい。

一般に角錐は幾つかの三角錐に分けることが出來るから角錐の體積は同底面同高の角壔の體積の$\frac{1}{3}$に等しい。

§ 56〔問題〕(3) P.52 **角錐ノ底面積ガ b デ高サガ h デアルト體積ハ $\frac{bh}{3}$ デアル。底面ガ菱形デ其ノ對角線ガ 8cm ト 10cm デ，高サガ 12cm ノ角錐ノ體積ハ幾ラデアルカ。**

解答　角壔の底面積を b，高さを h 體積を v とした時に $v=\frac{bh}{3}$ なることは前の問題に依つて明かである。さて角錐の底面の，菱形の對角線が 8cm と 10cm であるから其の面積は $8\times10\times\frac{1}{2}=40$ である。

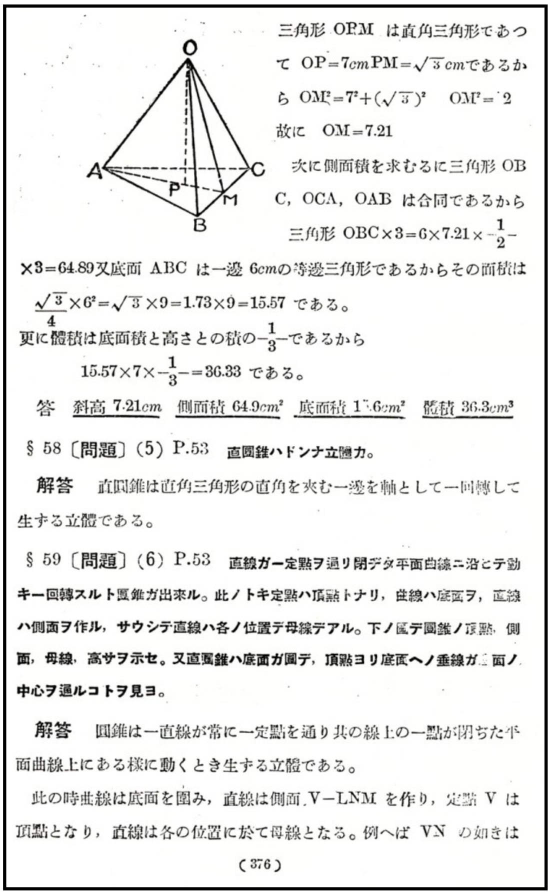
故に角錐の體積は $40\times12\times\frac{1}{3}=160$

答　160cm³

§ 57〔問題〕(4) P.52 **底面ノ一邊ガ 6cm デ高サガ 7cm ノ正三角錐ガアル。其ノ斜高ハ幾ラカ。側面積ハ幾ラカ。底面積ハ幾ラカ。體積ハ幾ラカ。**

解答　この正三角錐を O−ABC とする。P を等邊三角形の中心とすれば A と P を結び BC との交點をMとす。O と M を結べばOMはこの正三角錐の斜高である。然して AM の長さは$\frac{6\sqrt{3}}{2}$cm即ち $3\sqrt{3}$ cm であつて PM $=$ AM$\times\frac{1}{3}$であるから PM$=3\sqrt{3}$cm$\times\frac{1}{3}=\sqrt{3}$ cmである。

（375）



三角形 OPM は直角三角形であつて OP$=7$cm PM$=\sqrt{3}$cmであるから OM$^2=7^2+(\sqrt{3})^2$　OM$^2=52$

故に　OM$=7.21$

次に側面積を求むるに三角形 OBC，OCA，OAB は合同であるから

三角形 OBC$\times3=6\times7.21\times\frac{1}{2}\times3=64.89$又底面 ABC は一邊 6cmの等邊三角形であるからその面積は

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=\sqrt{3}\times9=1.73\times9=15.57$ である。

更に體積は底面積と高さとの積の$\frac{1}{3}$であるから

$15.57\times7\times\frac{1}{3}=36.33$ である。

答　斜高 7.21cm　側面積 64.9cm²　底面積 15.6cm²　體積 36.3cm³

§ 58〔問題〕(5) P.53 **直圓錐ハドンナ立體カ。**

解答　直圓錐は直角三角形の直角を夾む一邊を軸として一回轉して生ずる立體である。

§ 59〔問題〕(6) P.53 **直線ガ一定點ヲ通リ閉ヂタ平面曲線ニ沿ヒテ動キ一回轉スルト圓錐ガ出來ル。此ノトキ定點ハ頂點トナリ，曲線ハ底面ヲ，直線ハ側面ヲ作ル，サウシテ直線ハ各ノ位置デ母線デアル。下ノ圖デ圓錐ノ頂點，側面，母線，高サヲ示セ。又直圓錐ハ底面ガ圓デ，頂點ヨリ底面ヘノ垂線ガ底面ノ中心ヲ通ルコトヲ見ヨ。**

解答　圓錐は一直線が常に一定點を通り其の線上の一點が閉ぢた平面曲線上にある様に動くとき生ずる立體である。

此の時曲線は底面を圍み，直線は側面 V−LNM を作り，定點 V は頂點となり，直線は各の位置に於て母線となる。例へば VN の如きは

（376）

岩下吉衛　高木佐加枝　『高等科一・二・三幾何の教授法及問題詳解』　昭和 5 年 10 月 1 日発行

「中學校令施行規則中改正」（昭和 6 年 1 月 10 日文部省令第 2 號）

（この中學校令施行規則は明治 34 年以来の改正である）

第 1 条　生徒教養ノ要旨

第 1 条

中學校ニ於テハ中學校令ノ旨趣ニ基キ小學校教育ノ基礎ニ拠リ一層高等ノ程度ニ於テ道徳教育及國民教育ヲ施シ生活上有用ナル普通ノ知能ヲ養ヒ且體育ヲ行フヲ以テ旨トシ特ニ左ノ事項ニ留意シテ其ノ生徒ヲ教養スベシ

一　教育ニ關スル勅語ノ旨趣ニ基キ學校教育ノ全般ヨリ道徳教育ヲ行ハンコトヲ期シ常ニ生徒ヲ實践躬行ニ導キ殊ニ國民道徳ノ養成ニ意ヲ用ヒ我ガ建國ノ本義ト國體ノ尊厳ナル所以トヲ會得セシメ忠孝ノ大義ヲ明ニシ其ノ信念ヲ鞏固ナラシメンコトヲ期スベシ

二　獨立自主ノ精神ヲ養ヒ勤勞ヲ愛好スルノ習慣ヲ育成シ且協同ヲ尚ビ責任ヲ重ンズルノ觀念ヲ涵養センコトニ力ムベシ

三　專ラ心力ノ啓發ヲ旨トシ徒ニ專門的学術ノ體系ニ泥ムコトナク社會生活上適切有用ナル知能ヲ養ハンコトヲ期スベシ

四　生徒ノ身體ヲ強健ナラシムルト共ニ精神ヲ鍛錬シ青年ノ濶達ナル気風ヲ養ハンコトヲ旨トスベシ

第 2 章　學科及其ノ程度

第 2 条

中學校の學科目ハ修身、公民科、國語漢文、歴史、地理、外國語、數學、理科、實業、圖畫、音楽、作業科、體操トス

第四学年以上ニ在リテハ第一種及第二種ノ課程ヲ編制シ生徒ヲシテ其ノ一課程ヲ選修セシム

第一種及第二種ノ課程ハ修身、公民科、國語漢文、歴史、地理、作業科、體操ヲ基本科目トシ第一種課程ニハ基本科目ニ國語漢文、外國語、數學、理科、圖畫、音楽ノ中適宜其ノ數科目及實業ヲ增課シ第二種課程ニハ基本科目ニハ國語漢文、數學、理科、圖畫、音楽ノ中適宜其ノ數科目及外國語ヲ增課シ之ヲ編制スベシ

前項ノ規定ハ第三学年ヨリ之ヲ適用スルコトヲ得但シ第一種及第二種ノ課程ハ修身、公民科、國語漢文、歴史、地理、數學、理科、作業科、體操ヲ基本科目トシ第一種課程ニハ基本科目ニ國語漢文、外國語、數學、理科、圖畫、音楽ノ中適宜其ノ數科目及實業ヲ增課シ第二種課程ニ基本科目ニハ國語漢文、數學、理科、圖畫、音楽ノ中適宜其ノ數科目及外國語ヲ增課シ之ヲ編制スベシ

特別ノ事情アルトキハ文部大臣ノ許可ヲ受ケ第一種課程及第二種課程ノ中其ノ一ヲ缺クコトヲ得

實業ニ於テ農業又ハ工業ヲ課スル場合ニ在リテハ作業科ヲ欠クコトヲ得

外國語ハ、英語、独語、仏語又ハ支那語トス

法制及經濟、唱歌ハ當分之ヲ缺クコトヲ得

第四条

各學科目ノ教授ハ其ノ目的及方法ヲ誤ルコトナク互ニ相關係シテ補益センコトヲ要ス

第 11 条

數學ハ數量ニ關スル知識ヲ授ケ計算ニ習熟セシメ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス

數學ハ算術、代數及幾何ヲ授ケ又三角法ヲ授クルコトアルベシ

「中學校教授要目」改正（昭和 6 年 2 月 7 日文部省訓令第 5 號）

中學校教授要目

數　學

本要目ハ算術・代數・幾何・三角法ノ區別ヲナサズ單ニ教授内容ヲ列挙スルニ止メタリ而シテソノ取扱ハ之ヲ分科シ或ハ之ヲ綜合スル等教授者ニ於テ任意工夫スベキモノトス

第一種及第二種ノ両課程ヲ第四學年ヨリ分ツ場合ニ於ケル要目ヲ甲トシ、第三學年ヨリ分ツモノヲ乙トス

［甲］

第一學年（毎週三時）

整數　小數　分數

正數　負數

一次方程式

幾何圖形

第二學年（毎週三時）

二次方程式

直線形

圓

第三學年（毎週五時）

分數方程式

比例

相似形

鋭角三角函數

第四學年

第一種　毎週二時及至四時
　　　　　　　　　　増課教材
第二種　毎週二時及至五時

基本教材ノ補充

級數

對數

　第一種課程ニ在リテハ特ニ實業ニ必要ナル事項ヲ選ビテ課スル爲前記ノ内容ヲ適宜斟酌スルコトヲ得

　第五學年ニ於テモ亦之ニ同ジ

第五學年

第一種　毎週二時及至四時
　　　　　　　　　　増課教材
第二種　毎週二時及至五時

平面及直線

多面體

三角函數及其ノ應用

全課程ノ總括及補充

［乙］

第一學年（毎週三時）

整數　小數　分數

正數　負數

一次方程式

幾何圖形

第二學年（毎週三時）

二次方程式

直線形

圓

第三學年

增課教材

基本教材ノ復習及應用

鋭角三角函數

第一種課程ニ在リテハ特ニ實業ニ必要ナル事項ヲ選ビテ課スル爲前記ノ内容ヲ適宜斟酌スルコトヲ得

第四學年及第五學年ニ於テモ亦之ニ同ジ

第四學年

第一種　毎週二時及至四時

増課教材

第二種　毎週二時及至五時

基本教材ノ補充

級數

對數

第五學年

第一種　毎週二時及至四時

増課教材

第二種　毎週二時及至五時

平面及直線

多面體

三角函數及其ノ應用

全課程ノ總括及補充

注　意

一　歩合算・軌跡・作圖題・求積等ハ本要目ニ列挙セル事項ニ關聯シテ適宜之ヲ授クベシ

二　第一學年ニ於ケル幾何圖形ヲ教授スルニハ立體ノ觀察測定平面図形ノ作圖等ニ依リテ空間ニ關スル觀念ヲ明瞭ニシ且後學年ニ於ケル學習ノ基礎タラシメンコトニ力ムベシ

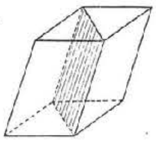
三　教材ハ成ルベク實際生活ニ適切ナルモノヲ選ブベシ

四　教授ノ際常ニ函數觀念ノ養成ニ留意スベシ

五　珠算ハ適宜之ヲ課スルコトヲ得

ラトノ關係如何。

第百七十八圖



三角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

角壔ハソノ對角面ニヨツテ幾ツカノ三角壔ニ分ケルコトガ出來ルカラ，一般ニ

角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

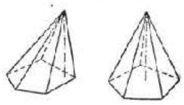
問 底面積 0.6 平方米，高サ 3 米ノ六角壔ノ體積ハ幾立方米カ。

第十二節 角錐ノ種類及體積

1. 角錐ノ意義及種類

（問題） コレマデ用キタ『角錐』トイフ言葉ノ正シイ定義ヲ述ベヨ。

第百七十九圖



一ツノ多角形ト，ソノ各ノ邊ヲ底邊トシ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共有頂點トスル三角形トデ圍マレタ形體ヲ**角錐**トイフ。

多角形ヲ角錐ノ**底面**，三角形ヲ**側面**，側面ト側面トノ

交ハリヲ側稜，三角形ノ共有頂點ヲ**頂點**トイヒ，頂點カラ底面ニ下シタ垂線ノ長サヲ角錐ノ**高サ**トイフ。

角錐ハソノ底面ノ形ニヨツテ**三角錐・四角錐・五角錐**ナドトイフ。

角錐ノ底面ガ正多角形デ，頂點カラ底面ヘ下シタ垂線ノ足ガ底面ノ中心ト一致スルトキ，コレヲ**正角錐**トイフ。

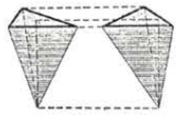
問 1 角壔ト角錐トノ分類上ノ相異ヲイヘ。

問 2 底面ガ正多角形デ，正角錐デナイ形體ガアルカ。

2. 角錐ノ體積

〔實驗 1〕 底面積ト高サガ夫々相等シク，形ノ異ナル二ツノ三角錐形ノ容器ニ就テ，ソノ容量ヲ比較セヨ。

第百八十圖



底面積ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

〔實驗 2〕 上ノ三角錐形容器ノ一ツニ水ヲ滿シテ，コレト等底等高ノ三角壔形ノ容器ニ入レテ見ヨ。幾回デ一パイニナルカ。

三角錐ノ體積ハコレト等底等高ノ三角壔ノ體積ノ $\frac{1}{3}$

デアル。從ツテ

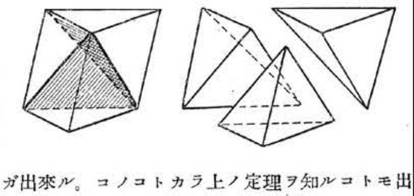
三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

即チ底面積ヲ S，高サヲ h，體積ヲ V トスレバ

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

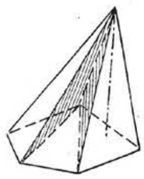
問 1 コノ圖ニ示スヤウニ，三角壔ハ截斷ニヨツテコレヲ三ツノ等積ナ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。コノコトカラ上ノ定理ヲ知ルコトモ出來ル。

第百八十一圖



模型ニ就テ三ツノ三角錐ガ等積ナ理由ヲイヘ。（口繪第五圖參照）

第百八十二圖



問 2 第百八十二圖ヲ觀テ，多角錐ノ體積ヲ求メル方法ヲイヘ。

多角錐ハコレヲ幾ツカノ等高ナ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。從ツテ

角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

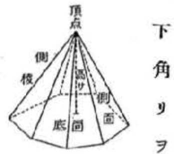
問 埃及（エヂプト）ノピラミツドノ一ツハ高サ 151 米デ，底面ハ一邊 240 米ノ正方形デアル。コノ體積幾立方米カ。若シ全體ガ比重 2.5 ノ石カラ出來テヰルトスレバ重量何程トナルカ。

国本東九郎 『改訂直観幾何教科書』 昭和 6 年 5 月 25 日発行

第三章

角錐,圓錐

90. 角錐,直角錐



角錐ヲ左ノ圖ノ如クオイタトキ,下ノ面ヲ角錐ノ**底面**,ソノ他ノ面ヲ角錐ノ**側面**トイヒ,相隣ル側面ノ交リヲ**側稜**,スベテノ側稜ノ會スル點ヲ角錐ノ**頂點**トイフ。ソシテ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ長サヲ角錐ノ**高サ**トイフ。

角錐ニツイテ觀察スルト次ノコトガ知ラレル。

i] 角錐ノ底面ハ多角形デアル

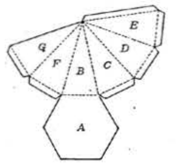
ii] 側面ハ悉ク三角形デアル

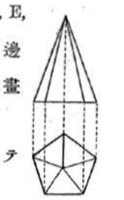
角錐ノ中,底面ガ正多角形デ側稜ガ悉ク相等シイモノヲ**直角錐**トイヒ,ソノ他ノ角錐ヲ**斜角錐**トイフ。

直角錐ノ側面ハ悉ク合同ナ二等邊三角形(二邊ノ相等シイ三角形)デアル。

直角錐ノ模型ハ次ノヤウニスレバ出來ル。

先ヅ正多角形A(圖參照)ヲ書キ,ソノ一邊ノ上ニ二等邊三角形Bヲ作ツテ,コレト合同ノ三角形C, D, E, ……ヲ正多角形ノ邊ノ數ダケ接續シテ畫ク。





ソシテ點線ニ沿ウテ折曲ゲルノデアル。

【注意】直角錐ノ形,大サヲ示スノニ,右上ノ圖ノヤウニスルト簡便デアル。

91. 角錐ノ體積

角錐ノ體積ハ,ソノ底面ヲ底面ニ持チ,高サヲ高サニ持ツ角壔ノ體積ノ三分ノ一ニ等シイ。

即チ體積ヲT,底面積ヲS,高サヲtト略スレバ

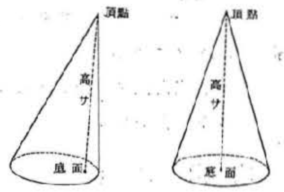
$$T=\frac{1}{3}St$$

上ノ規則ハ次ノヤウニスレバ,實驗的ニ得ラレル。即チ底面積ガ相

等シク,深サモ亦相等シイ角壔狀ノ箱ト角錐狀ノ箱トヲ作リ,兩者ノ容量ヲ比ベルノデアル。(但シ正確ナ結果ヲ得ルコトハ望メナイ。)

92. 圓錐,直圓錐

圓錐ノ平ナ面ヲソノ**底面**トイヒ,他ノ面ヲ**側面**トイフ。ソシテ尖ツタ端ヲ**頂點**,頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ長サヲ**高サ**トイフ。



圓錐ハ次ノ特徴ヲ持ツテヰル。

i] 底面ハ圓デアル。

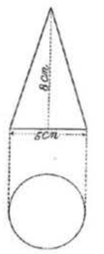
ii] 側面ニ定木ヲアテルト,頂點ヲ通ルヤウニ當テタトキダケ面ニ密着スル。

iii] 底面ニ平行ナ平面デ截ルト截口ハ圓デアル.

吾々ノ周圍ニアル物體ニ見ルトコロノ圓錐ハ,大抵頂點ト底面ノ中心トヲ結ンダ直線ガ底面ニ垂直デアル。カクノ如キ圓錐ヲ特ニ直圓錐トイフ 以

下圓錐ハ直圓錐ダケニツイテ考察スルコトトスル。

頂點ヲ通ツテ圓錐ノ側面ノ上ニ引カレル直線ノコトヲ圓錐ノ**母線**トイフ。直圓錐ニハ上掲ノ性質ノ外ニ更ニ次ノ特徴ガアル。

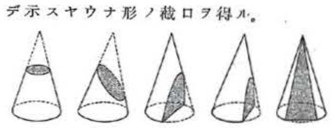


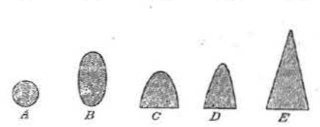
直圓錐ノ母線ハ皆相等シイ。

【注意】(1)直圓錐ノ寸法ヲ示スノニ右上ノ圖ノヤウニスルト簡便デアル。

(2)直圓錐ハ直角三角形(一角ガ直角ナル三角形)ヲ,ソノ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキニ生ズル立體デアルトイツテモヨイ。

(3)直圓錐ヲ一ツノ平面デ截ルト,次ノ圖ノA,B,C, D, Eデ示スヤウナ形ノ截口ヲ得ル。





Bノ如キ曲線形及ビソノ境ヲナス曲線ヲ橢圓トイ

佐藤良一郎 『新制中学校用 基本数学[上]』 昭和7年12月18日発行

154　修訂女子幾何學新教科書

斜角壔ノ底面積ヲ m,高サヲ h トスル。今コノ斜角壔ヲ底ニ平行ナル平面デ細カニ n 等分シタトスル。ソノ各一ツノ部分ハ高サガ $\frac{h}{n}$ ナル極メテ薄イ斜角壔デ,n ガ大ナルニ從ツテ同底同高ナル直角壔ニ限リナク近ヅク。而シテ後者ノ體積ハ $m\times\frac{h}{n}$ デアル,從ツテ甲角壔ノ體積ハソノ n 倍ナル

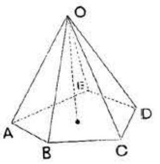
$$m\times\frac{h}{n}\times n=m.h$$

デアルコトガ推知サレル。(換言スレバ斜角壔甲ハ之ト等底,等高ノ直角壔乙ト等體積ヲモツ) ヨッテ一般ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 **44.** 角壔ノ體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ。

61.　角　錐

角錐トハ一ツノ多角形トソノ多角形ノ各邊ヲ底邊トシソノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トニヨツテ圍マレタ一ツノ多面體デアル。



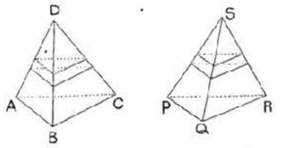
第十一章　立　　體　155

始メノ多角形ヲソノ角錐ノ**底面**トイヒ,同一點ヲ共有スル三角形ノ面ヲソノ**斜面**,スベテノ斜面ガ共有スル同一點ヲソノ**頂點**,相隣レル斜面ノ交リヲ**斜稜**トイフ。

角錐ノ頂點カラ底面マデ引イタ垂線ノ長サヲソノ**高サ**トイフ。

角錐ハソノ底面ガ三角形,四角形等ナルニ從ツテ之ヲ**三角錐**,**四角錐**等トイフ。前頁ノ圖ハ五角錐デアル,之ヲ記號デ O—ABCDE ノ如クニ表ス。

今 D—ABC ト S—PGR トニ於テ高サハ相等シク (h トスル),又底 ABC＝PQR ナルトキ,コノ二ツノ角錐ノ體積ヲ比較シテ見ル。(モシコノ二ツノ角錐ガ合同ナラバ勿論等體積デアル)



定理44ニ於ケル如ク,兩角錐ヲ何レモ底ニ平行ナル平面デ細カニ n 等分シタトスレバ各部分ハ極メテ薄イ直角壔ニ近クナル。サテ兩角錐ニ於ケルコレラノ部分ヲ考ヘルニ,高サハ何レモ $\frac{h}{n}$ デ相等シク,底面ハ下ヨリ順次ニ同ジ番目ノモノハ

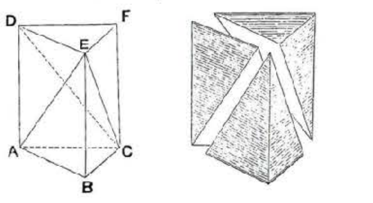
156　修訂女子幾何學新教科書

相等シイ。故ニ下ヨリ同ジ番目ニアル二ツノ部分ハ等底,等高ノ直角壔デ等體積デアルト見ルコトガ出來ル。從ツテ全角錐ノ體積モ亦兩者相等シイ。ヨッテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 **45.** 等底,等高ナル三角錐ノ體積ハ相等シイ。

コノ定理ニヨレバ任意ノ三角壔ヲ三ツノ相等シイ體積ノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。

今三角壔 ABC—DEF ヲ二ツノ平面 ACE, DEC デ截レバ,コヽニ生ズル三ツノ三角錐 E—ABC,



E—ACD, E—FDC ハソノ體積ガ相等シイ。

何トナレバ三角錐 E—ACD ト E—FDC トニ於テ,高サハ何レモ E ヨリ平面 ACFD ニ至ル距離デ,又ソノ底面 ACD, FDC ハ相等シイ。故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

第十一章　立　　體　157

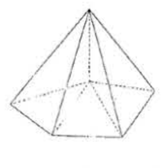
次ニ三角錐 E—ABC ト E—CDF 卽チ C--DEF トニ於テ,高サハ何レモ平面 ABC ト DEF トノ間ノ距離デ,又ソノ底面 ABC, DEF ハ相等シイ。故ニコノ二ツノ三角錐モ亦相等シイ體積ヲモツ。

故ニ三角壔 ABC—DEF ハ相等シイ體積ヲ有スル三ツノ三角錐ニ分タレル。

ヨッテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 **46.** 三角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

任意ノ角錐ハ之ヲ若干ノ同ジ高サノ三角錐ニ分ケテ考ヘレバヤハリ同樣ノ定理ヲ得ル。



定理 **47.** 角錐ノ體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

62.　直圓壔

直圓壔トハ矩形ヲソノ一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周リ回轉セシメルトキ生ズル體デアル。

竹内端三　『修訂女子幾何学新教科書』　昭和７年10月７日発行

56　新編中等教育幾何學教科書

3. 直圓錐ノ側面ヲ一ツノ母線ニ沿ウテ截リ,之ヲ平ラニ展開スレバ,ドンナ圖形ガ出來ルカ.

4. 底面ノ半徑 3 *cm*, 斜高 8 *cm* ナル直圓錐ノ展開圖ヲ厚紙ノ上ニ畫キ,之ヲ切拔イテ直圓錐ノ模型ヲ作レ.

---

22. 體積ノ計算

平面又ハ他ノ面ニヨツテ圍マレタ空間ノ部分ノ廣サヲ其等ノ面ノ圍メル立體ノ體積ト云フ.

全ク重ネ合スコトヲ得ル立體ノ體積ハ相等シイ. 又重ネ合スコトヲ得ナイ立體デモ體積ノ相等シイコトモアル.

二ツノ立體ノ體積ガ相等シイコトヲ單ニ二ツノ立體ハ相等シイト云フコトモアル.

體積ノ單位ニハ稜ノ長サガ長サノ單位ニ等シイ立方體ノ體積ヲ用ヒ,之ヲ表ハスニハ長サノ單位ノ名ノ前ニ**立方**ナル言葉ヲ添ヘルコト及ビ次ノ二ツノ性質ハ既ニ算術デ知レルトコロデアル.

第一章　幾何圖形　57

直方體ノ體積ハ其ノ縱,横,高サヲ表ハス數(同ジ單位ニテ)ノ積デ表ハサレル.

立方體ノ體積ハ其ノ一稜ノ長サヲ表ハス數ノ三乘デ表ハサレル.

又ヨク知ラレタル次ノ性質ガアル. (詳細ハ後學年ニ學ブデアラウ)

直角壔,直圓壔ノ體積ハ底面積ト高サトヲ表ハス數ノ積デ表ハサレル.

正角錐,直圓錐ノ體積ハ底面積ト高サトヲ表ハス數ノ積ノ三分ノ一デ表ハサレル.

球ノ半徑及ビ體積ヲ表ハス數ヲ夫夫 r 及ビ V トスレバ

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

デアル.

問　題

1. 底面ガ底邊 5 *cm*, 高サ 4 *cm* ナル三角形デ高サ 7 *cm* アル直角壔ノ體積ヲ求メヨ.

国枝元治　『新撰中等教育幾何学教科書』　昭和 8 年 12 月 28 日発行

62　第二篇　多　面　體

コレ等ヲ邊々相加フレバ,

(角壔 ABCD…–A′ ノ體積)

　　=(△A′B′C′+△A′C′D′+…ノ面積)×(高サ h)

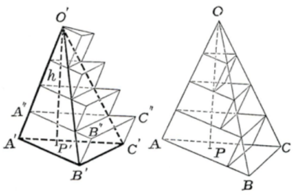
　　=(底面 A′B′C′D′…ノ面積)×(高サ h)。

系　等底等高ナル角壔ノ體積ハ相等シ。*

36. 角錐ノ體積。

定理**三十五**　等底等高ナル二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シ。

【證明】　等底等高ナル二ツノ三角錐ヲ O–ABC, O′–A′B′C′ トシ,兩錐體ノ高サ OP, O′P′ ヲ n 等分シ,ソノ分點ヲ通リテ底面ニ平行ナル平面ヲ作レ。



然ルトキハ兩角錐ノ截面ハ二ツヅヽ互ニ等積ナリ (何故ナリヤ)。

今 O–ABC, O′–A′B′C′ ノ體積ヲ夫々 V, V′ トシ,假リニ

$$V'>V$$

ナリトセヨ。

* コノ時一方ハ m 角壔,他方ハ n 角壔 $(m\neq n)$ ナルモ可ナリ。

第二章　多面體ノ體積　63

コノ時 O′–A′B′C′ ニ於テ底面 A′B′C′ 及ビ $(n-1)$ 箇ノ截面ヲ下底トシ, O′A′ ニ平行ナル稜ヲ有スル n 箇ノ三角壔ヲ作リ,コレ等ノ三角壔ノ體積ノ和ヲ P トセヨ。

然ルトキハ P ハ明カニ V′ ヨリ大ナリ。

次ニ O–ABC ニ於テ $(n-1)$ 箇ノ截面ヲ上底トシ OA ニ平行ナル稜ヲ有スル $(n-1)$ 箇ノ三角壔ヲ作リ,コレ等ノ體積ノ和ヲ Q トセヨ。

然ルトキハ Q ハ明カニ V ヨリ小ナリ。

$$\therefore\quad P>V'>V>Q.$$

$$\therefore\quad V'-V<P-Q.$$

然ルニ O–ABC, O′–A′B′C′ ニ於テ作ラレタル三角壔ハ上ヨリ順次ニ夫々互ニ相等シキヲ以テ(等底等高ナル故), P−Q ハ O′–A′B′C′ ノ最下ニアル三角壔 A′B′C′–A″B″C″ ニ等シ。

$$\therefore\quad V'-V<\text{三角壔}(A'B'C'\text{–}A''B''C'').$$

今高サ O′P′ ヲ等分スル數 n ヲ次第ニ大ニスレバ,三角壔 A′B′C′–A″B″C″ ノ高サハ次第ニ小トナル故,ソノ體積ハ n サヘ大ニスレバ,如何程ニテモ小トナル。

然ルニ上ノ不等式ハ n ガ如何ニ大ニナルモ常

米山國蔵　『新定訂立体幾何教科書』　昭和 8 年 9 月 30 日発行

64 第二篇 多 面 體

ニ成立シ從ツテ如何程ニテモ小トナリ得ル三角壔ノ體積ガ一定量 V′−V ヨリ大ナリトイフ結論ヲ生ズ。コレ明カニ不合理ナリ。

故ニ V′ ハ V ヨリ大ナルコトヲ得ズ。

同様ノ證明ニヨリ V ハ V′ ヨリ大ナラザルコトヲ知ル。

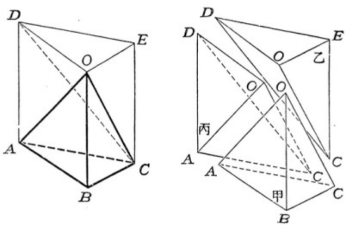
故ニ V ト V′ トハ相等シカラザルベカラズ。

定理 三十六 三角錐ノ體積ハ底面ニ高サヲ乘ジタルモノノ三分ノ一ニ等シ。

【假設】 V ハ三角錐 O–ABC ノ體積。
h ハソノ高サ,
F ハソノ底面積 トス。

【終結】 $V=\frac{F.h}{3}$

【證明】 ABC ヲ底面トシ, OB ニ等シク且コレニ平行ナル側稜ヲ有スル三角壔 ABC–DOE ヲ作レ。然ルトキハコノ



第二章 多面體ノ體積 65

三角壔ハ三角錐 O–ABC (甲) ト四角錐トニ分ツコトヲ得。而シテコノ四角錐ハ更ニコレヲ二ツノ三角錐 O–DCE (乙) ト O–DCA (丙) トニ分ツコトヲ得。

サテコノ三角錐(乙)ト(丙)トハ,相等シキ底面 DEC, DAC ヲ有シ,且同ジ高サ(O ヨリ ADEC ニ下セル垂線)ヲ有セルヲ以テ,ソノ體積相等シ(定理三十五)。

次ニ三角錐(甲)ト(丙)トモ亦等底等高ナルヲ以テ(何レヲ底ト見做スベキカ)ソノ體積相等シ。

故ニ三角錐 O–ABC ノ體積ハ三角壔 ABC–DOE ノ體積ノ三分ノ一ナリ。

然ルニ三角壔ノ體積ハ F×h ナリ。

$$\therefore\quad V=\frac{1}{3}.F\times h.$$

系 三角壔ハコレヲ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得。

定理 三十七 任意ノ角錐ノ體積ハソノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

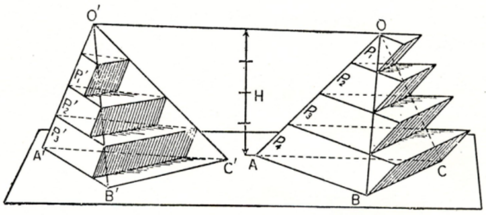
コノ角錐ヲ等高ナル若干箇ノ三角錐ニ分チ,定理三十六ヲ用ヒテコレヲ證明セヨ。

米山國蔵 『新定訂立体幾何教科書』 昭和 8 年 9 月 30 日発行

138 第二章 角 錐

27. 角錐ノ體積

定理 底面ト高サトノ相等シイ二ツノ三角錐ハ等積デアル.



二ツノ三角錐 $O-ABC$ ト $O'-A'B'C'$ トニ於テ底面 $\triangle ABC$ ハ $\triangle A'B'C'$ ニ等シク,高サガ共ニ H デアルトスレバ $O\text{-}ABC=O'\text{-}A'B'C'$

證明 モシ $O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トガ等シクナイトスルト何レカ一方ガ大キクナクテハナラナイ.

今 $O\text{-}ABC>O'\text{-}A'B'C'$ ト假定セヨ. H ヲ n 等分(假リニ 4 等分)シ各分點ヲ通リ底面ニ平行ナ平面ヲ引イテ截面ヲ作ルト,ソノ相對應スル截面ハ等積デアル.

今各截面ヲ底トスル角壔ヲ作ルニ,$O-ABC$

角 錐 ノ 體 積 139

ニ於テハ底面及ビ截面ノ上ニ,$O'-A'B'C'$ ニ於テハ截面ノ下ニ作ルトスル. サウスレバ相對應スル截面ヲ底トスル三角壔ハ等積デアルカラ

$$P_1=P_1',\quad P_2=P_2',\quad P_3=P_3'$$

然ルニ

$$O\text{-}ABC>O'\text{-}A'B'C' \quad デ$$

$$P_1+P_2+P_3+P_4>O\text{-}ABC>O'\text{-}A'B'C'>P_1'+P_2'+P_3'$$

デアルカラ $(O\text{-}ABC)-(O'\text{-}A'B'C')<P_4$
デナケレバナラナイ.

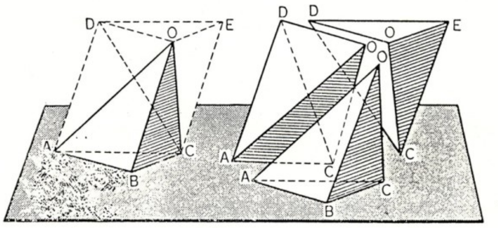
然ルニ P_4 ハ高サヲ 4 等分シタトキニ出來タモノデアルガ,ソノ等分ノ數 n ハ限リナク大キクスルコトガ出來ルモノデ此ノ角壔ノ高サ $\frac{H}{n}$ モ n ノ增スニツレテ小トナリ,n ノ增大シタ極限ニ於テハ 0 ト見ルコトガ出來ル. 從ツテ最下層ノ三角壔ノ體積モ 0 ト見ルコトガ出來ル. 故ニ兩三角錐ノ大サニ差ガアルトスレバ不合理ナ結果ヲ來ス. 故ニ $O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トハ等シクナクテハナラナイ.

卽チ $O\text{-}ABC=O'\text{-}A'B'C'$

広島高等師範学校付属中学校数学研究会 『新制幾何上級用』 昭和 9 年 1 月 28 日発行

140　第二章　角　錐

定理　三角錐ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$デアル.



三角錐 $O-ABC$ ニ於テ,其ノ底面ヲ a トシ,高サヲ h トスレバ其ノ體積ハ$\frac{1}{3}ah$ デアル.

證明　ABC ヲ底面トシ, BO ヲ側稜トスル三角壔 $ABC-DOE$ ヲ作リ,此ノ三角壔ヲ$\triangle AOC, \triangle DOC$ ノ平面デ三ツノ三角錐ニ截リ分ケタト考ヘル.

三角錐 $O-ABC$ ト $O-DAC$ ヲ頂點ガ C デ底面ガ OAB, ADO ノ三角錐ト見レバ

$$C\text{-}OAB=C\text{-}ADO$$

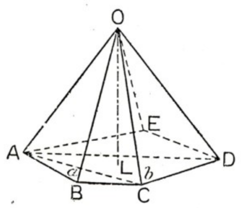
同様ニ　$O\text{-}DAC=O\text{-}ECD$

故ニ　$O\text{-}ABC=\frac{1}{3}(ABC\text{-}DOE)$

$$O\text{-}ABC=\frac{1}{3}ah$$

角　錐　ノ　體　積　141

系　多角錐ノ體積ハ其ノ底面積ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$デアル.



角錐ノ底面積ヲ s, 高サヲ h, 體積ヲ v トシ,角錐ヲ三角錐ニ分ツト

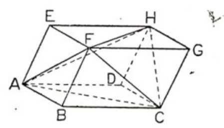
$$v=\frac{1}{3}ah+\frac{1}{3}bh+\frac{1}{3}ch$$
$$=\frac{1}{3}(a+b+c)h$$
$$=\frac{1}{3}sh$$

9　平行六面體ノ對角線ハ之ヲ六ツノ等積ナ四角錐ニ分ケルコトヲ證セヨ.〔126頁問題2參照〕

10　エジプトノギゼーノ大「ピラミッド」ハ底面ノ一邊ガ 233 m デ高サガ 146.5 m ノ正四角錐デアルトイフ. ソノ體積ヲ求メヨ.

(9)　正多角錐ノ底面上ノ任意ノ一點カラスベテノ側面ニ下シタ垂線ノ和ハ常ニ一定デアル.

(10)　圖ノ $ABCD-EFGH$ ハ平行六面體ヲ表ハス. 四面體 $A-FCH$ ノ體積ハ平行六面體ノ體積ノ幾分ニ當ルカ.



広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『新制幾何上級用』　昭和９年１月 28 日発行

206　第五篇　表面積及ビ體積

デアルカラ,コノ式中ノ $x=0,1,2,3,\cdots\cdots,n$ ナル値ヲ順ニ入レルト,次ノ式ガ得ラレル。

$$1^3=(0+1)^3=\qquad +1$$
$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1$$
$$4^3=(3+1)^3=3^3+3\cdot3^2+3\cdot3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^3=\{(n-1)+1\}^3=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1$$
$$(n+1)^3=(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

依ッテ

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+n^3+(n+1)^3$$
$$=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3+3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+(n+1)$$

故ニ求メル和ヲ S トスレバ

$$3S=(n+1)^3-3(1+2+3+\cdots\cdots+n)-(n+1)$$

然ルニ　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$　デアルカラ

$$3S=(n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)$$

第二章　體　積　207

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

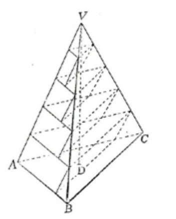
故ニ　$S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

定理　角錐ノ體積ハ,ソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

角錐 V−ABC……ニ於テ,底面積ヲ S, 高サヲ t, 體積ヲ T トスレバ,

$$T=\frac{1}{3}St$$

デアル。



[證明]　高サ VD ヲ n 個ニ等分シ,各分點ヲ通リ,底面ニ平行ナ平面デ角錐ヲ截ル。ソシテ各截口ヲ上ノ底面トシ,ソノ次ギノ截口ノ上ニ下底ヲ有シテ側稜ガ角錐ノ一ツノ側稜 VA ニ平行ナ$(n-1)$個ノ角壔ヲ作ル。

上ノヤウニシテ作ッタ截口ノ面積ヲ,頂點 V ニ近イ方カラ順ニ $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots, S_{n-1}$ トシ,コノ各ヲ上底トスル角壔ノ體積ヲソレゾレ $T_1, T_2, T_3, \cdots\cdots, T_{n-1}$ トスルト,コレ等ノ角壔ノ高サハ何レモ$\frac{t}{n}$デアルカラ

佐藤良一郎　『新制数学校用増加数学第１種課程用』　昭和９年１月 13 日発行

$$\mathrm{T}_1=\frac{\mathrm{S}_1 t}{n},\quad \mathrm{T}_2=\frac{\mathrm{S}_2 t}{n},\quad \mathrm{T}_3=\frac{\mathrm{S}_3 t}{n},\quad \cdots\cdots,\quad \mathrm{T}_{n-1}=\frac{\mathrm{S}_{n-1} t}{n}$$

コレ等ノ和ヲ作ルト

$$\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3+\cdots\cdots+\mathrm{T}_{n-1}=\frac{t}{n}(\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2+\mathrm{S}_3+\cdots\cdots+\mathrm{S}_{n-1})$$

サテ

$$\frac{\mathrm{S}_1}{\mathrm{S}}=\frac{\left(\frac{t}{n}\right)^2}{t^2}=\frac{1^2}{n^2}$$

$$\frac{\mathrm{S}_2}{\mathrm{S}}=\frac{\left(\frac{2t}{n}\right)^2}{t^2}=\frac{2^2}{n^2}$$

$$\frac{\mathrm{S}_3}{\mathrm{S}}=\frac{\left(\frac{3t}{n}\right)^2}{t^2}=\frac{3^2}{n^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathrm{S}_{n-1}}{\mathrm{S}}=\frac{\left\{\frac{(n-1)t}{n}\right\}^2}{t^2}=\frac{(n-1)^2}{n^2}$$

故ニ

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3+\cdots\cdots+\mathrm{T}_{n-1}&=\frac{\mathrm{S}t}{n^3}\left\{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(n-1)^2\right\}\\&=\frac{\mathrm{S}t}{n^3}\times\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\\&=\frac{\mathrm{S}t}{6n^3}\times(2n^3-3n^2+n)\\&=\frac{\mathrm{S}t}{3}-\frac{\mathrm{S}t}{6}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

然ルニ,上述ノ角壔ノ體積ノ和ハ,角錐 V−ABC……ノ高サヲ等分スル箇數 n ヲ限リナク增スト,ソレニ從ツテ漸次增大シテ角錐ノ體積ニ限リナク近ヅキ,又 n ガ限リナク增ストキハ,$\frac{\mathrm{S}t}{3}-\frac{\mathrm{S}t}{6}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ ハ限リナク $\frac{\mathrm{S}t}{3}$ ニ近ヅク。

故ニ

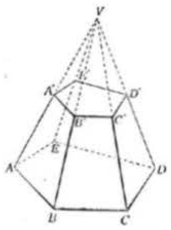
$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{S}t}{3}$$

デアル。

定理 角錐臺ノ兩底面ノ面積ヲ S, S′ トシ,高サヲ t,體積ヲ T トスレバ

$$\mathrm{T}=\frac{t}{3}(\mathrm{S}+\sqrt{\mathrm{SS}'}+\mathrm{S}')$$

[證明] 角錐臺ノ側面ヲ延シテ出來ル角錐ノ頂點ヲ V トシ,V ニ近イ方ノ底面 A′B′C′……ノ面積ヲ S′, 他ノ底面 ABC……ノ面積ヲ S トシ, A′B′C′……ヲ底面トシ V ヲ頂點トスル角錐ノ高サヲ x トスルサウスルト



$$\begin{aligned}\mathrm{T}&=\frac{1}{3}\mathrm{S}(x+t)-\mathrm{S}'x\\&=\frac{1}{3}\{\mathrm{S}t+(\mathrm{S}-\mathrm{S}')x\}\qquad(1)\end{aligned}$$

然ルニ

$$\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}=\frac{x^2}{(x+t)^2}$$

故ニ

$$\frac{\sqrt{\mathrm{S}'}}{\sqrt{\mathrm{S}}}=\frac{x}{x+t}$$

從ツテ

$$\frac{\sqrt{\mathrm{S}'}}{\sqrt{\mathrm{S}}-\sqrt{\mathrm{S}'}}=\frac{x}{t}$$

故ニ

$$x=\frac{\sqrt{\mathrm{S}'}}{\sqrt{\mathrm{S}}-\sqrt{\mathrm{S}'}}t$$

コレヲ(1)ニ代入スレバ

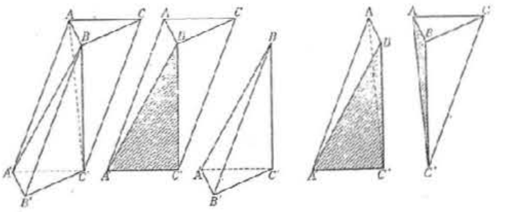
$$\begin{aligned}\mathrm{T}&=\frac{1}{3}\left\{\mathrm{S}t+(\mathrm{S}-\mathrm{S}')\frac{\sqrt{\mathrm{S}'}}{\sqrt{\mathrm{S}}-\sqrt{\mathrm{S}'}}t\right\}\\&=\frac{t}{3}\left\{\mathrm{S}+(\sqrt{\mathrm{S}}+\sqrt{\mathrm{S}'})\sqrt{\mathrm{S}'}\right\}\\&=\frac{t}{3}(\mathrm{S}+\sqrt{\mathrm{SS}'}+\mathrm{S}')\end{aligned}$$

即チ

$$\mathrm{T}=\frac{t}{3}(\mathrm{S}+\sqrt{\mathrm{SS}'}+\mathrm{S}')$$

練習題

1. 三角壔ハ等積ナ三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。



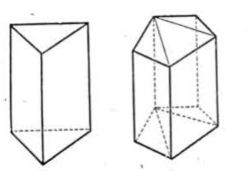
2. 一稜ノ長サ a ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ。
3. 高サ t ナル與ヘラレタ角錐ヲ,ソノ底面ニ平行ナ平面デ二等分スルタメニハ,底面カラ幾何ノ高サニ於テ截ルベキカ。
4. 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デ n 等分スルタメニハ,側稜ヲ如何ニ分ツベキカ。

68. 圓錐ノ體積

[定義] 一定點ヲ通ル直線ガ一定曲線ニ沿ウテ動クトキニ生ズル面ヲ錐面トイヒ,特ニ曲線ガ圓周ナルトキニハ,圓錐面トイフ。圓錐面ト一ツノ平面トデ圍マレタ立體ヲ圓錐トイフ。頂點,母線等ハ直圓

佐藤良一郎 『新制数学校用増加数学第1種課程用』 昭和9年1月13日発行

更ニ任意ノ角壔ハコレヲ幾ツカノ等高ナル三角壔ニ分ケテ考ヘレバ,



ソノ體積ハ矢張リ底面ト高サトノ積ニ等シイ。依ツテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 七十九. 角壔ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ。

系 等底,等高ナル角壔ノ體積ハ相等シイ。

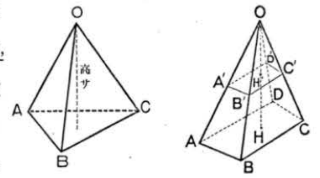
(底面ナル多角形ノ邊數ガ相等シクナイ場合ヲモ含ム。)

71. 角　錐

定義 **角錐**トハ一ツノ多角形ト,ソノ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トシソノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル若干ノ三角形トニヨツテ圍マレタ一ツノ多面體デアル。

初メノ多角形ヲソノ角錐ノ**底面**又ハ**底**トイヒ,

同一點ヲ共有スル三角形ヲソノ**斜面**,スベテノ斜面ガ共有スル同一點ヲソノ**頂點**,相隣ル斜面ノ交ハリヲ**斜稜**トイヒ,頂點ト底面トノ間ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ。



角錐ヲ底面ニ平行ナル平面デ截レバ,ソノ截リ口ハ底面ト相似デ,斜稜及ビ高サハスベテ相等シイ比ニ分タレル。

角錐ハソノ底面ガ三角形,四角形等ナルニ從ツテコレヲ**三角錐**,**四角錐**等トイフ。

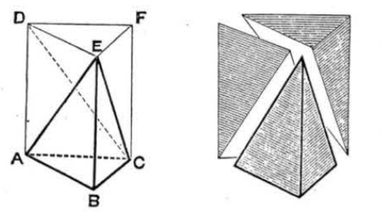
豫備定理 等底デ且等高ナル二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

コノ定理ノ證明ハ附錄ニ譲ル。

上ノ定理ニ依レバ任意ノ三角壔ヲ三ツノ相等シイ體積ノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。

今三角壔 ABC−DEF ヲ二ツノ平面 ACE, DEC デ截レバ,コヽニ生ズル三ツノ三角錐 E−ABC,

E−ACD, E−FDC ハソノ體積ガ相等シイ。



何トナレバ三角錐 E−ACD ト E−FDC トニ於テ,高サハ何レモ點 E ト平面 ACFD トノ間ノ距離デ,又ソノ底面 ACD, FDC ハ相等シイ。故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

次ニ三角錐 E−ABC ト E−FDC 卽チ C−DEF トニ於テ,高サハ何レモ平面 ABC ト DEF トノ間ノ距離デ,又ソノ底面 ABC, DEF ハ相等シイ。故ニコノ二ツノ三角錐モ亦相等シイ體積ヲモツ。

故ニ三角壔 ABC−DEF ハ相等シイ體積ヲ有スル三ツノ三角錐ニ分タレル。

依ツテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 八十. 三角錐ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系 1. 任意ノ角錐ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系 2. 等底,等高ナル角錐ノ體積ハ相等シイ。

72. 多面體ノ體積

一般ニ任意ノ多面體ノ體積ヲ求メルニハ,先ヅ若干ノ適當ナル平面ニヨツテソノ多面體ヲ幾ツカノ角壔及ビ角錐ニ分ケテ,ソノ各ノ體積ヲ上述ノ理ニヨツテ求メ,コレラヲ合計スレバ宜イ。

例　題

1. 稜ノ長サガスベテ $a$cm ナル三角錐(コレヲ**正四面體**トイフ)ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。
2. 一邊ノ長サ am ナル正六角形ヲ底面トシ,高サ $2a$m ナル六角錐ノ側面積及ビ體積ヲ求メヨ,但シ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ足ガ底面ノ外接圓ノ中心ニアルモノトスル。
3. 正四面體內ノ任意ノ一點カラソノ四面ニ引イタ垂線ノ和ハ一定デアル。

定義 角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ッ

竹内端三　『改訂新修幾何　平面・立体』　昭和10年10月5日発行

問　題

1. 二ツノ角壔ノ體積ノ比ハ底面積ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ.

2.* 斜角壔ノ底面積及ビ側稜ノ大サヲ表ハス數ヲ夫夫A及ビlトシ,側稜ガ底面トナス角ヲαトスレバ,其ノ體積ヲ表ハス數ハ$Al\sin\alpha$ニ等シイ.

3. 底面ガ矩形ナル平行六面體ガアル. 其ノ底面ノ二隣邊ノ長サハ夫夫15糎,18糎ニシテ底面ト交ハル稜ノ長サハ20糎,且ツ之ガ底面トナス角ハ60°デアルト云フ. 此ノ平行六面體ノ體積ヲ求メヨ.

4. 直六面體ノ一頂點ニ於テ出會フ三ツノ面ノ面積ガ夫夫12平方米,36平方米,48平方米ナルトキ,其ノ直六面體ノ對角線及ビ體積ヲ求メヨ.

5. 一邊ガa糎ナル正六邊形ヲ底面トシ,高サh糎ナル角壔ノ體積ヲ求メヨ.

6.* 直截面ノ面積及ビ側稜ノ夫夫相等シイ二ツノ角壔ハ相等シイ.

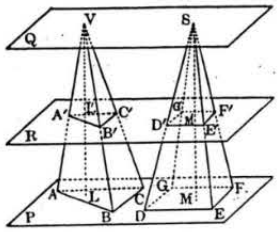
7. 側稜ノ長サ5糎,直截面ハ一邊ノ長サ4糎ナル正六角形ナル角壔ノ體積ヲ求メヨ.

40. 角錐ノ體積

定理二十七. 底面及ビ高サガ夫夫相等シイ二ツノ角錐ノ體積ハ相等シイ.

假設　角錐 V-ABC, S-DEFG ニ於テ底面 ABC, DEFG ノ面積ガ相等シク,且ツ其ノ高サ VL, SM ガ相等シイトセヨ.

終結　然ルトキハ V-ABC ト S-DEFG トハ其ノ體積ガ相等シイ.



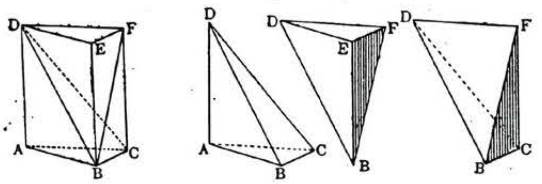
證明　(かゔぁりえりノ原則ヲ用ヒレバ容易ニ證明スルコトガ出來ル. 各自試ミヨ)

定理二十八. 三角壔ハ相等シイ三ツノ三角錐ニ分ツコトガ出來ル.

假設　ABC-DEF ヲ三角壔トセヨ.

終結　然ルトキハ ABC-DEF ハ相等シイ三ツノ三角錐ニ分タレル.

證明　頂點B, D, Fノ定メル平面ト, B, C, Dノ定



メル平面トニヨッテ此ノ三角壔ハ三ツノ三角錐 D-ABC, B-DEF, D-BCF ニ分タレル. 而シテ三角錐 D-ABC, B-DEF ハ底面 ABC, DEF ガ相等シク,且ツ其ノ高サモ亦明カニ相等シイ.

$$\therefore\ \text{D-ABC}=\text{B-DEF}$$

又 B-DEF ハ D-BEF ニ同ジ,故ニ同様ニシテ

$$\text{B-DEF}=\text{D-BCF}$$

$$\therefore\ \text{D-ABC}=\text{B-DEF}=\text{D-BCF}$$

系 I.　三角錐ハ之ト底面及ビ高サノ夫夫相等シイ三角壔ノ三分ノ一ニ等シイ.

系 II.　三角錐ノ體積ヲ表ハス數ハ其ノ底面積ト高サトヲ表ハス數ノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

系 III.　角錐ノ體積ヲ表ハス數ハ其ノ底面積ト高サトヲ表ハス數ノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

問　題

1. 底面ノ一邊ガ6糎ニシテ高サガ10糎ナル正四角錐ノ體積ヲ求メヨ.

2. 底面積ガ30平方糎ニシテ體積ガ40立方糎ナル角錐ノ高サヲ求メヨ.

3. 埃及ノ大ぴらみっどノ底面ハ一邊200米ノ正方形ニシテ其ノ側面ハ何レモ正三角形デアルト云フ. 其ノ體積ヲ求メヨ.

4. 二ツノ角錐ノ比ハ底面ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ.

41. 角錐臺ノ體積

定理二十九. 角錐臺ノ體積ヲ表ハス數ハ其ノ兩底面ノ面積ヲ表ハス數及ビ其ノ比例中項ノ和ト,高サヲ表ハス數トノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

假設　角錐臺 AC′ ノ體積ヲ表ハス數ヲ V, 兩底面 ABC……E, A′B′C′……E′ ノ面積ヲ表ハス數ヲ夫夫 b^2, b'^2 トシ,高サヲ表ハス數ヲ h トセヨ.

終結　然ルトキハ $V=\frac{1}{3}h(b^2+bb'+b'^2)$ デアル.

證明　此ノ角錐臺ノ側面ヲ延長スルコトニヨ

国枝元治　『新撰中等教育幾何学教科書[増課用]』　昭和12年1月27日発行

４．再構成時代（昭和 15 年から昭和 21 年まで）の様相

「中學校教授要目中數學及理科ノ要目」（昭和 17 年 3 月 5 日文部省訓令第 4 號）

中學校

數　學

數學ニ於テハ數、量、空間ヲ中心トシテ事物現象ヲ考察處理スルノ能力ヲ錬磨シ數理ト其ノ應用トノ一般ヲ理會セシメ數理思想ヲ涵養シ國民生活ノ實践ニ導キ國運進展ノ實ヲ擧グルノ資質ヲ啓培スルコトヲ要ス

數學ニ於テハ數、量、空間ノ基本的性質ト其ノ重要ナル理法及之ガ應用ニ就キテ授クベシ

教授ニ當リテハ數、量、空間ノ關聯ヲ重視シ第一類ト第二類トノニ系統ハ相互ニ關聯セシメツツ一體タル數學ノ目的ヲ達成セシムベシ

低學年ニ於テハ具體的ナル操作ニヨリテ基礎的考察處理ノ能ヲ得シメ學年ノ進ムニツレテ數理ノ嚴正ナル考察ニ向ハシメ高學年ニ於テハ綜合的考察力ノ涵養ニ力ムベシ

實測、作圖等ノ作業ヲ重視シ知行一體ノ修練ヲ爲サシムルト共ニ直觀ト推理トヲ一體トシテ抽象シ具體化スルノハタラキヲ錬磨シ工夫創造スルノ能力ヲ養フニ力ムベシ

反覆練習ニヨリテ基本事項ヲ體得セシムルト共ニ實地ニ活用スルノ能力ヲ錬磨スルニ力ムベシ

教授ニ當リテハ國民ノ日常生活竝ニ郷土ノ實際ノ資料ヲ重視スベシ

全般ニ亙リ産業、國防ノ観點ニ立チテ指導スベシ

第一學年

第一類

統計的處理

　日常卑近ナル事項ニ就キ統計的ニ考察スル態度ト的確ナル處理ヲ爲ス能力トヲ養フ

　　統計資料ノ蒐集ト整理

　　種々ノ指數ト率

　　歩合

文字ノ使用ト公式

　文字ヲ用ヒテ量的關係ヲ式ニ表示スルコトヨリ入リ文字ノ使用ニ慣レシム公式ヲ函數關係トシテ考察セシメ實驗ヨリ公式ヲ導カシム

　　公式、方程式、實驗式ト圖表

正數、負數

　負數ノ觀念ヲ導入シ數ノ四則計算ニ習熟セシム

　　反對ノ性質ヲ有スル量

　　數ノ大小ト四則

一次方程式

　座標ヲ導入シ式ト圖表トノ關聯ヲ緊密ナラシメ一次方程式ノ解法ニ習熟セシム

　　等速運動　直交座標
　　一次式ト直線
　　一次方程式
　　聯立一次方程式　二直線ノ交點

第二類

測量、測定

　簡單ナル測量法ヲ指導シ長サ、角度、面積、體積ノ觀念ヲ明確ニシ物指、分度器ノ使用ヲ正確ナラシム又測定値ノ處理ヲ指導ス

　　物指ト副尺
　　平板測量
　　算術平均　概算　計算尺

圖形ノ畫キ方

　正確ナル圖形ノ畫キ方ヲ指導シ其ノ基本的性質ニ親シマシム又種々ノ曲線ヲ畫カシメ圖形ノ觀念ヲ豊富ナラシム

　　平面上ノ基本作圖
　　簡單ナル投影圖
　　種々ノ曲線

圖形ノ合同

　直觀ト論理トヲ一體トシテ圖形ノ合同ニ關スル觀念ヲ明確ナラシム

　　平面圖形ノ合同
　　圖形ノ決定
　　立體圖形ノ合同

圖形ノ對稱ト囘轉

　圖形ノ對稱、囘轉ニ關スル性質ヲ綜合的ニ取扱ヒ圖形ノ考察ヲ深カラシム

　　對象ノ中心軸　軸、面
　　囘轉ノ中心　軸
　　規則正シキ圖形

第二學年

第一類

整式

　整式ノ計算ニ習熟セシム

　　整式ノ四則
　　乗法ノ公式

分數式

　分數式ノ計算ヲ授ケ比例式ノ意味ヲ明瞭ナラシム

　　簡單ナル分數式

比例式

平方ト平方根

数ノ平方根ヲ中心トシテ表ノ作製及其ノ使用ニ慣レシム

表ノ作製ト使用

補間法

數ノ開平法

二次方程式

二次式ノ變化ヲ考察セシメ二次方程式ノ取扱ニ習熟セシム

二次式ノ變化

二次方程式ノ解法

二次式ノ因数分解

第二類

平行ト相似

平行ト相似トニ關スル事項ヲ整理シ之ヲ適用シテ圖形ノ考察ヲ深カラシム

直線、平面ノ平行

平行四邊形

比例

面積

體積

相似圖形

直角三角形

直角三角形ノ性質ヲ考察シ鋭角ノ三角函數ヲ導ク

直角三角形ノ性質

鋭角ノ三角函數

圓ト球

圓及球ニ關スル基本的性質ヲ考察セシム

圓球ニ關スル比例

圓ニ内接又ハ外接スル多角形

第三學年

第一類

多項式

多項式ノ除法ヨリ其ノ展開ニ及ビ多項式ノ計算ニ習熟セシム

多項式ノ除法

多項式ノ展開　近似値

不等式

不等式ノ基本事項ヲ整理擴充シ其ノ取扱ニ習熟セシム

　　不等式ノ基本的性質
　　不等式ノ解法
對數
　指數法則ヲ明ニシ指數ノ擴張ヲ行ヒ對數計算ニ習熟セシム
　　指數ノ性質　對數ノ性質
　　對數表　計算圖表
第二類
軌跡
　圖形ノ連續的變形移動ヲ考察シ軌跡ノ觀念ヲ明確ナラシム
　　運動スル點ノ畫ク圖形
　　條件ヲ滿ス點ノ存在スル範圍
　　條件ニ從ヒテ動ク圖形
圓運動ト三角函數
　圓運動ノ考察ヨリ一般角ノ三角函數ヲ導キ其ノ基本事項ヲ明ナラシム
　　圓運動
　　角速度　弧度法　極座標
　　三角函數ノ變化
　　三角眞數表
三角形ト三角函數
　三角函數ヲ三角形トノ關係ニ於テ考察セシム
　　正弦法則　餘弦法則
　　加法定理
　　三角形ノ解法
　　一般圖形ノ應用
第四學年
第一類
箇数ノ處理
　有限箇ノモノヲ分類處理スル能力ヲ養フ
　　順列　組合セ　確率
　　二項定理
自然數ト級數
　自然數ノ簡單ナル性質ヲ考察セシメ級數ニ及ブ
　　自然數ノ性質
　　級數
系列ノ觀察處理
　一定ノ法則ニ從ヒテ無限ニ生成スル數及圖形ノ考察ヲ行ヒ極限ノ觀念ヲ導ク

数列
圖形ノ系列
區分求積法
連續的變化ノ考察處理
連續的變化ヲ中心トシテ極限ノ考察處理ヲ行ハシム
近似値
極限
切線
第二類
投影圖及透視圖
投影圖法ノ基本事項ノ取扱ヲ訓練シ直線、平面ノ位置關係ヲ考察セシメ更ニ投影圖ニ及ブ
直線平面ノ位置關係
投影圖ノ見方ト畫キ方
簡單ナル投影圖
球面上ノ圖形
球面上ノ圖形ニ關スル基本事項ヲ考察セシメ球面圖形ヲ平面ニ描寫スルコトヲ取扱ヒ地圖ノ作リ方ニ及ブ
球面上ノ圖形
地圖
圖形ノ切斷
平面ニヨル圓柱、圓錐ノ切斷面ヲ觀察セシメ圓錐曲線ノ基本的性質ヲ綜合的ニ考察セシム
圓柱圓錐ノ切斷
圓錐曲線ノ基本的性質
第五學年
第一類
函數ノ變化
極限ノ觀念ニヨリ函數ノ變化ヲ考察シ其ノ應用ヲ圖ル
函數ノ變化
極大　極小
統計圖表ノ考察
統計圖表ニ對スル考察ヲ深メ實驗式ニ關スル處理ニ及ブ
度數分布
平均ト偏差
相關關係
實驗式
第二類

圓錐曲線

圓錐曲線ノ考察ヲ中心トシテ圖形ノ解析的取扱ノ基本事項ヲ指導ス

直線及圓

圓錐曲線ノ標準方程式

力ト運動トノ考察

力ト運動トニ就キテ考察セシメ數學ノ應用ニ慣レシム

速度　加速度

抛射體　週期運動

力ト運動

注　意

一　教授ノ際ハ常ニ國民學校理數科算數ノ教材トノ關聯ニ留意スベシ

二　全般ニ亙リ關係觀念ノ涵養ニ留意スベシ

三　思考ノ表現ハ常ニ正確簡潔ニ爲サシムルヤウ訓練スベシ

四　問題ハ徒ニ多キヲ望マズ持久的ニ考察スルノ態度ニ徹セシムベシ

五　計算ノ練習ニ力メシメ概算及近似計算ニ習熟セシムベシ

六　數ノ計算ニ當リテハ暗算、筆算、珠算ヲ用ヒ又計算尺、各種ノ表ノ使用ニ慣レシムベシ

七　圖形ハ之ヲ正確ニ畫ク習慣ヲ養フベシ

八　他學科目トノ關聯ニ留意シ特ニ理科トノ連繫ヲ密ニスベシ

「中等學校令」（昭和 18 年 1 月 21 日勅令第 36 號）

第 1 条

中等學校ハ皇國ノ道ニ則リテ高等普通教育又ハ實業教育ヲ施シ國民ノ練成ヲ爲スヲ以テ目的トス

第 13 条

中等學校ノ設備、編制、教科、教授訓練、生徒ノ入學、退學、転學及懲戒等ニ關スル規定並ニ實業學校ノ學科ニ關スル規定ハ文部大臣之ヲ定ム

附則

第 16 条

本令ハ昭和 18 年 4 月 1 日ヨリ之ヲ施行ス

「中學校規定」（昭和 18 年 3 月 2 日文部省令第 2 號）

第 1 章　総則

第 2 条

中學校ニ於テハ教科及修練ヲ課スベシ

教科ハ國民科、理數科、体錬科、芸能科、實業科及外國語科トス

第 4 条

理數科ハ事物事象ヲ正確ニ考察處理スルノ能力ヲ練磨シ事物現象ヲ貫ク理法ト其ノ應用トノ一般ヲ會得セシメ之ヲ國民生活ニ活用スルノ修練ヲ爲サシメ合理創造ノ精神ヲ長養シ國運發展ノ實ヲ擧グルノ資質ヲ啓培スルヲ以テ要旨トス

理數科ハ之ヲ分チテ數學、物象及生物ノ科目トス

（昭和 18 年 3 月 25 日文部省訓令第 2 號）

中學校理數科教授要旨

理數科ハ事物現象ヲ正確ニ考察處理ヲスル能力ヲ練磨シ事物現象ヲ貫ク理法ト其ノ應用トノ一般ヲ會得セシメ之ヲ國民生活ニ活用スルノ修練ヲ爲サシメ合理創造ノ精神ヲ長養シ國運發展ノ實ヲ擧グル資質ヲ啓培スルヲ以テ要旨トス

理數科數學ハ數、量、空間ヲ中心トシテ事物現象ヲ考察處理スルノ能力ヲ練磨シ數理ト其ノ應用ノ一般トヲ會得セシメ之ヲ國民生活ニ活用スルノ修練ヲ爲サシメ數理思想ヲ涵養スルモノトス

理數科數學ハ數、量、空間ノ基本的性質ト其ノ重要ナル理法並ニ國防・産業及ビニ國民生活ヘノ應用ニ付テ授クベシ

理數科物象ハ（以下省略）

教授方針

一　科學ノ振興ガ皇國ノ使命達成ニ緊要スル所以ヲ明ニシ科學研究ノ熱意ヲ振起スベシ

一　眞摯ナル態度ヲ以テ事物現象ノ種々相ヲ究ムルト共ニ其ノ全一性ヲ理解セシメ正シキ自然觀ノ確立ニ導クベシ

一　直觀ヲ重視スルト共ニ抽象シ分析シ綜合スルノハタラキヲ練磨シテ万物ノ眞相ヲ究ムル能力ヲ修練セシムベシ

一　觀察・實驗及ビ實習ヲ中心トシテ知行一體ノ修練ヲ爲サシムベシ

一　授業ニ當タリテハ國民ノ日常生活ニ密接ラシメ特ニ郷土ノ實際ニ即シテ取扱フベシ
　　全般ニ亙リ産業・國防ノ観點ニ立チテ指導スベシ

一　他教科及ビ修練トノ關係ニ留意スルト共ニ理數科各科目ノ一體關聯ニ意ヲ用ヒタ教科ノ趣旨達成ヲ期スベシ

毎週授業時數配當

科目/學年	第一學年	第二學年	第三學年	第四學年
理數科數學	四	四	四	五
理數科物象	二	二	四	四
理數科生物	二	二	一	一

夜間ニ於テ授業ヲ行フモノ

科目/學年	第一學年	第二學年	第三學年
理數科數學	四	三	四
理數科物象	二	三	三
理數科生物	一	二	一

理數科數學　敎授方針

一　授業ニ當リテハ數、量、空間ノ關聯ヲ重視シ第一類ト第二類トノニ系統ハ密接ニ關聯セシメツツ一體タル數學ノ目的ヲ達成スルニ力ムベシ

一　低學年ニ於テハ具體的ナル操作ニヨリテ基礎的考察處理ノ能力ヲ練磨シ學年ノ進ムニ随ヒ數理ノ嚴正ナル考察ニ向ハシメ高學年ニ於テハ綜合的考察力を涵養スベシ

一　實測、作圖等ノ作業ヲ重視シ知行一體トシテ抽象シ具體化スルノハタラキヲ錬磨シ工夫創造ノ能力ヲ養フベシ

一　反覆練習ニ依リテ基本事項ヲ體得セシムルト共ニ實地ニ活用スルノ能力ヲ錬磨スベシ

敎授事項

第一學年　百三十六時（毎週四時）

第一類（毎週二時）

一　圖表ト式

日常卑近ナル事象ニ關シ之ヲ統計的ニ考察處理スルノ能力ヲ養ヒ文字ノ使用ニ慣レシメ簡單ナル場合ニ付ケ公式ヲ函數關係トシテ考察セシム又表及圖表ノ作製を爲サシメ開平法ニ及ブ

　統計圖表

　簡單ナル公式・方程式

　比例・比例式

　簡單なる實驗式

　平方ト平方根

二　正ノ數ト負ノ數

負ノ數ノ觀念ヲ導入シ數ノ四則計算ニ習熟セシム

　反對ノ性質ヲ有スル量

　數ノ大小ト四則

第二類（毎週二時）

一　測量

簡單ナル測量法ヲ指導シ長サ・角度・面積等ノ觀念ヲ明確ニシ物指・分度器等ノ使用ヲ正確ナラシム又測定値ノ處理竝ニ計算尺ノ使用ヲ指導ス

　概　則

　平板測量

　測定値ノ處理

二　圖形ノ畫キ方

正確ナル圖形ノ畫キ方ヲ指導シ其ノ基本的性質ニ親シナシムルト共ニ種々ノ曲線ヲ畫カシメ圖形ノ觀念ヲ豊富ナラシム

　簡單ナル投影圖

　種々ノ曲線

三　一次函數（其ノ一）

座標ヲ導入シ一次式ニ付テ式ト圖表トヲ一體トシテ考察スル能力ヲ養フ

　等速運動・直交座標

　一次式ト直線

三　對稱・回轉・合同

直觀ト論理トヲ一體トシテ圖形ノ運動及對稱ニ關スル性質ヲ取扱ヒ圖形ノ合同ニ關スル觀念ヲ明確ニシテ圖形ノ考察ヲ深カラシム

　對　稱

　回　轉

　圖形ノ合同・決定

　模　様

第二學年　百三十六時（毎週四時）

第一類（毎週二時）

一　一次函數（其ノ二）

一次式ノ變化ヲ考察セシムルト共ニ一次方程式ノ解法ニ習熟セシメ一次不等式ノ取扱ニ及ブ

　一次式ノ變化

　一次方程式

　一次不等式

二　二次函數

二次式ノ變化ヲ考察セシムルト共ニ二次方程式ノ解法ニ習熟セシメ二次不等式ノ取扱ニ及ブ

　二次式ノ變化

　二次方程式

　二次不等式

三　式ノ計算

整式・分數式ノ計算ニ慣レシメ多項式ノ除法ニ及ブ

　式ノ四則

　分數式ノ變化

　多項式ノ除法

第二類（毎週二時）

一　平行ト相似

平行ト相似トニ關スル事項ヲ整理シ特ニ圖形ニ關スル比例ノ觀念ヲ明ニシ圖形ノ考察ヲ深カラシム

　直線・平面ノ平行

　平行四邊形

　相似圖形

二　直角三角形

直角三角形ノ性質ヲ考察セシメ鋭角ノ三角函數ヲ導ク

　直角三角形ノ性質

　鋭角ノ三角函數

三　圓ト球

圓及球ニ關スル基本的性質ヲ考察セシム

　圓・球ニ關スル比例

　圓ニ内接又ハ外接スル多角形

　弧度法

第三學年　百二十八時（毎週四時）

第一類（毎週二時）

一　箇數ノ處理

有限箇ノモノヲ處理スル能力ヲ養フ

　分類・整理

第二類（毎週二時）

一　對數

指數及對數ノ性質ヲ考察セシメ對數計算ニ習熟セシム

場合ノ數

指數法則
對數計算
計算圖表

二　系列ノ考察處理
一定ノ法則ニ隨ヒテ生成スル數及圖形ノ系列ヲ考察セシメ極限ノ觀念ニ導ク
數　列
簡單ナル級數
圖形ノ系列
區分求積法

二　三角函數
圓運動ノ考察ヨリ一般角ノ三角函數ヲ導キ其ノ基本的事項ヲ明ナラシメ更ニ之ヲ三角形トノ關聯ニ於テ考察セシム
圓運動
三角函數ノ變化
正弦定理・餘弦定理
加法定理
圖形ノ應用

三　近似値ト誤差
量ノ近似値ノ取扱ニ習熟セシメ連續的變化ノ考察ニ資セシム
量ノ主要部分
近似式ト誤差

三　軌跡
圖形ノ連續的ナル變形移動ヲ考察處理スルノ能力ヲ養フ
運動スル點ノ畫ク圖形
條件ヲ滿ス點ノ存在スル範圍
條件ニ隨ヒテ動ク圖形

第四學年　百六十時（毎週五時）

第一類（毎週三時）
一　連續的變化
連續的變化ヲ中心トシテ極限ニ關スル初步的事項ヲ考察セシム
極　限
接　線
函數ノ變化

二　統　計
統計ニ關スル考察ヲ深メ其ノ處理ノ能力ヲ高メシム
資料ノ蒐集ト整理
度數分布
平均ト偏差

第二類（毎週二時）
一　立體圖形ノ表現
投影圖・透・圖ノ基本的事項ノ取扱ヲ訓練シ空間ニ於ケル圖形相互ノ位置關係ノ洞察ニ習熟セシメ併セテ圓錐曲線ノ基本的性質ヲ綜合的ニ考察セシム
直線・平面ノ位置關係
投影圖
透・圖
圓柱・圓錐ノ切斷

相關關係

夜間ニ於テ授業ヲ行フモノ

第一學年　百三十六時（毎週四時）

第一類（毎週二時）

一　一次函數ト二次関数

一次式・二次式ニ付テ式ト圖表トヲ一體トシテ其ノ變化ヲ考察セシムルト共ニ一次方程式・二次方程式ノ解法ニ習熟セシメ不等式ニ及ブ

　一次式ノ變化

　一次方程式

　二次式ノ變化

　二次方程式

　不等式

二　式ノ計算

整式・分數式ノ計算ニ慣レシメ多項式ノ除法ニ及ブ

　式ノ四則

　分數式ノ變化

　多項式ノ除法

一　箇數ノ處理

有限箇ノモノヲ處理スル能力ヲ養フ

　分類・整理

　場合ノ數

第二類（毎週二時）

一　對稱・回轉・合同

直觀ト論理トヲ一體トシテ圖形ノ運動及對稱ニ關スル性質ヲ取扱ヒ圖形ノ合同ニ關スル觀念ヲ明確ニシテ圖形ノ考察ヲ深カラシム

　對　稱

　回　轉

　圖形ノ合同・決定

　模　樣

二　平行ト相似

平行ト相似トニ關スル事項ヲ整理シ特ニ圖形ニ關スル比例ノ觀念ヲ明ニシ圖形ノ考察ヲ深カラシム

　直線・平面ノ平行

　平行四邊形

　相似圖形

三　直角三角形

直角三角形ノ性質ヲ考察セシメ鋭角ノ三角函數ヲ導ク

　直角三角形ノ性質

　鋭角ノ三角函數

第二學年　九十六時（毎週三時）

第一類（毎週二時）

一　對數

指數及對數ノ性質ヲ考察セシメ對數計算ニ習熟セシム

　指數法則

　對數計算

　計算圖表

二　系列ノ考察處理

第二類（毎週二時）

一　圓ト球

圓及球ニ關スル基本的性質ヲ考察セシム

　圓・球ニ關スル比例

　圓ニ内接又ハ外接スル多角形

　弧度法

二　三角函數

一定ノ法則ニ隨ヒテ生成スル數及圖形ノ系列ヲ考察セシメ極限ノ觀念ニ導ク

　數　列

　簡單ナル級數

　圖形ノ系列

　區分求積法

圓運動ノ考察ヨリ一般角ノ三角函數ヲ導キ其ノ基本的事項ヲ明ナラシメ更ニ之ヲ三角形トノ關聯ニ於テ考察セシム

　圓運動

　三角函數ノ變化

　正弦定理・餘弦定理

　加法定理

　圖形ノ應用

三　軌跡

圖形ノ連續的ナル變形移動ヲ考察處理スルノ能力ヲ養フ

　運動スル點ノ畫ク圖形

　條件ヲ滿ス點ノ存在スル範圍

條件ニ隨ヒテ動ク圖形

第三學年　百二十八時（毎週四時）

第一類（毎週二時）

一　連續的變化

連續的變化ヲ中心トシテ極限ニ關スル初歩的事項ヲ考察セシム

　極　限

　接　線

　函數ノ變化

二　統　計

統計ニ關スル考察ヲ深メ其ノ處理ノ能力ヲ高メシム

　資料ノ蒐集ト整理

　度數分布

　平均ト偏差

　相關關係

第二類（毎週二時）

一　立體圖形ノ表現

投影圖・透・圖ノ基本的事項ノ取扱ヲ訓練シ空間ニ於ケル圖形相互ノ位置關係ノ洞察ニ習熟セシメ併セテ圓錐曲線ノ基本的性質ヲ綜合的ニ考察セシム

　直線・平面ノ位置關係

　投影圖

　透・圖

　圓柱・圓錐ノ切斷

教授上ノ注意

一　全般ニ亙リ關係觀念ノ涵養ニ留意スベシ

一　思考ノ表現ハ常ニ之ヲ正確簡潔ニ爲サシムルヤウ訓練スベシ
一　問題ハ徒ラニ多キヲ望マズ持久的ニ考察スルノ態度ニ徹セシムベシ
一　計算ノ練習ニ力メシメ概算及近似計算ニ習熟セシムベシ
一　數ノ計算ニ當リテハ暗算、筆算、珠算ヲ用ヒ又計算尺・各種ノ表ノ使用ニ慣レシムベシ
一　圖形ハ之ヲ正確ニ畫ク習慣ヲ養フベシ
一　夜間二於テ授業ヲ行フモノニ在リテハ國民學校高等科理數科算數ノ学習ヲ基礎トシテ數理ノ嚴正ナル考察ニ導キ進ンデ綜合的考察力ヲ養フニ力ムベシ

学校教育法(昭和 22 年法律第 26 号)により、本令は昭和 22 年 3 月 31 日をもって廃止された。

6

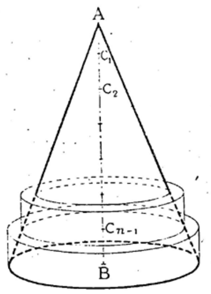
マタ,ソノ誤差ノ限界ヲ圖ノ上ニ表ハス方法ヲ工夫セヨ。

次ニ, OA ノ等分數ヲ多クスルト,ソノ誤差ハドノヤウニ變ハルカヲシラベヨ。

問 3.　前問デ $a=1$ トシテ OAB ノ面積ヲ計算シ,ソノ誤差ノ限界ヲ示セ。

次ニ,上ト同樣ナ方法デ OAB ノ面積ヲ求メテ,ソノ誤差ガ 0.01 ヨリ小サクナルヤウニスルニハ, OA ヲ何等分スレバ十分デアルカヲシラベヨ。

問 4.　直圓錐ノ高サヲ a,底面ノ半徑ヲ b トスル。



高サ AB ヲ n 等分シ,各分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナ平面デコノ直圓錐ヲ切リ,ソレラノ切ロヲ上カラ順ニ $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n-1}$ トスル。

$C_1, C_2, C_3, \cdots\cdots, C_{n-1}$ 及ビ B ヲ底面トシテ,各,

7

ノ高サガ $\frac{a}{n}$ デアル n 箇ノ直圓柱ノ體積ノ和ハ,ドノヤウナ式デ表ハサレルカ。

マタ,コノ式ヲ直圓錐ノ體積ヲ表ハス近似式トスルト,誤差ノ限界ハドノヤウニナルカ。圖ノ上デ示ス方法ヲ考ヘヨ。

1.　問 2 ノ方法デ $y=\sqrt{x}$ ノ表ハス曲線ト, x 軸及ビ點(4, 0) ヲ通ツテ y 軸ニ平行ニ引イタ直線トデ圍マレル面積ノ近似値ヲ求メヨ。

2.　問 2 ノ方法デ $y=\frac{1}{2}x(10-x)$ ノ表ハス曲線ト x 軸トデ圍マレル面積ノ近似値ヲ求メヨ。

3.　前問デ原點ト點(10, 0) ノ間ヲ n 等分シテ面積ヲ表ハス近似式ヲ作ルト, n ノドノヤウナ式ニナルカヲ考ヘヨ。

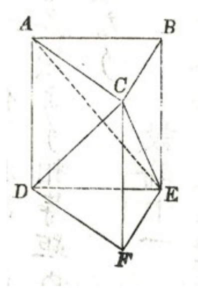
4.　問 2 ノ方法デ $y=2x^2$ ノ表ハス曲線ト x 軸及ビ直線 $x=a$ デ圍マレル面積ヲ表

『数学４　第二類』　昭和 19 年 6 月 12 日発行

５．まとめ

歴史の変遷を見てきたわけであるが、各教則に基づく教科書の角錐の体積の求め方は、以下のように大きく 6 つの型に分けることができる。

(1) 三角柱から三角錐の体積を求める。



三角柱 ABC-FDE を面 AEC と面 CED で分断する。すると、3 つの三角錐 E-ABC、C-DEF、C-AED が作られる。これら 3 つの三角錐の体積が等しいことを示す。

定理　底面積と高さが等しい角錐の体積は等しい。

三角錐 E-ABC と三角錐 C-DEF において、各底面 ABC と DEF はもとの三角柱の上底と下底になるので、これらの底面積は等しい。各三角錐の高さももとの三角柱の高さと等しい。よって、三角錐 E-ABC と三角錐 C-DEF の体積は等しい。

三角錐 E-ABC と三角錐 C-AED において､三角錐 E-ABC を三角錐 C-ABE であると考える。底面 ABE と AED は、平行四辺形 ABED を対角線で分断した二つの三角形なので、2 つの底面積は等しい。高さは共通の高さをもっているので、三角錐 C-ABE と三角錐 C-AED の体積は等しい。

以上から、すべての三角錐の体積が等しいことが分かるので、三角錐の体積はもとの三角柱の $\frac{1}{3}$ となることが分かる。

(2) 三角錐の体積から一般の角錐の体積を求める。

一般の角錐について考える。ここでは、分かりやすいように五角錐について考える。この五角錐を F-ABCDE とする。五角錐 F-ABCDE を 3 つの三角錐 F-ABC,F-ACD,F-ADE に分ける。この 3 つの三角錐の体積はわかるのでこれらの体積は

$$\text{F-ABC} = \frac{1}{3} \times \triangle\text{ABC} \times \text{高さ}$$
$$\text{F-ACD} = \frac{1}{3} \times \triangle\text{ACD} \times \text{高さ}$$
$$\text{F-ADE} = \frac{1}{3} \times \triangle\text{ADE} \times \text{高さ}$$

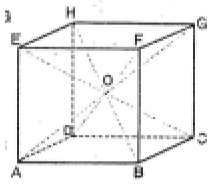
となる。ここで、3 つの三角錐の体積の和と元の五角錐の体積の和は等しいので、五角錐の体積は、各三角錐の底面積の和に高さをかけて、それに $\frac{1}{3}$ を乗ずればよい。

以上のように一般の角錐においても底面積と高さの積に $\frac{1}{3}$ を乗ずれば体積を求めることができる。

(3) 角柱・角錐と砂・水などを用いて体積を求める方法がある。

これは現在教科書で教えられている方法と同じである。

（4）立方体を相等しい 6 つの四角錐に分けることで体積を求める。



立方体の対角線の交点を O とすると、立方体は O を頂点として各面を底面とした 6 つの四角錐に分割される。

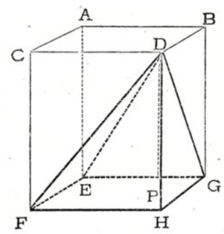
各四角錐は合同であって、その底面は立方体の底面と等しく、高さは $\frac{1}{2}$ である。

ゆえに立方体の底面積を S、高さを h とすると、立方体の体積は Sh

ゆえに四角錐の体積は $\frac{Sh}{6}$

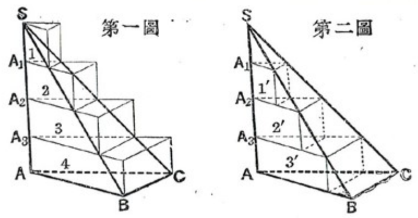
ところが、四角錐の高さを h’とすると、$2h'=h$ だから四角錐の体積は $\frac{S\times 2h'}{6}=\frac{Sh'}{3}$

（5）立方体を 3 つの四角錐に分けることで体積を求める。



図に示されているような平行六面体 ABDCFHGE の点 D を通り同じ高さをもっており、図のように分断すれば角錐 DEFHG は角錐にして即ち平行六面体の $\frac{1}{3}$ である。

（6）はさみうちを使用して体積を求める。



三角錐の場合

三角錐 S-ABC の上に $A_1S, A_2A_1, A_3A_2, \ldots$ を側稜とする三角柱 $1, 2, 3, \ldots, n$ をつくれば、これらの三角柱の和は三角錐 S-ABC よりも大きい階段状の立体を生み出す。その体積を P として、三角錐 S-ABC の体積を V とすれば、

$$P>V$$

また、$A_1, A_2, \ldots$ を通る断面を上底とし、$A_2A_1, A_3A_2, \ldots$ を側稜とする三角柱（第二図の 1’,2’,3’）をつくれば、これらの三角柱は全て角錐の内部にある階段状の立体をつくる。その体積を Q とすれば、

$$V>Q$$

即ち
$$P>V>Q$$

Q における各三角柱はそれぞれ P における同じ番号の三角柱と等積であるが、Q においては三角柱の数が一つ少ない。すなわち P における最後の番号のものと等積なるものがない。ゆえに

$$P-Q=\frac{Mh}{n}$$

よって
$$P-V<\frac{Mh}{n}$$

さて断面の数 n を次第に増やせば、$\frac{Mh}{n}$ はいかほどにも小さくなるから V は n が限りなく大きくなるときの P の極限に等しい。しかるにこの極限は次のようにして求めることができる。

P における三角柱 1,2,⋯,n の底面はそれぞれ、$M\times\left(\frac{1}{n}\right)^2, M\times\left(\frac{2}{n}\right)^2, \cdots, M\times\left(\frac{n}{n}\right)^2$ で高さはすべて $\frac{h}{n}$ に等しいから

$$\begin{aligned}P&=\frac{Mh}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}\\&=\frac{Mh}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)\\&=\frac{Mh}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{Mh}{3}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\\&=\frac{Mh}{3}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}P-\frac{Mh}{3}&=\frac{Mh}{3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)\\&<\frac{Mh}{3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{Mh}{3}\times\frac{3}{n}=\frac{Mh}{n}\end{aligned}$$

即ち $P-\frac{Mh}{3}<\frac{Mh}{n}$

ゆえに限りなく n が増すときの P の極限は $\frac{Mh}{3}$ である。

［引用文献］

宮川保全譚　榎本長裕校　『幾何新論續』　1877.2 出版
ウィルソン　吉田健吾訳『立体幾何教科書』　1883.4 出版
ジョイカセイ　長沢亀之助訳　『幾何学』　1888.6 出版
杉山文悟訳　『小学初等幾何初歩』　1891.4.30 発行
佐久間文太郎　『教育初等幾何初歩』　1891.5.10 発行
田中矢徳　『高等小学幾何』　1892.7.17 発行
学会指針社編　『幾何初歩全』　1892.8.30 発行
浅田新太郎　『幾何小学』　1893.8.18 発行
上野市吉訳述　『増補訂正再版うぃるそん氏立体幾何学』　1893.7.30 発行
菊池大麓　『初等幾何学教科書立体部』　1894.12.15 発行
三守守　『立体幾何学』　1903.9.28 発行
菊池大麓　『幾何学初歩教科書』　1904.8.31 発行
白井伯三郎　『初等幾何學教科書・立體之部』 1905.10.28 発行
仏国カタラン氏　長沢亀之助訳補　『幾何学定理及問題』　1905　発行
高橋豊夫　『修訂立体幾何学教科書全』　1906.2.17 発行
三守守　『立体小幾何学』　1906.9.15 発行
森岩太郎　『女子師範学校幾何教科書』　1911.11.1 発行
森岩太郎　『女学校用幾何学新教科書』　1912.11.3 発行
高木貞治　『新式幾何教科書(立体)』　1916.12.2 発行
林鶴一　『中等教育幾何学教科書(立体部)』　1917.12.21 発行
黒田稔　『幾何学教科書(立体)』　1917.11.2 発行
林鶴一　『女子幾何教科書』　1921.2.15 発行
森岩太郎　『女子幾何学教科書』　1923.1.15 発行
広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『中等教育立体幾何学教科書』　1923.3.30 発行
園正造　『女子新幾何』　1924.10.9 発行
国本東九郎　『直観幾何教授ノ理論ト実際』　1925.5.15 発行
佐藤充　中野恭一　『新主義数学を基調とせる空間教材の取扱』　1925.6.20 発行
国本元治　『新撰中等教育立体幾何学教科書』　1925.12.25 発行
高木貞治　『新式幾何教科書(立体)』　1926.10.31 発行
津山三郎　『中等教育女子幾何』　1928.12.27 発行
広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『新制立体幾何学』　1929.11.10 発行
林鶴一　『新制立体幾何教科書』　1930.2.2 発行
大坂一二　『高等尋常新制小学幾何学新研究』　1930.5.17 発行
桜井ミキ　『女子最新幾何』　1930.12.5 発行
岩下吉衛　高木佐加枝　『高等科一・二・三幾何の教授法及問題詳解』　1930.10.1 発行

国本東九郎　『改訂直観幾何教科書』　1931.5.25 発行
佐藤良一郎　『新制中学校用　基本数学[上]』　1932.12.18 発行
竹内端三　『修訂女子幾何学新教科書』　1932.10.7 発行
国枝元治　『新撰中等教育幾何学教科書』　1933.12.28 発行
米山國蔵　『新定訂立体幾何教科書』　1933.9.30 発行
広島高等師範学校付属中学校数学研究会　『新制幾何上級用』　1934.1.28 発行
佐藤良一郎　『新制数学校用増加数学第 1 種課程用』　1934.1.13 発行
竹内端三　『改訂新修幾何　平面・立体』　1935.10.5 発行
国枝元治　『新撰中等教育幾何学教科書[増課用]』　1937.1.27 発行
『数学４　第二類』　1944.6.12 発行

第 2 節　数学の歴史的考察

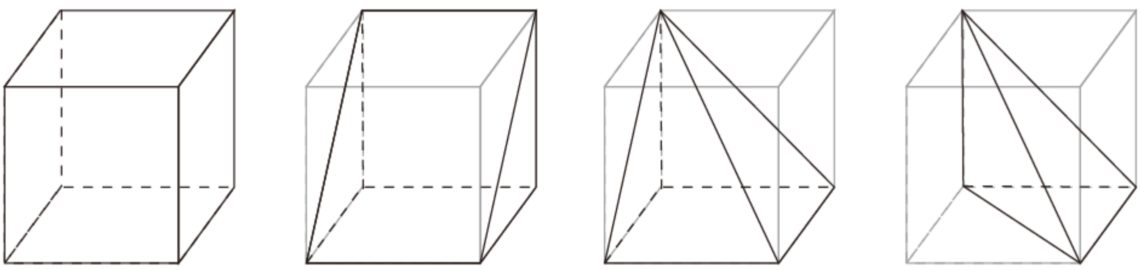
１．古代中国での多面体論（体積の求め方）

1. 正四角錐台の体積の求め方

現存する古代中国の数学書の中で最も古く影響の大きなものは『九章算術』である。

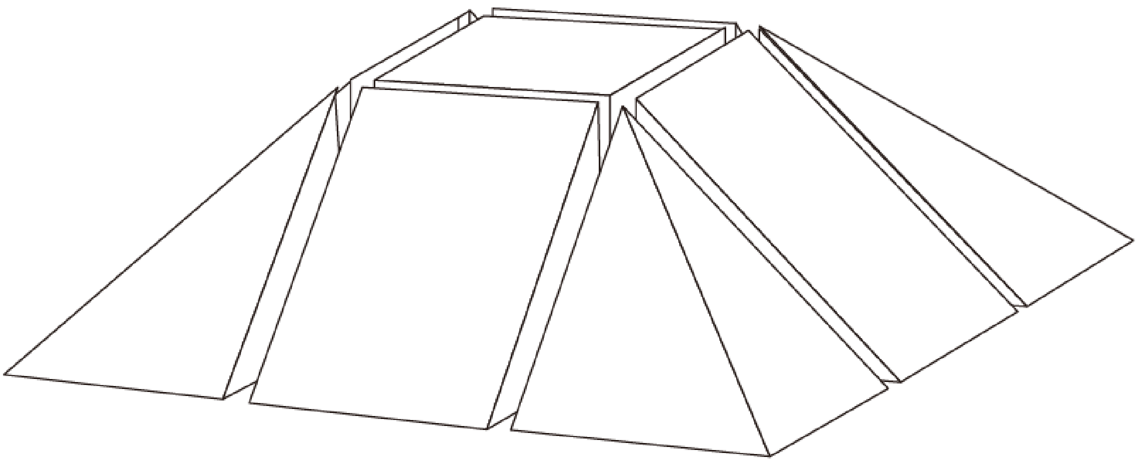
九章算術に書かれている問題の解法は、特別に考えられた例ではなく一般的な手続きとして与えられているとはいえ、それが正しいことを示していない。九章算術注釈において、劉徽は原著への身近い補足としてその計算方法の正当性を説明するための議論をしている。

その中に書かれている劉徽による直正四角錐台の体積の証明方法を示す。立体の体積の公式を導くために劉徽は細分法を用いている。これは問題となっている立体を体積が分かっている部分に分け、それぞれの部品に対する公式を組み合わせて全体の公式を求めるというものである。立体の細分を説明するために劉徽は高さ、幅、長さが 1 の標準的なブロックを 4 つ利用している。



立方体　　ぜんと　　陽馬　　べつどう

これらのブロックによる細分だけに制限していたので、劉徽は特殊な場合の問題しか扱えなかった。正四角錐台に関しては、底面が一辺の長さが 3 の正方形で、上面の一辺の長さが 1 の正方形、高さが 1 という特殊な場合を考えた。



この特殊な正四角錐台は、中央にある立方体とその周りにある 4 つのぜんと、側面にある楔型と 4 つの陽馬(各隅に一つずつ)に細分される。細分した立体を体積が分かる立方体の形にまとめる。ぜんとは、二つ合わせると立方体になり、陽馬は三つ合わせると立方体となることか

ら、これらの分別した図形を立方体の形にまとめていくと、四つの立方体と一つの陽馬になる。陽馬の体積は分からないので、最初の図形と同じ図形を三つ持ってきて余りがでないように立方体の形にまとめると 13 個の立方体ができる。

もとの立体が三つ集まった時、立体の体積がでてきたので、次に正四角錐台の体積の一般的な解を示していく。上面の一辺の長さが a、底面の一辺の長さが b、高さが h とする。つまり、この特殊な正四角錐台の時は $b=3, a=1, h=1$ となる。三つの正四角錐台によって、体積がはっきりするのでそれを使い考えていく。まず、底面の一辺の長さが b で高さが h の正四角柱を考える。最初の正四角錐台から考えていくと、立方体の側面のぜんとに対して一つずつぜんとを組合せ、陽馬に対しては三つずつ組み合わせることで、正四角柱ができる。次に立方体と陽馬四つを組み合わせて底面が a,b、高さが h の直方体ができる。
最後に残った立方体は体積が分かっているので、正四角錐台の体積は

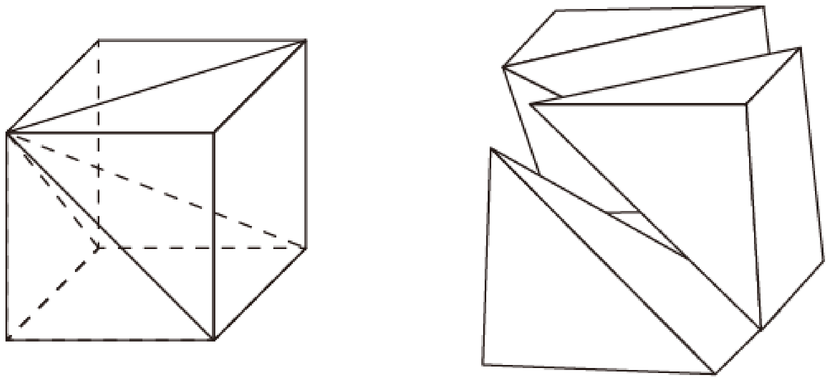
3(立方体+4 ぜんと+4 陽馬)
=立方体+8 ぜんと+12 陽馬
+立方体+4 ぜんと
+ 立方体
$= b^2h+abh+a^2h$

となる。よって、正四角錐台の体積は

$$\frac{1}{3}\left(b^2h+abh+a^2h\right)$$

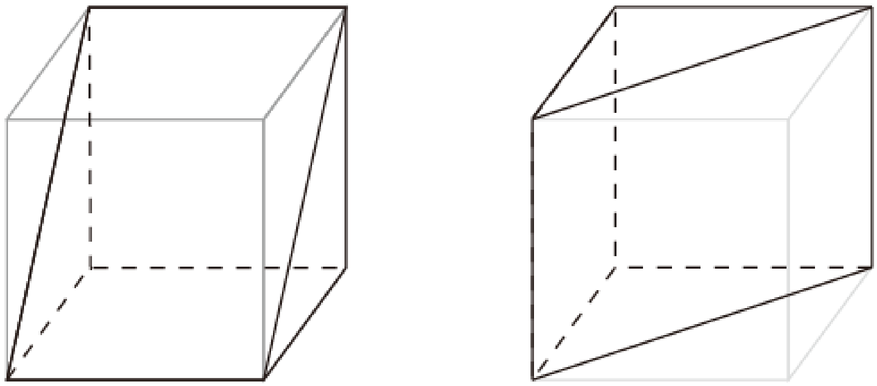
となる。

劉徽は b=3,a=1,h=1 という特殊な場合しか扱わなかった。a,b,h が任意である一般の場合でも角錐台の細分をとることができる。このときは、中央のブロックが正方形を底とする角柱になり、ほかのブロックものばされたり、潰されたりする。ぜんとはこの場合もうまく合わさる。しかし、陽馬は常にうまくいくとは限らない。今回使用した陽馬は立方体を下図のように適切に分割することによって示される。



2. 角錐の体積の求め方

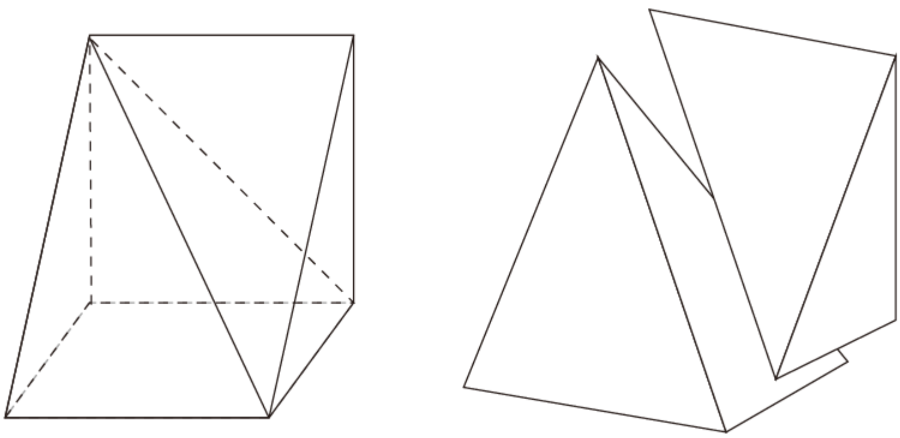
上記のようにして正四角錐台の体積を求めることができた。ぜんんとの体積は、容易に求めることができる。幅がa、奥行きb、高さがhとすると、ぜんとは同じサイズの直方体を半分にしたものである。このことから体積は、$\frac{1}{2}abh$となることが分かる。また、三角形の面を底面と考えると、底面積が$\frac{1}{2}abh$、高さがaの角柱となる。この体積が$\frac{1}{2}abh$となるので、角柱の体積が底面積と高さをかけ合わせたものであることが分かる。



角錐についての体積を求めていく。まず、陽馬とべつどうを組み合わせて体積が$\frac{1}{2}abh$になることが分かっているぜんとをつくることから始める。陽馬の体積をV_1、べつどうの体積をV_2と置くと

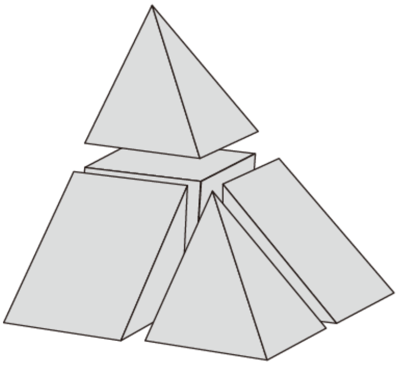
$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2}abh$$

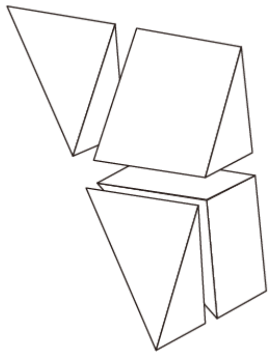
となる。このとき、$V_1 = 2V_2$となることを示すと、$V_1 = \frac{1}{3}abh, V_2 = \frac{1}{6}abh$となることが示される。



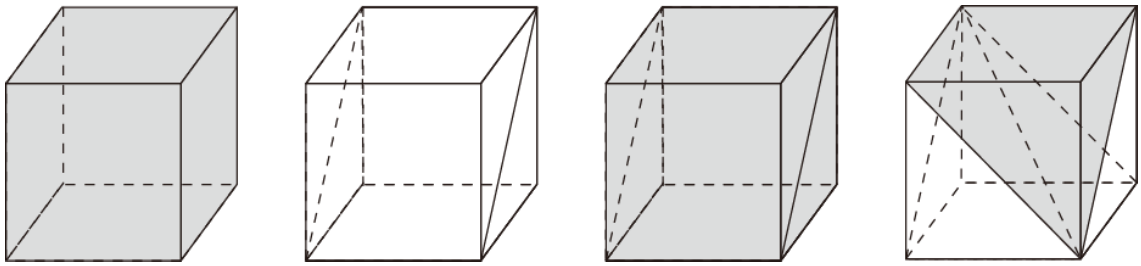
このことを示していくために、陽馬とべつどうをさらに細かく分けていく。元のサイズよりも大きなべつどうを作るためには、二個のべつどうと二個の陽馬を組み合わせることで作ることができる。元のサイズよりも大きな陽馬を作るためには一個の立方体と二個のぜんと、二個

の陽馬を組み合わせることで作ることができる。この組み合わせたものを使うことで、元のサイズよりも大きいぜんとを作ることができる。

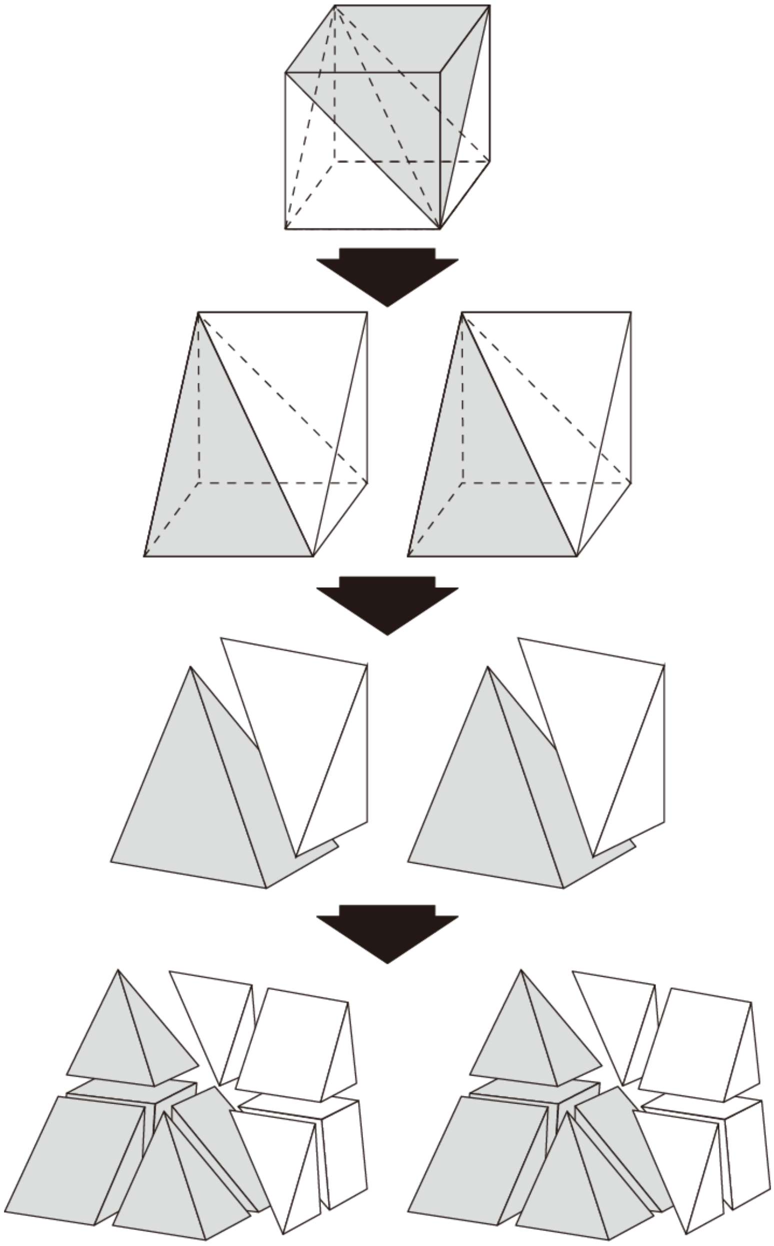




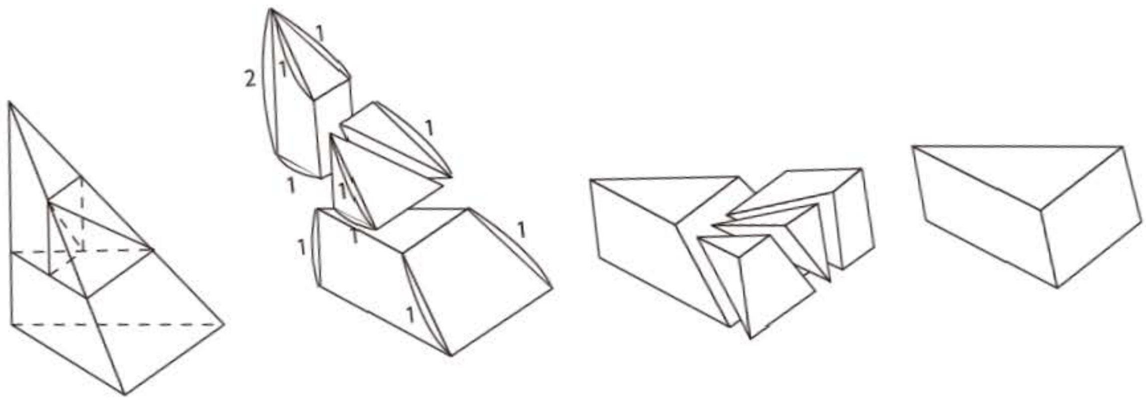
$V_1 = 2V_2$ であることを示すためには、陽馬の体積がべつどうの体積の二倍であることを示す必要がある。もとの立体を把握するために立体に色をつけて考える。べつどうを赤、陽馬を黒として考える。それぞれの体積を分かりやすくするためにそれぞれ分割して、立方体にまとめる。赤いぜんとは組合せて立方体にできる。同様に黒いぜんとも立方体にする。立方体でない残りの立体は二個の黒い陽馬と二個の赤いべつどうである。この立体を組み合わせると、二個のぜんとができ、それを組み合わせると立方体ができる。



ここでできた四つの立方体は、黒が 2 個、赤が 1 個、赤黒混じったものが 1 個できたことになる。赤黒混じったものの体積比は分からないので、それ以外の部分、つまりもとのぜんとの体積の $\frac{3}{4}$ の体積比は、赤:黒=1:2 である。赤黒混じった立方体は二個の黒い陽馬と二個のべつどうを組み合わせたものである。これはもとのぜんとの縮小版となるぜんとが二組できたことになる。それぞれのぜんとに対して、先ほどと同じ操作を繰り返すとその立方体のうち、体積の $\frac{3}{4}$ の体積比が赤:黒=1:2 となることが分かる。よって、もとの体積のうち $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{16}$ の体積比が赤:黒=1:2 であることが分かり、$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ の体積が分かっていないことになる。この操作を繰り返し行っていくと分からない体積の量がいくらでも減り、いくらでも零に近づいていく。よって、$V_1 : V_2 = 2:1$ となり、それぞれの体積が $V_1 = \frac{1}{3}abh, V_2 = \frac{1}{6}abh$ となることが示された。つまり、角錐は同じ底面を持つ角柱の $\frac{1}{3}$ であることがいえた。



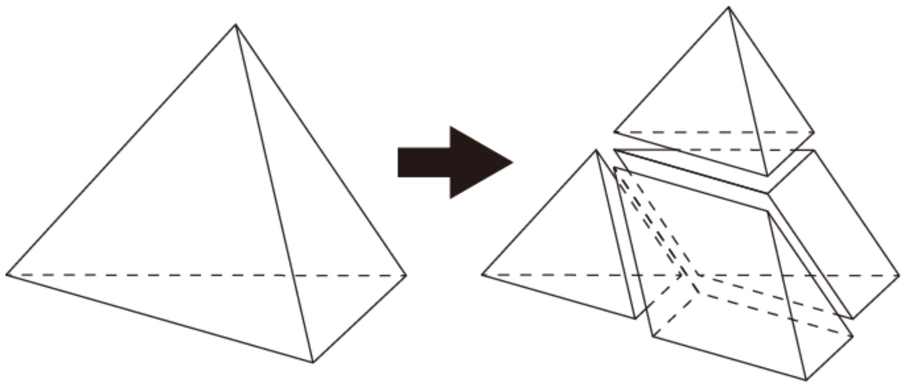
また、特殊な角錐であれば、同等分割を行うことによって示すことができる例も存在する。先ほどでてきたべつどうも同じ底面を持ち、高さが$\frac{1}{3}$の角柱と同等分割可能である。このべつどうをVとすると、分割の方法はべつどうVの底面から高さ$\frac{1}{3}$のところを底面と平行にカットする。底面側の立体をV_1、Vと相似な上部をV_2とする。次にV_2の底面と垂直でない面と底面の共通していない辺の中点を通る面によって、V_2を二つの分割する。共有している辺を持つ側を図のように切断する。できた 4 つの立体を以下の図のように並び変えると、三角柱ができる。具体的には下図のような方法で行うことによって、この角錐が同じ底面を持ち、高さが$\frac{1}{3}$である角柱と同じ体積を持つことを示すことができる。


1
2
1
1
1
1
1
1
1
1

２．エウドクソスの取りつくしの方法

古代中国の話題ではないが、先ほど示した角錐の体積は同じ底面を持つ角柱の$\dfrac{1}{3}$であることの一般解的な角錐に対する証明をしておきたい。そのためにまず、高さの等しい三角錐の体積の比は、底面積の比に等しいことを示したい。

任意の多角形は三角形に分割することができるので三角錐についてのみ示す。エウドクソスの方法を説明するために、角錐を体積の分かっている部分とさらに細分することができる残りの部分に分割することができる。三角錐を、各稜の中点をとり、それらの頂点を下図のように結び合わせることで、もとの三角錐と相似な二つの小さな互いに等しい三角錐と二つの三角柱に分けることができる。



こうして分割したときにできる二つの三角柱の体積が等しくその体積がもとの三角錐の底面積と高さによることを示す。もとの三角錐の底面積を B、高さを h とする。元の底面と共有する部分が三角形の三角柱の体積は角柱の体積の公式から

$$\frac{1}{4}B\times\frac{1}{2}h=\frac{1}{8}Bh$$

となる。元の底面と共有する部分が四角形の三角柱の体積は、その三角柱を二つ組み合わせた形が四角柱になるので、三角柱の体積はその四角柱の体積の半分であるので、

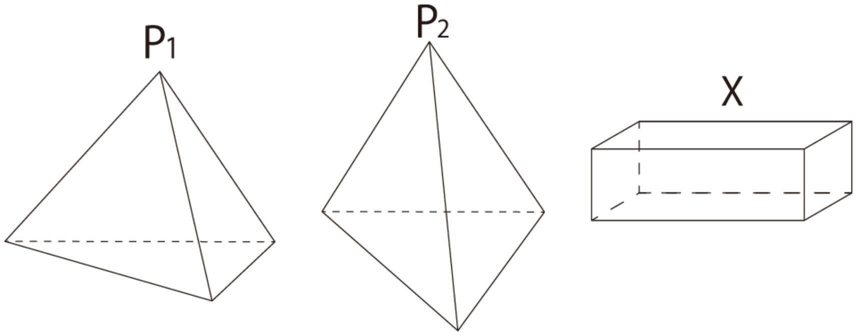
$$\frac{1}{2}B\times\frac{1}{2}h\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}Bh$$

となる。以上から、分割によって生じた三角柱の体積は互いに等しく、体積は底面積と高さによって定まることがいえた。残りの二つの三角錐はもとの角錐と相似であるので、同様の方法がそれぞれの三角錐に対して行うことができる。

エウドクソスの方法で示すためには、背理法を用いる。その証明に次の連続性の公理を用いている。二つの等しくない量 U と V が与えられたとする。ここで U の方が V より小さいとする。もし、V の少なくとも半分を取り去り、又、その残りの少なくとも半分を取り去りと繰り返していくと、いつかは U よりも小さい量になる。

このことを用いて、まず高さの等しい角錐の体積の比は、底面積の比に等しいことを示す。P_1,P_2 を高さの等しい三角錐とし、底面積をそれぞれ B_1,B_2、体積をそれぞれ V_1,V_2 とする。この

比が等しくないと仮定する。すると、$\frac{B_1}{B_2}$という底面積の比の値と$\frac{V_1}{W}$という体積の比の値が等しくなるような立体Xの体積Wが存在している。WはV_2と等しくないので、WはV_2より小さいのか大きいのかのどちらかである。



WはV_2より小さいと仮定する。

三角錐P_2は二つの三角柱と二つの三角錐に分割され、三角錐はさらに細分できる。連続性の公理を用いて、この操作を残った三角錐の体積の和が$V_2 - W$となるまで繰り返すことができる。すると、

$$V_2 >(P_2\text{に含まれる三角柱の体積の和})> W$$

となる。

三角錐P_2に関しても同様に同じ回数だけ分割する。さて、こういった分割で得られる三角柱の体積は、もとの三角錐の高さと底面積にのみよるのであった。そしてP_1とP_2の高さは等しかったので、

$$(P_1\text{に含まれる三角柱の体積の和}):(P_2\text{に含まれる三角柱の体積の和})= B_1 : B_2$$

となる。仮定より、

$$B_1 : B_2 = V_1 : W$$

であったので、

$$(P_1\text{に含まれる三角柱の体積の和}): V_1 =(P_2\text{に含まれる三角柱の体積の和}): W$$

となることが分かる。また、仮定から

$$(P_1\text{に含まれる三角柱の体積の和})< V_1$$

であり、

$$(P_2\text{に含まれる三角柱の体積の和})< W$$

となることがわかる。しかし、

$$(P_2\text{に含まれる三角柱の体積の和})> W$$

であったので、矛盾が生じる。よって、$W < V_2$という仮定が間違っていたことになる。

上記の方法と同様にして、$\frac{B_1}{B_2} = \frac{W}{V_2}$となるような体積$W'$の立体$X$が存在しているとする。$W'$は$V_1$より小さいとすると、先ほどと同様の議論を用いて、$W'$は$V_1$より小さくなりえないこと

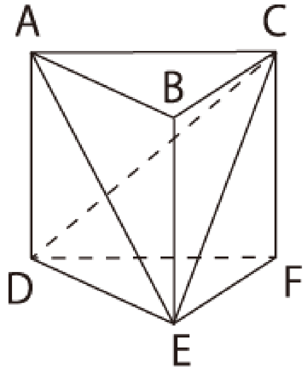
を示すことができる。

次に W が V_2 よりも大きいと仮定する。

仮定から $\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{V_1}{W}$ とあり、これをひっくり返して $\dfrac{B_2}{B_1}=\dfrac{W}{V_1}$ とする。ここで、$\dfrac{W}{V_1}=\dfrac{V_2}{W'}$ となるように X' の体積 W' をとることができ、これがそれぞれの底面積と対することになる。ところが、これは先ほど示した $V_1>W'$ の場合であるので、これは矛盾を起こすことをすでに示した。

以上から W は V_2 より大きくも小さくもないので、W と V_2 の体積の大きさは等しいことが分かる。このことからさの等しい三角錐の体積の比は、底面積の比に等しいことを示せた。

次に任意の角柱が三つの体積の等しい角錐に分けられることを示す。



任意の三角柱は上図のように三つの三角錐に分けることができる。これを先ほど示した高さの等しい角錐の体積の比は、底面積の比に等しいことを使用する。

四角形 $ABED$ は $AB=DE, AB \parallel DE$ であることから、平行四辺形である。対角線 AE をひき、四角錐 $ABEC$ と $ADEC$ について考える。点 $ABED$ は同一平面上に存在していて、C はこの平面外の点であるので、二つの三角錐の高さは等しい。四角形 $ABED$ が平行四辺形なので、対角線で区切られた二つの三角形の面積は等しい。よって、三角錐 $ABEC$ と三角錐 $ADEC$ の体積は等しい。

四角形 $ACFD$ は $AC=DF, AC \parallel DF$ であることから、平行四辺形である。対角線 AF をひき、四角錐 $ADCE$ と $FDCE$ について考える。点 $ACDF$ は同一平面上に存在していて、E はこの平面外の点であるので、二つの三角錐の高さは等しい。四角形 $ACFD$ が平行四辺形なので、対角線で区切られた二つの三角形の面積は等しい。よって、三角錐 $ADCE$ と三角錐 $FDCE$ の体積は等しい。

以上のことから、任意の三角柱は体積の等しい三つの三角錐に分割できることを示せた。

以上から、任意の角錐は同じ底面と高さを持つ角柱の $\dfrac{1}{3}$ であることがいえた。

［参考文献］

P.R.クロムウェル著．下川航也他四名訳．『多面体』．シュプリンガー・フェアラーク東京．
2001.12.5 発行

第２章　現在の小中学校の教科書の様相

現在の小・中学校の教科書の指導内容を把握し、どのような指導がなされているのかを確認する。第５章との関わりで小学校では、平面における等積変形及び錐体、柱体の体積の求め方について取り上げ、中学校では、角錐の体積の求め方及び平行線の性質を用いた等積変形を取り上げる。

第１節　小学校の教科書の指導内容

１．学校図書

【立体】

１年　「6 かたち（１）」

立体を用いて、複合的な立体を組み立てる。

立体を見えない状態にして手の感触のみでどのような立体がはいっているのかを当てる。ボールを転がして、転がすもの転がらないものを確かめる。

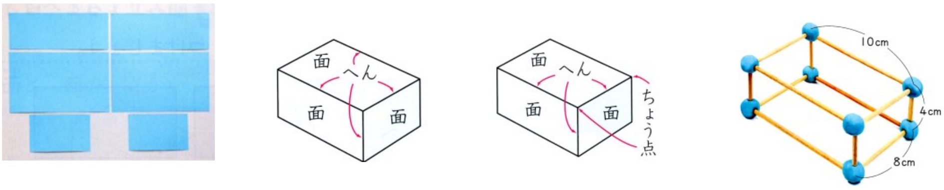
組み立てた時に使った立体を類別する。このとき、子どもの観点による立体の類別をする。

立体をノートの上におき、底面となった図形を写し取る。その図形を用いて絵をかく。

『しょうがっこうさんすう 1』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.70-73

２年　「17 はこの形」

立方体、直方体のすべての面を紙に写すことによって面について意識させる。立方体、直方体の見取り図を用いて、辺、頂点について意識させ、その後ひごや粘土玉を使って立方体、直方体をつくることを通して理解を深める。



『小学校算数２下』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.89-92

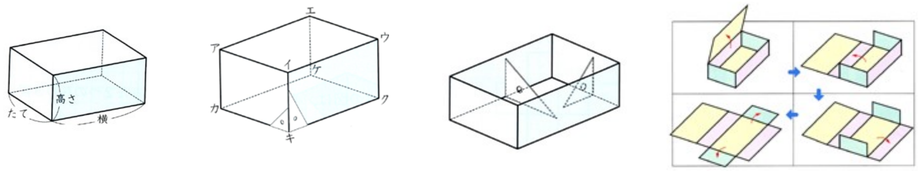
３年　「8 円と球　『球』」

球の定義、名称について学習する。また、球のどこを切っても円になるという性質についても学習する。

4 年　「18 直方体と立方体」

立方体、直方体の見取り図、展開図を通して、立方体、直方体の分析的構造を知る。

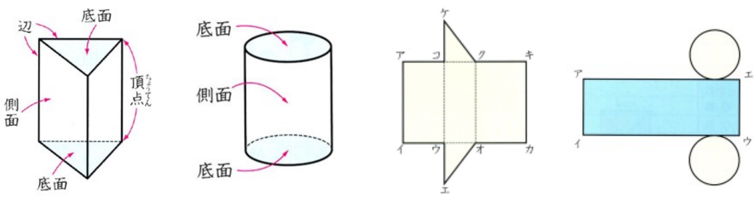
辺と辺、辺と面、面と面の垂直、平行関係について学習する。



『小学校算数 4 下』学校図書 H22.3.11 検定済　pp.88-95

5 年　「14 立体」

角柱、円柱の展開図、見取り図を通して、定義を学習し分析的構造を知る。



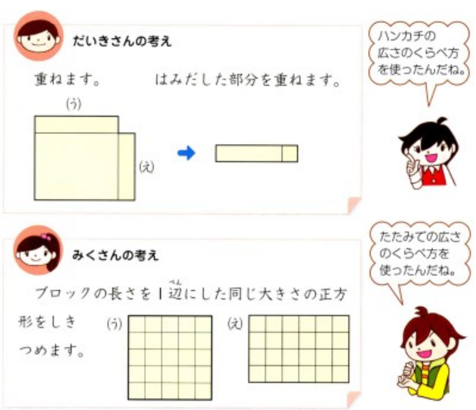
『小学校算数 5 下』学校図書 H22.3.11 検定済　pp.72 -78

単元の開始時に具体的例示を使用しているのは、小学校 4 年生まで。

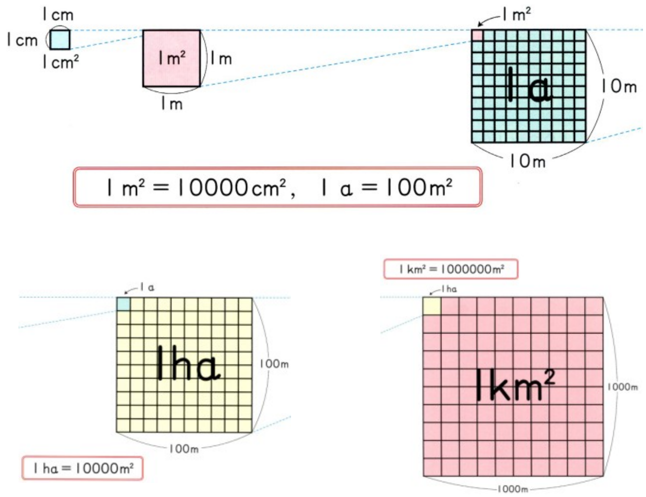
【面積・体積】

4 年　「12 面積」

1cm² の単位を学習し、1 辺が 1cm の正方形を単位とし、正方形をしきつめ、長方形、正方形の面積の公式を求める。その後、1a、1ha、1m²、1km² を学習する。



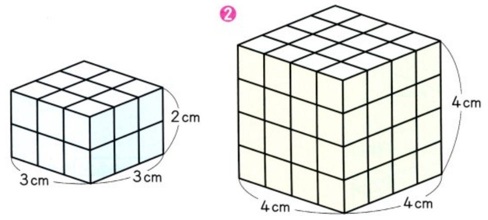
『小学校算数　4　下』学校図書
H22.3.11 検定済　p.19



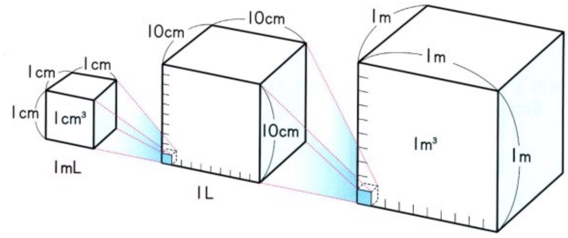
『小学校算数 4 下』学校図書
H22.3.11 検定済　pp.28-30

5 年　「6 体積」

1cm³の単位を学習し、1 辺が 1cm の立方体を単位とし、立方体をしきつめ、直方体の体積の公式を求める。その後、1m³、 1 L(1000mL)を学習する。



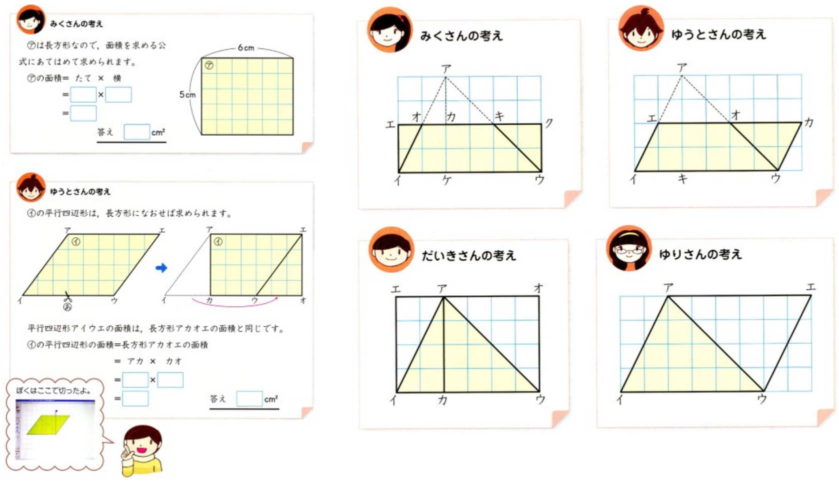
『小学校算数 5 上』学校図書 H22.3.11 検定済　p.84



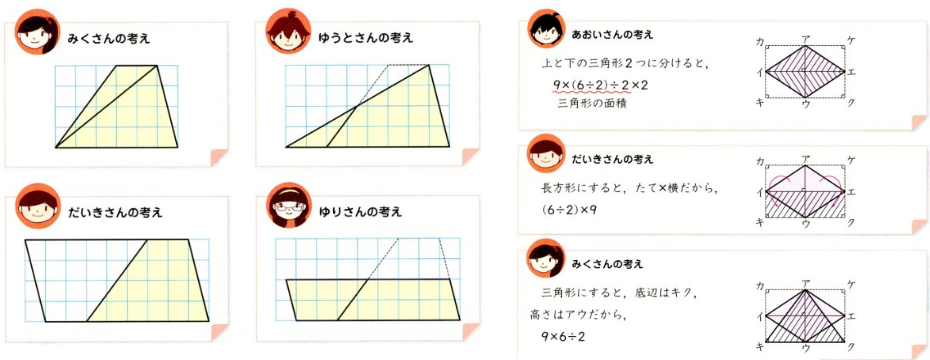
『小学校算数 5 上』学校図書 H22.3.11 検定済　p.91

5 年　「11 図形の面積」

1cm 方眼を用いて様々な図形の面積の求め方を学習する。



『小学校算数 5 下』学校図書 H22.3.11 検定済　pp.28-34

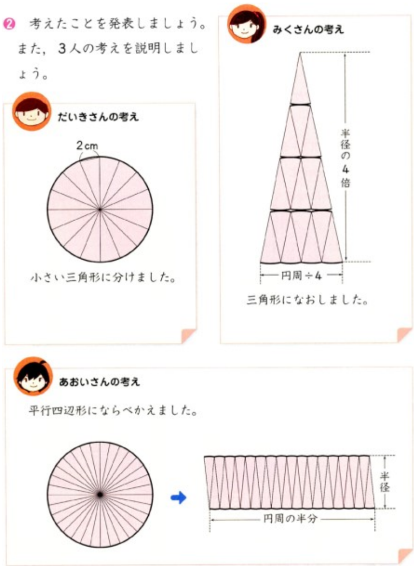


『小学校算数 5 下』学校図書 H22.3.11 検定済　pp.40-41

6 年 「7 いろいろな形の面積」

三角形を利用して円を近似する方法、円をおうぎ形に分割して三角形にする方法、方眼を用いて円内部の正方形によって近似する方法、円をおうぎ形に分割して長方形にする方法を用いて、円の面積の求め方を学習する。

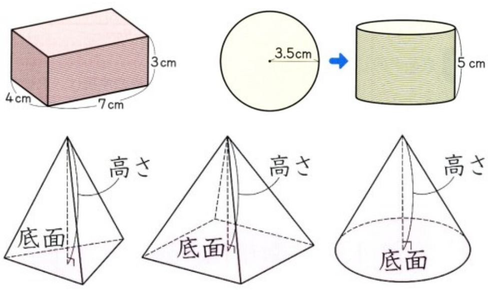
円の面積の公式の後におうぎ形の面積の求め方を学習する。また、正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。



『小学校算数 6 上』学校図書
H22.3.11 検定済 p.68

6 年 「6 立体の体積」

縦×横×高さという直方体の体積の求め方から底面積×高さという体積の求め方へと考え方を変え、角柱、円柱の体積の求め方を学習する。ここで、各立体の体積は底面積の移動によって説明する。また、同じ底面積と高さをもつ錐体と角柱、円柱の体積の比較も行っている。



『小学校算数 6 上』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.99-102

２．教育出版

【立体】

1 年　「10 かたちあそび」

立体を用いて、複合的な立体を組み立てる。

立体を見えない状態にして手の感触のみでどのような立体がはいっているのかを当てる。

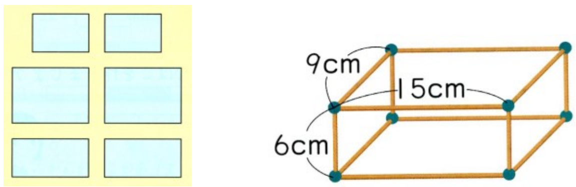
立体を類別する。このとき、子どもの観点による立体の類別をする。

『しょうがくさんすう 1』教育出版
H22.3.11 検定済 pp.76-80

立体をノートの上におき、底面となった図形を写し取る。その図形を用いて絵をかく。

2 年　「17 はこの形」

立方体、直方体のすべての面を紙に写すことによって面について意識させ、ひごや粘土玉を使って立方体、直方体をつくることを通して、辺や頂点について意識させ、それらの構造を分析的に知る。



『小学算数 2 下』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.78-80

3 年　「13 円と球　『球』」

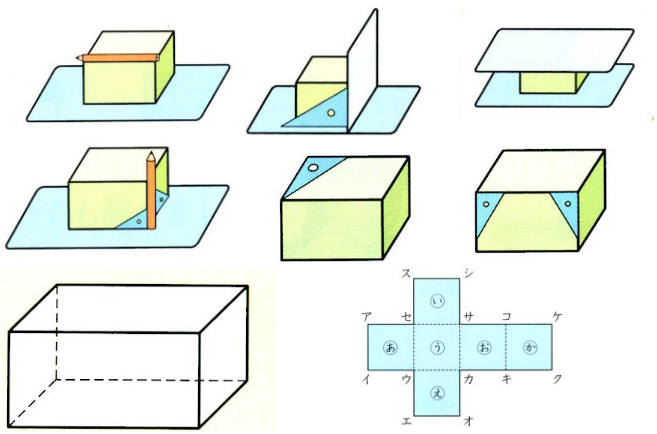
球の定義、名称について学習する。また、球のどこを切っても円になるという性質についても学習する。

『小学算数 3 下』教育出版
H22.3.11 検定済 p.34

4 年　「17 立体」

立方体、直方体の見取り図、展開図を通して、立方体、直方体の分析的構造を知る。

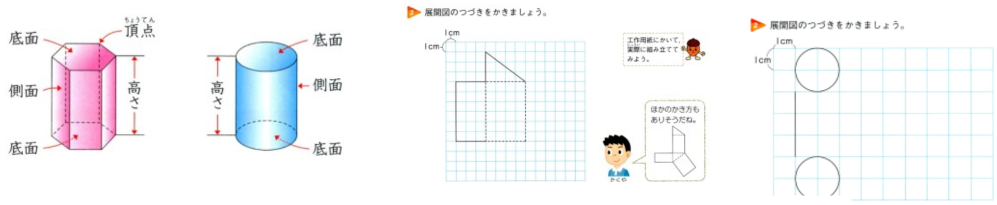
辺と辺、辺と面、面と面の垂直、平行関係について学習する。



『小学算数 4 下』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.103-107

5 年　「17 角柱と円柱」

角柱、円柱の展開図、見取り図を通して、定義を学習し分析的構造を知る。



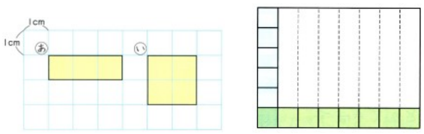
『小学算数 5 下』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.96-99

全学年で単元のはじめに具体的例示を使用している。

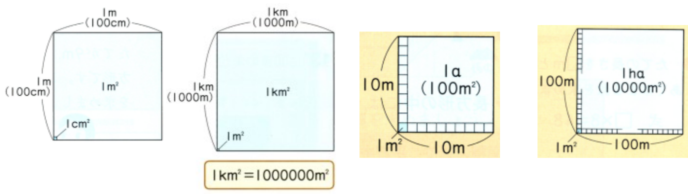
【面積・体積】

4 年　「9 面積」

1cm²の単位を学習し、1 辺が 1cm の正方形を単位とし、正方形をしきつめ、長方形、正方形の面積の公式を求める。その後、1a、1ha、1m²、1km²を学習する。



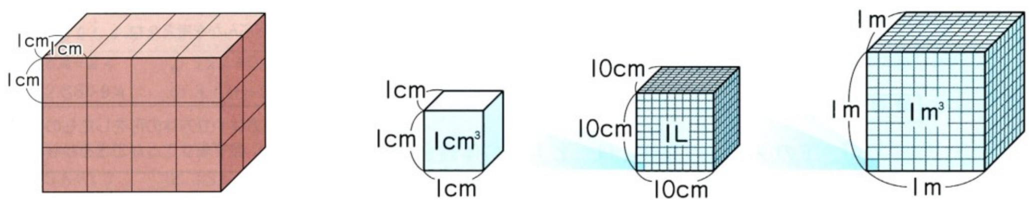
『小学算数 4 上』教育出版
H22.3.11 検定済 pp.100-101



『小学算数 4 上』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.104-109

5 年　「5 体積」

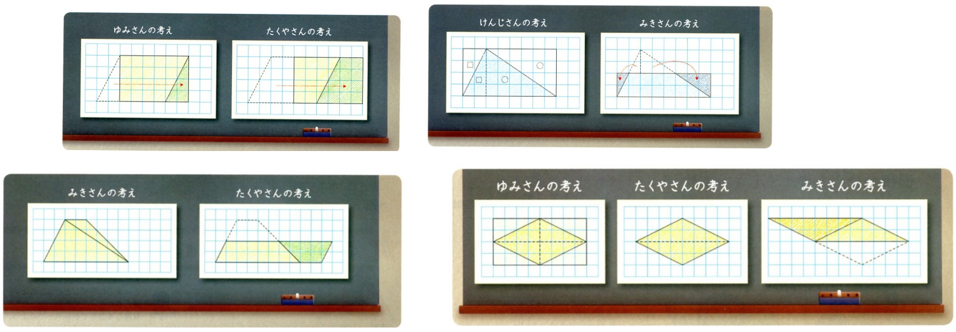
1cm³の単位を学習し、1 辺が 1cm の立方体を単位とし、立方体をしきつめ、直方体の体積の公式を求める。その後、1m³、1L(1000mL)を学習する。



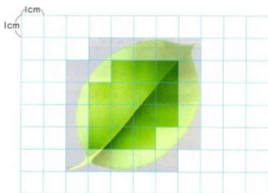
『小学算数 5 上』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.48-53

5 年　「14 四角形や三角形の面積」

1cm 方眼を用いて様々な図形の面積の求め方を学習する。また、正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。



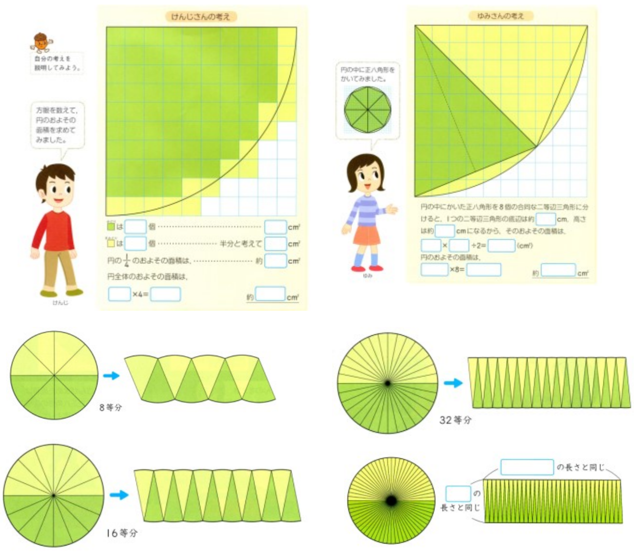
『小学算数 5 下』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.58-68



『小学算数 5 下』教育出版
H22.3.11 検定済 p.70

6 年　「6 円の面積」

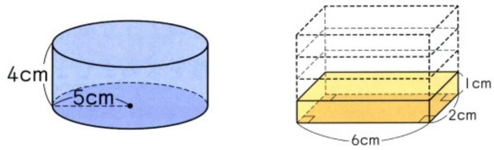
三角形を利用して円に近似する方法、方眼を用いて円内部の正方形によって近似する方法、円をおうぎ形に分割して長方形にする方法を用いて、円の面積の求め方を学習する。また、正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。



『小学算数 6 上』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.75-79

6年 「8 角柱と円柱の体積」

縦×横×高さという直方体の体積の求め方から底面積×高さという体積の求め方へと考え方を変え、角柱、円柱の体積の求め方を学習する。また、正確に体積を求めにくいもののおよその体積の求め方を学習する。



『小学算数 6 下』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.2-4

３．啓林館

【立体】

1 年　「4 いろいろなかたち」

　立体を用いて、複合的な立体を組み立てる。

　立体を見えない状態にして手の感触のみでどのような立体がはいっているのかを当てる。

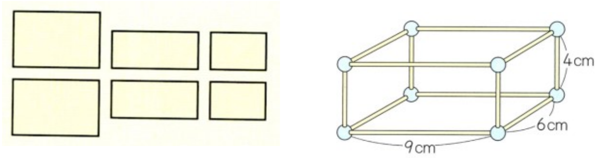
　立体を類別する。このとき、子どもの観点による立体の類別をする。

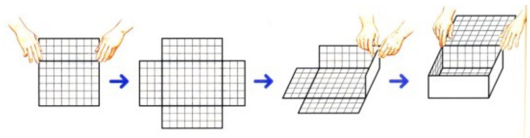
　立体をノートの上におき、底面となった図形を写し取る。その図形を用いて絵をかく。

『わくわくさんすう 1』啓林館
H22.3.11 検定済 pp.30-34

2 年「15 はこの形」

　立方体､直方体のすべての面を紙に写すことによって面について意識させる。立方体、直方体の見取り図を用いて辺､頂点について意識させ、その後ひごや粘土玉を使って立方体、直方体をつくることを通して理解を深める。





『わくわく算数 2 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.85-87

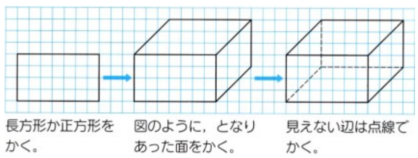
3 年　「3 円と球　『球』」

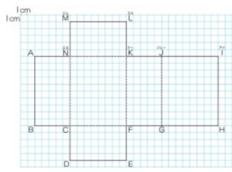
　球の定義、名称について学習する。また、球のどこを切っても円になるという性質について学習する。

4 年　「直方体と立方体」

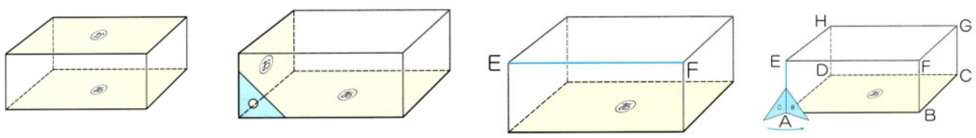
　立方体、直方体を見取り図、展開図を通して、立方体、直方体の分析的構造を知る。

　辺と辺、面と辺、面と面の垂直、平行関係について学習する。





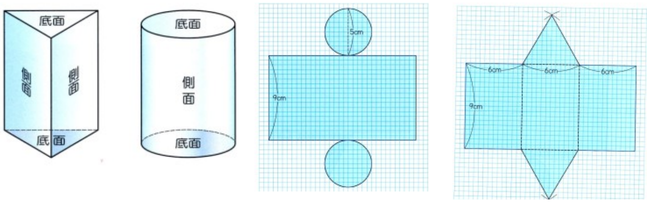
『わくわく算数 4 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.87-88



『わくわく算数 4 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.90-92

5 年　「14 角柱と円柱」

角柱、円柱の見取り図、展開図を通して、定義を学習し分析的構造を知る。



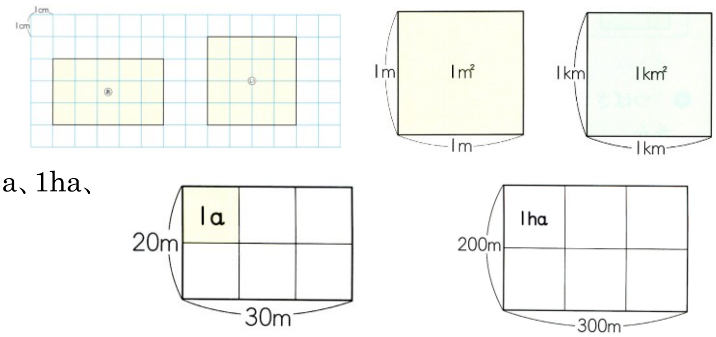
『わくわく算数 5 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.76-80

すべての学年で具体的例示を使用している。

【面積・体積】

4 年　「7 面積」

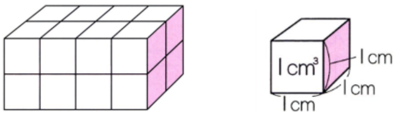
1cm² の単位を学習し、1 辺が 1cm の正方形を単位とし、正方形をしきつめ、長方形、正方形の面積の公式を求める。その後、1a、1ha、1m²、1km² を学習する。



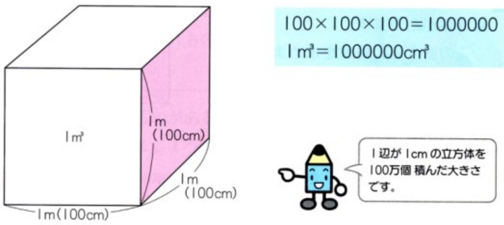
『わくわく算数 4 上』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.84-93

5 年　「2 体積」

1cm³ の単位を学習し、1 辺が 1cm の立方体を単位とし、立方体をしきつめ、直方体の体積の公式を求める。その後、1m³、1L(1000mL)を学習する。



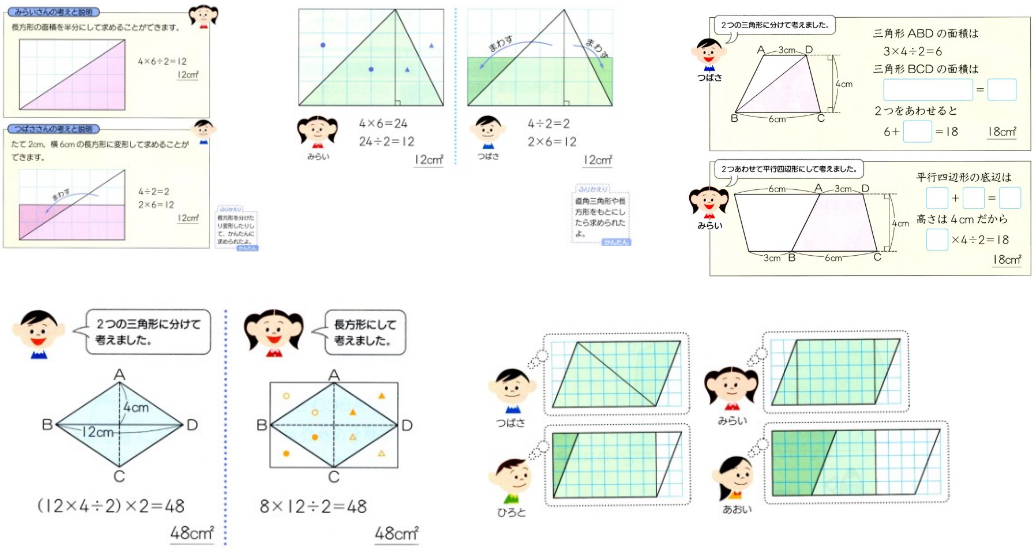
『わくわく算数 5 上』啓林館
H22.3.11 検定済 p.17



『わくわく算数 5 上』啓林館 H22.3.11 検定済 p.22

5 年　「9 面積」

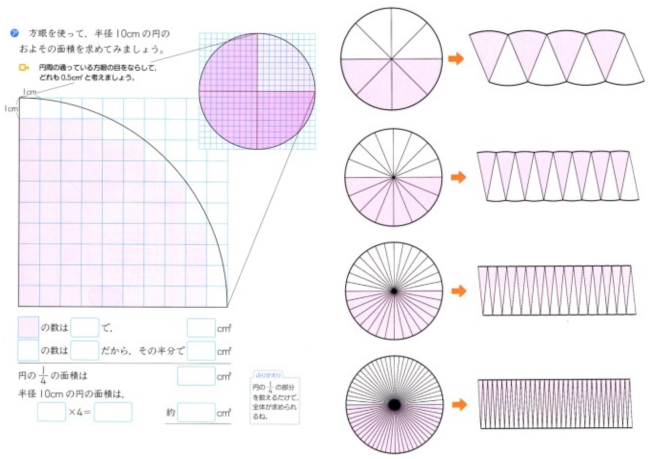
1cm 方眼を用いて様々な図形の面積の求め方を学習する。



『わくわく算数 5 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.4-8

6 年　「9 円の面積」

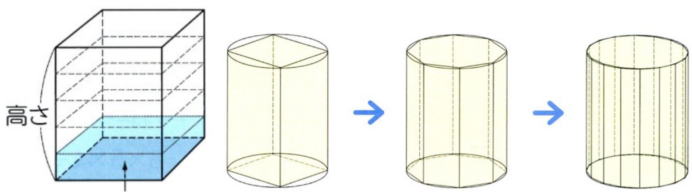
方眼を用いて円内部の正方形によって近似する方法、円をおうぎ形に分割して長方形にする方法を用いて、円の面積の求め方を学習する。



『わくわく算数 6 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.4-6

6 年　「11 立体の体積」

縦×横×高さという直方体の体積の求め方から底面積×高さという体積の求め方へと考え方を変え、角柱、円柱の体積の求め方を学習する。ただし、行っている上では、角柱は高さ 1 の角柱を積み上げていく方法をとっており、円柱は角柱による近似によって求めている。



『わくわく算数 6 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.15-17

6 年　「12 およその形と大きさ」

正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。

４．大日本図書

【立体】

１年　「9 いろいろなかたち」

　立体用いて、複合的な立体を組み立てる。

　立体を見えない状態にして手の感触飲みでどのような立体がはいっているのかを当てる。

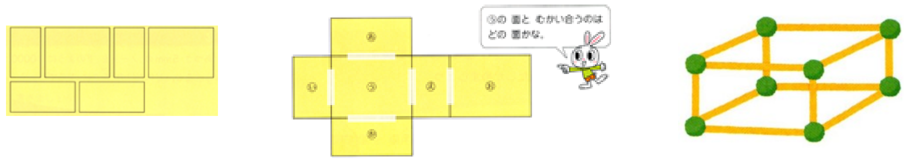
　組み立てた時に使った立体を類別する。このとき、子どもの観点による立体の類別をする。

　立体をノートの上におき、底面となった図形を写し取る。その図形を用いて絵をかく。

『たのしいさんすう　1』大日本図書
H22.3.11 検定済　pp.77-79

２年　「16 はこの形をしらべよう」

　立方体、直方体のすべての面を紙に写すことによって面について意識させ、ひごや粘土玉を使って立方体、直方体をつくることを通して、辺や頂点について意識させ、それらの構造を分析的に知る。



『楽しい算数 2 下』大日本図書 H22.3.11 検定済　pp.74-77

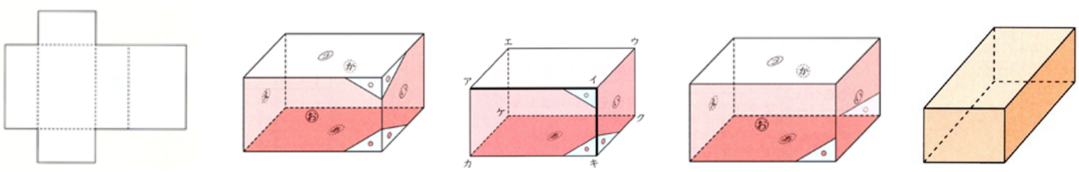
３年　「8 まるい形を調べよう　　『球』」

球の定義、名称について学習する。また、球のどこを切っても円になるという性質についても学習する。

４年　「15 箱の形を調べよう」

　立方体、直方体の見取り図、展開図を通して、立方体、直方体の分析的構造を知る。

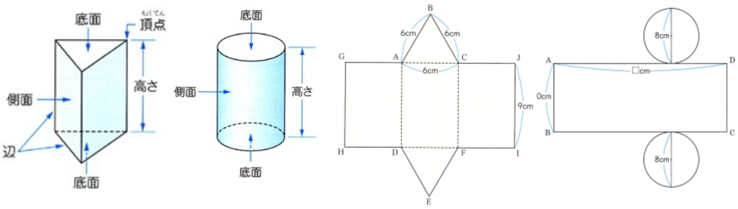
　辺と辺、辺と面、面と面の垂直、平行関係について学習する。



『楽しい算数 4 下』大日本図書 H22.3.11 検定済　pp.108-115

5 年「16 いろいろな立体を調べよう」

角柱、円柱の展開図、見取り図を通して、定義を学習し分析的構造を知る。



『楽しい算数 5 下』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.72-77

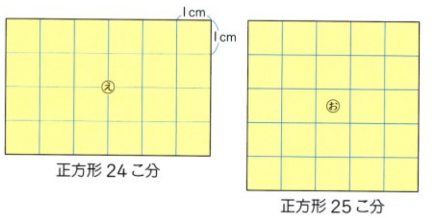
すべての学年で単元の開始時に具体的例示を使用している。

【面積・体積】

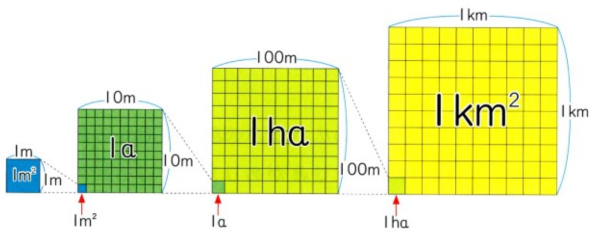
4 年 「12 広さの表し方を考えよう」

1cm² の単位を学習し、1 辺が 1cm の正方形を単位とし、正方形をしきつめ、長方形、正方形の面積の公式を求める。

その後、1a、1ha、1m²、1km² を学習する。



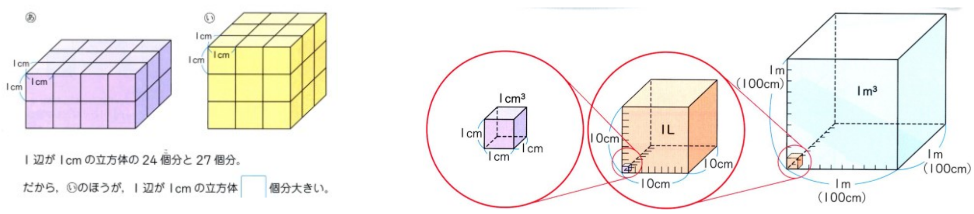
『楽しい算数 4 下』大日本図書 H22.3.11 検定済 p.54



『楽しい算数 4 下』大日本図書 H22.3.11 検定済 p.68

5 年 「5 立体のかさを求めよう」

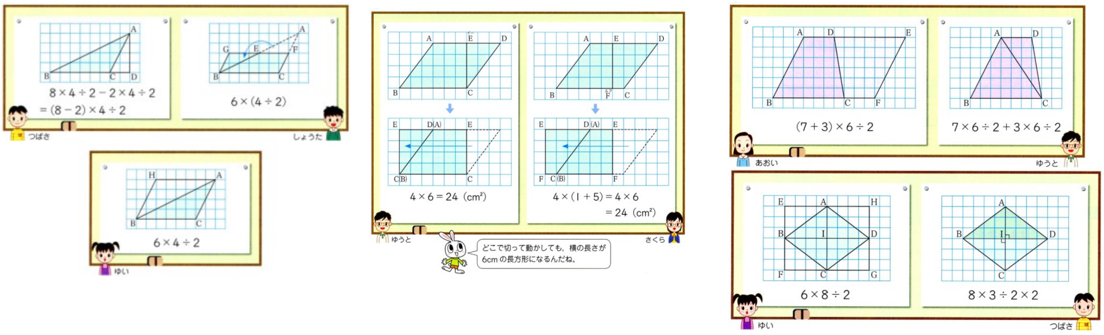
1cm³ の単位を学習し、1 辺が 1cm の立方体を単位とし、立方体をしきつめ、直方体の体積の公式を求める。高さと体積の比例関係を学習する。その後、1m³、1L(1000mL)を学習する。



『楽しい算数 5 上』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.50-61

5 年 「10 **面積の求め方を考えよう**」

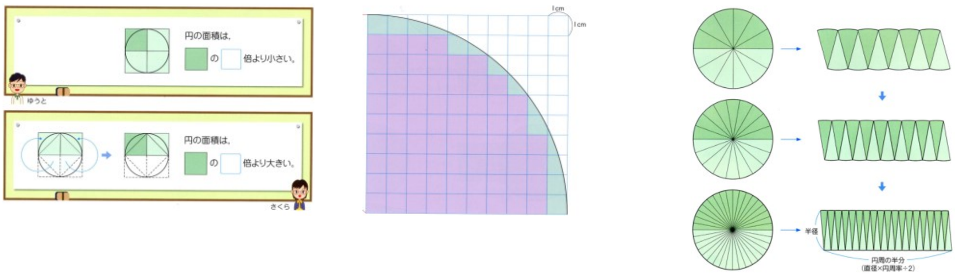
1cm 方眼を用いて様々な図形の面積の求め方を学習する。



『楽しい算数 5 下』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.4-13

6 年 「4 **円の面積について調べよう**」

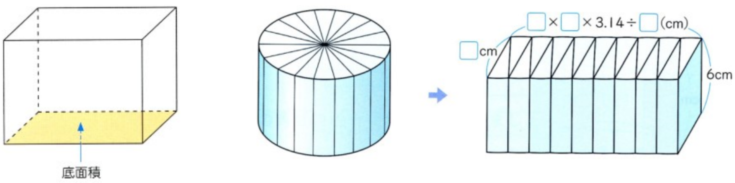
三角形を利用して円を近似する方法、方眼を用いて円内部の正方形によって近似する方法、円をおうぎ形に分割して長方形にする方法を用いて、円の面積の求め方を学習する。また、発展としておうぎ形についても扱っている。



『楽しい算数 6 上』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.53-57

6 年 「6 **角柱や円柱の体積の求め方を考えよう**」

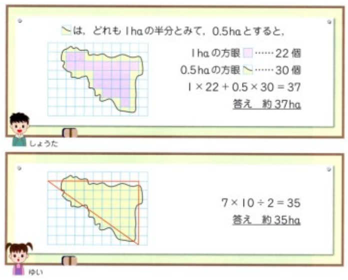
縦×横×高さという直方体の体積の求め方から底面積×高さという体積の求め方へと考え方を変え、角柱、円柱の体積の求め方を学習する。ただし、そのようにして求めているのは最初だけでその後すぐに平面での面積の求め方の方法で体積を求めている。



『楽しい算数 6 上』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.74-77

6年　「12 およその面積の求め方を考えよう」

正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。



『楽しい算数 6 下』大日本図書

H22.3.11 検定済 p.24

５．東京書籍

【立体】

１年 「13 **かたちあそび**」

立体を用いて、複合的な立体を組み立てる。

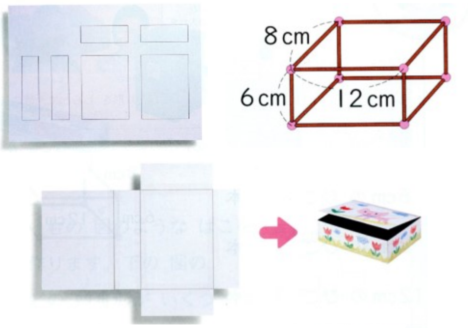
組み立てた時に使った立体を類別する。このとき、子どもの観点による立体の類別をする。

立体をノートの上において、底面となった形をなぞる。その図形を利用して絵をかく。

『あたらしいさんすう 1』東京書籍
H22.3.11 検定済 pp.103-105

２年 「17 **はこを作ろう**」

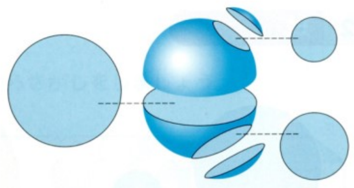
立方体、直方体のすべての面を紙に写すことによって面について意識させ、ひごや粘土玉を使って立方体、直方体をつくることを通して、辺や頂点について意識させ、それらの構造を分析的に知る。



『新しい算数 2 下』東京書籍
H22.3.11 検定済 pp.75-76

３年 「4 **円と球 『球』**」

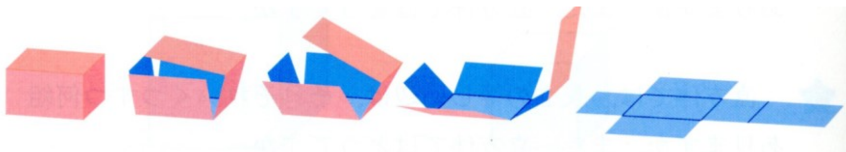
球の定義と名称について学習する。また、球のどこを切っても円になるという性質についても学習する。



『新しい算数 3 下』東京書籍
H22.3.11 検定済 p.46

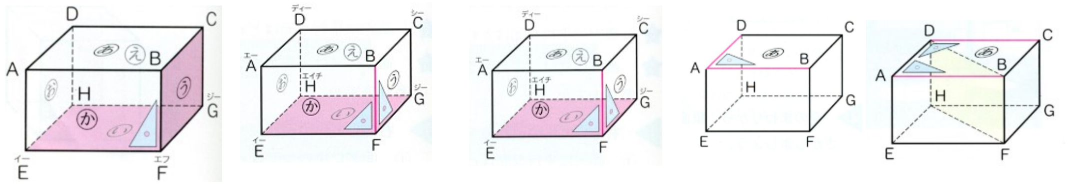
４年 「16 **箱の形を調べよう**」

立方体、直方体の見取り図、展開図を通して、立方体、直方体の分析的構造を知る。



『新しい算数 4 下』東京書籍 H22.3.11 検定済 p.100

辺と辺、辺と面、面と面の垂直、平行関係について学習する。

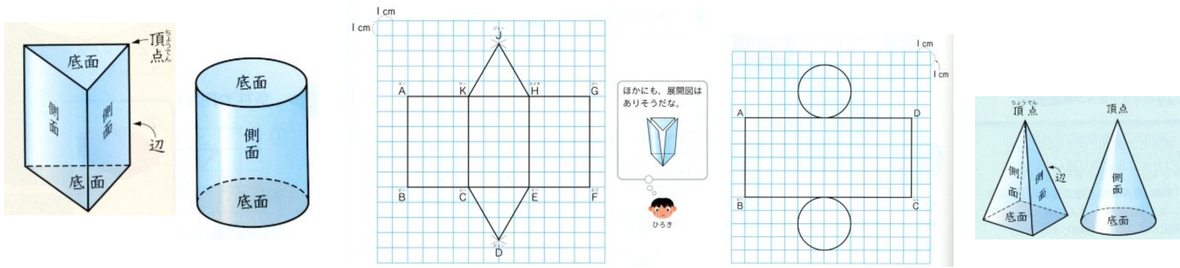


『新しい算数４下』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.102-104

5 年　「15 **立体をくわしく調べよう**」

角柱、円柱の展開図、見取り図を通して、定義を学習し分析的構造を知る。

この単元の最後に算数のおはなしという形で角錐、円錐について書かれている。



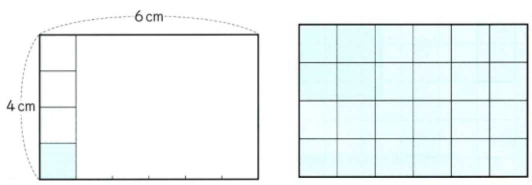
『新しい算数５下』東京書籍 H22.3.11 検定済　pp.98-105

単元の開始時に例示としてお菓子箱など具体的例示が使われているのは小学校 4 年生まで

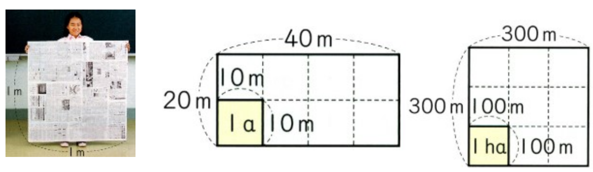
【面積・体積】

4 年　「11 **広さを調べよう**」

1cm² の単位を学習し、1 辺が 1cm の正方形を単位とし、正方形をしきつめ、長方形、正方形の面積の公式を求める。その後、1a、1ha、1m²、1km² を学習する。



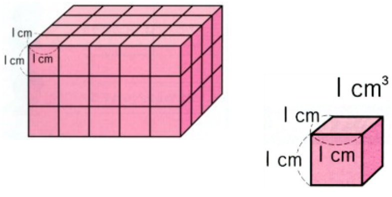
『新しい算数４下』東京書籍 H22.3.11 検定済　p.22



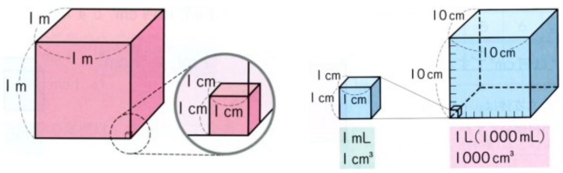
『新しい算数４下』東京書籍 H22.3.11 検定済　pp.28-30

5 年　「2 直方体や立方体のかさの表し方を考えよう」

1cm³の単位を学習し、1 辺が 1cm の立方体を単位とし、立方体をしきつめ、直方体の体積の公式を求める。高さと体積の比例関係について学習する。その後、1m³、1L(1000mL)を学習する。



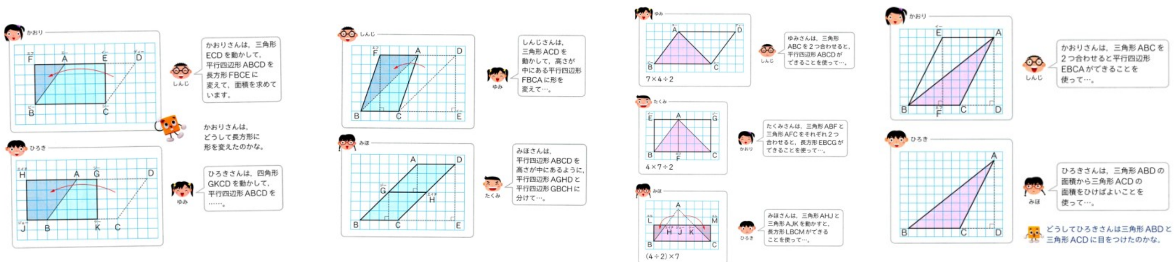
『新しい算数 5 上』東京書籍
H22.3.11 検定済　p.14



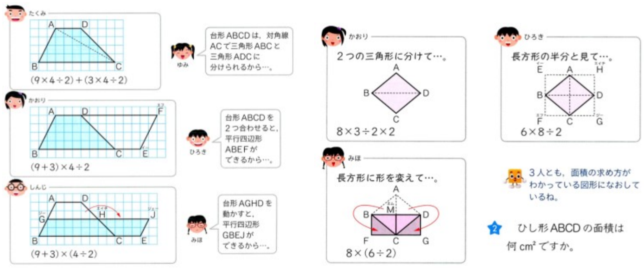
『新しい算数 5 上』東京書籍 H22.3.11 検定済　pp.20-21

5 年　「11 面積の求め方を考えよう」

1cm 方眼を用いて様々な図形の面積の求め方を学習する。また、正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。



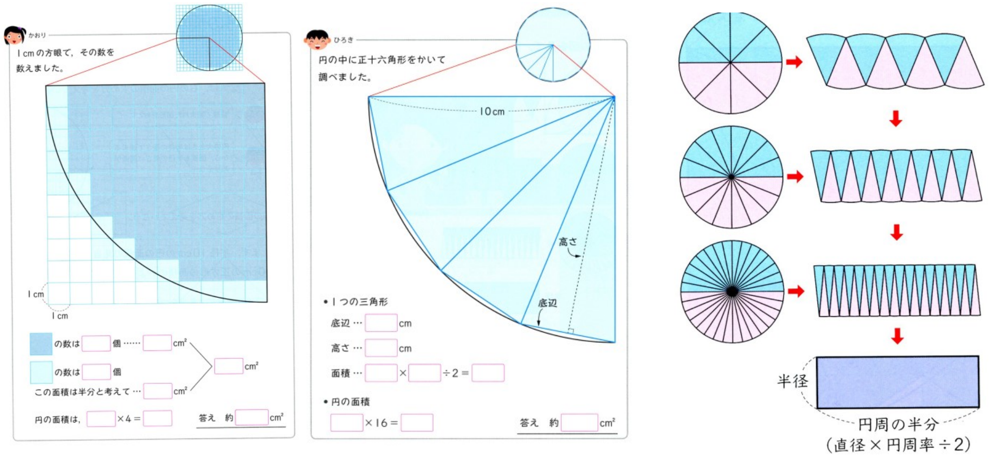
『新しい算数 5 下』東京書籍 H22.3.11 検定済　pp.30-39



『新しい算数 5 下』東京書籍 H22.3.11 検定済　pp.41-44

6年　「1 円の面積の求め方を考えよう」

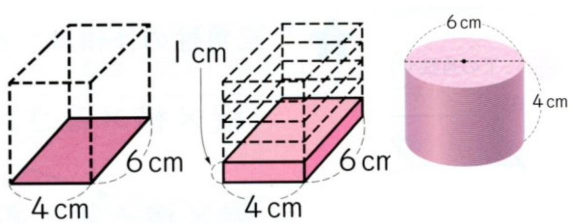
三角形を利用して円を近似する方法、方眼を用いて円内部の正方形によって近似する方法、円をおうぎ形に分割して長方形にする方法を用いて、円の面積の求め方を学習する。



『新しい算数6上』東京書籍 H22.3.11 検定済　pp.6-8

6年　「9 体積の求め方を考えよう」

縦×横×高さという直方体の体積の求め方から底面積×高さという体積の求め方へと考え方を変え、角柱、円柱の体積の求め方を学習する。ここで、各立体の体積は底面積の移動によって説明する。



『新しい算数6上』東京書籍 H22.3.11 検定済　pp.95-97

６．日本文教出版

【立体】

１年　「7 かたちあそび」

立体を用いて、複合的な立体を組み立てる。

立体を見えない状態にして手の感触のみでどのような立体がはいっているのかを当てる。

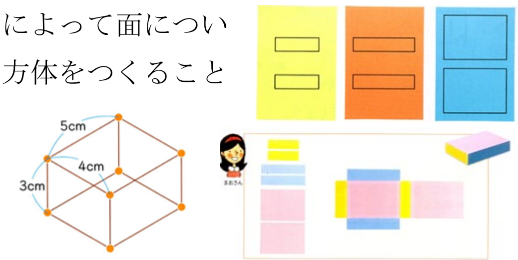
立体を類別する。このとき、子どもの観点による立体の類別をする。

立体をノートの上におき、底面となった図形を写し取る。その図形を用いて絵をかく。

『しょうがくさんすう１年』日本文教出版
H22.3.11 検定済 pp.58-61

２年　「15 はこの形をしらべよう」

立方体、直方体のすべての面を紙に写すことによって面について意識させ、ひごや粘土玉を使って立方体、直方体をつくることを通して、辺や頂点について意識させ、それらの構造を分析的に知る。



『小学算数２年下』日本文教出版
H22.3.11 検定済 pp.87-90

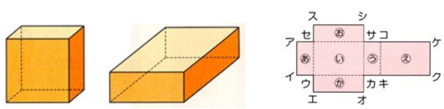
３年　「2 円と球　まるい形を調べよう　『球』」

球の定義、名称について学習する。また、球のどこを切っても円になるという性質についても学習する。

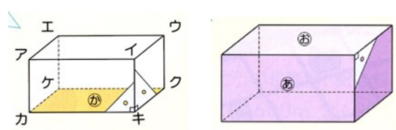
４年　「14 いろいろな箱の形を調べよう」

立方体、直方体の見取り図、展開図を通して、立方体、直方体の分析的構造を知る。

辺と辺、辺と面、面と面の垂直、平行関係について学習する。



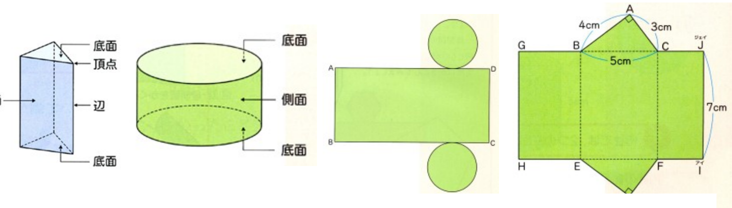
『小学算数４年下』日本文教出版
H22.3.11 検定済 pp.120-121



『小学算数４年下』日本文教出版
H22.3.11 検定済 pp.124-125

5 年　「13 柱の形を調べよう」

　角柱、円柱の展開図、見取り図を通して、定義を学習し分析的構造を知る。



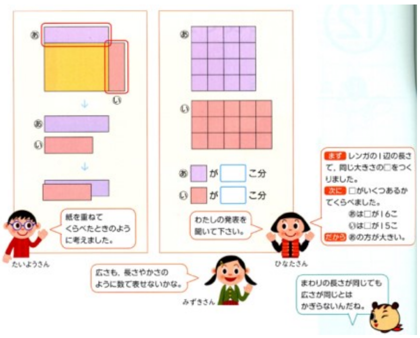
『小学算数 5 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.116-119

単元の開始時に具体的事例を使用しているのは、小学校 4 年生まで。

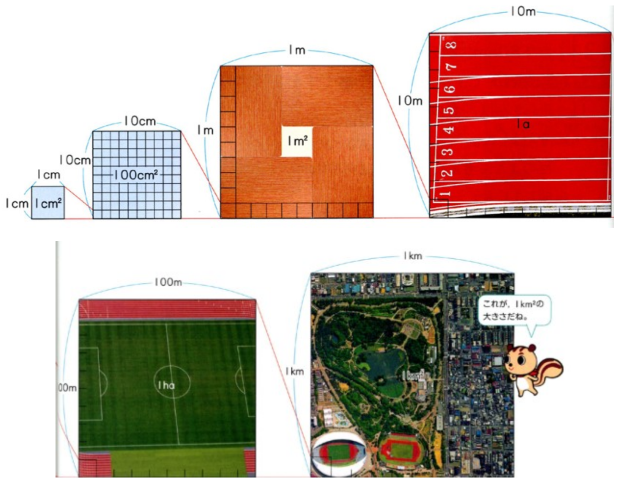
【面積・体積】

4 年　「12 広さを表そう」

　1cm² の単位を学習し、1 辺が 1cm の正方形を単位とし、正方形をしきつめ、長方形、正方形の面積の公式を求める。その後、1a、1ha、1m²、1km² を学習する。



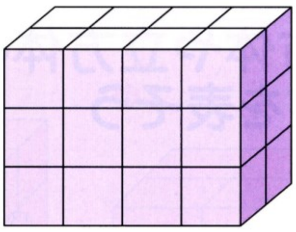
『小学算数 4 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.76



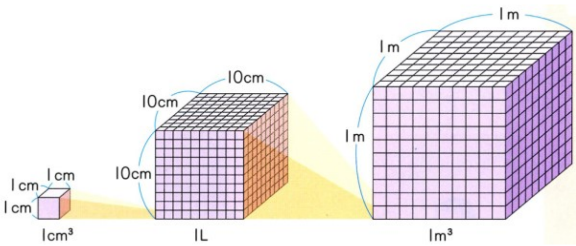
『小学算数 4 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.82-83

5 年　「4 直方体や立方体のかさを表そう」

　1cm³ の単位を学習し、1 辺が 1cm の立方体を単位とし、立方体をしきつめ、直方体の体積の公式を求める。体積と高さの比例関係を学習する。その後、1m³、1L(1000mL)を学習する。



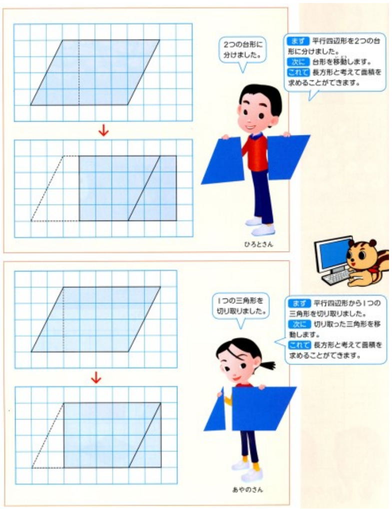
『小学算数 5 年上』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.68



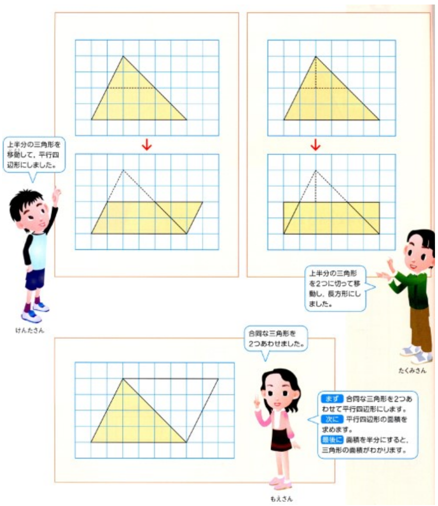
『小学算数 5 年上』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.76

5 年　「7 面積の求め方を考えよう」

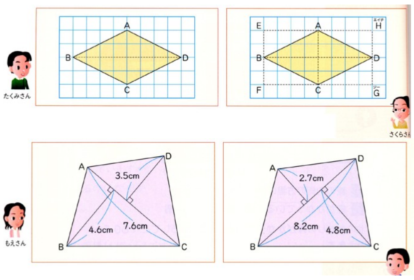
1cm 方眼を用いて様々な図形の体積の求め方を学習する。また、正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。

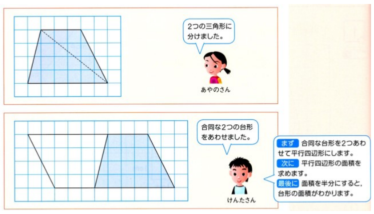


『小学算数 5 年下』日本文教出版
H22.3.11 検定済 p.6



『小学算数 5 年下』日本文教出版
H22.3.11 検定済 p.12





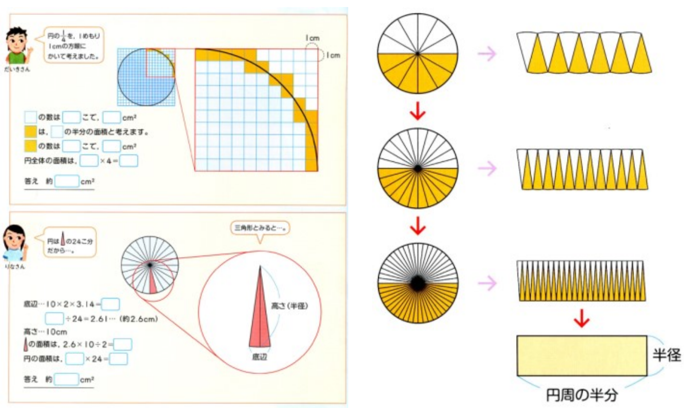
『小学算数 5 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.18-21

6 年「およその面積の求め方を考えよう」

正確に面積を求めにくいもののおよその面積の求め方を学習する。

6 年　「5 円の面積の求め方を考えよう」

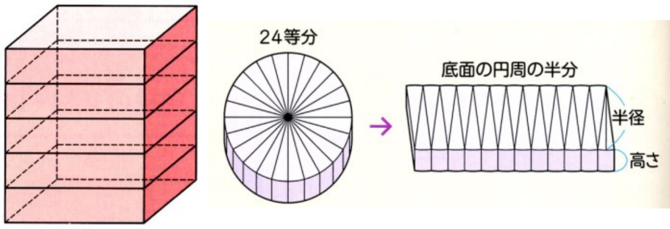
三角形を利用して円に近似する方法、方眼を用いて円内部の正方形によって近似する方法、円をおうぎ形に分割して長方形にする応報を用いて、円の面積の求め方を学習する。



『小学算数 6 年上』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.76-77

6 年 「7 立体の体積の求め方を考えよう」

縦×横×高さという直方体の体積の求め方から底面積×高さという体積の求め方へと考え方を変える。ただし、指導法としては同じ底面積をもつ高さ 1cm の直方体を重ね合わせる形で学習する。



『小学算数 6 年上』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.93-96

７．小学校の教科書の指導内容のまとめ

【立体】

小学校 1 年生では、すべての会社で、単体の立体を用いて複合的な立体の組み立て、使用した立体の類別、立体の面をノートになぞりその図形を利用して絵をかくことを行っている。東京書籍を除いて、立体当てをしている。学校図書のみ、立体を転がるものと転がらないものの類別を行っている。

小学校 2 年生では、すべての会社で、立方体・直方体のすべての面を紙に写させている。辺と頂点の指導については、学校図書・啓林館では、まず見取り図を使って辺・頂点を意識させ、その後ひごや粘土玉で直方体をつくらせその通して理解を深めているのに対し、他の会社は、最初にひごや粘土玉で直方体をつくり、辺や頂点について教えている。

小学校 3 年生では、すべての会社で、球の定義と名称及び性質（球のどこを切っても円になる）を学習する。

小学校 4 年生では、すべての会社で、立方体・直方体を学習している、辺・面の垂直・平行関係について学習する。東京書籍・大日本図書・学校図書では、展開図、辺・面の垂直・平行関係、見取り図の順で、啓林館・日本文教出版では、見取り図、展開図、辺・面の垂直・平行関係の順で、教育出版では、辺・面の垂直・平行関係、展開図、見取り図の順で学習している。

小学校 5 年生では、すべての会社で、角柱・円柱を学習している。東京書籍のみ、「算数のおはなし」で角錐・円錐に触れている。

小学校 6 年生では立体に関する学習内容はない。

【体積、面積】

小学校 1～3 年生では面積、体積に関する学習内容はない。

小学校 4 年生では、すべての会社で、$1cm^2$ の単位を学習し、1 辺が 1cm の正方形を単位とし、正方形をしきつめ長方形・正方形の面積の公式を学習している。その後、1a、1ha、$1m^2$、$1km^2$ を学習している。

小学校 5 年生では、すべての会社で、$1cm^3$ の単位を学習し、1 辺が 1cm の立方体を単位とし、立方体をしきつめ直方体の体積の公式を学習している。その後、$1m^{3}$、1L(1000mL)を学習している。面積では、すべての会社で、1cm 方眼を用いて様々な図形の面積を求め方を学習している。教育出版・東京書籍・日本文教出版ではおよその面積の求め方を学習している。

小学校 6 年生では、すべての会社で、方眼を用いて円の面積を近似的に求める方法、円をおうぎ形に分割して長方形化する方法を教えている。教育出版・東京書籍・日本文教出版・学校図書では、三角形を利用して円の面積を近似する方法を扱っており、学校図書では、おうぎ形を組み替え三角形に変形させ求める方法を扱っている。立体の体積では、縦×横×高さという直方体の体積の求め方から底面積×高さという体積の求め方へと考え方を変え、角柱・円柱の体積の求め方を学習している。導入以外の部分では、教育出版・大日本図書・東京書籍・学校図書は、底面積×高さの考え方で行っており、啓林館・日本文教出版は、高さが 1 の角柱が積

み重なったものとして学習している。円柱に関しても同じ考え方で行っているが、日本文教出版・大日本図書では、直方体に変形して体積を求めている。啓林館は、内接多角柱を利用して円柱の体積を求めている。また、教育出版では、およその体積についても学習している。およその面積に関しては、学校図書・教育出版は単元の中の節として扱われており、啓林館・大日本図書・日本文教出版は、章として扱われている。

［引用文献］

『しょうがっこうさんすう 1』学校図書 2010.3.11 検定済
『小学校算数 2 下』学校図書 2010.3.11 検定済
『小学校算数 3 上』学校図書 2010.3.11 検定済
『小学校算数 4 下』学校図書 2010.3.11 検定済
『小学校算数 5 上』学校図書 2010.3.11 検定済
『小学校算数 5 下』学校図書 2010.3.11 検定済
『小学校算数 6 上』学校図書 2010.3.11 検定済
『しょうがくさんすう 1』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 2 下』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 3 下』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 4 上』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 4 下』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 5 上』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 5 下』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 6 上』教育出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 6 下』教育出版 2010.3.11 検定済
『わくわくさんすう 1』啓林館 2010.3.11 検定済
『わくわく算数 2 下』啓林館 2010.3.11 検定済
『わくわく算数 3 上』啓林館 2010.3.11 検定済
『わくわく算数 4 上』啓林館 2010.3.11 検定済
『わくわく算数 4 下』啓林館 2010.3.11 検定済
『わくわく算数 5 上』啓林館 2010.3.11 検定済
『わくわく算数 5 下』啓林館 2010.3.11 検定済
『わくわく算数 6 下』啓林館 2010.3.11 検定済
『たのしいさんすう 1』大日本図書 2010.3.11 検定済
『楽しい算数 2 下』大日本図書 2010.3.11 検定済
『楽しい算数 3 上』大日本図書 2010.3.11 検定済
『楽しい算数 4 下』大日本図書 2010.3.11 検定済
『楽しい算数 5 上』大日本図書 2010.3.11 検定済
『楽しい算数 5 下』大日本図書 2010.3.11 検定済
『楽しい算数 6 上』大日本図書 2010.3.11 検定済
『楽しい算数 6 下』大日本図書 2010.3.11 検定済
『あたらしいさんすう 1』東京書籍 2010.3.11 検定済
『新しい算数 2 下』東京書籍 2010.3.11 検定済
『新しい算数 3 下』東京書籍 2010.3.11 検定済

『新しい算数 4 下』東京書籍 2010.3.11 検定済
『新しい算数 5 上』東京書籍 2010.3.11 検定済
『新しい算数 5 下』東京書籍 2010.3.11 検定済
『新しい算数 6 上』東京書籍 2010.3.11 検定済
『しょうがくさんすう 1 年』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 2 年下』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 3 年上』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 4 年下』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 5 年上』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 5 年下』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『小学算数 6 年上』日本文教出版 2010.3.11 検定済

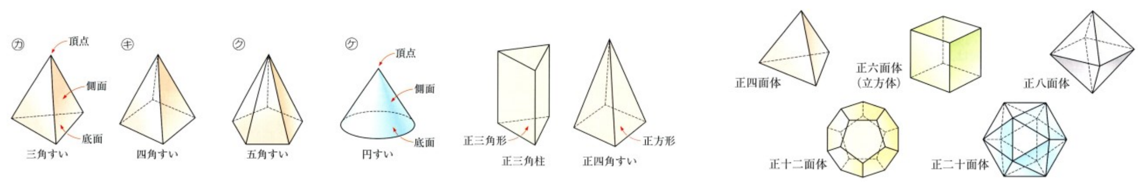
第２節　中学校の教科書の指導内容

１．学校図書

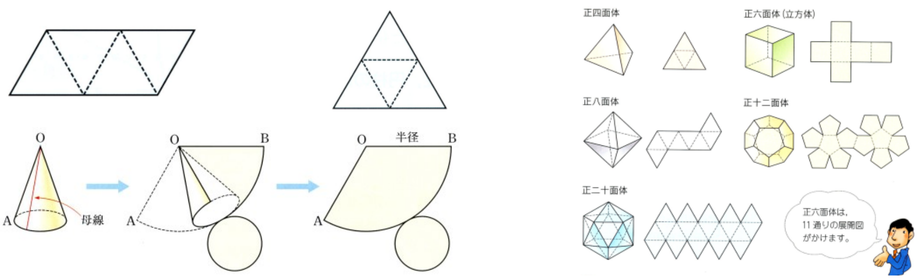
【立体】

１年　「7章 空間図形」

　まず、正ｎ角柱・正ｎ角錐を取り上げ、その後多面体・正多面体、円柱・円錐について学習する。その内容は、正三角柱・正四角柱・正四角錐・円柱・円錐の見取り図・展開図・投影図である。正多面体は紹介程度にとどまっている。

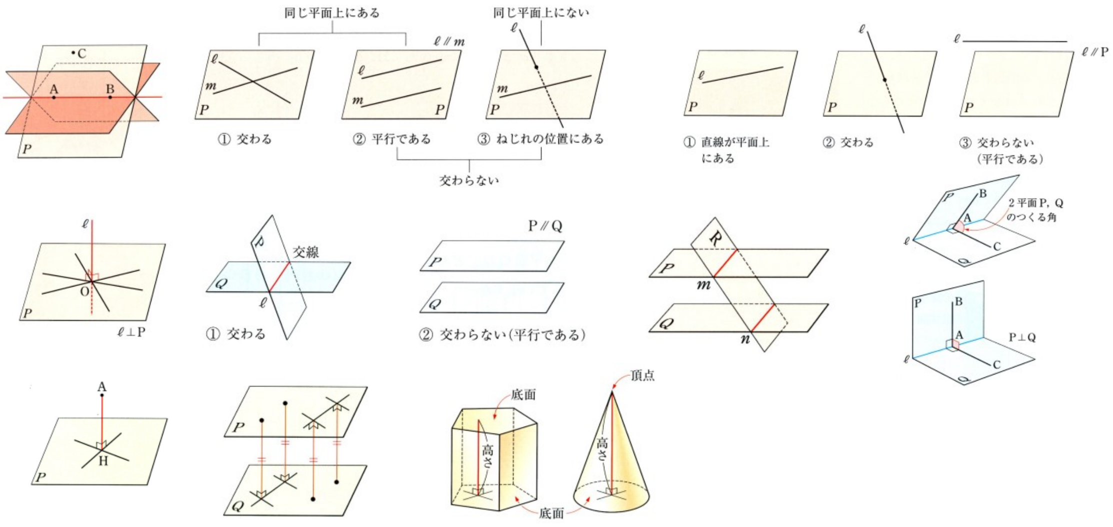


『中学校数学 1』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.146-147



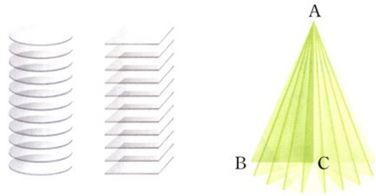
『中学校数学 1』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.158-159

　平面の決定（2通り）、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係を学習する。点と平面・平面と平面の距離を取り扱っている。



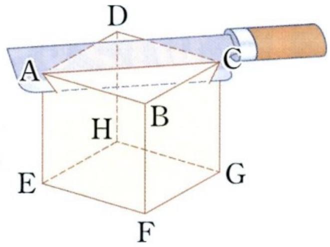
『中学校数学 1』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.148-153

立体の構成（平面の平行移動・回転体）を学習している。



『中学校数学 1』学校図書
H22.3.11 検定済 pp.154-155

「深めよう」で立方体の切断を扱っている。



『中学校数学 1』学校図書
H22.3.11 検定済 p.171

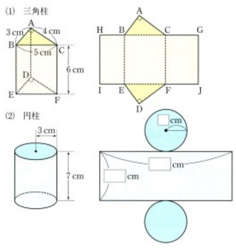
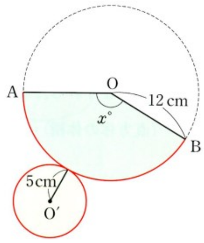
学校図書では、球・投影図の記述がない

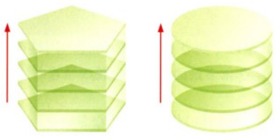
【面積・体積】

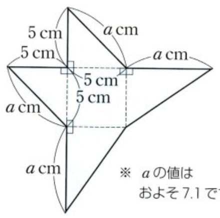
1 年 「7 章 空間図形」

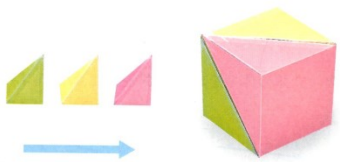
角錐・円錐の表面積・体積の学習をする。

角錐・円錐の体積は、水を使って実験的に取り扱っている。

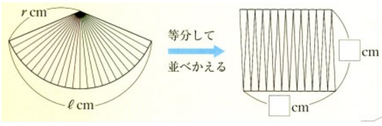






『中学校数学 1』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.162-167

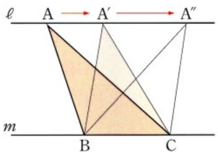
円周の長さと円の面積、おうぎ形の弧の長さと面積について学習する。また、「ふりかえろう」でおうぎ形の面積の求め方について触れている。

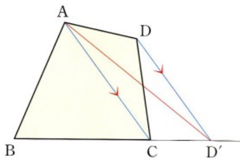


『中学校数学 1』学校図書
H22.3.11 検定済 p.170

2 年 「5 章 三角形・四角形・円」の「2 節 四角形」の「3 平行線と面積」

底面を共有し、底面に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習する。(等積変形)





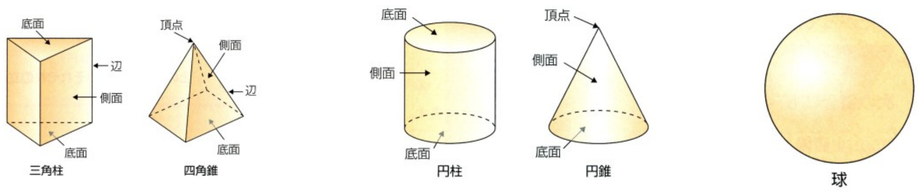
『中学校数学 2』学校図書
H22.3.11 検定済 pp.130-131

２．教育出版

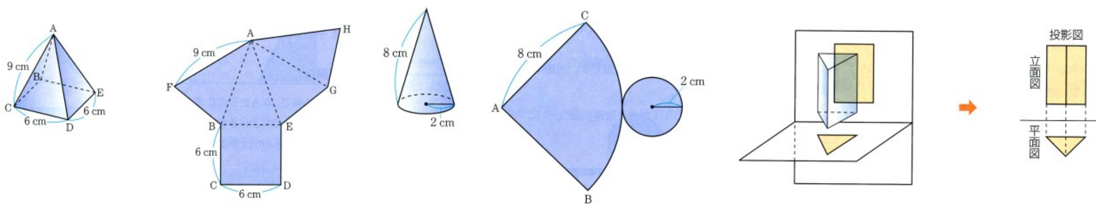
【立体】

１年 「６章 空間図形」

まず、正ｎ角柱・正ｎ角錐を取り上げ、その後多面体・正多面体、円柱・円錐について学習する。その内容は、正四角柱・正四角錐・円柱・円錐の見取り図・展開図・投影図を学習する。正多面体は紹介程度にとどまっている。

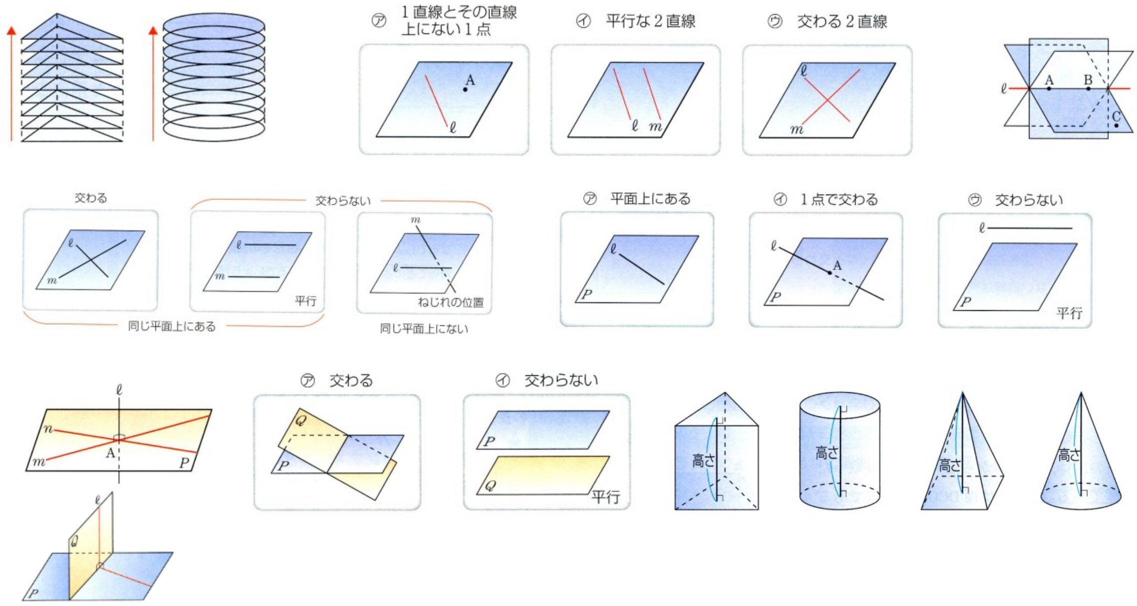


『中学数学 1』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.198-199



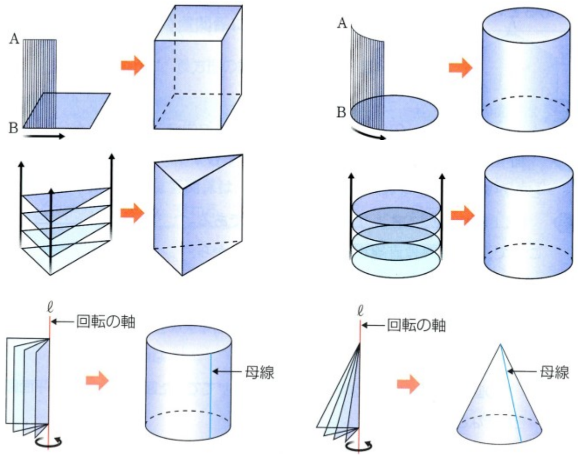
『中学数学 1』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.210-211

平面の決定（4 通り）、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係を学習する。点と平面・平面と平面の距離を取り扱っている。



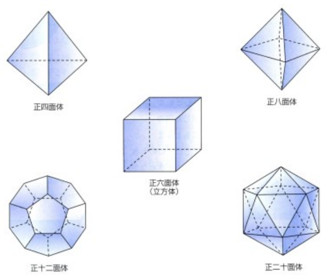
『中学数学 1』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.200-205

立体の構成（平面の平行移動・回転体・線分の移動）を学習し、そこで円柱・円錐の回転軸・母線を取り扱っている。



『中学数学 1』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.206-207

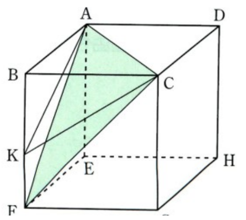
「数学の広場」で正多面体を扱っている。



『中学数学 1』教育出版 H22.3.11 検定済 p.224

2 年 「5 章 三角形と四角形」

立方体の切断について「ジャンプ」で扱っている。



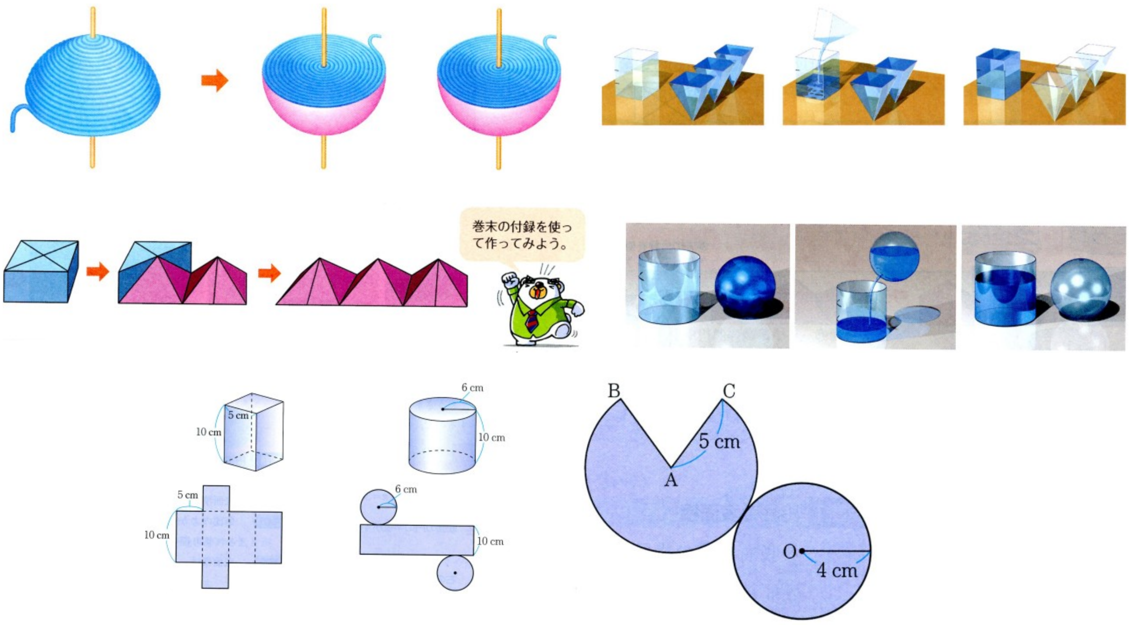
『中学数学 2』教育出版
H22.3.11 検定済 p.173

【面積・体積】

１年　「６章 **空間図形**」

　角錐・円錐・球の表面積・体積の学習をする。

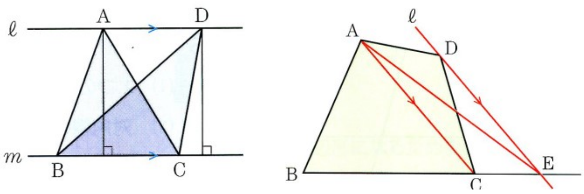
　角錐・球の体積は、水を使って実験的に取り扱っている。角錐の体積は、模型を使って実験的に取り扱っている。球の表面積は縄を使って説明している。



『中学数学 1』教育出版 H22.3.11 検定済　pp.214-219

２年　「５章 **三角形と四角形**」の「２節 **四角形**」の「４ **平行線と面積**」

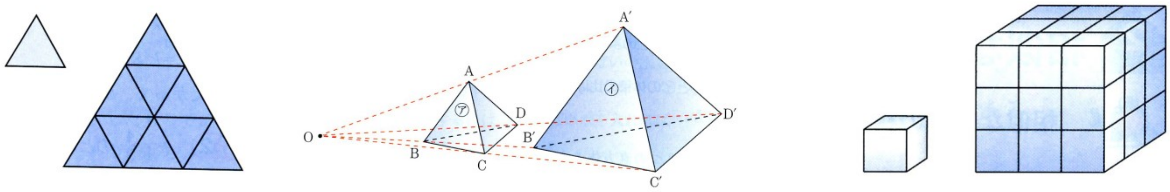
　底面を共有し、底面に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習する。



『中学数学 2』教育出版 H22.3.11 検定済　pp.166-167

３年　「５章 **相似な図形**」の「３節 **相似な図形の面積の比と体積の比**」

　相似な平面図形の面積を取り扱い、その後立体の相似について学習し、表面積の比・体積の比について学習する。



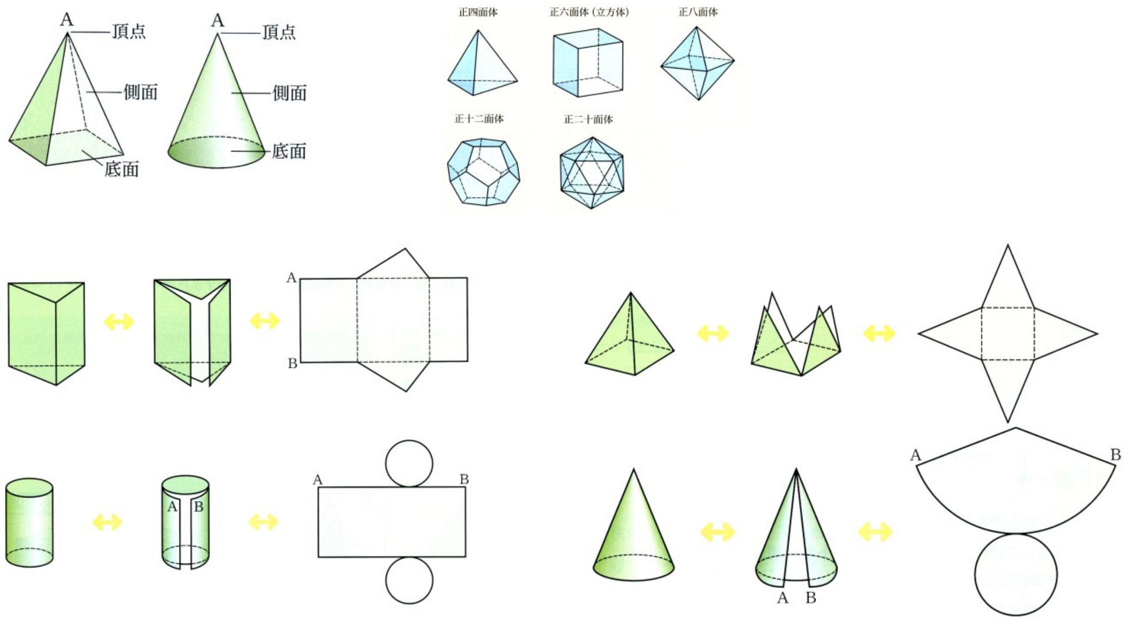
『中学数学 3』教育出版 H22.3.11 検定済　pp.151-154

３．啓林館

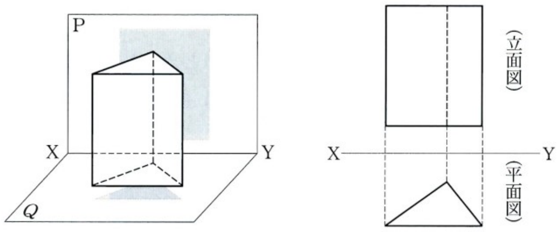
【立体】

１年　「６章 空間図形」

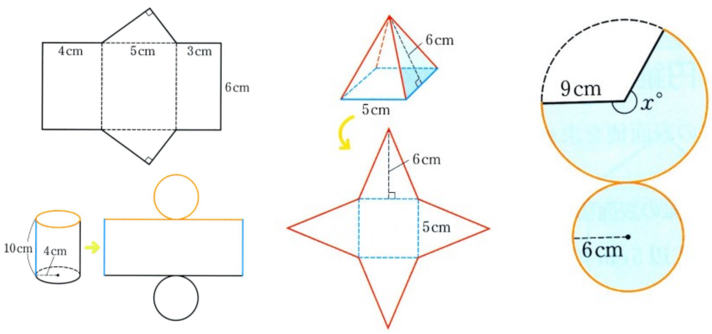
　まず、正 n 角柱・正 n 角錐を取り上げ、その後多面体・正多面体、円柱・円錐について学習する。その内容は、正三角柱・正四角柱・正四角錐・円柱・円錐の見取り図・展開図・投影図である。正多面体は紹介程度にとどまっている。



『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済　pp.156-160

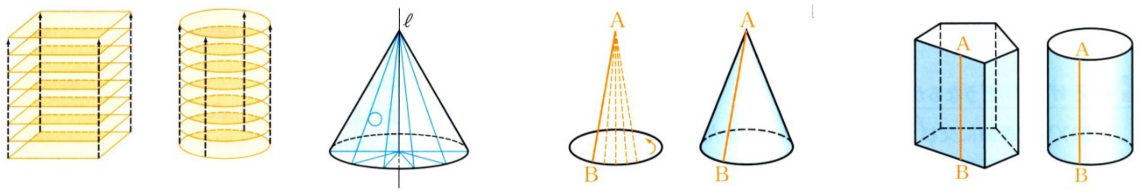


『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済　p.170



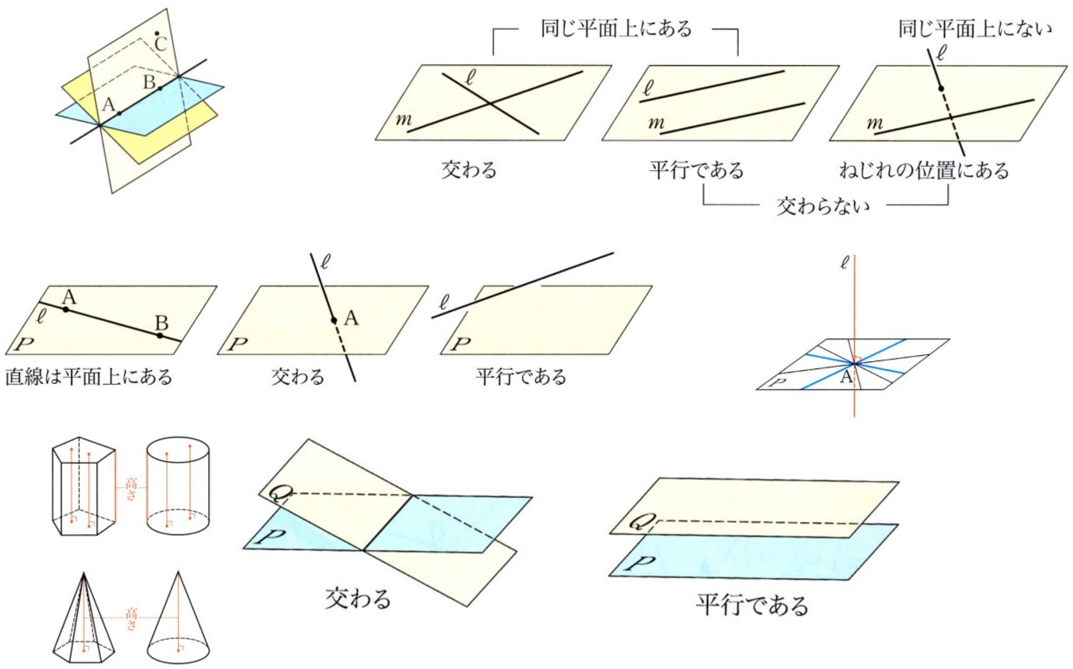
『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済　pp.171-176

立体の構成（平面の平行移動・回転体・線分の移動）を学習し、そこで円柱・円錐の回転軸、円柱・円錐・角柱の母線をを取り上げている。



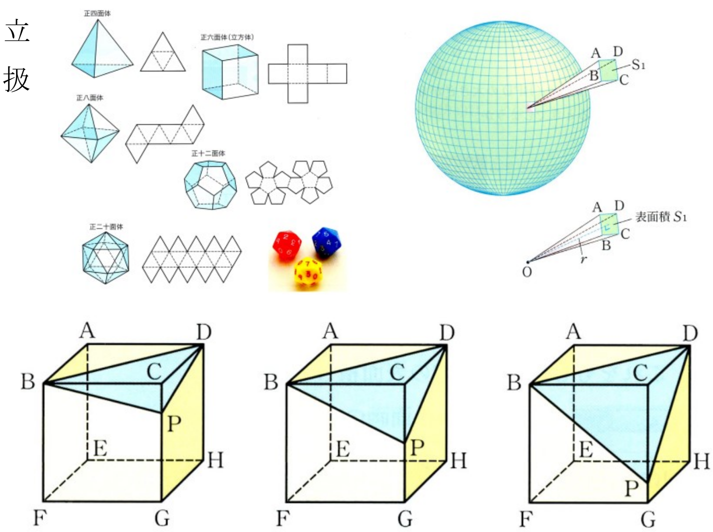
『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.167-169

平面の決定（4 通り）、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係を学習する。点と平面・平面と平面の距離を取り扱っている。



『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.161-166

「ひろがる数学」で、正多面体、立体の切断、球の表面積と体積を取り扱っている。



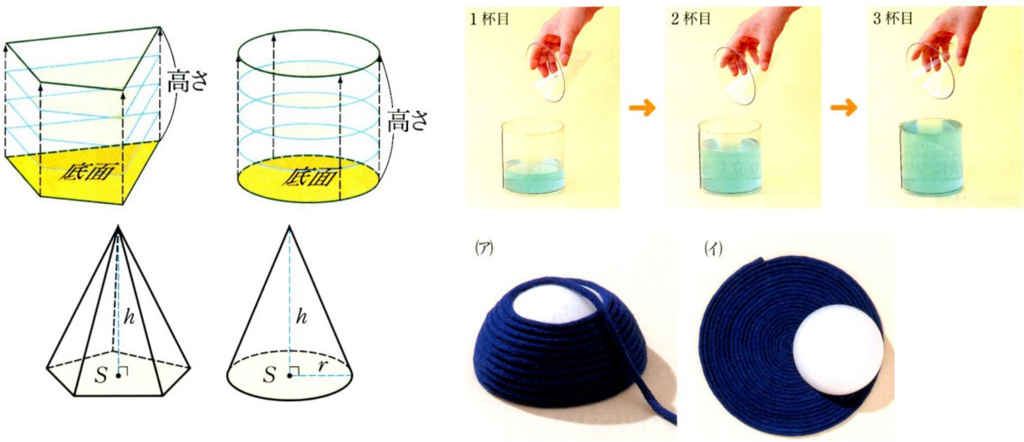
『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.234-238

【面積・体積】

1年 「6章 空間図形」

角錐・円錐・球の表面積・体積の学習をする。

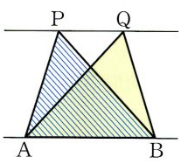
円錐の体積については、水を使って実験的に取り扱っている。球の表面積は縄を使って説明している。

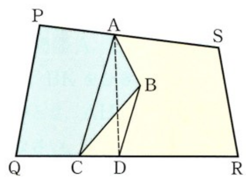


『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.177-181

2年 「5章 図形の性質と証明」の「2節 四角形」の「4 平行線と面積」

底面を共有し、底面に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習する。(等積変形)

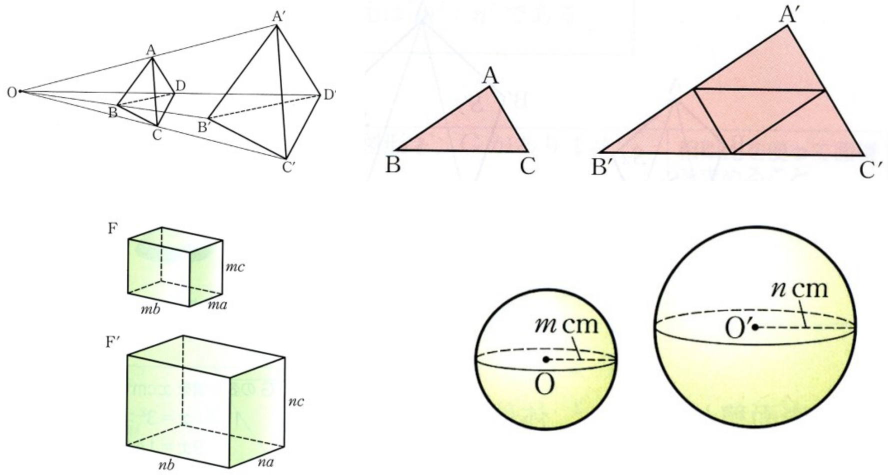




3 年　「5 章　図形と相似」の「3 節　相似な図形の計量」

『未来へひろがる数学 2』啓林館
H22.3.11 検定済　pp.130-131

相似な平面図形（三角形）の面積を取り扱い、その後立体の相似（三角錐・直方体・球）について学習し、その表面積の比・体積の比を扱っている。



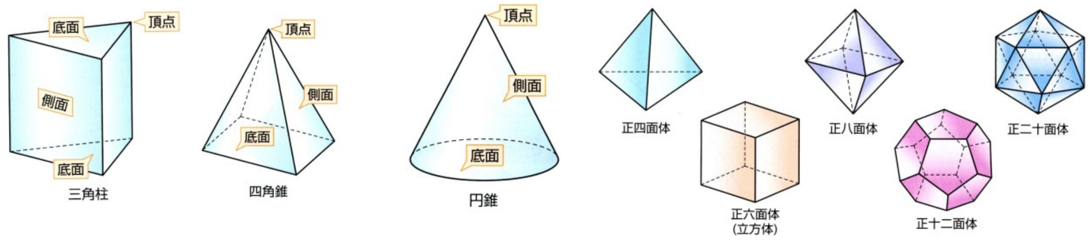
『未来へひろがる数学 3』啓林館 H22.3.11 検定済　pp.129-133

４．数研出版

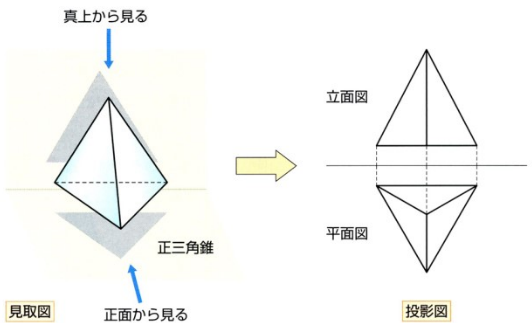
【立体】

１年 「6 章 空間図形」

まず、正 n 角柱・正 n 角錐を取り上げ、その後多面体・正多面体、円柱・円錐について学習する。その内容は、正三角柱・正四角柱・正四角錐・円柱・円錐の見取り図・展開図・投影図である。正多面体は紹介程度にとどまっている。

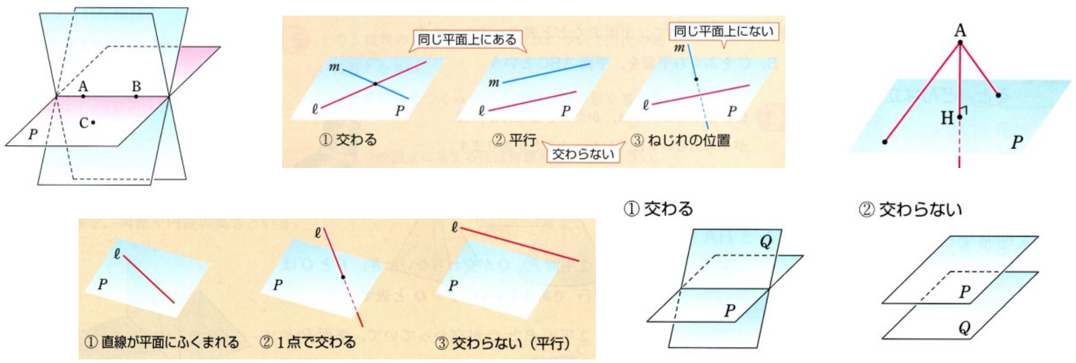


『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.164-166



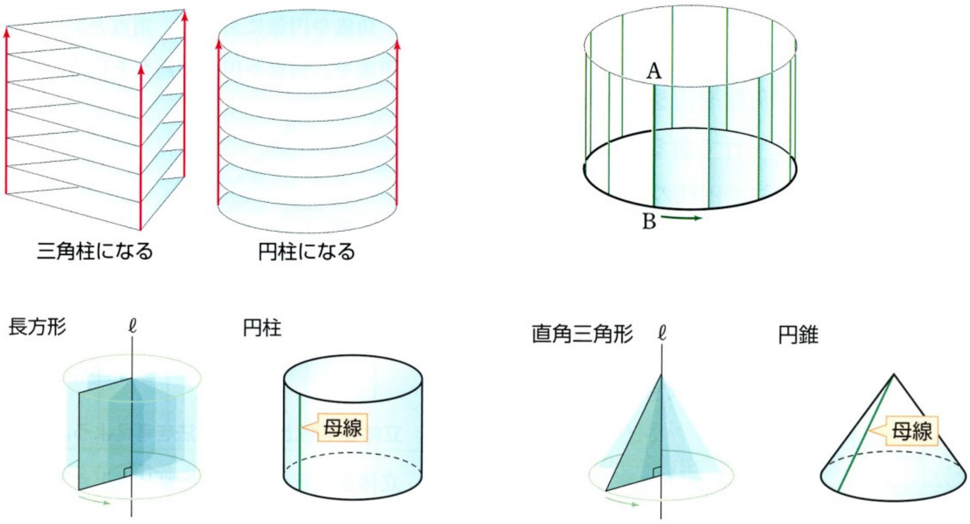
『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済 p.174

平面の決定（4 通り）、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係を学習する。点と平面・平面と平面の距離を取り扱っている。



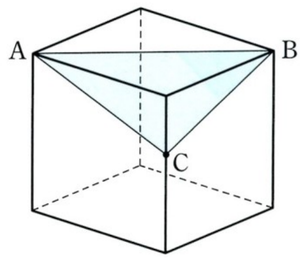
『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.167-171

立体の構成（平面の平行移動・回転体・線分の移動）を学習し、そこで円柱・円錐の回転軸・母線を取り上げている。



『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済　pp.172-173

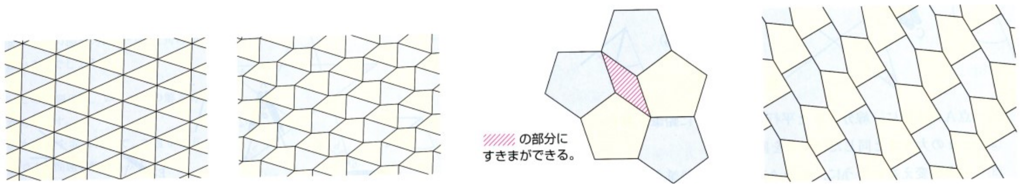
「発展」というところで、立体の切断を扱っている。



『中学校数学　1』数研出版 H22.3.11 検定済　pp.172-173

2 年　「平面をしきつめる、空間をうめつくす」

平面において 1~2 つの図形を用いて平面に敷き詰めることができるのかを行った後、空間においても同じ立体を使用して空間を埋め尽くすことができるのかを行う。



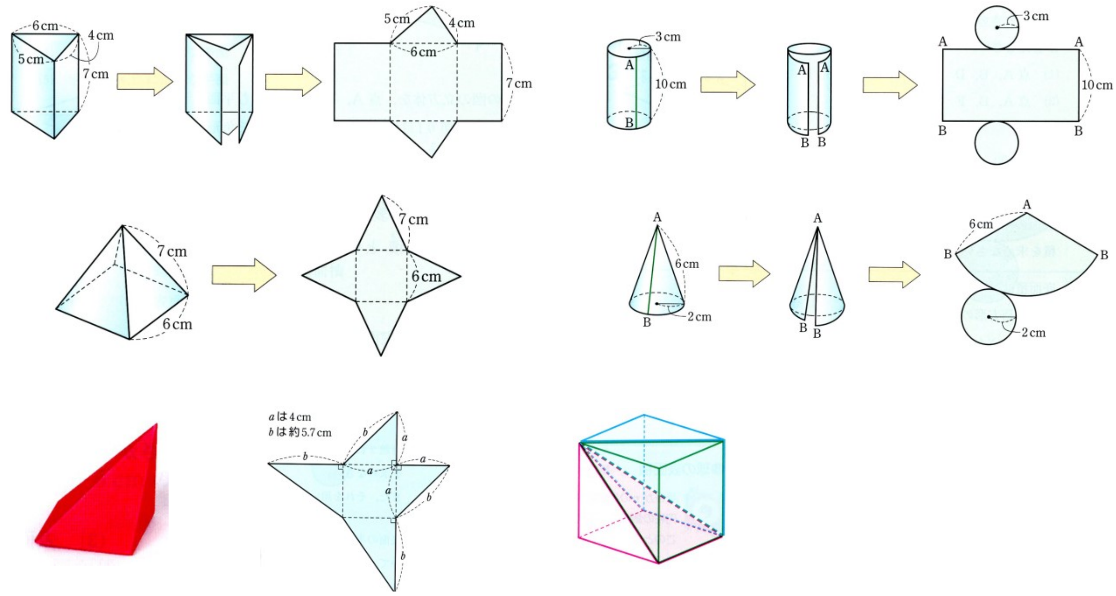
『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.168-169

【面積・体積】

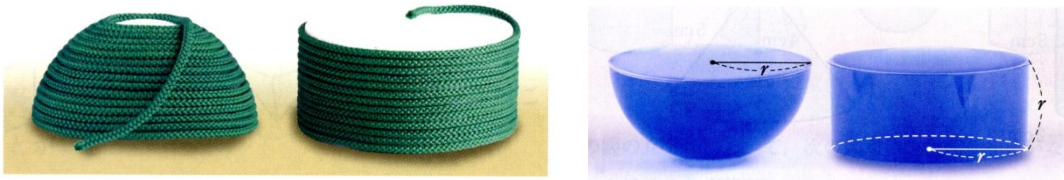
1年 「**6章 空間図形**」

角錐・円錐・球の表面積・体積の学習をする。

角錐・球の体積については、水を使って実験的に取り扱っている。球の表面積は縄を使って説明している。



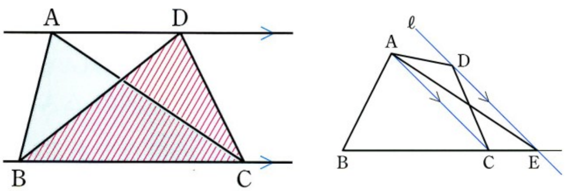
『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.178-183



『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.184-185

2年 「**5章 三角形と四角形**」の「**2節 四角形**」の「4 **面積が等しい三角形**」

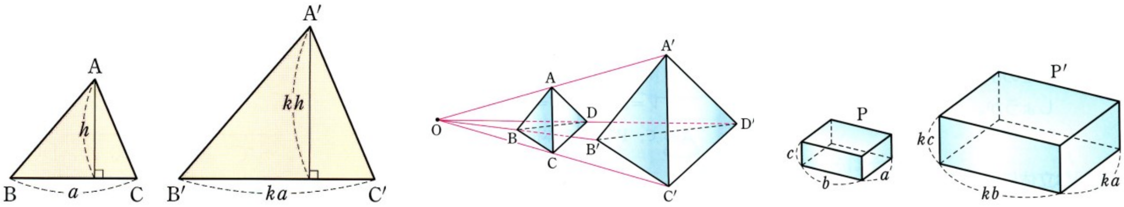
底面を共有し、底面に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習する。(等積変形)



『中学校数学 2』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.137-138

3 年　「5 章 相似」の「3 節 面積の比、体積の比」

相似な平面図形（三角形）の面積を取り扱い、その後立体の相似（三角錐・直方体）について学習し、その表面積の比・体積の比を扱っている。



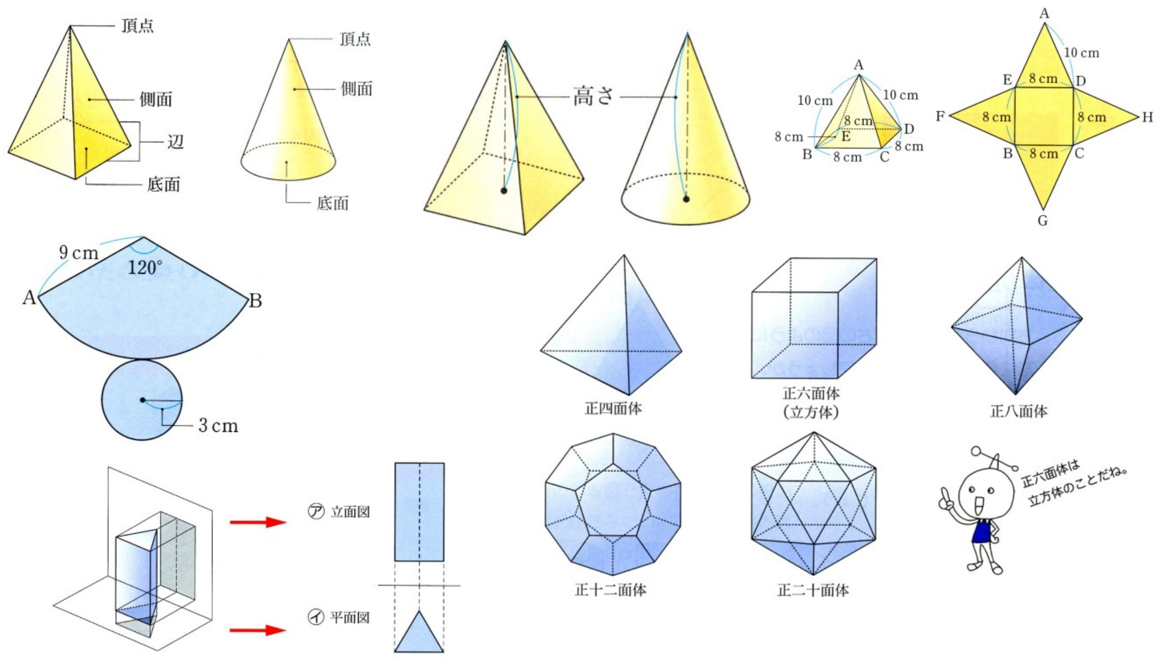
『中学校数学 3』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.134-138

５．大日本図書

【立体】

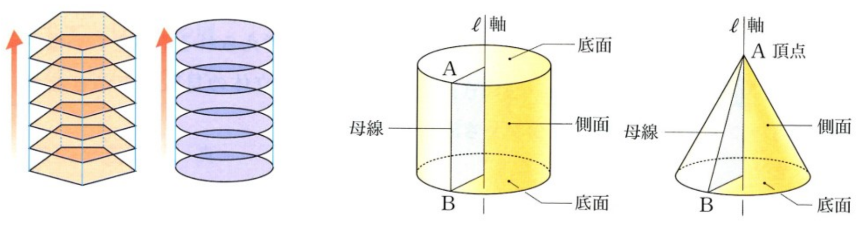
１年　「６章 空間の図形」

まず、正ｎ角柱・正ｎ角錐を取り上げ、その後多面体・正多面体、円柱・円錐を学習する。その内容は、正三角柱・正四角柱・正四角錐・円柱・円錐の見取り図・展開図・投影図である。正多面体は紹介程度にとどまっている。



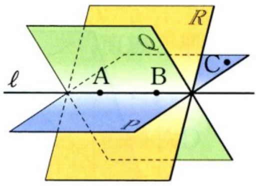
『中学校数学 1』大日本図書 H22.3.11 検定済　pp.202-209

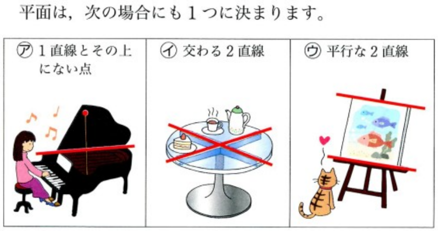
立体の構成（平面の平行移動・回転体）を学習し、そこで円柱・円錐の回転軸・母線を取り扱っている。

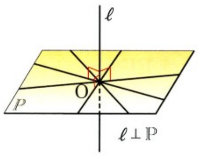


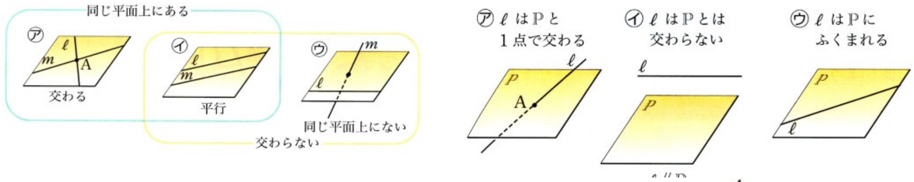
『中学校数学 1』大日本図書 H22.3.11 検定済　pp.210-211

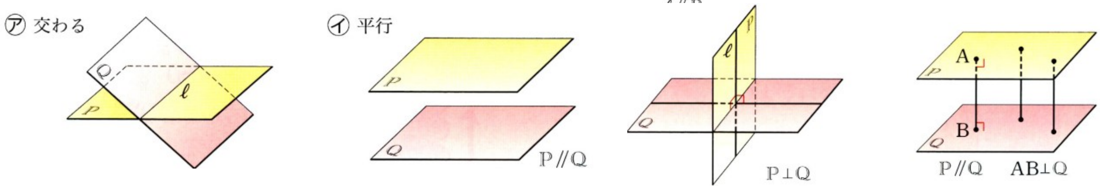
平面の決定（4 種類）、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係を学習する。点と平面・平面と平面の距離を取り扱っている。





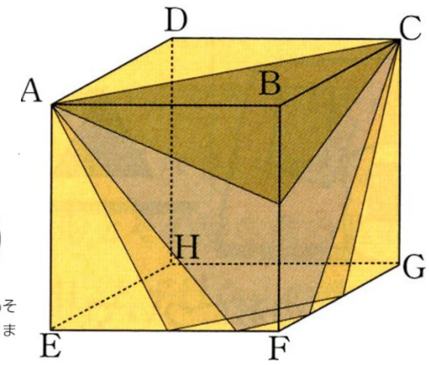


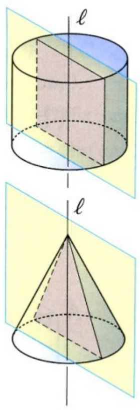




『中学校数学 1』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.215-219

「もっと数学！」では、立方体・円柱・円錐・球の切断面について触れている。





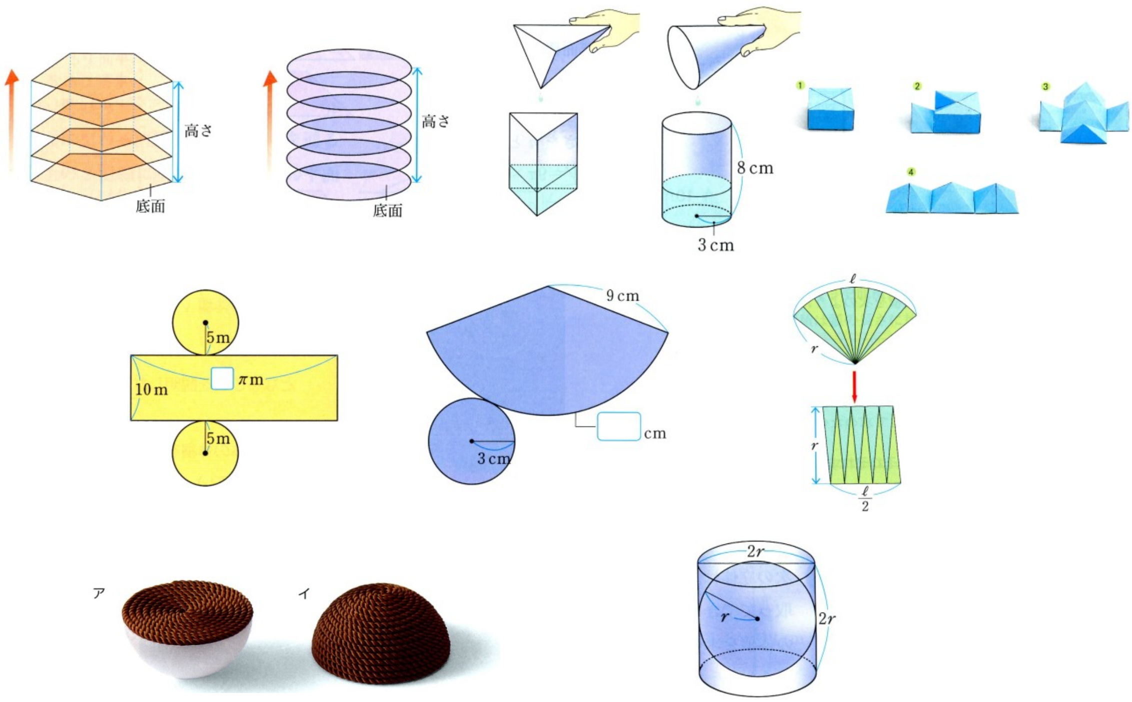
『中学校数学 1』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.239-240

【面積・体積】

1 年　「6 章　空間の図形」

　角錐・円錐・球の表面積・体積の学習をする。

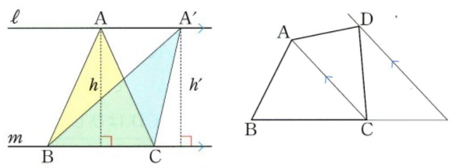
　角錐・円錐・球の体積は、水を使って実験的に取り扱っている。角錐の体積は、模型を使い実験的に取り扱っている。球の表面積は縄を使って説明している。



『中学校数学 1』大日本図書 H22.3.11 検定済　pp.220-231

2 年　「5 章　三角形と四角形」の「2 節　四角形」の「8　平行線と面積」

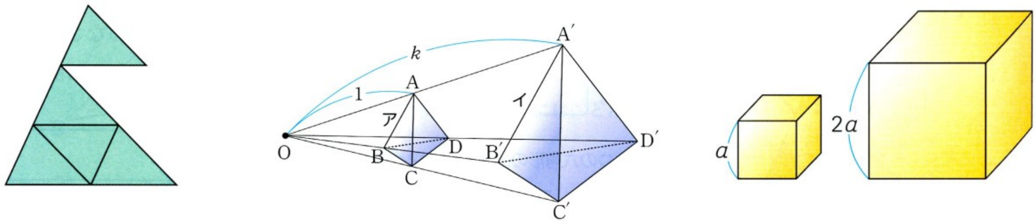
　底面を共有し、底面に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習する。(等積変形)



『中学校数学　2』大日本図書
H22.3.11 検定済　p.172-173

３年 「５章 相似と比」の「３節 相似な図形の面積と体積」

相似な平面図形の面積（三角形）を取り扱い、その後立体の相似（三角錐）について学習し、その表面積の比・体積の比を取り扱っている。



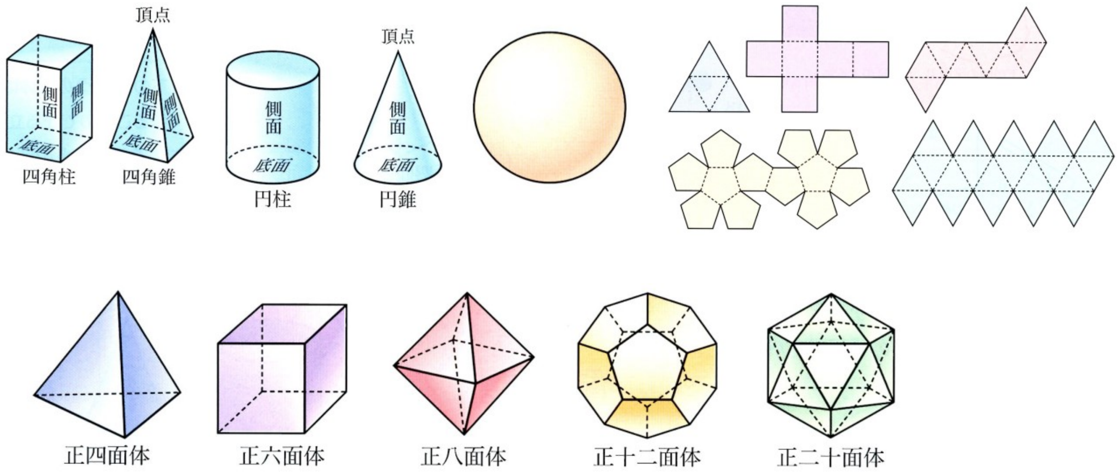
『中学校数学 3』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.164-166

６．東京書籍

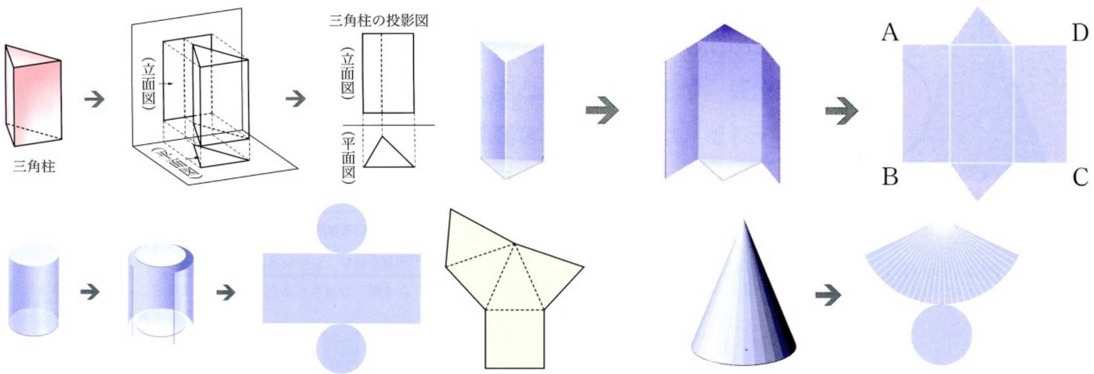
【立体】

１年 「６章 空間図形」

まず、正 n 角柱・正 n 角錐を取り上げ、その後多面体・正多面体、円柱・円錐を学習する。その内容は、正三角柱・正四角柱・正四角錐・円柱・円錐の見取り図・展開図・投影図である。正多面体は紹介程度にとどまっている。

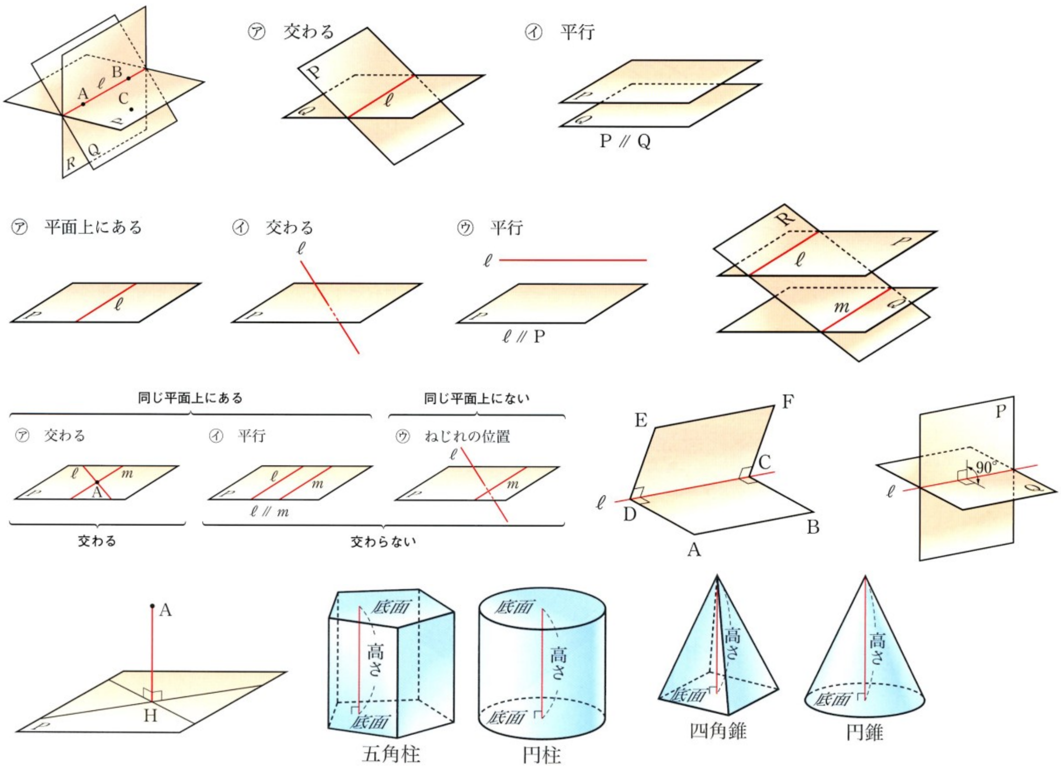


『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.169-171



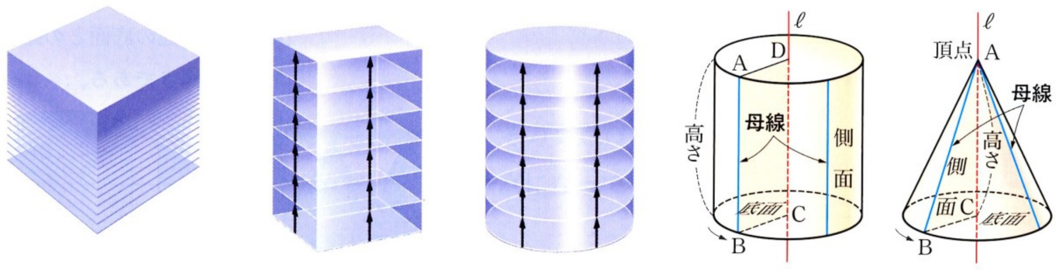
『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.181-185

平面の決定(2 通り)、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係を学習する。点と平面・平面と平面の距離を取り扱っている。



『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.172-177

立体の構成（平面の平行移動・回転体）を学習し、そこで円柱・円錐の母線回転軸を取り上げている。



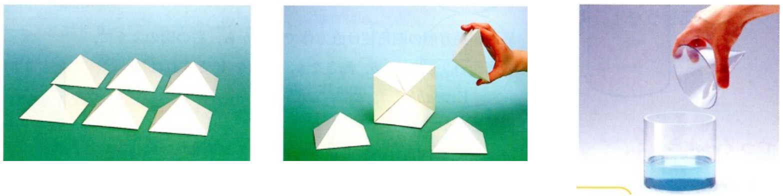
『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.178-179

【面積・体積】

1 年　**「6 章　空間図形」**

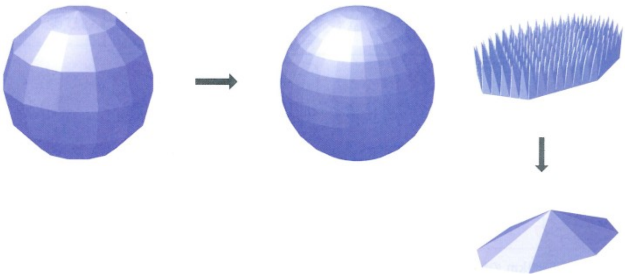
角錐・円錐・球の表面積・体積の学習をする。

円錐の体積は、水を使って実験的に取り扱い、角錐の体積は模型で説明している。



『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済　p.192

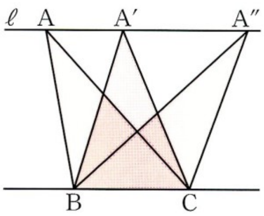
球の表面積・体積について学習する。「数学のまど」で球の体積の出し方に触れている。



『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済　p.196

2 年　**「5 章　三角形と四角形」の「2 節　平行四辺形」の「4　平行線と面積」**

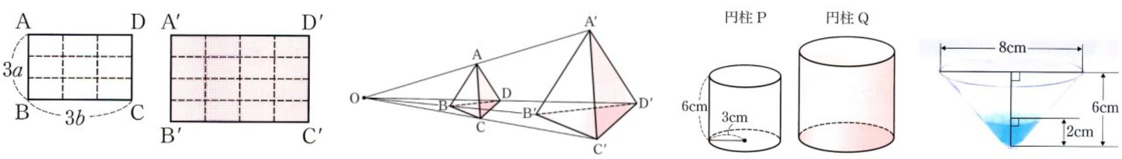
底面を共有し、底面に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習する。（等積変形）



『新しい数学 2』東京書籍 H22.3.11 検定済　p.141

3 年　**「5 章　相似な図形」の「3 節　相似な図形の面積と体積」**

相似な平面図形の面積（長方形）を取り扱い、その後立体の相似（三角形）について学習し、その表面積の比・体積の比を取り扱っている。



『新しい数学 3』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.139-144

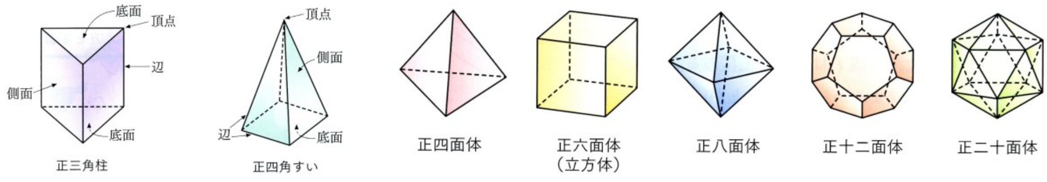
東京書籍では、立体の切断を扱っていない

７．日本文教出版

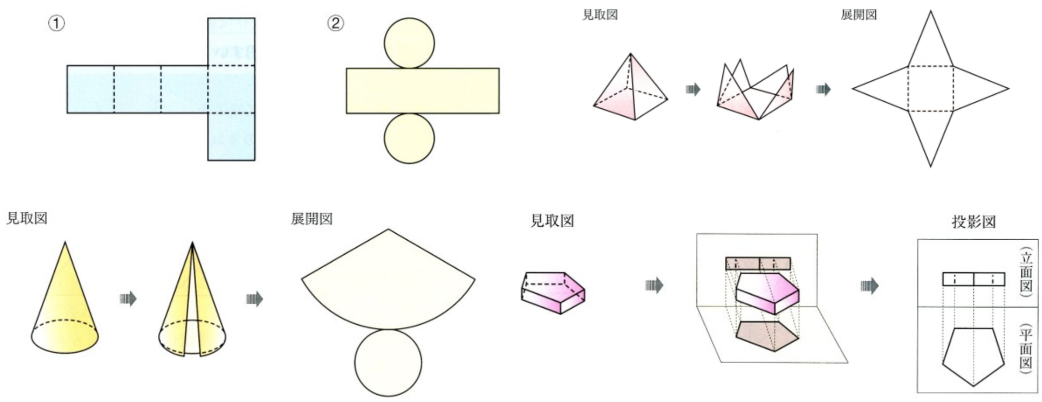
【立体】

１年　「６章空間図形」

まず、正 n 角柱・正 n 角錐を取り上げ、その後多面体・正多面体、円柱・円錐を学習する。その内容は、正三角柱・正四角柱・正四角錐・円柱・円錐の見取り図・展開図・投影図である。正多面体は紹介程度にとどまっている。

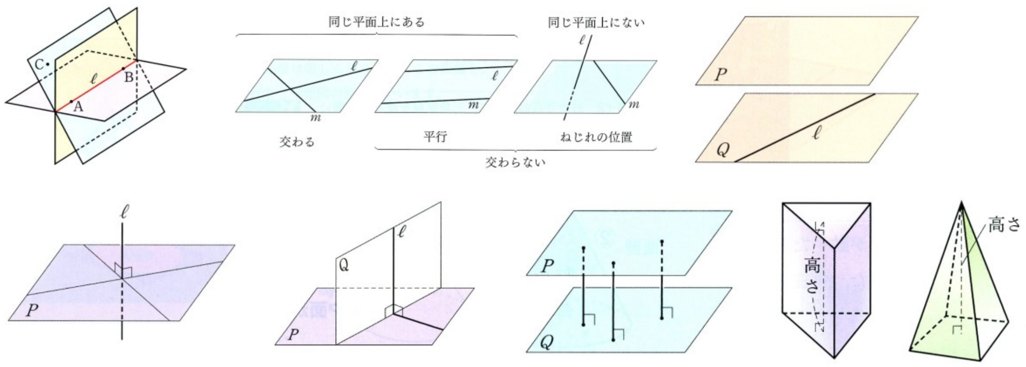


『中学数学 1』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.176-177



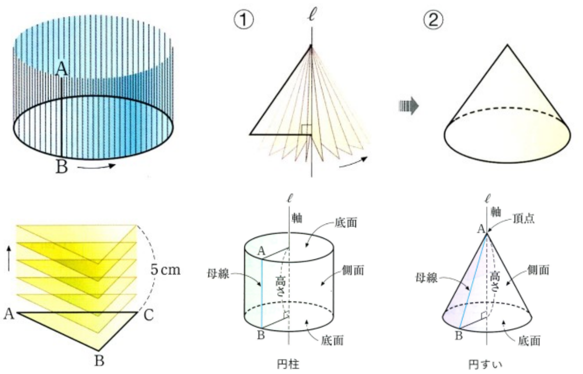
『中学数学 1』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.184-185

平面の決定（2 通り）、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係を学習する。点と平面・平面と平面の距離を取り扱っている。



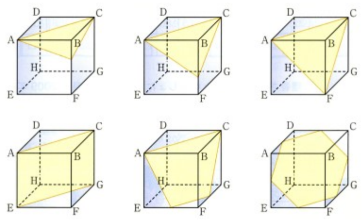
『中学数学 1』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.178-181

立体の構成（平面の平行移動・回転体・線分の移動）を学習し、そこで円柱・円錐の母線・回転軸を取り扱っている。円錐はここで出てくる。



『中学数学 1』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.182-183

「数学のたんけん」で立方体の切断を扱っている。

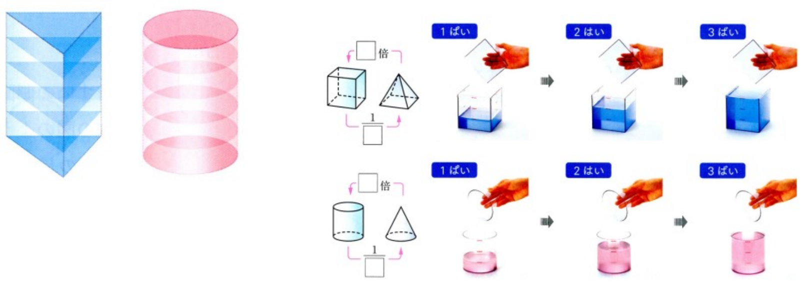

『中学数学 1』日本文教出版
H22.3.11 検定済 p.194

【面積・体積】

1 年 「6 章 空間図形」

角錐・円錐・球の表面積・体積の学習をする。

角錐・円錐・球の体積は、水を使って実験的に取り扱っている。球の表面積は縄を使って説明している。

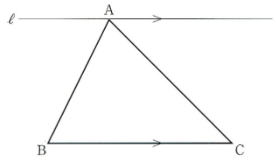


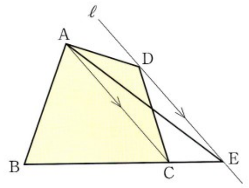
『中学数学 1』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.192-193

『中学数学 1』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.194

2 年　「5 章　三角形と四角形」の「2 節　平行四辺形」の「5　面積が等しい三角形」

底面を共有し、底面に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習する。(等積変形)

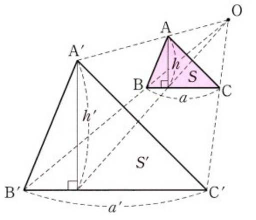


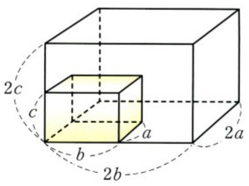


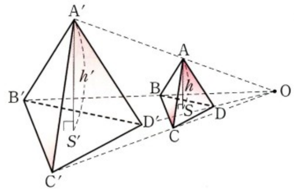
『中学数学 2』日本文教出版
H22.3.11 検定済 pp.142-143

3 年　「5 章　図形の相似」の「3 節　相似な図形の面積比と体積比」

相似な平面図形の面積（三角形）を取り扱い、その後立体の相似（直方体・三角錐）を学習し、その表面積の比・体積の比を扱っている。







『中学数学 3』日本文教出版 H22.3.11 検定済　pp.135-138

８．中学校の教科書の指導内容のまとめ

１年生では、すべての会社で、角柱・円柱についての復習をし、角錐・円錐・多面体・球について学習する。ただし、学校図書では、球について取り扱いがない。学校図書以外の会社は、投影図について扱っている。すべての会社で、正多面体を学習する。正多面体の展開図はすべての会社であるが、正多面体が五種類だけだという証明はどの会社も扱っていない。すべての会社で、平面について、直線・平面の位置関係について、平面・点の距離について学習する。平面の決定は、大日本図書・教育出版が 4 通り、他の会社が 2 通り教えている。すべての会社で、平面を動かすことで立体ができることを学習する。学校図書・大日本図書で、おうぎ形について学習する。東京書籍以外で、立体の切り口について学習する。ただし、教育出版は、2 年生で取り扱っており、他会社では、1 年生で扱っている。大日本図書は、円錐・円柱・立方体の切断を行っており、他の会社は、立方体の切断を扱っている。

	角錐	円錐	投影図	表面積	体積	空間での位置決定	立体の構成（面・線分の移動、回転体）	球	多面体	立体の切断	見取り図・展開図	おうぎ形の弧の長さと面積
学校図書	1	2	／	8	9	4	5	／	3	10	6	7
東京書籍	2	3	6	8	9	4	5	10	1	／	7	／
大日本図書	2	3	5	9	8	7	6	11	1	12	4	10
日本文教出版	1	6	7	9	10	3	4	11	2	12	5	8
数研出版	2	3	6	9	10	4	5	11	1	7	8	／
教育出版	1	2	6	8	7	3	4	9	10	11	5	／
啓林館	1	2	7	8	9	5	6	10	3	11	4	／

上図において、数字は出てくる順番を表している。

２年生では、すべての会社で、等積変形を学習する。数研出版では、平面のしきつめ、空間のうめつくしについて学習する。

３年生では、学校図書以外で、相似な平面図形の面積比を扱い、立体の相似について学習し、表面積・体積の比を学習する。

［引用文献］
『中学校数学 1』学校図書 2010.3.11 検定済
『中学校数学 2』学校図書 2010.3.11 検定済
『中学数学 1』教育出版 2010.3.11 検定済
『中学数学 2』教育出版 2010.3.11 検定済
『中学数学 3』教育出版 2010.3.11 検定済
『未来へ広がる数学 1』啓林館 2010.3.11 検定済
『未来へひろがる数学 2』啓林館 2010.3.11 検定済
『未来へひろがる数学 3』啓林館 2010.3.11 検定済
『中学校数学 1』数研出版 2010.3.11 検定済
『中学校数学 2』数研出版 2010.3.11 検定済
『中学校数学 3』数研出版 2010.3.11 検定済
『中学校数学 1』大日本図書 2010.3.11 検定済
『中学校数学 2』大日本図書 2010.3.11 検定済
『中学校数学 3』大日本図書 2010.3.11 検定済
『新しい数学 1』東京書籍 2010.3.11 検定済
『新しい数学 2』東京書籍 2010.3.11 検定済
『新しい数学 3』東京書籍 2010.3.11 検定済
『中学数学 1』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『中学数学 2』日本文教出版 2010.3.11 検定済
『中学数学 3』日本文教出版 2010.3.11 検定済

第 3 節　実践的考察に向けての教科書における等積変形の省察

小中学校で学習する立体、面積、体積に関する内容を概観してきた。この節では、本研究に直結する求積や等積変形に焦点化して省察を行う。

１．三角形、四角形の等積変形（小学校）

三角形・四角形の面積を求めるのに、等積変形を使用している。

まず高さが図形の内部にある平行四辺形では、直角三角形を移動させ長方形化させるのは全社が行っており［図 1］、台形を移動させ長方形化させるのは学校図書を除く 5 社で行っている［図 2］。教育出版・啓林館では、対角線で平行四辺形を 2 つの三角形に分け、各三角形の面積を求める方法もかかれている［図 3］。啓林館では、長方形と 2 つの三角形に分けて面積を求める方法も行っている［図 4］。

高さが図形の外に出る平行四辺形では、高さを図形の内部に入れるために三角形を移動させる方法を全社で行っている［図 5］。学校図書では、直角三角形分割をし、長方形になるように移動する方法もかかれており［図 6］、大日本図書では、高さが図形の内部に入るまで平行四辺形を横に並べていき、大きな平行四辺形を等分する方法でも教えている［図 7］。大日本図書・東京書籍では、高さが図形の内部に入るまで平行四辺形を等分割し、すべての平行四辺形の面積を足す方法もかかれている［図 8］。

次に鋭角三角形及び直角三角形では、大日本図書以外の 5 社で高さを半分にして長方形化しており［図 9］、学校図書・大日本図書・日本文教出版では、高さを半分にして平行四辺形化している［図 10］。日本文教出版を除く 5 社で頂点から垂線を下ろし、垂線で分かれた 2 つの三角形を合同な三角形で長方形化することで面積を求めており［図 11］、すべての会社でもとの三角形と合同な三角形を使い、平行四辺形化している［図 12］。啓林館では、底辺を半分にして長方形化している［図 13］。

鈍角三角形では、啓林館を除く 5 社で、もとの三角形と合同な三角形を使い、平行四辺形化している［図 14］。学校図書・大日本図書・東京書籍では、鈍角でない頂点から垂線を下ろし、直角三角形をつくり追加された直角三角形部分を後から取り除いている［図 15］。教育出版・大日本図書・日本文教出版では、平行線の性質を使い等積変形を行っており［図 16］、大日本図書では、高さを半分にして平行四辺形化している［図 17］。啓林館では、合同な三角形の回転移動を使っている［図 18］。

台形では、全社で、対角線で 2 つの三角形に分ける方法［図 19］と合同な台形を使い平行四辺形化して求める方法を扱っている［図 20］。学校図書・教育出版・東京書籍では、もとの台形の半分の高さで平行四辺形化を行っており［図 21］、学校図書だけ、台形を三角形に変形している［図 22］。

ひし形では、全社で、対角線で 2 つの三角形に分ける方法がかかれている［図 23］。学校図書以外の 5 社では、ひし形を含む長方形を考えて面積を求めている［図 24］。学校図書・東京

書籍では、4 つの直角三角形に分割し移動して長方形化をしている［図 25］。学校図書では、左右の三角形を平行線の性質を使い等積変形を行っている［図 26］。教育出版では、対角線で 2 つの三角形に分け、平行四辺形化して面積を求めている［図 27］。

一般の三角形では、学校図書・啓林館では、対角線で三角形に分けて面積を足し合わせており［図 28］、教育出版・日本文教出版では、平行線の性質を使い三角形化することにより面積を求めている［図 29］。

この単元で各教科書に載っている面積の求め方が一番多いのは、学校図書・教育出版の 17 個、一番少ないのは日本文教出版の 12 個である。啓林館・大日本図書・東京書籍は、平均の 15,6 個である。かかれている面積の求め方のバランスがいいものとしては、教育出版・大日本図書がよく、学校図書は台形・ひし形に偏っており、啓林館は平行四辺形、三角形に偏っている。また、かかれている順番は、啓林館のみ三角形→平行四辺形→台形→ひし形で、その他の会社は平行四辺形→三角形→台形→ひし形の順番である。

・学校図書

『小学校算数 5 下』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.28-40

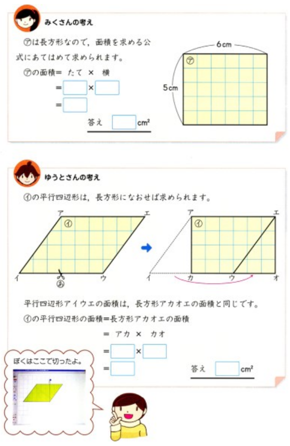


図 1

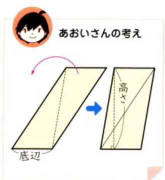


図 5

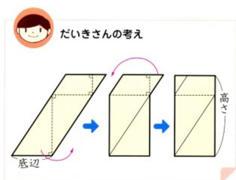


図 6

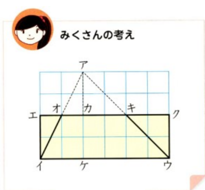


図 9

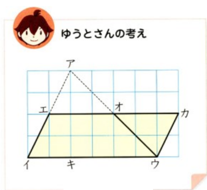


図 10

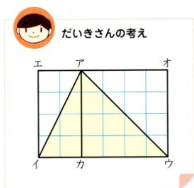


図 11

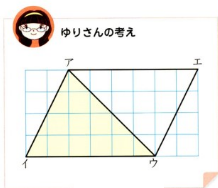


図 12

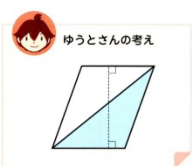


図 14

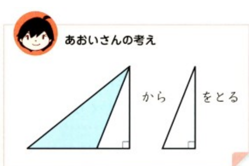


図 15

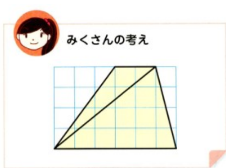


図 19

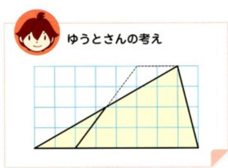


図 22

『小学校算数 5 下』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.40-42

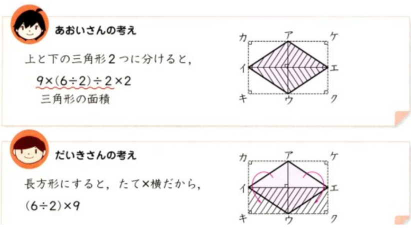


図 25

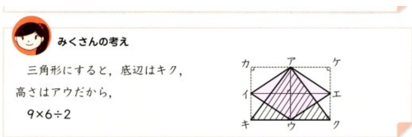


図 26

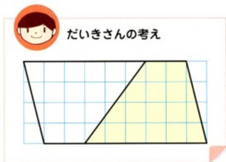


図 20

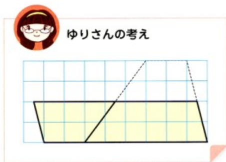


図 21

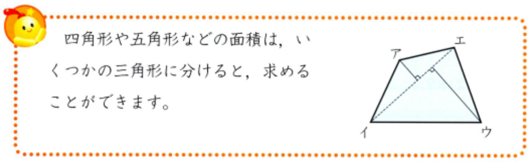


図 28

・教育出版

『小学算数 5 下』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.58-68

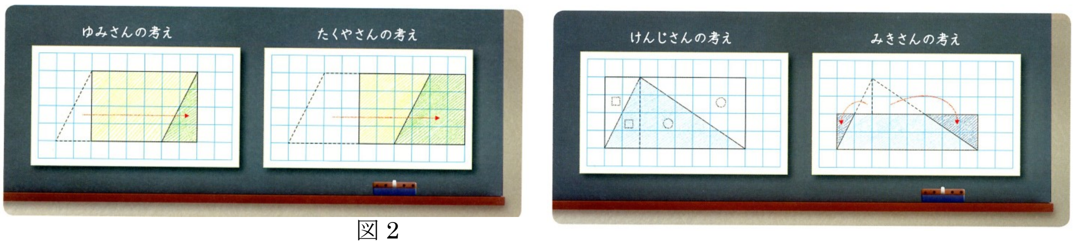
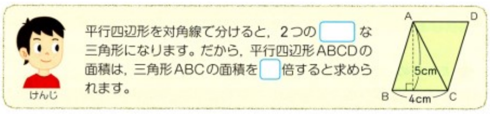
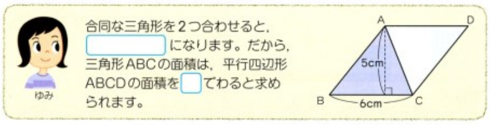
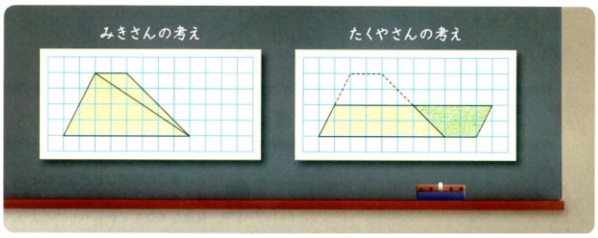


図 2







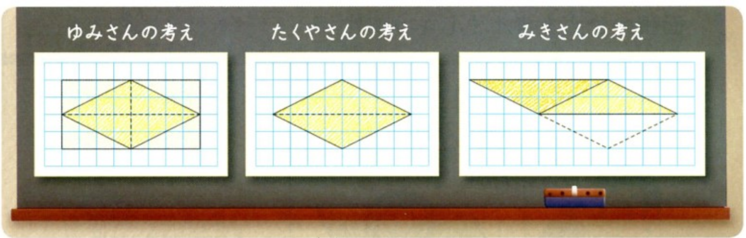


図 24　図 23　図 27

『小学算数 5 下』教育出版 H22.3.11 検定済 p.72

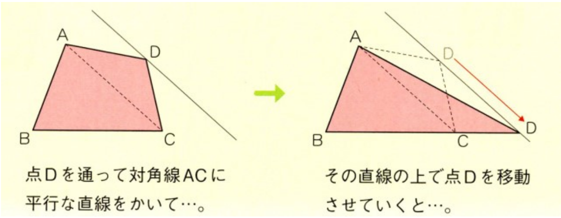


図 2

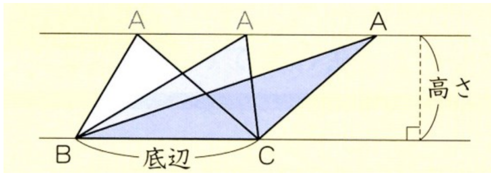
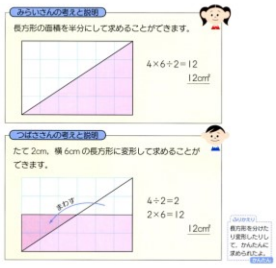
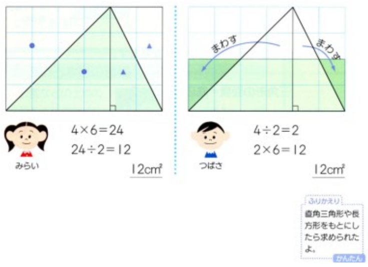


図 16

・啓林館

『わくわく算数 5 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.4-13





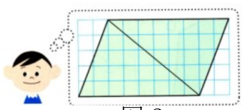


図 3

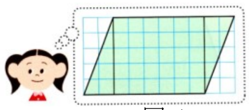
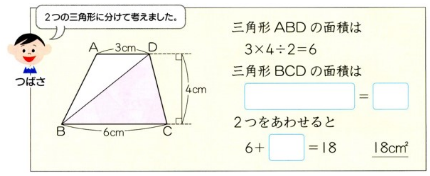
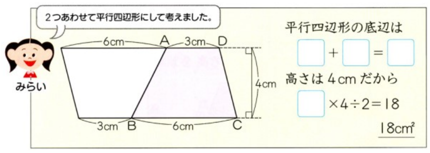
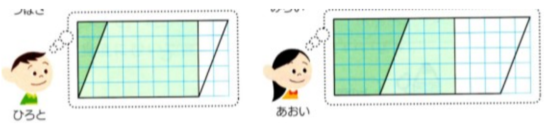


図 4







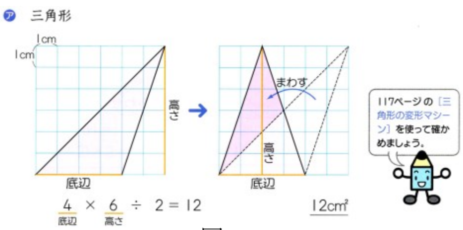
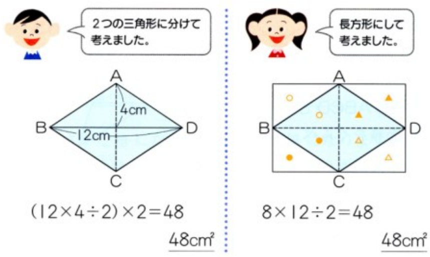
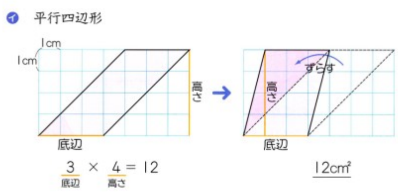


図 18





『わくわく算数５下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.16-17

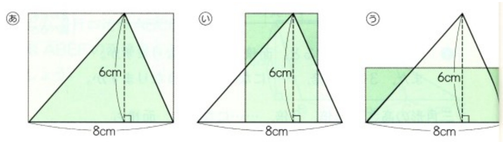
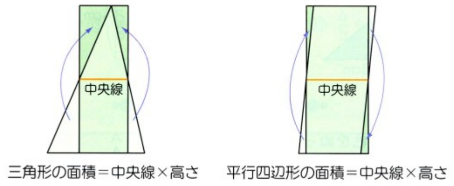
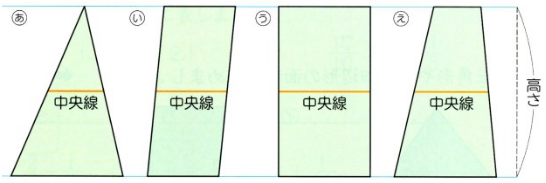


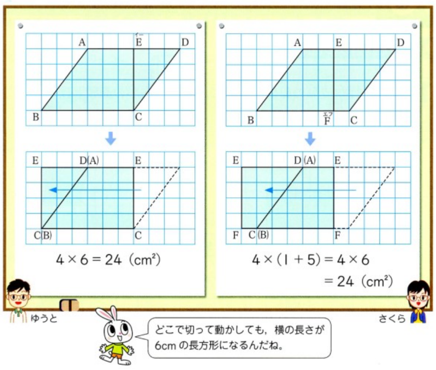
図 13





・大日本図書

『楽しい算数５下』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.4-12



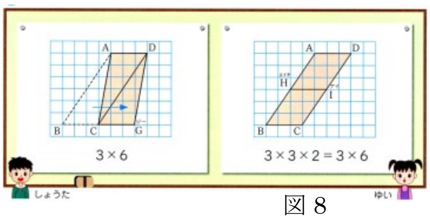


図 8

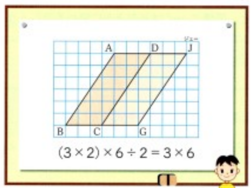
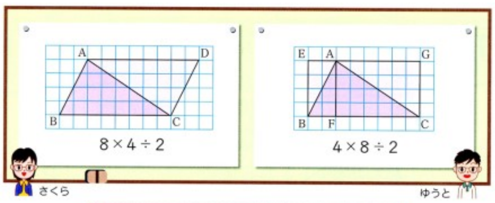
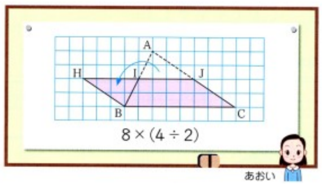


図 7





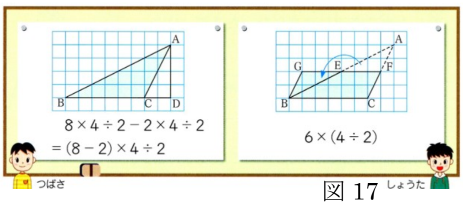
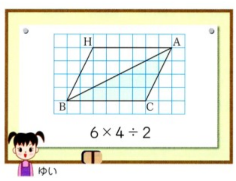
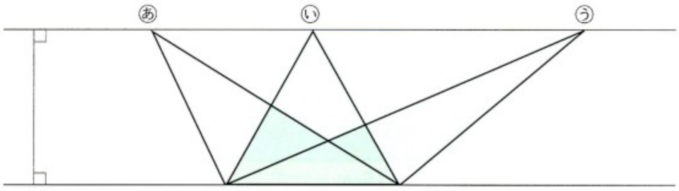
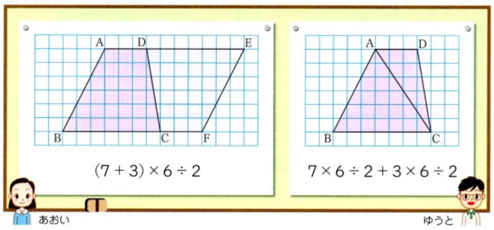


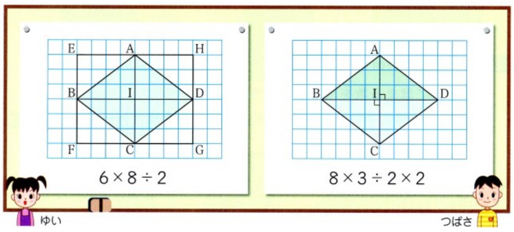
図 17



『楽しい算数 5 下』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.12-15

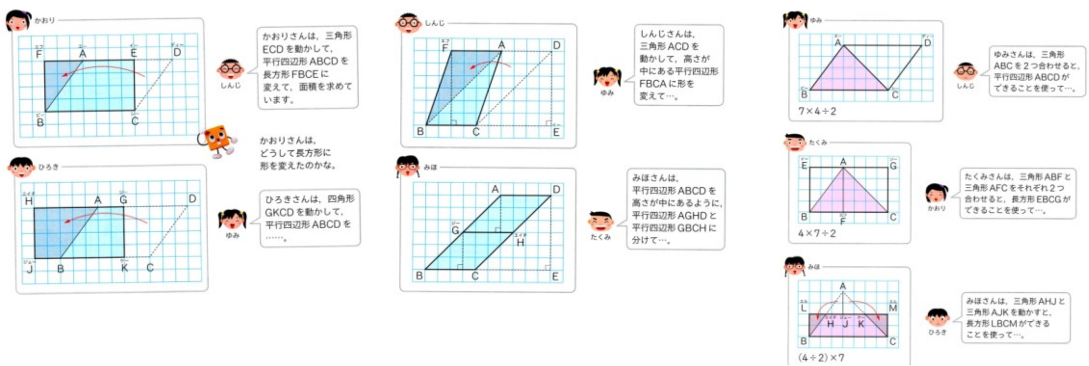




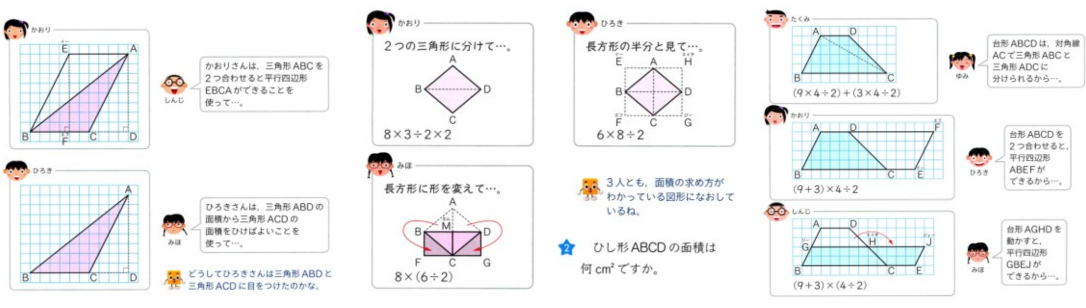


・東京書籍

『新しい算数 5 下』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.30-36

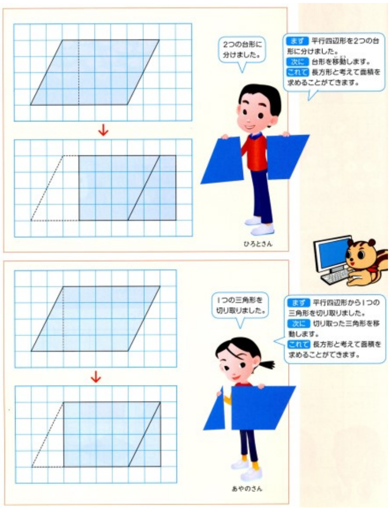


『新しい算数 5 下』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.39-44

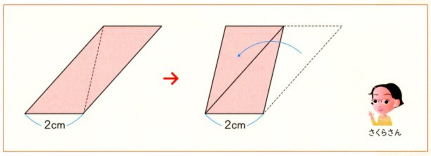


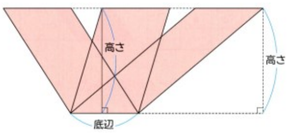
・日本文教出版

『小学算数 5 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.6

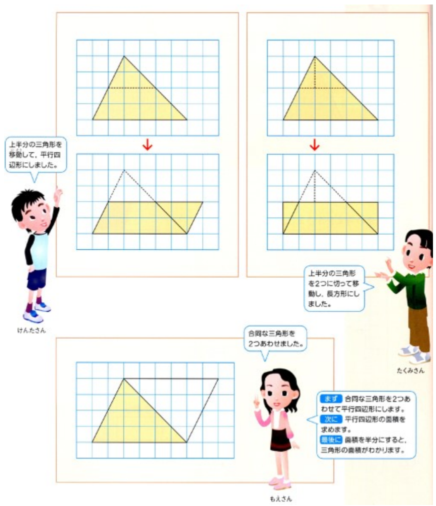


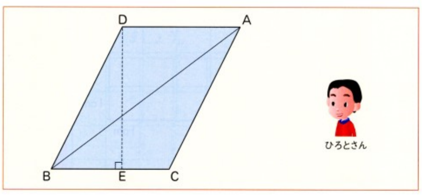
『小学算数 5 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.9



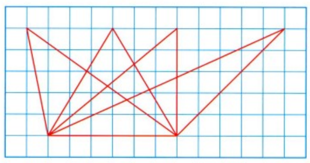


『小学算数 5 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.12-15

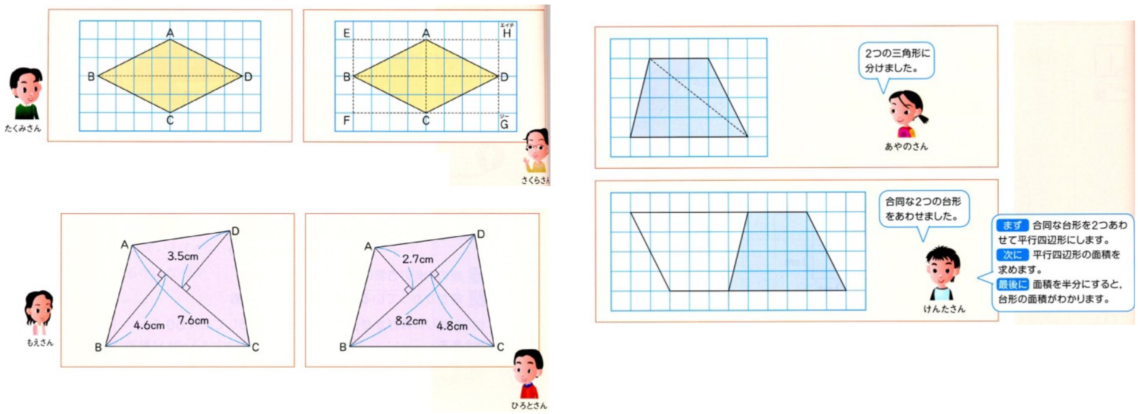




三角形では，底辺と高さが変わらなければ，面積は同じです。



『小学算数 5 年下』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.18-21



２．等積変形を利用した円の求積（小学校）

円の面積では、すべての会社で、円をおうぎ形に分割して長方形化する方法を教えている［図30］。学校図書では、おうぎ形を組み替え三角形に変形させ求める方法を扱っている［図 31］。学校図書・啓林館・大日本図書では、ひもで円をつくり一つの半径で切り取り、三角形化している［図 32］。学校図書・大日本図書では、おうぎ形に分割し平行線の性質を使い等積変形を行う［図 33］。

・学校図書

『小学校算数 6 上』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.68-70

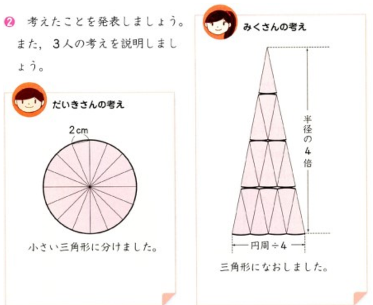


図 31

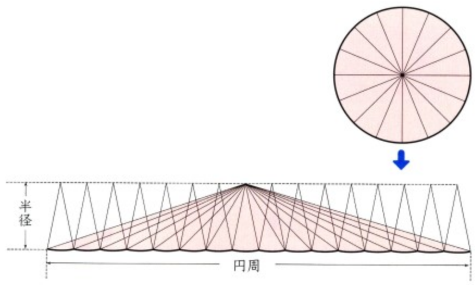


図 33

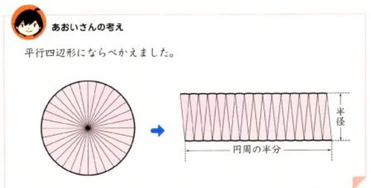


図 30

『小学校算数 6 上』学校図書 H22.3.11 検定済 p.99

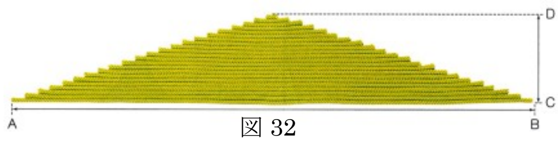
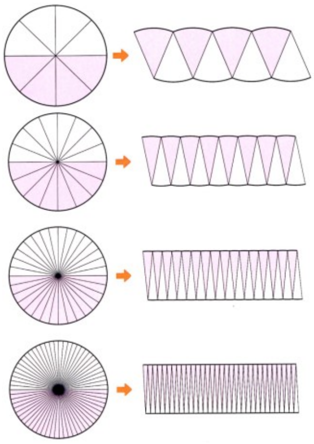


図 32

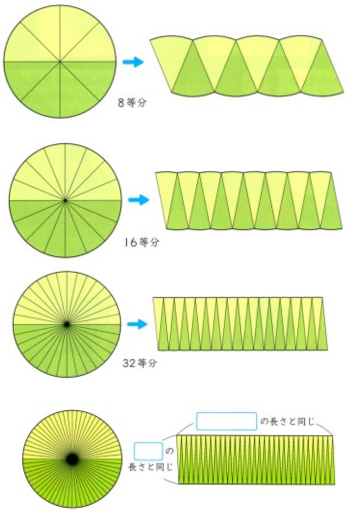
・教育出版

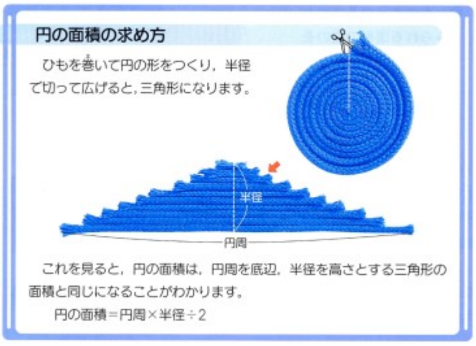
『小学算数 6 上』教育出版 H22.3.11 検定済 p.79



・啓林館

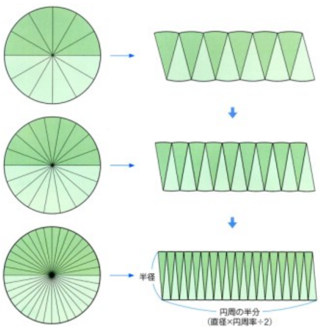
『わくわく算数 6 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.6-8



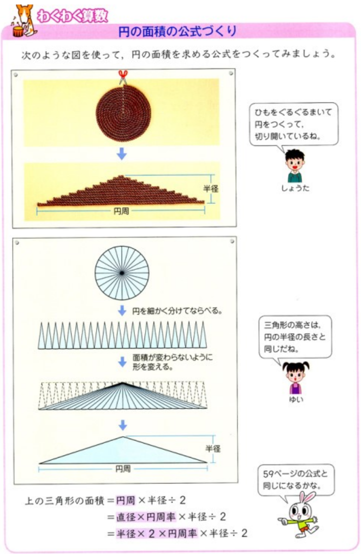


・大日本図書

『楽しい算数 6 上』大日本図書 H22.3.11 検定済 p.57

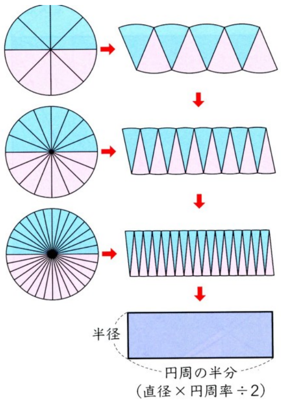


『楽しい算数 6 上』大日本図書 H22.3.11 検定済 p.60



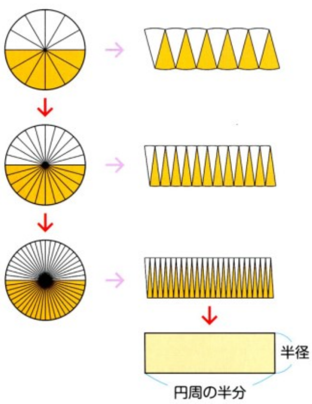
・東京書籍

『新しい算数 6 上』東京書籍 H22.3.11 検定済 p.8



・日本文教出版

『小学算数 6 年上』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.77

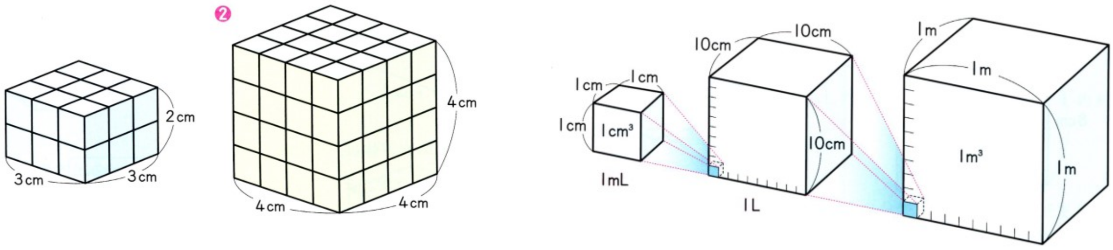


３．円柱、角柱、円錐、角錐の求積（小学校）

立体の体積の求め方の学習は、5 年生では、すべての会社で直方体、立方体などの特殊な立体の体積を求めるのに、1 辺が 1cm の立方体の空間充填を利用するので、体積の公式は縦×横×高さとなる。6 年生では、学校図書・大日本図書・東京書籍では、底面を鉛直上方へと移動させたときに通過する空間のことを体積としているので、底面積×高さへと体積の公式が変化している。教育出版・啓林館・東京書籍・日本文教出版では、高さ 1 の直方体を重ねた体積の合計を体積としている。大日本図書・日本文教出版では、円柱の体積を求めるのに円の長方形化と同様の方法で直方体化して求めている［図 34］。啓林館では、角柱による近似で円柱の体積を求めている。日本文教出版では、一般の四角柱の体積を求めるのに、二つの三角柱に分けてそれぞれの体積を足し合わせて求めている［図 35］。学校図書では、砂を使い、底面積と高さの等しい角錐と角柱の体積を調べている。砂の色を変えることで、体積の関係が分かりやすくなっている［図 36］。

・学校図書

『小学校算数 5 上』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.84-91



『小学校算数 6 上』学校図書 H22.3.11 検定済 pp.99-102

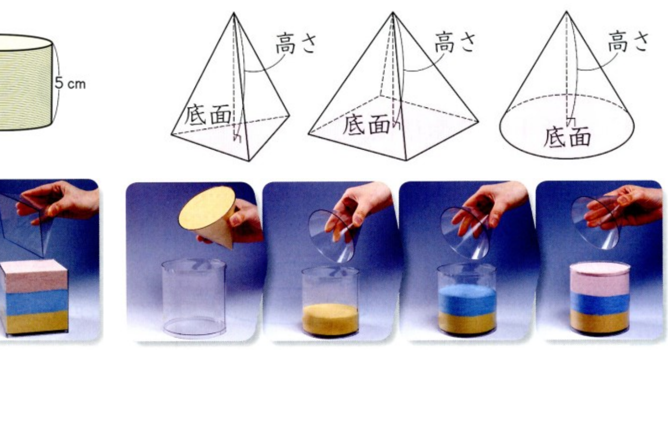
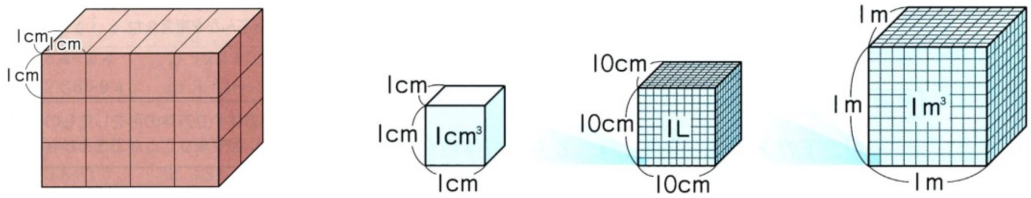


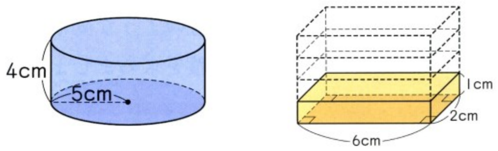
図 36

・教育出版

『小学算数 5 上』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.48-53

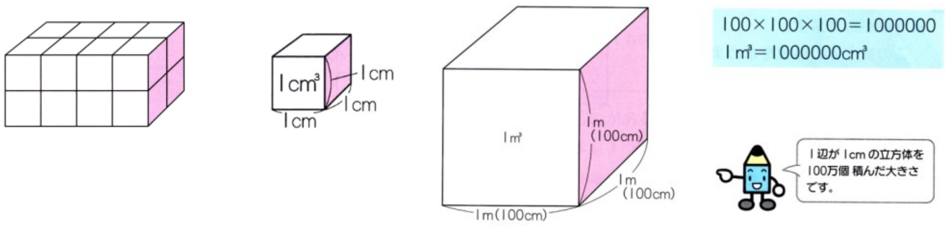


『小学算数 6 下』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.2-4

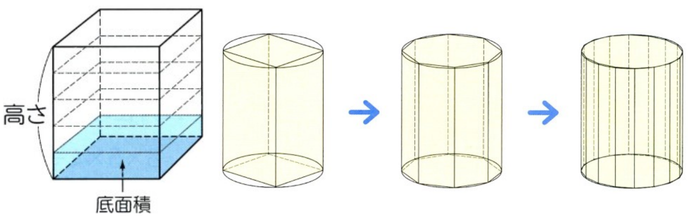


・啓林館

『わくわく算数 5 上』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.17-22

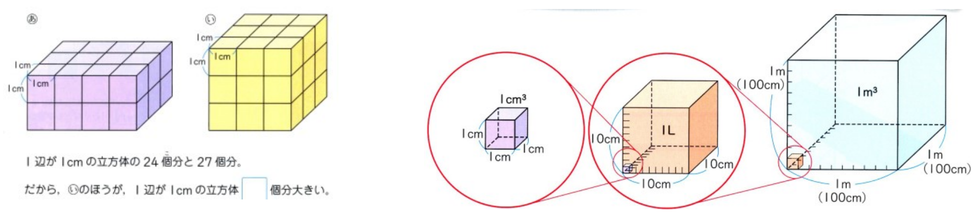


『わくわく算数 6 下』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.15-17



・大日本図書

『楽しい算数 5 上』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.50-61



『楽しい算数 6 上』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp .74-77

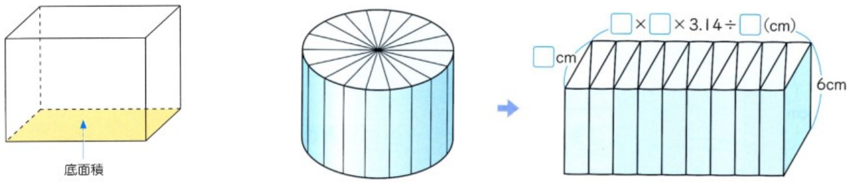
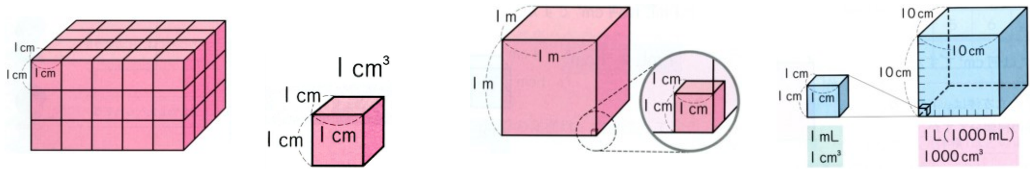


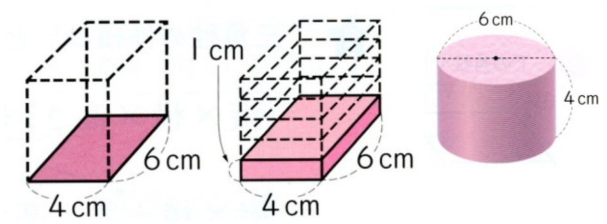
図 34

・東京書籍

『新しい算数 5 上』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.14-21

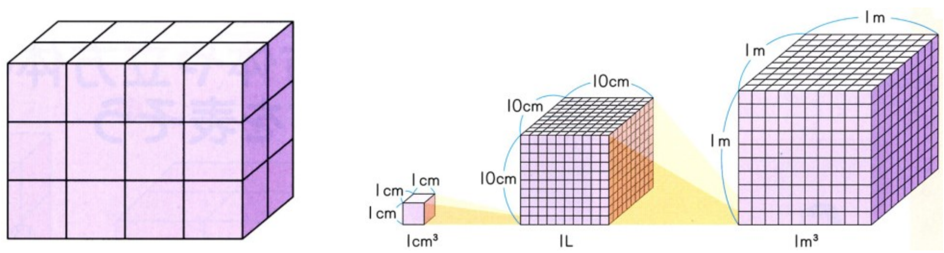


『新しい算数 6 上』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.95-97



・日本文教出版

『小学算数 5 年上』日本文教出版 H22.3.11 検定済 p.68-76



『小学算数 6 年上』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.93-96

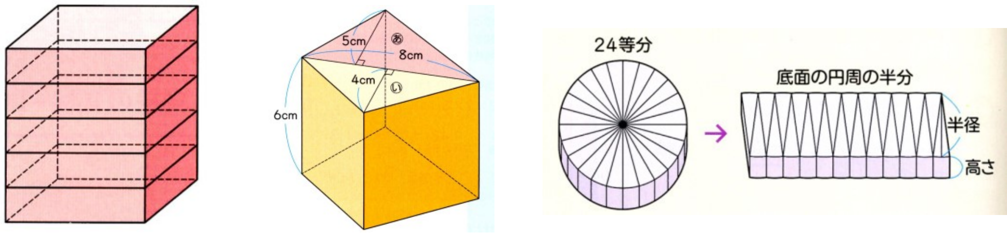


図 35

４．立体の体積の求め方（中学校）

立体の体積では、全社で、水を使った実験によって体積の関係を示していた。角柱・角錐は、学校図書・教育出版・大日本図書・日本文教出版の 4 社で、そのうちイラストを用いているのは、大日本図書だけである［図 38］。円柱・円錐は、学校図書・啓林館・大日本図書・東京書籍・日本文教出版の 5 社で、そのうちイラストを用いているのは、大日本図書だけである［図 39］。球・円柱は、教育出版・数研出版・大日本図書・日本文教出版の 4 社で、そのうち半球ではなく全球を使っているのは、教育出版だけである［図 40］。角錐と角柱の関係についての模型を使っているのは、教育出版・大日本図書である［図 41］。東京書籍では、球を多面体とみなし、角錐の集合体として体積を求めている［図 42］。

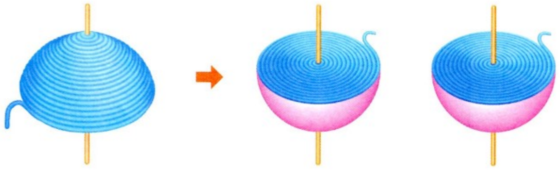
球の表面積は、教育出版・啓林館・数研出版・大日本図書・日本文教出版では、半球の表面に縄を貼り付けて表面積を求めている。縄をほどいた後、教育出版・大日本図書・日本文教出版では、球と半径が等しい二つの円を縄で作り示しており［図 43］、数研出版では、半球と半径が等しく高さが等しい円柱の側面積と等しいことから示しており［図 44］、啓林館では、半球の曲面部の表面積の 2 倍（全球の表面積）と半球の直径を半径とする円の面積が等しいことで示している［図 45］。

・学校図書

『中学校数学 1』学校図書 H22.3.11 検定済 p.165

・教育出版

『中学数学 1』教育出版 H22.3.11 検定済　pp.214-219



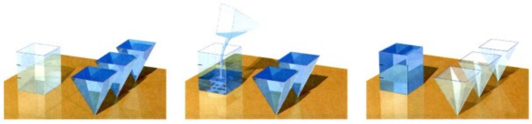


図 43

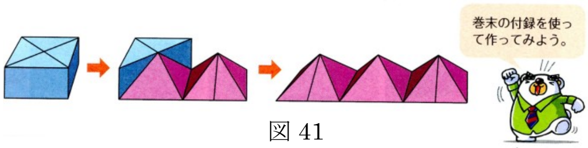


図 41

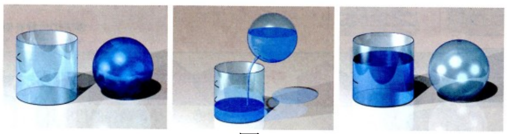


図 40

・啓林館

『未来へひろがる数学 1』啓林館 H22.3.11 検定済　pp.177-181

自分のことばで伝えよう

右の(ア)のように，半径 5cm の半球に，ひもを巻きつけます。巻きつけたひもの長さを 2 倍にして，これを(イ)のように平面上で巻いて円をつくると，その半径はおよそ 10cm になります。

そのわけを，球の表面積の公式を使って説明しましょう。

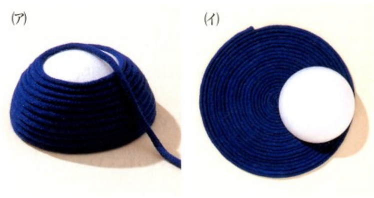


図 45

・数研出版

『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済　pp.184-185

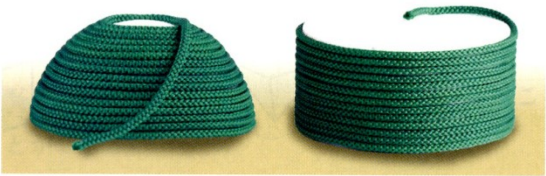
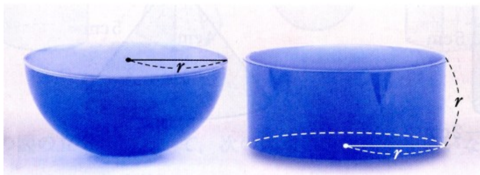


図 44



・大日本図書

『中学校数学 1』大日本図書 H22.3.11 検定済 p.222

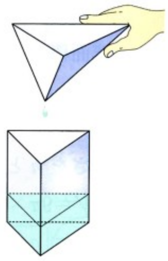


図 38

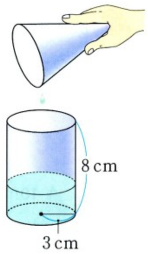
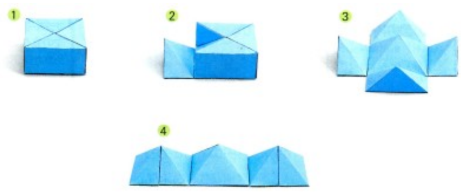
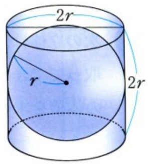
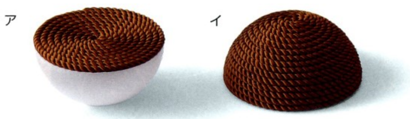


図 39



『中学校数学 1』大日本図書 H22.3.11 検定済 pp.230-231





・東京書籍

『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済 p.192

『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済 p.196

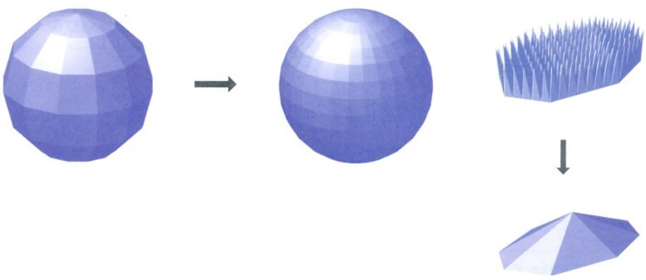
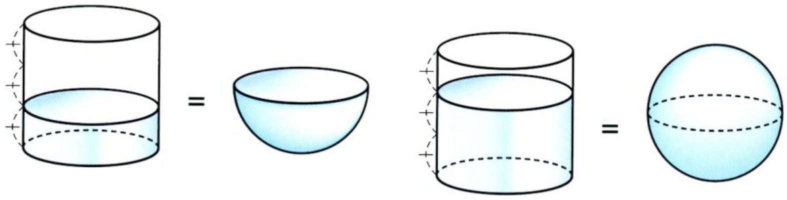


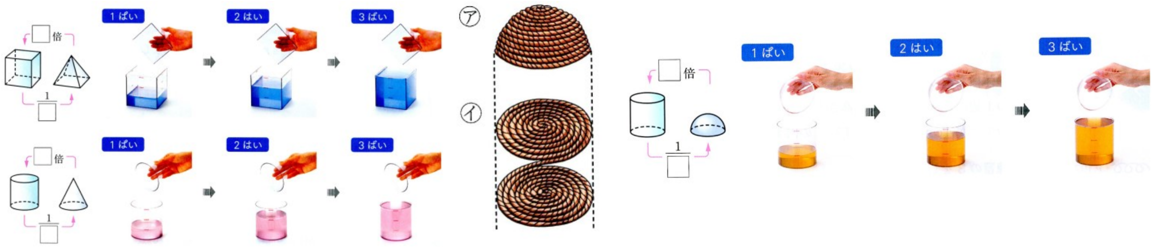
図 42

『新しい数学 1』東京書籍 H22.3.11 検定済　p.194



・日本文教出版

『中学数学 1』日本文教出版 H22.3.11 検定済　pp.193-194



５．平行線の性質を用いた等積変形（中学校）

図形の性質の単元で、すべての会社で、底辺を共有し、底辺に平行な直線上に頂点をもつ三角形の面積が等しいことを学習しており［図 46］、四角形を平行線の性質を用いて三角形化することを学習している［図 47］。啓林館だけ、方眼を用いて、平行線の性質を使った等積変形が本当に成り立っていることを示している［図 48］。

・学校図書

『中学校数学 2』学校図書 H22.3.11 検定済　pp.130-131

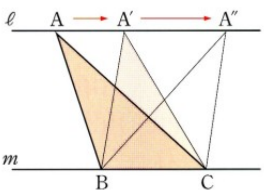


図 46

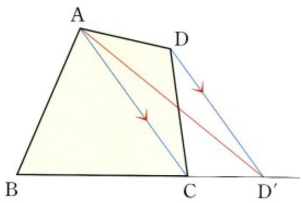
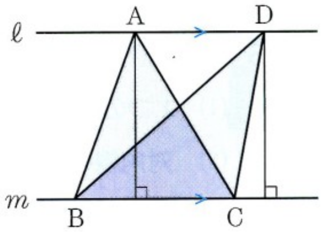
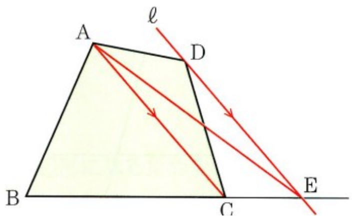


図 47

・教育出版

『中学数学 2』教育出版 H22.3.11 検定済 pp.166-167





・啓林館

『未来へひろがる数学 2』啓林館 H22.3.11 検定済 pp.130-131

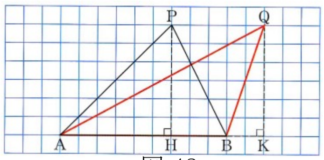
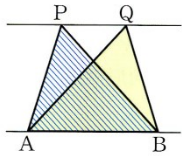
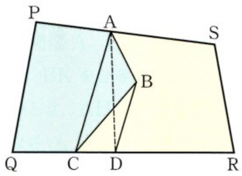


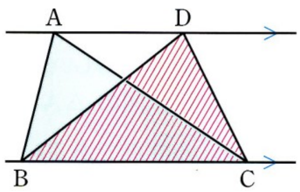
図 48

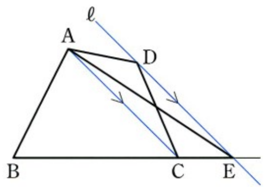




・数研出版

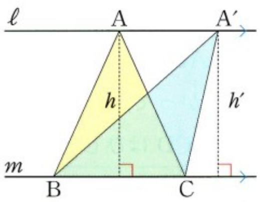
『中学校数学 1』数研出版 H22.3.11 検定済 pp.137-138

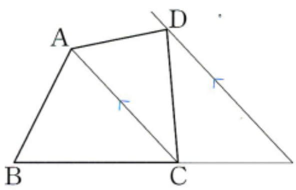




・大日本図書

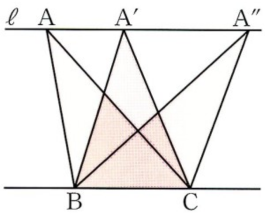
『中学校数学 2』大日本図書 H22.3.11 検定済 p.172-173

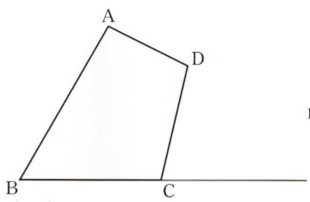


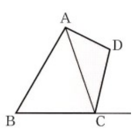


・東京書籍

『新しい数学 2』東京書籍 H22.3.11 検定済 pp.141-142

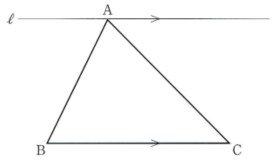


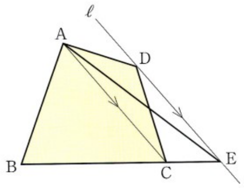




・日本文教出版

『中学数学 2』日本文教出版 H22.3.11 検定済 pp.142-143





６．本研究との関わりについて

この H24 年度の教科書で本研究に関連する部分は、小学生の学習内容では平面図形の等積変形について、中学生の学習内容は錐体の体積の公式について及び平行線の性質を使った等積変形である。平面図形の等積変形と平行線の性質を使った等積変形は、立体の等積変形を説明するための平面の等積変形を行うために使用する。この平面の等積変形を行うことで、児童がこれからどのようなことをするかを理解を促す。錐体の体積の公式は、本授業の中心的課題となり、それを求めるために本授業を行う。

第３章　理論的考察

本章では、数学的立場から見た等積変形について考察する。そのため、立体の等積変形不可能性を示すヒルベルトの第３問題と立方体への変換が不可能であることを示す三乗根の作図不可能性問題を取り上げる。

第1節　ヒルベルトの第3問題

ヒルベルトの第3問題

等しい底面積と等しい高さをもつ2つの4面体で、どのようにしても合同な4面体たちに分割することもできず、また合同な4面体を付け加えてできるどんな二つの多面体も、それら自身合同な4面体たちに分割できないものが存在するのか？

ベクトル空間の定義

V はベクトルの集合、$^{\forall}a,b\in V,{}^{\exists}0,x\in V,{}^{\forall}\lambda,\mu\in\Re$

$(1)\ a+b=b+a$
$(2)\ (a+b)+c=a+(b+c)$
$(3)\ a+0=0+a=a$
$(4)\ a+x=x+a=0$
$(5)\ \lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a, 1\cdot a=a$
$(6)\ (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$
$(7)\ \lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$

まず、証明に必要な線形写像を定義する。

実数の任意の有限集合 $M=\{m_1,m_2,\cdots,m_k\}\subseteq\Re$ に対して、M に属する数の有理係数の線形結合全体の集合として $V(M)$ を定義する。つまり、

$$V(M)=\left\{\sum_{i=1}^{k}q_im_i : q_i\in Q\right\}\subseteq\Re$$

とおく。

まず分かることは、$V(M)$ が有理数体上 Q 上の有限次元ベクトル空間であるということである。

$$a=\sum_{i=1}^{k}p_im_i\in V(M)$$
$$b=\sum_{i=1}^{k}q_im_i\in V(M)$$

とすると、

$$\begin{aligned}a+b&=\sum_{i=1}^{k}p_im_i+\sum_{i=1}^{k}q_im_i\\&=\sum_{i=1}^{k}(p_i+q_i)m_i\in V(M)(\because p_i,q_i\in Q)\end{aligned}$$

となることから明らかに和をとることに関して閉じており、$\alpha\in Q$ に対して

$$\alpha a = \alpha \sum_{i=1}^{k} p_i m_i$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha p_i m_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha p_i) m_i \in V(M)$$

となることから、有理数をかけることに関しても閉じている。よって、$\Re$ に対する体の公理によって $V(M)$ はベクトル空間になる。$V(M)$ の次元は極小な生成集合の大きさになる。定義により、M は $V(M)$ を生成するので、ある極小な生成集合を含むことになる。それゆえ、

$$\dim_Q V(M) \le k = |M|$$

となる。確かに M の要素を $M = \{m_1, \cdots, m_k\}$ であって、M の要素に演算が成り立つものがあるとき、$V(M)$ は

$$V(M) = \sum_{i=1}^{k} q_i m_i$$
$$= \sum_{i=1}^{s-1} q_i m_i + q_s m_s + \sum_{i=s+1}^{t-1} q_i m_i + q_t m_t + \sum_{i=t+1}^{k} q_i m_i$$
$$= \sum_{i=1}^{s-1} q_i m_i + \sum_{i=s+1}^{t-1} q_i m_i + \sum_{i=t+1}^{k} q_i m_i + q' n \quad (\because 1 \le s, t \le k, q_s m_s + q_t m_t = q' n)$$

となる。このとき $V(M)$ の次元は $k-1$ となる。M のすべての要素で演算が成り立たないならば、$V(M)$ の次元は k となる。

以下で、Q ベクトル空間の線形写像と解釈することのできる Q 線形関数

$$f : V(M) \to Q$$

を使う必要がでてくる。カギになる性質は、有理線形従属性 $\sum_{i=1}^{k} q_i m_i = 0 (q_i \in Q)$ があると、$\sum_{i=1}^{k} q_i f(m_i) = f(0) = 0$ が成り立たなければならないということである。次の単純な補題も成り立つが、これは後で使うことになる。

補題．$\Re$ の任意の有限部分集合 $M \subset M'$ に対して、Q ベクトル空間 $V(M)$ は Q ベクトル空間 $V(M')$ の部分空間である。$f : V(M) \to Q$ が Q 線形関数 $f' : V(M') \to Q$ に $f'(m) = f(m) (m \in M)$ を満たすように拡張することができる。

証明：どんな Q 線形関数 $f : V(M) \to Q$ も、$V(M)$ の Q 基底での値を定めれば決まるが、$V(M)$ のあらゆる基底は $V(M')$ の基底に拡張できる。

次にデーン不変量について定義する。

3 次元多面体 P に対して、隣り合う面の間の角(2 面角)と数 π を合わせた集合を M_P と表す。

立方体Cに対しては、$M_C=\left\{\frac{\pi}{2},\pi\right\}$であり、正三角形を底面とする直交プリズムQに対しては、$M_{\mathrm{Q}}=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\pi\right\}$となる。

M_Pを含む任意の有限集合$M\subseteq\Re$と、$f(\pi)=0$を満たす任意のQ線形関数

$$f:V(M)\to Q$$

が与えられるとき、Pの(fに関する)デーン不変量を実数

$$D_f(P)=\sum_{e\in P}\ell(e)\cdot f(\alpha(e))$$

として定義する。ここで、和は多面体すべての稜eに関して取り、$\ell(e)$をeの長さとし、$\alpha(e)$をeで交わる 2 つの面の間の角とする。

あとで色々なデーン不変量を計算する。今のところは、任意のこのようなQ線形関数fに対して$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}f(\pi)=0$とならねばならないので、

$$D_f(C)=0$$

つまり、立方体のデーン不変量は任意のfに関して0になることを注意しておくだけにする。

続いて、デーン―ハドヴィガーの定理について証明する。

上でしたように、2 つの多面体P,Q が分割合同であるというのをそれらが有限個の多面体の集合$P_1,\cdots,P_n$と$\mathrm{Q}_1,\cdots,\mathrm{Q}_m$に分割され、すべての$i(1\le i\le n)$に対して$P_i$と$\mathrm{Q}_i$が合同であるときとする。2 つの多面体が補充合同であるというのを、多面体$P_1,\cdots,P_m$と$\mathrm{Q}_1,\cdots,\mathrm{Q}_m$が存在して、$P_i$の内部が他のものや$P$とも交わりをもたず、$\mathrm{Q}_i$とQに対しても同様で、すべての$i$に対して$P_i$と$\mathrm{Q}_i$ が合同であり、

$$\widetilde{P}=P\bigcup P_1\bigcup P_2\bigcup\cdots\bigcup P_m \text{ と } \widetilde{\mathrm{Q}}=\mathrm{Q}\bigcup \mathrm{Q}_1\bigcup \mathrm{Q}_2\bigcup\cdots\bigcup \mathrm{Q}_m$$

が分割合同であるときとする。1844 年のゲルリングの定理によれば、合同を考える際に鏡影を許すかどうかには関係がない。

明らかに、分割合同な多面体は補充合同であるが、逆は明らかとは言い難い。次のハドヴィガーの定理は、ヒルベルトが提案したように、補充合同でなくしたがって分割合同でない、体積の等しい 4 面体を見つけるための道具を与えてくれる。

定理 1. PとQを多面体で、その稜での 2 面角をそれぞれ$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$と$\beta_1,\cdots,\beta_q$とし、Mを

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q,\pi\}\subseteq M$$

を満たす実数の有限集合とする。Q線形関数$f:V(M)\to Q$で$f(\pi)=0$と

$$D_f(P)\ne D_f(\mathrm{Q})$$

を満たすものがあれば、PとQは補充合同ではない。

証明：議論は二つの部分に分かれる。

(1)もし多面体Pが有限個の部分$P_1,\cdots,P_n$に分割され、各部分$P_1,\cdots,P_n$の２面角が集合Mに含まれていれば、あらゆるQ線形関数$f:V(M)\to Q$に対して、デーン不変量を足し合わせると

$$D_f(P)=D_f(P_1)+\cdots+D_f(P_n)$$

となる。

これを示すために、多面体の稜の任意の部分に質量を付与する。つまり、$e'\subseteq e$が多面体Pの稜eの部分であれば、その質量はその２面角のf値に長さをかけたもの

$$m_f(e')=\ell_f(e')f(\alpha(e'))$$

とする。

この質量の２面角に関する加法性と長さに関する加法性について述べる。e'が分割された２つの多面体に含まれているとする。このとき、もとの２面角を$\alpha(e')$、分割された二つの多面体を$\alpha_1(e'),\alpha_2(e')$とする。$(\because \alpha(e')=\alpha_1(e')+\alpha_2(e'))$このとき質量は

$$\begin{aligned} m_{1f}(e')+m_{2f}(e') &= \ell(e')f(\alpha_1(e'))+\ell(e')f(\alpha_2(e')) \\ &= \ell(e')(f(\alpha_1(e'))+f(\alpha_2(e'))) \\ &= \ell(e')f(\alpha_1(e')+\alpha_2(e')) \\ &= \ell(e')f(\alpha(e')) \end{aligned}$$

となる。また、同じ大きさの ２ 面角をもつときの長さの加法性に関しては、稜がe'_1,e'_2、$\ell(e')=\ell(e'_1)+\ell(e'_2)$を満たならば、

$$\begin{aligned} m_{1f}(e'_1)+m_{2f}(e'_2) &= \ell(e'_1)f(\alpha(e'_1))+\ell(e'_2)f(\alpha(e')) \\ &= (\ell(e'_1)+\ell(e'_2))f(\alpha(e')) \\ &= \ell(e')f(\alpha(e')) \end{aligned}$$

となる。

以上によって、質量に関する加法性について示された。

さて、Pが$P_1,\cdots,P_n$に分割されているなら、部分P_iの稜のすべての和集合を考える。Pの稜に含まれている稜e'にそって、部分の２面角を足し合わせるとe'でのPの２面角になり、それゆえ質量も同じように足しあわされることが分かる。

それ以外の、Pのある面の内部化Pの内部に含まれるような、あるP_iの稜e''のところで角を足せば、πか2πになる。だから、部分における角のf値を足し合わせれば、それぞれ$f(\pi)=0$か$f(2\pi)=0$になる。こうして質量の和については、これらの稜に対し、Pに対して最初の場所で与えた質量と同じ値、つまり０になる。

(2) PとQが補充合同であると仮定すると、問題になるどれかの部分に現れる２面角をすべて含むような、Mを含む集合M'を考えることができる。有限の分割しか考えていないから、M'は有限集合である。その時補題によって、fを$f':V(M')\to Q$に拡張することができ、(1)によって

$$D_{f'}(P)+D_{f'}(P_1)+\cdots+D_{f'}(P_m)=D_{f'}(\mathrm{Q})+D_{f'}(\mathrm{Q}_1)+\cdots+D_{f'}(\mathrm{Q}_m)$$

の型の等式が得られる。ここで、P_iとQ_iは合同だから、$D_{f'}(P_i)=D_{f'}(\mathrm{Q}_i)$である。それゆえ、

$D_f(P)=D_f(\mathrm{Q})$となるが、これが矛盾である。

ヒルベルトの第3問題を解くために必要なので、以下の定理を示しておく。
定理 2. あらゆる奇数$n\geq 3$に対して、数

$$A(n)=\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

は無理数である。

証明：初等的な三角法の加法定理

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を使う。$\alpha=(k+1)\varphi, \beta=(k-1)\varphi$ とおくと

$$\cos(k+1)\varphi+\cos(k-1)\varphi=2\cos\varphi\cos k\varphi$$
$$\cos(k+1)\varphi=2\cos\varphi\cos k\varphi-\cos(k-1)\varphi$$

となる。

また、$\cos\varphi_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(0\leq\varphi_n\leq\pi\right)$によって定義される角$\varphi_n=\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$に対して、

$$\cos k\varphi_n=\frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$$

という形の表示が得られる。ここで、すべての$k\geq 0$に対して、A_kはnで割れない整数である。実際、$k=0,1$に対しては$A_0=A_1=1$であり、そういう表示がある。kに関する帰納法により、$k\geq 1$に対して

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\varphi&=2\cos\varphi\cos k\varphi-\cos(k-1)\varphi\\&=2\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{\sqrt{n}^k}-\frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}}\\&=\frac{2A_k-nA_{k-1}}{\sqrt{n}_{k+1}}\end{aligned}$$

となる。こうして、$A_{k+1}=2A_k-nA_{k-1}$が得られる。もし、$n\geq 3$が奇数で、A_kがnで割り切れないならば、A_{k+1}もまたnで割ることができない。

ここで、

$$\begin{aligned}A(n)&=\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\varphi_n)\\&=\frac{1}{\pi}\varphi_n=\frac{k}{\ell}\end{aligned}$$

が有理数であると仮定する（整数$k,\ell>0$）。すると、$\ell\varphi_n=k\pi$であり、

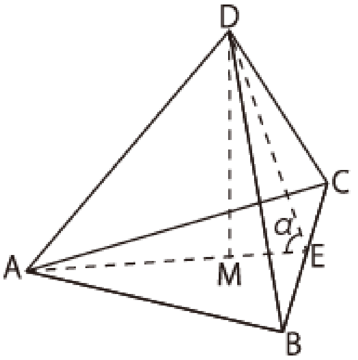
$$\pm 1=\cos k\pi=\cos\ell\varphi_n=\frac{A_\ell}{\sqrt{n}^\ell}$$

が得られる。こうして、$\ell \geq 2$ に対して、$\sqrt{n}^{\ell} = \pm A_{\ell}$ は整数になり、それゆえ $n \left| \sqrt{n}^{\ell} \right.$ となる。$\sqrt{n}^{\ell} \left| A_{\ell} \right.$ だから n が A_{ℓ} を割ることになり、これは矛盾である。

次に具体的な例を考えていき、分割合同並びに補充合同可能でないものを考える。

例 1. 稜の長さが ℓ の正 4 面体 T_0 に対して、スケッチから 2 面角を計算する。底面の中点 M は底面の三角形の高さ AE を $1:2$ に内分し、$|AE| = |DE|$ だから、$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ となり、つまり、

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}$$



となる。$M = \{\alpha, \pi\}$ とおくと、比

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$$

は、定理 2 によって、無理数となる。こうして Q ベクトル空間 $V(M)$ は 2 次元で、基底 M をもち、Q 線形関数 $f : V(M) \to Q$ で

$$f(\alpha) = 1, f(\pi) = 0$$

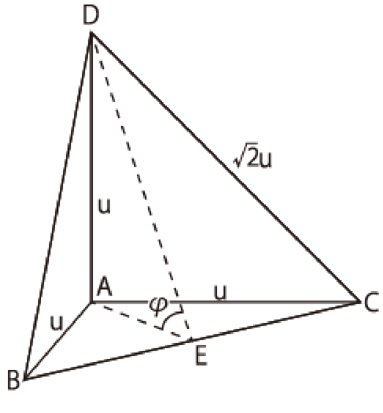
を満たすものが存在する。この f に対して、

$$D_f(T_0) = 6\ell f(\alpha) = 6\ell \neq 0$$

となり、立方体のデーン不変量がどんな f に対しても 0 だったから、正四面体は立方体と、分割合同にも補充合同にもなりえない。

例 2. T_1 を長さ u の直交する 3 つの稜 AB, AC, AD で貼られる 4 面体とする。この 4 面体の 3 面角は、直角が 3 つと、スケッチから以下のように計算される同じ大きさ φ が 3 つである。まず、

$$\cos\varphi = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}u}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2}u} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



であり、これから

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。

$M = \left\{\frac{\pi}{2}, \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi\right\}$ に対して、Q ベクトル空間 $V(M)$ は 2 次元である。実際、π と $\frac{\pi}{2}$ は 1 次従属だから $V(M) = V\left(\left\{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi\right\}\right)$ となるが、定理 2 で証明したように、$\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ と π の

間にはどんな有理関係もなく、同じことだが、$\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は無理数である。

こうして、Q 線形写像 f を

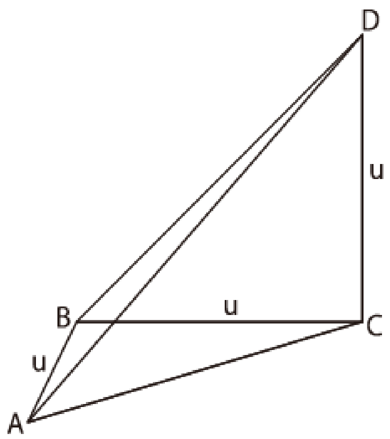
$$f(\pi)=0 \text{ かつ } f\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1$$

とおいて与えると、$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ が得られ、それゆえ

$$D_f(T_1)=3uf\left(\frac{\pi}{2}\right)+3\left(\sqrt{2}u\right)f\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3\sqrt{2}u\neq 0$$

となる。このことによって、T_1 は同じ体積の立方体 C と分割合同可能でも補充合同でもない。というのも、任意の f に対しては $D_f(C)=0$ となるからである。

例 3. 最後に、4 面体 T_2 を同じ長さ u の互いに直交する連続した稜 AB, BC, CD をもつものとする。この立体を古代中国ではべつどうと呼ばれている、立方体 3 つに切断した陽馬を、さらに 2 つの鏡像で合同な立体に分けたものである。



このような 4 面体は角の計算をしないで、むしろ、稜と面の中点と中心を使って、稜の長さが u の立方体がこの型の 6 つの 4 面体(合同な 4 面体を 3 つと鏡像を 3 つ使用する）に分割することができる。

これらすべての合同なものと鏡像は同じデーン不変量をもつので、あらゆる適当な関数 f に対して

$$D_f(T_2)=\frac{1}{6}D_f(C)=0$$

となり、それゆえこのような 4 面体のすべてのデーン不変量は 0 になる。よって、例 2 で示した 4 面体 T_1 と例 3 で示した 4 面体 T_2 において、底面が合同で、高さが等しいとき

$$D_f(T_1)\neq D_f(T_2)$$

となることから、ヒルベルトの第 3 問題を解くことができた。

［参考文献］

M.アイグラー・G.M.ツィグラー著．蟹江幸博訳．『天書の証明』．丸善出版．2012.9.25 発行

第２節　３乗根の作図不可能性

$\sqrt[3]{3}$ の作図不可能性の証明理由としては、立体の合同変換を行うときに、ヒルベルトの第 3 問題の中でデーン不変量が等しければ、合同変換及び補充合同であることを示したが、実際の変換の中で角錐体を立方体に変換することはできないことを証明するためである。

作図可能な直線は $a+b\sqrt{D}$ の形をしている。

$$F_1=\{a+b\sqrt{D}\ |(a,b,D\text{ は有理数})\}$$
$$F_2=\{x+y\sqrt{D_1}\ |(x\in F_1, y\in F_1, D_1\in F_1, y\neq 0\}$$

よって、

$$Q\subset F_1\subset F_2$$

$$F_3=\{\mathrm{c}+\mathrm{d}\sqrt{D_2}\ |(c\in F_2, d\in F_2, D_2\in F_2, d\neq 0\}$$

よって、

$$Q\subset F_1\subset F_2\subset F_3$$

これを繰り返すと

$$Q\subset F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots\subset F_n$$

作図可能な数 X は有理点から出発して作図手順をとりながら平方根の作図が現れるごとに数の範囲を広げることによって上のような列を構成し、F_n が X を含むようにできる。つまり、つまり実数 X が作図可能であるための必要十分条件は、上で述べたように広がっていく作図可能な数の集合の列

$$Q\subset F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots\subset F_n$$

で $X\in F_n$ あるようなものが存在することである。このことを使い、$\sqrt[3]{3}$ が作図不可能であることを証明する。

補題　方程式 $x^3-3=0$ の実数解は 1 つで $x=\sqrt[3]{3}$ である。

(証明)

$\sqrt[3]{3}$ が作図可能だと仮定する。

すると、列

$$Q\subset F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots\subset F_n$$

で $\sqrt[3]{3}\in F_k$ かつ $\sqrt[3]{3}\notin F_{k-1}$ である F_k が存在する。

$$F_k=\{\mathrm{p}+q\sqrt{D_{k-1}}\ |(p,q,D_{k-1}\in F_{k-1}, q\neq 0\}$$

よって、

$$\sqrt[3]{3} = \mathrm{p} + q\sqrt{D_{k-1}} \in F_k \, (q\sqrt{D_{k-1}} \in F_k)$$

とかける。

$f(x) = x^3 - 3$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\sqrt[3]{3}) &= \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 - 3 \\ &= 3 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} f(p + q\sqrt{D_{k-1}}) &= \left(p + q\sqrt{D_{k-1}}\right)^3 - 3 \\ &= p^3 + 3p^2 q\sqrt{D_{k-1}} + 3pq^2 D_{k-1} + q^3 D_{k-1}\sqrt{D_{k-1}} - 3 \\ &= \left(p^3 + 3pq^2 D_{k-1} - 3\right) + \left(3p^2 q + q^3 D_{k-1}\right)\sqrt{D_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\therefore \left(p^3 + 3pq^2 D_{k-1} - 3\right) + \left(3p^2 q + q^3 D_{k-1}\right)\sqrt{D_{k-1}} = 0$$

$3p^2 q + q^3 D_{k-1} \neq 0$ とすると

$$\sqrt{D_{k-1}} = -\frac{p^3 + 3pq^2 D_{k-1} - 3}{3p^2 q + q^3 D_{k-1}}$$

$p, q, D_{k-1} \in F_{k-1}$ であるから、$-\dfrac{p^3 + 3pq^2 D_{k-1} - 3}{3p^2 q + q^3 D_{k-1}} \in F_{k-1}$ となる。すなわち、$\sqrt{D_{k-1}} \in F_{k-1}$ となる。

ところが、 $\sqrt{D_{k-1}} \in F_k$ であることに矛盾する。

よって、 $3p^2 q + q^3 D_{k-1} = 0$ である。

$$\therefore \left(p^3 + 3pq^2 D_{k-1} - 3\right) + 0 \cdot \sqrt{D_{k-1}} = 0$$

$$\therefore \left(p^3 + 3pq^2 D_{k-1} - 3\right) = 0$$

すると、 $\sqrt[3]{3} = \mathrm{p} - q\sqrt{D_{k-1}}$ のときは、

$$f(p - q\sqrt{D_{k-1}}) = \left(p^3 + 3pq^2 D_{k-1} - 3\right) - \left(3p^2 q + q^3 D_{k-1}\right)\sqrt{D_{k-1}} = 0$$

となる。

すなわち、

$$f(p + q\sqrt{D_{k-1}}) = f(p - q\sqrt{D_{k-1}}) = 0$$

となる。言い換えると、 $p + q\sqrt{D_{k-1}}$ と $p - q\sqrt{D_{k-1}}$ は $x^3 - 3 = 0$ の実数解となる。

$\sqrt[3]{3}$ は F_k の元なので、少なくとも $q\sqrt{D_{k-1}} \neq 0$ でなければならない。もし、 $q\sqrt{D_{k-1}} = 0$ ならば、 $\sqrt[3]{3} = p$ になる。 p は F_{k-1} の元なので、 $\sqrt[3]{3}$ は F_{k-1} の元となってしまうので矛盾が生じる。

よって、

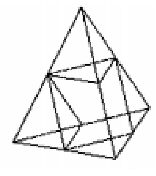
$$f(p+q\sqrt{D_{k-1}}) \neq f(p-q\sqrt{D_{k-1}})$$

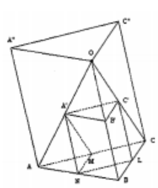
これらは 2 つとも実数であることから、$x^3 = 3$ の実数解がただ 1 つであることに矛盾する。よって、$\sqrt[3]{3}$ が作図可能という仮定が間違っていたということになるので、$\sqrt[3]{3}$ は作図不可能である。

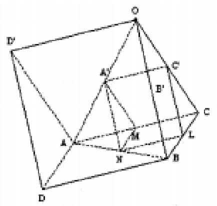
第４章　先行研究

本章では、これまでに行われている角錐の体積の指導法についての先行研究を調べる。

①福谷敏「中学生がわかる「三角錐の公式の証明」」では、立体の相似による体積比を利用して体積の公式を導いている。使用する立体は、任意の三角錐とその三角錐のすべての頂点が三角柱の頂点に含まれている三角柱を使用している。三角錐をエウドクソスの取り尽くしの方法で行われた分割方法（右図）で分割している。この分割を行うことによって、三角錐は 2 つの三角錐と 2 つの三角柱へと分割できる。新しくできた 2 つの三角錐は、もとの三角錐と相似でその相似比は 1:2 となり、体積比は 1:8 となる。分割でできた三角柱は、体積の等しい異なる 2 つの三角柱を使用すると、相似比はそれぞれ 1:2 となるので、体積比はそれぞれ 1:8 となる。





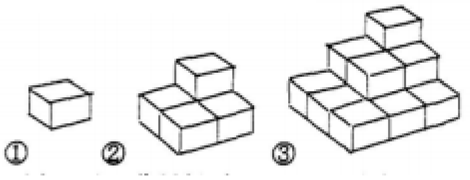


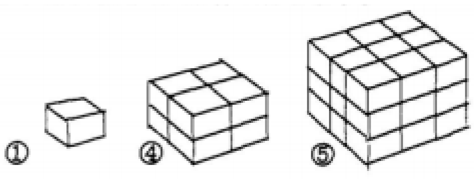
もとの三角錐の体積を V 、三角柱の体積を V_0 とすると、三角錐の体積は $2\frac{1}{8}V_0 + 2\frac{1}{8}V = V$ となる。この式を計算すると $V_0 = 3V$ となることが分かる。このように体積を導いている。

②赤井利行「角錐・円錐の体積の求め方」では、体積がどのようになるのかを予測させ、実験・実測を通して実際に確認している。立体図形の量的な側面をイメージするためには、たくさんの立体図形を構成させたり、分割させたりして具体的なイメージを豊かにしていく必要があると考えている。実際の授業では、画用紙に展開図をかかせ、それをもとに表面積を考え、組み立てた立体図形から体積を考えさせている。さらに、確かめとして、教師が教具を用いて実験・実測をしている。

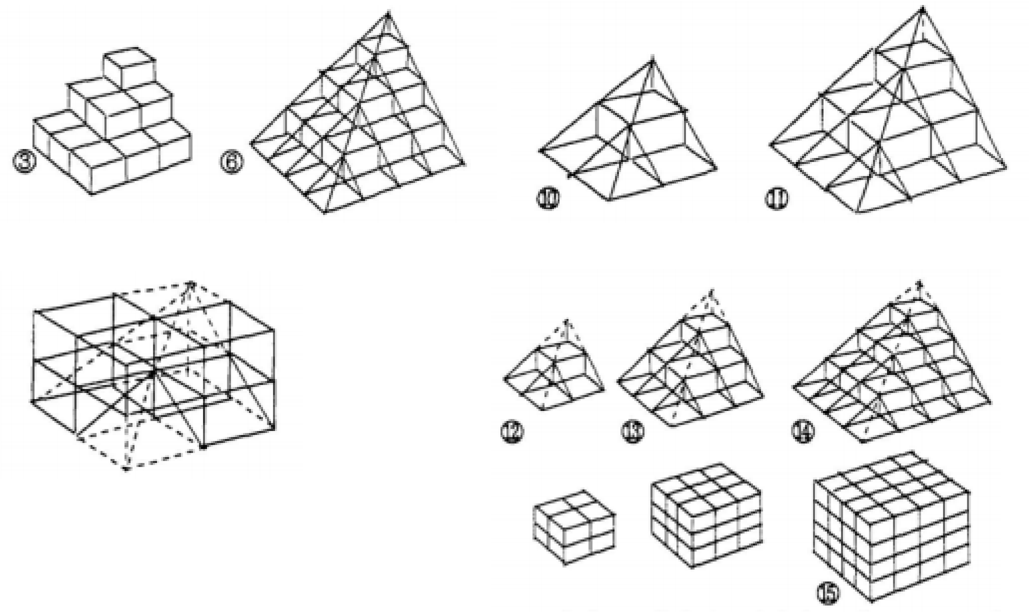
③神保敏弥「四角錐の体積」では、四角柱や三角柱など体積が既知のもので、角錐の内部の空間充填を行いわからない部分の体積を減らしていき、徐々に角錐を大きくし、同底・同高の角錐と角柱の体積を比較している。この実践は、いくつかの段階に分けて行っている。

まず第 1 段階として、ピラミッドが四角錐に見えることから直方体を積み重ねていくことによって四角柱をピラミッド状に積み重ね、同底・同高の四角柱と体積を比べている。

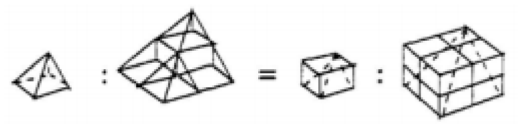


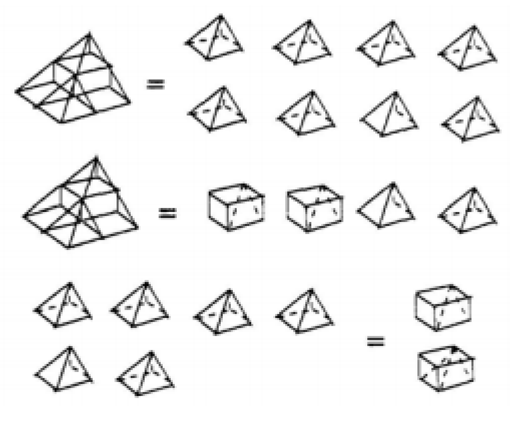


第 2 段階として、最初に作ったピラミッド状に積み重ねられた四角柱を三角柱や小さい四角錐を補充することによって四角錐をつくり、先ほどと同様にできた四角錐の体積がわかる角柱部分と同底・同高の四角柱の体積を比べている。これによって、四角錐は基礎単位の直方体の何個分よりも大きいのかがわかる。次に、四角錐が基礎単位の直方体の体積の何個分よりも小さいのかを調べている。この方法ではさみうちの原理を使うことで四角錐の体積を求めていく。



第 3 段階として、2 種類の大きさの四角錐・四角柱の体積比から体積を考えていく。体積比を比べることによって、大きい四角錐は小さい四角錐が何個分であるのかと大きい四角錐は小さい四角錐が何個分と小さい直方体が何個分なのかを比較することによって、小さい四角錐が何個分で小さい直方体が何個分になるのかを求めている。

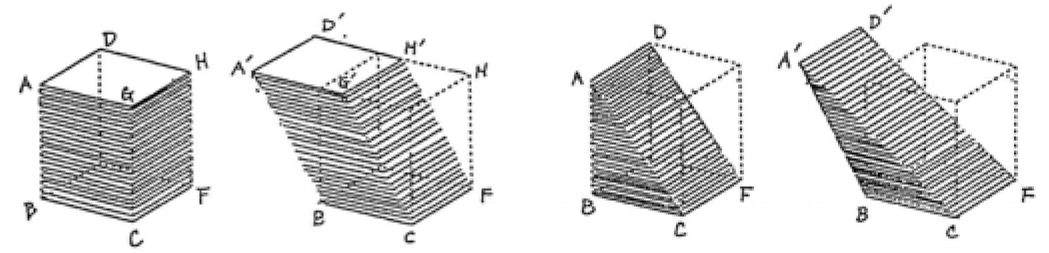




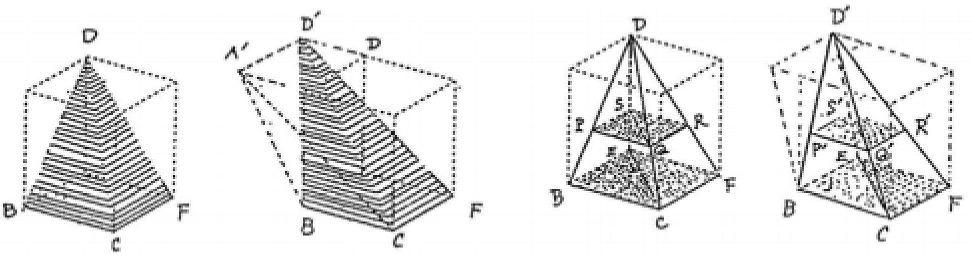
以上のようにして四角錐の体積を求めていった。

④神保敏弥「角錐の体積」では、平行面の性質とガバリエリの定理を使用している。直方体を平行移動した平行六面体から同じ頂点を結んだ面を切断していき、できた四角錐をガバリエリの定理を用いて体積が等しいことを求めている。具体的な作業的方法としては、トランプや長

方形の厚紙などをまっすぐ積んだ状態のものを２つ用意し、１つの直方体の厚紙などをずらしていくことによって、まっすぐな直方体と傾いた直方体となります。



それら２つの直方体を同じ頂点を結びその面に沿って切断していくことによって、体積が等しい四角錐ができます。この論文では、角錐の体積の式化まで行われていない。



⑤清水甚吾「四角錐の體積・球の表面積と體積の指導」では、実物を観察することから、体積比を推測させ、その後、重さの比を用いて正しい体積の比率を求めている。観察する立体は、同じ質の木材でつくられた底面積と高さが等しい四角錐と四角柱である。それらの立体を観察することによって、その体積比を推測している。推測した体積比が正しいかは、天秤でその立体の重さを測って、立体の体積比を求めている。

また、砂を四角錐に満たして四角柱へと移し替える実験を行うことによって体積を求めた。

⑥田端輝彦「等積変形の活動を取り入れた角錐の体積の学習」では、柱体・錐体の切断・組み合わせを行うことによって、柱体なら直方体に変形し、錐体なら直方体や柱体へと変形して立体の体積とその公式を導いている。

この実践では、平面の面積の学習から柱体の体積に至るまですべて等積変形で行っている。そのため、錐体の体積も等積変形で考えることとしている。しかし、すべての錐体の体積を等積変形によって既習の立体へ帰着することができない。そこで授業には既習の立体へと帰着できる特殊な錐体として、（縦）×（横）×（高さ）が（10cm）×（10cm）×（5cm）の角錐を使用している。この角錐を使用して、既習の直方体のどれだけに当たるかを意識づけることによって、柱体の体積と錐体の体積の指導過程に一貫性を持たせることによって、公式として統合させている。しかし、立体図形を切断して等積変形する際に切断面の形や切断してできる図形のイメージが持ちづらいこと、また中身が空の立体模型を切断することには慣れが必要であることを考慮し、柱体・錐体の体積の学習の前段階として、立方体の切断面の形を予想・検証

する活動を行っている。

　等積変形による四角錐の体積の求め方の授業の進め方は、まず結果を予想することから開始している。そのあと、作業を通して、1つ目は、四角錐6個から、もとの直方体の2倍の直方体が作れること、2つ目は、直方体の蓋をあけ、四角錐を垂直に入れ、そのすきまに$\frac{1}{2}$の四角錐4個がぴったり入ること、これらのことから四角錐の体積は、直方体の体積の$\frac{1}{3}$であることを考えさせている。

　これらの実践は、いくつかの特徴がみられる。②③⑤⑥は児童・生徒に作業を行わせる方法で、①④は理論的な方法である。②⑤は実験・実測を通して体積を求めており、①③は二つ以上の立体の体積比を求めることで体積を求めており、④⑥は使用する立体が等積変形可能であることを仮定し体積を求めている。

［引用文献］

福谷敏「中学生がわかる「三角錐の公式の証明」」『名古屋大学教育学部附属中高等学校紀要 51, 96』. 名古屋大学. 2006.11 発行

赤井利行「角錐・円錐の体積の求め方」『日本数学教育学会誌. 臨時増刊, 総会特集号 73, 50』. 社団法人日本数学教育学会. 1991.8.1 発行

神保敏弥「四角錐の体積」『奈良教育大学数学研究会会誌　飛火野　第 15 号』. 奈良教育大学数学研究会. 1999. 6.26 発行

神保敏弥「角錐の体積」『奈良教育大学数学研究会会誌　飛火野　第 11 号』. 奈良教育大学数学研究会. 1995. 6.30 発行

清水甚吾「四角錐の體積・球の表面積と體積の指導」『學習研究 18(11), 234』. 奈良女子大学. 1939.11.1 発行

田端輝彦「等積変形の活動を取り入れた角錐の体積の学習」『東京学芸大学附属学校研究紀要』. 東京学芸大学附属学校研究会. 1993.3

第５章　実践的考察

本章では、実践的考察を行うことを目的とする。そのため、指導案、指導案を具体化した授業の流れ（シナリオ)、実践の様子（プロトコル）を提示し、その考察を行う。

第１節　指導案及びシナリオ

一身田中学校で授業を行うにあたり、事前に打ち合わせを行った。第一回目の打ち合わせは、11 月 28 日の 15:00 より一身田中学校で行い、実践を行う日時の決定、実施内容の説明を行った。

以下、その時に用いた資料（学習指導案、シナリオ）を示す。

１．指導案（原案）

1. 全体案

第 3 学年　数学科学習指導案

指導者　中村亮太

Ⅰ　単　元　空間図形

Ⅱ　目　標

観察、操作や実験などの活動を通して、空間図形についての理解を深めるとともに、図形の計量についての能力を伸ばす。

ア．空間における直線や平面の位置関係を知ること。

イ．空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されるものととらえたり、空間図形を平面上に表現して平面上の表現から空間図形の性質を読みとったりすること。

ウ．おうぎ形の弧の長さと面積並びに基本的な柱体、錐体及び球の表面積と体積を求めること。

エ．立体の式の見方からその立体がどのようになっているかを示すことができること。

Ⅲ　指導上の考察

1．教材について

本時の指導では、柱体・錐体の体積を対象とするので、そのことに関する教材についてのみ記述する。

小学校算数科では、立方体や直方体及び角柱や円柱の求積を扱っている。5 年生で直方体を立方体による空間充填によって体積を求めており、6 年生で底面積×高さの考え方で求めている。このことから、基本的な立体の求積はできているものと考えることができる。

中学校数学科では、小学校算数科で学習してきた求積について、角柱や円柱を、その底面の多角形や円が高さの分だけ平行に移動することによって構成される立体と見ることと関連させて理解を深めることができる。角錐の体積については、水の移し替えの実験を行い、感覚的に理解をさせている。

錐体の体積については、水を用いた感覚的な理解や合同な立体に分ける模型を使った学習方法などが主に使われている。また、そのような学習法を行う際に錐体の体積について、柱体の体積との関係を予想させ、その予想が正しいのかどうかを先の方法を用いて実感を伴って理解できるようにしている。しかし、この指導方法であると考え方が、同じ底面積と高さを持つ柱体の 1/3 の体積としか捉えられていない。このような見方ではなく、他にも 1/3 の高さと同じ底面積を持つ柱体や、1/3 の底面積と同じ高さを持つ柱体という見方を知ることで、柱体から錐体と考えるだけでなく、錐体から柱体へと考えることもでき、式の見方が広

がると考えられる。

2. 生徒について
略

3. 指導について
角錐の体積について水を利用した理解を行っているが、ここでは等積変形の操作を行うことを通して、よりしっかりと本質的に理解を促していく。

第 1 学年では、1/3Sh を合同な 3 つまたは 6 つの立体に分けることで確認しているか（立方体)、同じ底面で同じ高さの錐体と柱体を使い、水を利用した確認を行っている（角柱・円柱)。

この授業で立方体を取り上げる理由は、数研出版・学校図書で立方体と陽馬の関係について扱っているため、陽馬が立方体へ等積変形可能な立体であるためである。

第 1 時では、直以外の角錐・角柱が存在すること、等積変形を行う際に使う立体である陽馬についての特徴を捉える。授業で取り扱う角錐・角柱などは直角錐・直角柱のみで直であるもの以外が使われていることが少ない。それゆえ直であるものとそれ以外について説明を行い、直でないものの例として陽馬の展開図を組み立てる。その後、組み立てた陽馬の特徴を捉えることで、2 時、3 時で行われる等積変形の操作を行う際のヒントとする。

第 2 時では、一般的な式の見方について説明し、括弧の位置の違いが立体ではどのような形になるのかを学習する。1/3Sh という式をどのような形で見ていたのかを考えさせ、括弧をつけさせる。その後、(1/3h)S の式の見方を取り上げ、陽馬を使い確認する。ここで、(1/3S)h を使わない理由としては、中学生が扱う内容としては難しく、(1/3h)S の方がより簡単で、適しているからである。

第 3 時では、等積変形の操作を行う。まず、前時の振り返りとして、2 次元の三角形の面積の公式において、式の見方を確認・操作を行う。その後 3 次元で行うが、3 次元の操作は難しいと考えられるので、少しずつヒントを出しながら、クラス全体で考えていく。

2.第1時指導案

中学校3年生数学科学習指導案（第1時）

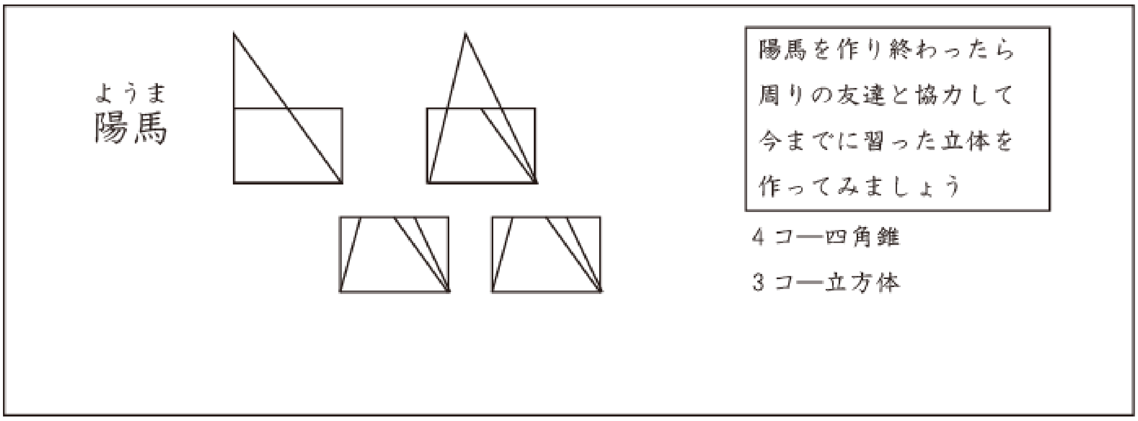
本時の指導

1. 題　　材　　立体の体積
2. 目　　標
   (1) 同底・同高の異なる二つの三角形の等積変形を考える。
   (2) 陽馬の作成を通して、その特徴を捉える。
3. 準備物　　指導者
4. 指導過程（50分）

時間	学習事項	生徒の活動	指導上の留意点
0分	・導入1	・平面の状態の等積変形の例を用いて説明を受け、そこから3次元立体の場合であるヒルベルトの第3問題について説明を受け、その結果も知る。	・三角形の等積変形を説明なしに行い、その後解説を行う。 ・解説を行う際に、その方法について説明し、そこから3次元の説明に持っていく。 ・ヒルベルトの第3問題について、どのような問題なのか、その問題はどのような結論に至ったのかを今回の授業でやることを交えて説明する。
10分	・展開 陽馬の作成	【提示課題】 展開図を組み立てなさい。 ・陽馬の展開図を受け取り、それを組み立てる。	・直角錐と陽馬の展開図の二つを示す。 ・直角錐の側面がすべて合同であることを示す。 ・展開図を渡す。 ・テープを用いて作るように促す。
25分	・展開 陽馬の特徴について	【提示課題】 陽馬にはどのような特徴がありますか。 作った陽馬を見ながら、陽馬の特徴を捉える。	・出た意見はすべて拾う ・ピタゴラスの定理、無理数など復習になるところは取り上げながら進める

		「予想される生徒の反応」 ・面の形が同じものがある。 ・底面が正方形である。 ・側面が直角三角形である。 ・左右対称である。	・陽馬を三つ組み合わせて立方体をつくれることを伝える。 ・鏡影は出てこないと考えられるので、その補足説明をする。
45 分	・まとめ	・今回どのようなことを学習したのかを振り返り、次回行うことの説明を受ける。	

・板書計画



3. 第2時指導案

中学校3年生数学科学習指導案（第2時）

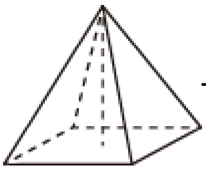
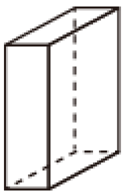
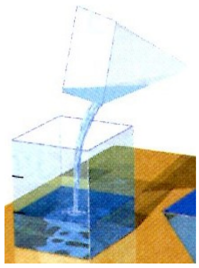
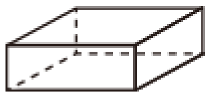
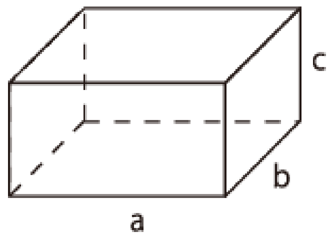
本時の指導

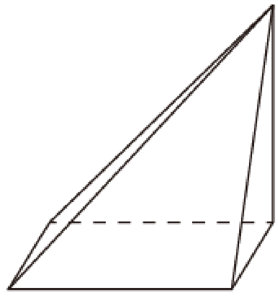
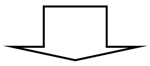
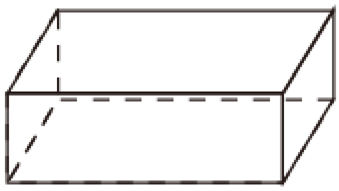
1. 題　　材　　立体の体積
2. 目　　標

(1)　体積の公式の見方を考える。

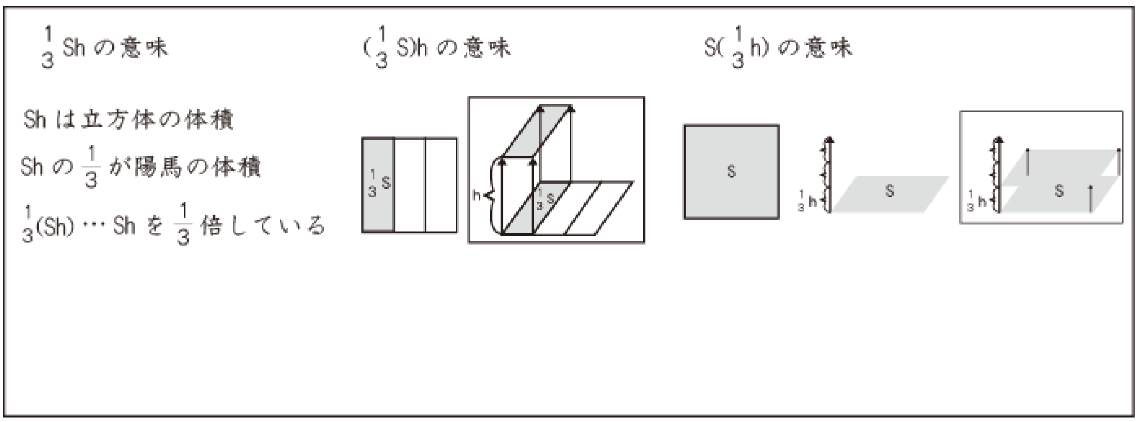
3. 準備物　　指導者
4. 指導過程（50分）

時間	学習事項	生徒の活動	指導上の留意点
0分	・導入 復習として、立体の体積の公式を覚えているのか確認する。	【質問】 「角柱、角錐の体積の公式は覚えていますか。」 ・角柱の体積の公式、角錐の体積の公式を覚えているか確認する。 「予想される生徒の反応」 ・角柱の体積は Sh である。 ・角錐の体積は 1/3Sh である。	・それについては、一年生で学んだ内容である。 ・底面積〈S〉と高さ〈h〉は与えておく。
5分	・導入2 現在の式の見方を考えて、他の見方があるのか、あるならばどのような見方なのか考える。	【提示課題】 角錐の体積の公式 1/3Sh の見方を考えなさい。 ・一年次に水を用いて角錐の体積を角柱の体積から求めた。このことから、体積は 1/3(Sh)を意味している。この他に(1/3S)h、S(1/3h)の考え方があることを確認するとともに、それぞれの式の見方について考える。 「予想される生徒の反応」 ・角錐の体積の公式である。 （補足後の予想される生徒の反応） ・1/3(Sh)《板書》	・式の見方について深く考えられる生徒は少ないと予想されるので、課題は丁寧に説明をする。 ・最初の説明で 1/3(Sh)、(1/3S)h、S(1/3h)の 3 パターンがあることまで示し、それぞれの意味について考えさせる。 ・生徒が分からないようなら補足説明として、abc が表す計算の意味について説明する。

	 もとの角錐  (1/3S)h	角柱の体積を 1/3 したものである。《説明》 ・(1/3S)h《板書》 底面積が元の 1/3 で高さが等しい立体の体積である。《説明》 ・S(1/3h)《板書》 底面積が元の立体と等しく高さが元の 1/3 の立体の体積である。《説明》  1/3(Sh)  S(1/3h)	補足説明 abc は (ab)c=a(bc)=b(ac) という計算結果を表している。  ・ここで実演を通してそれぞれの式の意味について確認する。 ・角柱の体積の 1/3 という考え方から底面積が同じで 1/3 の高さをもつ角柱の体積と等しいという考え方を得て次の課題につなげることを意識する。
35 分	・展開 式の見方を汲み取り、実際に操作を行う。	・S(1/3h)の式について実際の立体を分割などの操作をし、陽馬から直方体に変形できることを示す。	・S(1/3h)を使う理由（中学 3 年生のレベルに一番適している。）に関しては、質問があれば答える。 ・机間巡視を行う。 ・声かけは、少し控え目に行う。

		 もとの立体   目標の立体 「予想される生徒の反応」 ・1/3 の高さで切断する。 ・対称面で切断する。	
45 分	まとめ	今回、行ったことを振り返り、次回行うことの説明を行う	

板書計画



4. 第３時指導案

中学校３年生数学科学習指導案（第３時）

本時の指導

1. 題　　材　　立体の体積
2. 目　　標
   (1)　体積の公式の見方と立体の等積変形の関係を学ぶ。
3. 準備物　　指導者
4. 指導過程（50 分）

時間	学習事項	生徒の活動	指導上の留意点
0 分	・導入 前回行ったことを振り返り、本日の課題を確認する。	・3 次元での変形においてどのような意見がでたのかを確認する。	
5 分	・班活動 ・3 次元の場合について考える。	・陽馬についてどのように分割していくとよいのかを考える。 ・2 次元での考え方をヒントにして 3 次元の場合を考える。	・机間巡視をしながら、必要に応じて生徒にヒントを与える。 ・各班での意見が出尽くしたところで、全体で意見の共有を行う。 ・ヒントを徐々に出していく
35 分	・答え合わせ	考えを発表して、どのようにして直方体に変形できるのかを全体で共有する。 「予想される生徒の反応」 ・一番下(四角錐台)は切断してはいけない。 ・左右対称なので、右と左に同じものをおかなければならない。	・教師からヒントを出しすぎないようにする。 ・実物投影機で写しながら考える。 ・生徒の解答をうまく拾っていく。 ・真ん中を入れ替えるというヒントを出す。

	予想される生徒の反応 1　高さ 1/3 の平面で切断 2　もう一度高さ 1/3 の平面で切断 3　陽馬の対称面で切断 4 5		・どうしてもできないときは教師が一つずつヒントを出す。
45 分	・まとめ	・実際に変形できたことを確認する。	・式の形を変形することと実際に変形させることを通して、式の意味についてまとめる。

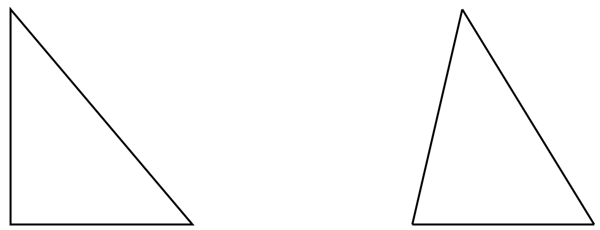
5. 第 1 時の授業のシナリオ（原案）

こんちは、私は三重大学に勤めている中村亮太といいます。今日を含めて 3 回授業をさせていただきます。よろしくお願いします。授業の内容は、教科書にはない図形の学習です。

［導入］

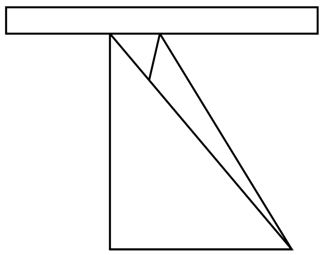
　ちょっとこれを見てください（2 つの三角形を黒板に貼る。この 2 枚は裏に磁石を張っておく）。

（黒板の状態）

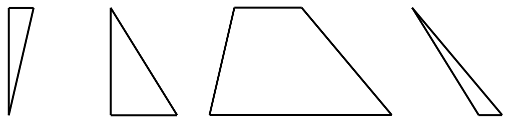


左の三角形の名前はなんですか？わかる人はいますか？（手を上げた生徒をあてて答えさせる）
そうですね。直角三角形です。
では右の三角形の名前はなんですか？（手を上げた生徒をあてて答えさせる）
そうですね。鋭角三角形です。
この 2 つの三角形は底辺も高さも同じ三角形です。（実際に底辺を重ねる。高さが同じであることを示すために、2 つの頂点の上に定規を置く）

（黒板の状態）

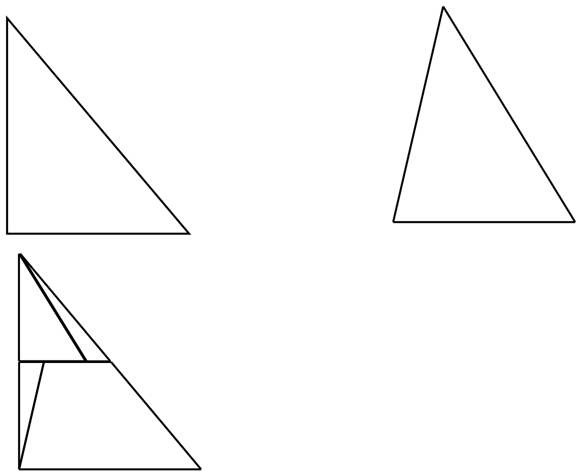


（確認が済んだら元に位置にもどす）
今から、左の直角三角形を切り取って右の鋭角三角形に変身させます。見ていてください。実はここにすでに切り取った部品があります。
（ばらばらな状態で 4 つの部品を黒板に貼って生徒に見せる。それぞれの部品には裏にマグネットが貼ってある）

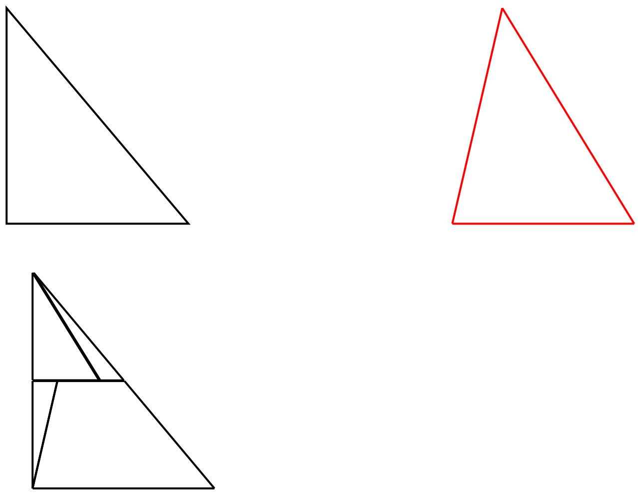


（本当に直角三角形の部品であることを示すために、直角三角形の真下に、部品を直角三角形

の形に並べて、直角三角形を切り取ったものであることを生徒に見せる。）
（黒板の状態）



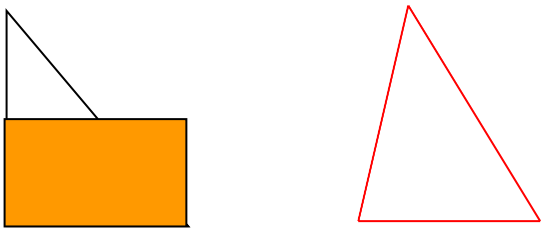
これを今から右の三角形に並び替えます。このままでは右の三角形の上に並べられないので、チョークで枠取りをします（色のチョークで枠取りをする）。
（黒板の状態）



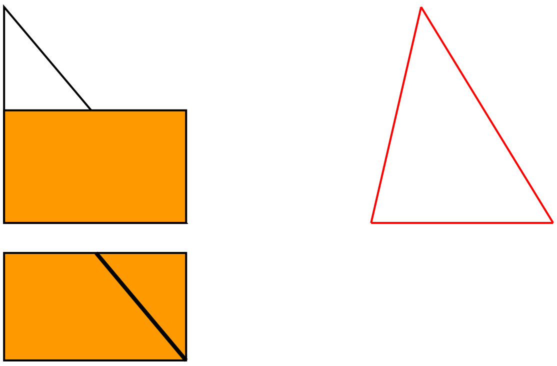
では見ていてください（4 つの部品をその枠の中にはめる）。
（黒板の状態）

なぜでしょうね？
では今からこの種明かしをします。
実はこの変身をするために、直接では無理なので、一度長方形に変身させました。どんな長方

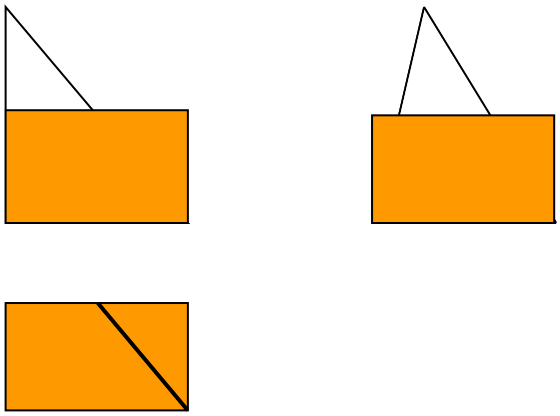
形かというと、底辺が同じ長さで、高さが半分の長方形です。
（長方形の薄い色のシートを持って、底辺を合わせて同じ長さであること、高さは二つ分であることを確認する）
（次に、シートの底辺と直角三角形の底辺を合わせて、マグネットで止めて重ね置く）
（黒板の状態）



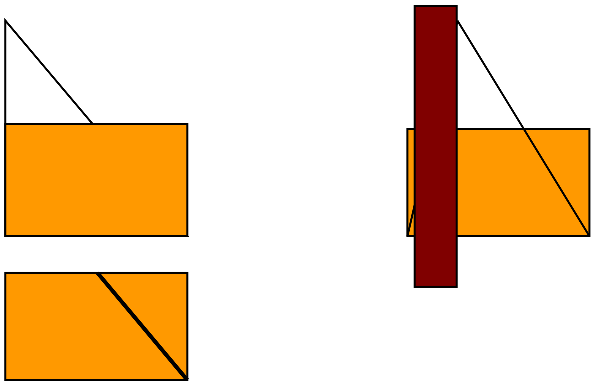
上に出ている小さい直角三角形と、右下にある小さい直角三角形は合同な三角形です。だから、元の直角三角形と、長方形の面積は同じです。
（線が引いてあるシートをこの図形の下に貼る）
（黒板の状態）



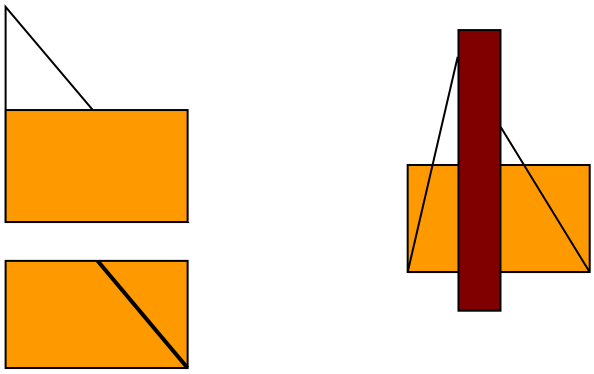
これと同じように、鋭角三角形も考えました。
（ここで、先にはずした厚紙の鋭角三角形を色チョークの三角形の中に戻す）
（鋭角三角形の上に長方形の薄いシートを、底辺を揃えて重ねて貼る）
（黒板の状態）



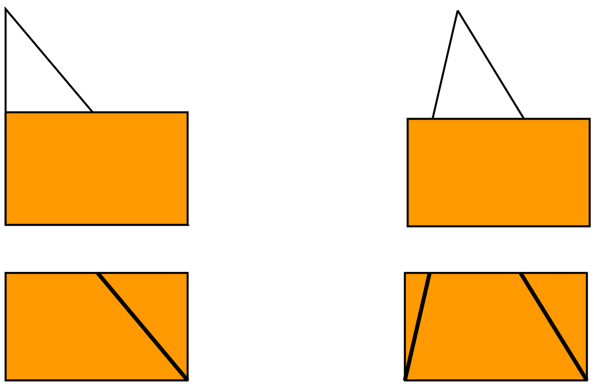
ここにこのように補助線を入れます。
（補助線はシートの上にはかきにくいので、定規を当てる）
（黒板の状態）



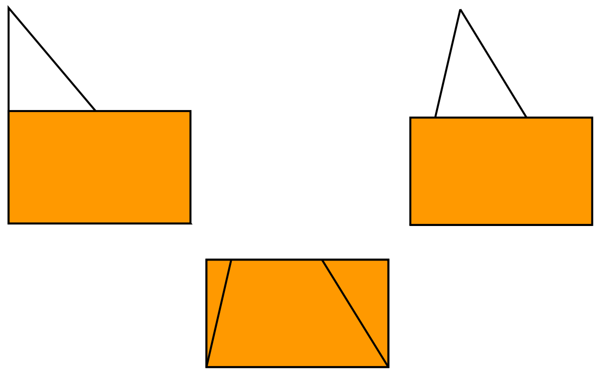
この右側だけ見てください。さっきと同じように、上に出ている小さい直角三角形と、右下にある小さい直角三角形は合同な三角形です。だから、右の直角三角形と、右の長方形の面積は同じです。
今度は左側を考えます。
（定規を右にずらす）
（黒板の状態）



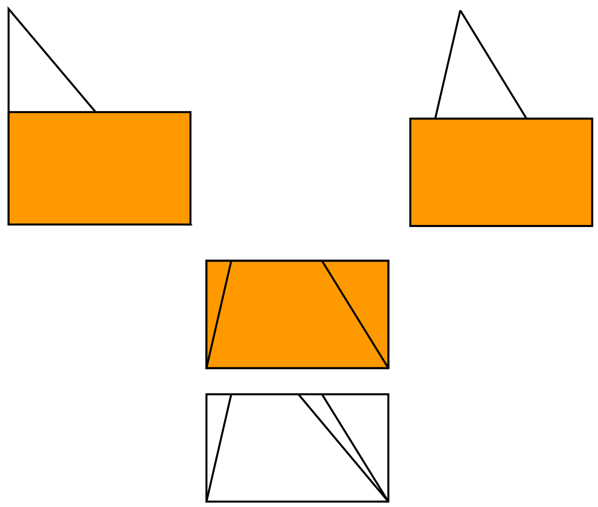
上に出ている小さい直角三角形と、左下にある小さい直角三角形は合同な三角形です。
だから、左の直角三角形と、左の長方形の面積は同じです。
（定規をはずす）
（黒板の状態）



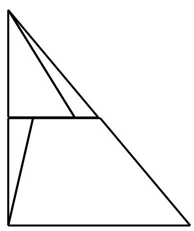
つまり、元の鋭角三角形と、長方形の面積は同じなわけです。
（線が引いてあるシートをこの図形の下に貼る）
この 2 枚のシートをこのように重ねます。
（2 枚のシートを重ねる）
（黒板の状態）



よく見てください。4 つの部品ができていますね。1 つに書くとこのようになります。
（4 つの部品の線を書き込んだ厚紙の長方形を 2 枚重ねているシートの下に貼る）
（黒板の状態）

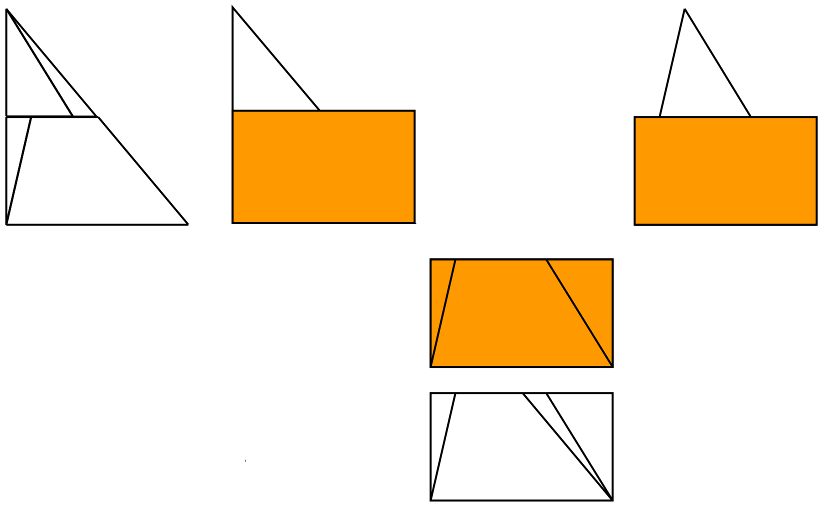


（すでにその線が書かれている厚紙の直角三角形を手にとって見せながら）この 4 つの部品を元の直角三角形の形に戻したものがこれです。



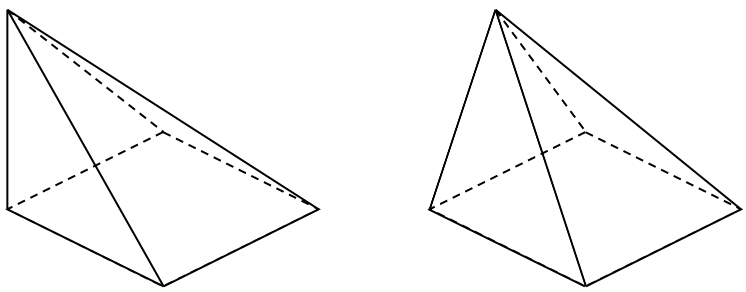
（手に持っている線が書かれている厚紙の直角三角形を黒板に貼る）

（黒板の状態）



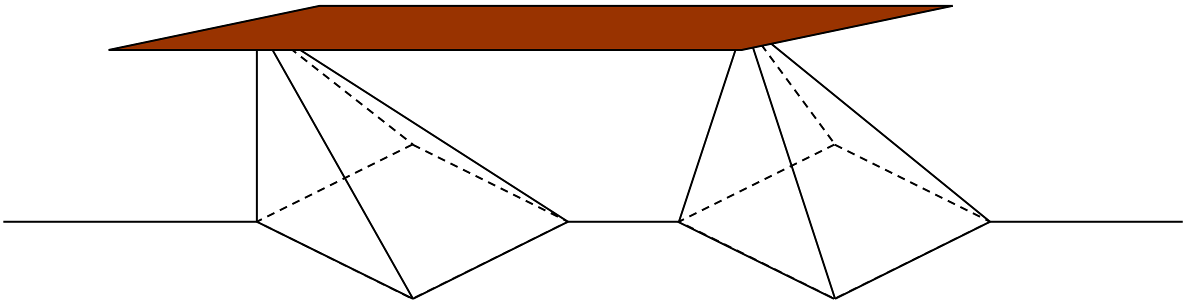
それぞれの部品と同じ形になっていますね。
（線がすでに書かれている厚紙の直角三角形に、4 つの部品の線を書き込んだ厚紙の長方形を各部品の横に持っていき確認をする）
種明かしはこれで終わります。

［展開］
ここまでは平面について考えてきました。これからは立体について考えます。
直角三角形に対応するのはこの立体です。
（子供から見て、教卓の左側に置く）
鋭角三角形に対応するのはこの立体です。
（子供から見て、教卓の右側に置く）



（正四角錐を持ち上げて）ちなみに、これは君たちが 1 年生で学習した立体です。
これらの立体の名前は何でしたか？（手を上げた子供を当てて、答えさせる）
そうです。四角錐ですね。
（持っている正四角錐は教卓の下にでも置く）
特に左の四角錐は特別な名前がつけられています。その名前は「陽馬」といいます。この名前

は古い中国でつけられました。
（黒板に「陽馬（ようま）」と書く）
この 2 つの立体は、底面が合同で高さも同じです。
（底面が合同であることを示すために、2 つの立体の底面どうしひっつける）
底面が合同であるということは、形も面積も同じということですね。
（高さが同じであることを示すために、2 つの立体を教卓の上に近づけて並べ、その頂点に定規をのせる）
（教卓の上の状態）



直角三角形を切って、鋭角三角形に変身させたように、左の陽馬を切って、右の四角錐に変身できるかどうかを考えます。この問題はヒルベルトの第 3 問題といわれています。
ヒルベルトは、陽馬ではなく、底面が合同で高さが同じである異なる 2 つの四角錐の変身を 1900 年に考えました。結論はできる場合とできない場合があるということでした。今日の場合はできない場合です。しかし、その答えを出した数学者はヒルベルトではなくて、弟子のデーンという人でした。その証明に用いた考え方が実は、直角三角形を鋭角三角形に変身させたときに長方形を間に入れた考え方を利用したものでした。すなわち、長方形の代わりに直方体を間に入れたのです。その直方体は底面が四角錐と合同で高さが 3 分の 1 のものでした。
その証明の中で、陽馬を直方体に変身させています。この授業は「陽馬を直方体に変身させる」部分を考えます。彼はどのように考えたのでしょう。
そのためには、陽馬の立体について知っておく必要があります。そこで今から、皆さんに陽馬を作ってもらおうと思います。
展開図がすでに書いてあるので、すぐに作れると思います。 1 人 1 個作ります。
きれいに作れるコツを教えます。先生のやり方を見ていてください。
（教師は見本を見せる）
注意は、折れ目にすこし鋏で線を入れます。あまり強く力を入れて引くと紙が切れてしまうので優しく引きます。そうするときれいにこのように折れます。
では各自に、展開図 1 枚を配ります。はさみとセロテープを机の上に出してください。忘れてきた人は前に取りに来てください。
では今から配ります。作ってください。
（しばらく机間巡視をしながら、7 割くらいの生徒が出来かけてきたら・・・約 15 分）

作り終わった人は、周りの友達と相談して、2個以上の陽馬を合体させて、これまでに習ってきた立体を作ってみてください。どんな立体になりますか。
（しばらく様子を見て全員が作り終わったことを確認して）
どうですか？どんな立体ができましたか？　今作り終わった人も周りの友達と合体させて立体を作ってみて下さい。
どんな立体ができますか。
（おそらく生徒はまず、正四角錐をいうであろう）
それは、陽馬を何個くっつけましたか。
（生徒たちはそれぞれに4個と答えるだろう。）
そしたら、もう1つ少ない3個ではどんな立体ができるでしょうか。近くの人と3人で考えて見ましょう。
（しばらくしてから）
どんな立体ができましたか？
そうですね。立方体ができましたね。
［まとめ］
今日は、陽馬を作りましたが、次の時間はもう少し陽馬について深く学習をしますので、陽馬に自分の名前をかいて、この袋に半ごとに集めます。班長さんは袋を取りに来てください。（班長は班の番号を書いた袋を取りにくる）
班長さんは集め終わったらその袋を前に持ってきてください。
［後片付け］
それでは、時間がきたので、片付けに入ります。ゴミはこのナイロン袋へ入れてください。鋏とテープを借りた人は教卓まで各自持ってきてください。

6. 第 2 時の授業のシナリオ（原案）

［導入］

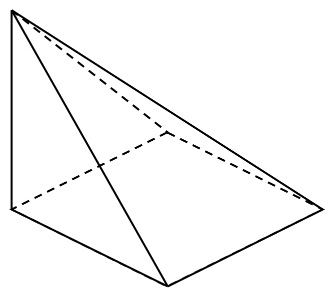
今日は昨日作った陽馬について学習します。

（教師用の陽馬を手に持って）この陽馬の体積の求め方がわかりますか？

（$\frac{1}{3}Sh$ と生徒が応えれば、よくできたとほめてあげる。しかしそれが分からない生徒もいるので、正四角錐に話をもっていく）

（教卓の上に生徒から見て左側に陽馬を置く）

（教卓の上の状態）



（今度は正四角錐を手に持って）では 1 年生の時に学習した正四角錐の体積を求める公式は何だったでしょうか？

わかる人？（手を挙げた生徒をあてる）

（おそらく、$\frac{1}{3}Sh$ と答えるであろう。）

（正四角錐を生徒から見て教卓の右側に置く）

（黒板に $\frac{1}{3}Sh$ と板書する）

（黒板の状態）

$$\frac{1}{3}Sh$$

S は何でしたか？わかる人？（手を挙げた生徒を当てて答えさせる。）

そうですね。底面積でした。

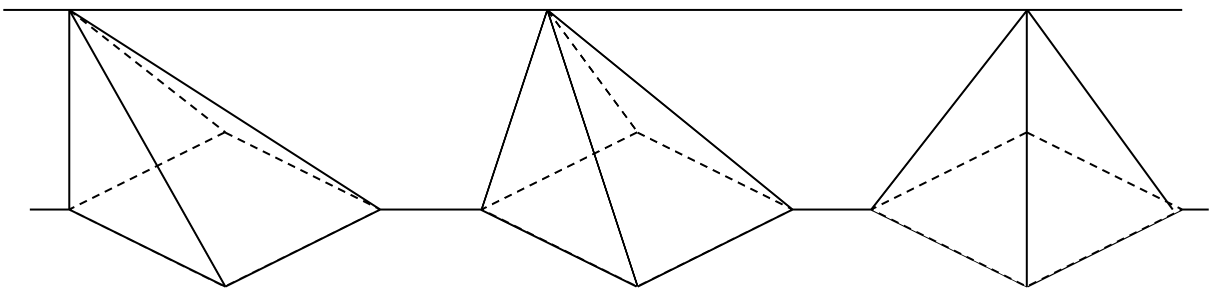
では、h はなんですか？わかる人？（手を挙げた生徒を当てて答えさせる。）

そうですね。高さでした。

（一般の四角錐をもって）これはこの前見せた四角錐です。

（一般の四角錐を真ん中に置く）

この 3 つの四角錐は、底面が合同で高さが同じです。



だから、$\frac{1}{3}Sh$ の S の値も h の値も同じなので、体積も同じになります。つまり、陽馬の体積も $\frac{1}{3}Sh$ ということです。このことを確認してみましょう。

1 年生の時に、今から先生が行うようなことをしたと思います。見ていてください。

水の代わりにビーズを使って、陽馬の体積と立方体の体積の関係が $\frac{1}{3}$ になっているかを確認します。

（教師実験を行う）

水ではないですが、陽馬の体積が立方体の体積の $\frac{1}{3}$ になっていることがほぼわかります。

［展開］

それではここで、$\frac{1}{3}Sh$ の式の見方を考えて見ましょう。（黒板の左上に「$\frac{1}{3}Sh$ の意味」とかく）

（黒板の状態）

$\frac{1}{3}\underline{Sh}$ の意味

この式の Sh は何を表しているかわかりますか。わかる人は手を挙げてください。（立方体の体積を表していると答えてもらえればよいが、分からない場合は、S は底面積であることと、h が高さであることを確認し、掛け合わせたものは立方体の体積になることを説明する。）

Sh は立方体の体積を表しています。（Sh の下に線を引いて「Sh は立方体の体積」と板書する）

（黒板の状態）

$\frac{1}{3}\underline{Sh}$ の意味

Sh は立方体の体積

その $\frac{1}{3}$ が陽馬の体積ということです。（「Sh の $\frac{1}{3}$ が陽馬の体積」とさらに下にかく）

（黒板の状態）

$\frac{1}{3}\underline{Sh}$ の意味

　Sh は立方体の体積

　Sh の $\frac{1}{3}$ が陽馬の体積

このような考え方を式で表すと、カッコを用いて $\frac{1}{3}(Sh)$ とかけます。（さらにその下に $\frac{1}{3}(Sh)$ とかく）

（黒板の状態）

$\frac{1}{3}\underline{Sh}$ の意味

　Sh は立方体の体積

　Sh の $\frac{1}{3}$ が陽馬の体積

$\frac{1}{3}(Sh)$

これは、Sh を $\frac{1}{3}$ 倍していることを表している式です。（「Sh を $\frac{1}{3}$ 倍している」と横に書く）

（黒板の状態）

$\frac{1}{3}\underline{Sh}$ の意味

　Sh は立方体の体積

　Sh の $\frac{1}{3}$ が陽馬の体積

　$\frac{1}{3}(Sh)$・・・Sh を $\frac{1}{3}$ 倍している

では、カッコの位置を変えて、$(\frac{1}{3}S)h$ は何を表している式でしょうか。（黒板の真ん中の上に「$(\frac{1}{3}S)h$ の意味」とかく）

（黒板の状態）

$\frac{1}{3}\underline{Sh}$ の意味　　　　　　　　　　$(\frac{1}{3}S)h$ の意味

Sh は立方体の体積

Sh の $\frac{1}{3}$ が陽馬の体積

$\frac{1}{3}(Sh)$・・・Sh を $\frac{1}{3}$ 倍している

（1 分位待って）
どのように考えましたか？発表できる人いませんか？
（おそらくこのような見方は生徒にとって初めてなので、どのように答えてよいか生徒は迷うであろう。教師の方から質問を変える。）

まず、$\frac{1}{3}S$ の部分を考えます。$\frac{1}{3}S$ は何を表しているのでしょうか？

S の $\frac{1}{3}$ 倍ということだから？　どうゆうことかなあ？　S は正方形の面積だから？

（教師は自分の手を挙げながら生徒たちの方を見る）
（手を挙げた生徒を当てる）
生徒の発言：正方形の面積を 3 等分した大きさです。
こういうことですか？

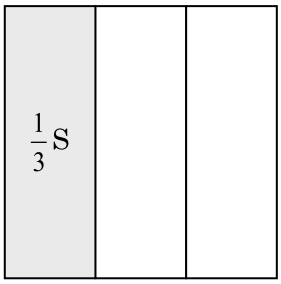
（黒板の左側に 3 等分した正方形をかいて、$\frac{1}{3}$ の部分に斜線を入れ、その生徒に確認を求める。それと同時に他の生徒にも確認を求める。）
（黒板の状態）

$\frac{1}{3}\underline{Sh}$ の意味　　　　　　$(\frac{1}{3}S)h$ の意味

Sh は立方体の体積

Sh の $\frac{1}{3}$ が陽馬の体積

$\frac{1}{3}(Sh)$・・・Sh を $\frac{1}{3}$ 倍している



この $\frac{1}{3}S$ に h をかけるということは？　$\frac{1}{3}S$ の長方形が h 分だけ上に上がった時にできる直方体を表していますね。すなわち、このようなことですね。

（先の正方形の横に、以下の図が書かれている紙を貼る）

（黒板の状態）

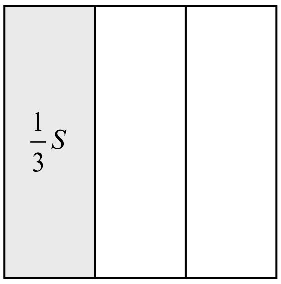
$\frac{1}{3}\underline{Sh}$の意味

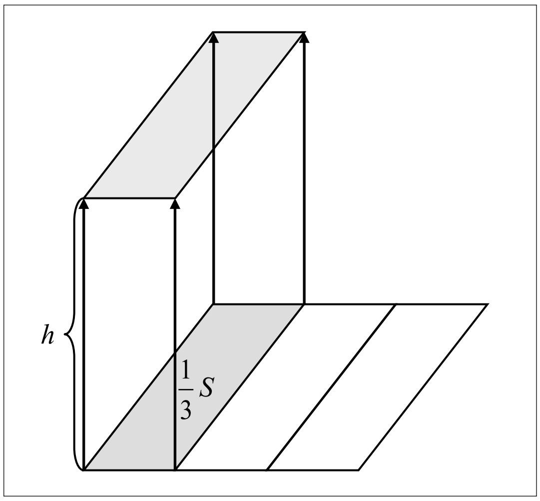
Shは立方体の体積

Shの$\frac{1}{3}$が陽馬の体積

$\frac{1}{3}(Sh)$・・・Shを$\frac{1}{3}$倍している

$(\frac{1}{3}S)h$の意味





では、Sとhを入れ替えた$S(\frac{1}{3}h)$は何を表しているでしょうか？（「$S(\frac{1}{3}h)$の意味」と黒板の右に書く）

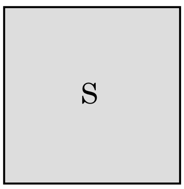
（黒板の状態）

真ん中より左は省略　　　　$S(\frac{1}{3}h)$の意味

S は底面積を表しました。（教師は黒板に平行四辺形を正方形の代わりにかく）

（黒板の状態）

$S(\frac{1}{3}h)$の意味



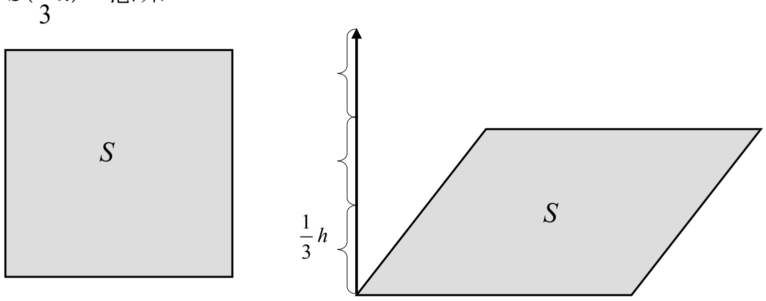
次は$\frac{1}{3}h$を考えます。$\frac{1}{3}h$はどういう意味ですか？　高さがどうなるということですか？

$\frac{1}{3}h$は、高さhの 3 分の 1 ということだから、図にするとこのようになりますね。

（黒板に$\frac{1}{3}h$の図を前の底面の図に付け加える）

（黒板の状態）

$S(\frac{1}{3}h)$の意味

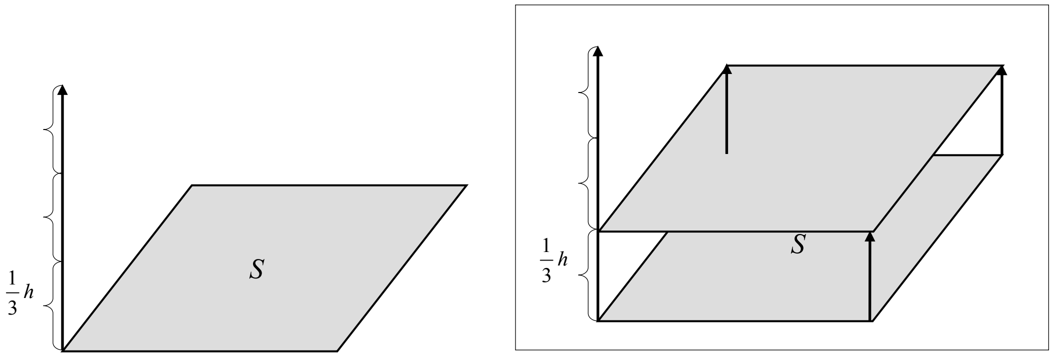


では、S と$\frac{1}{3}h$ をかけるのですから、その立体はどんな形になりますか？　わかる人？（手を挙げていればあてる）

そうですね。底面積が S で、高さ$\frac{1}{3}h$ の直方体ですね。S が$\frac{1}{3}h$ だけ上に上がった形になりますね。つまり図でかくと、こういうことですね。（ここで、大きく書いた紙をさらに右に貼る）

（黒板の状態）

$S\,(\frac{1}{3}h)$の図の意味

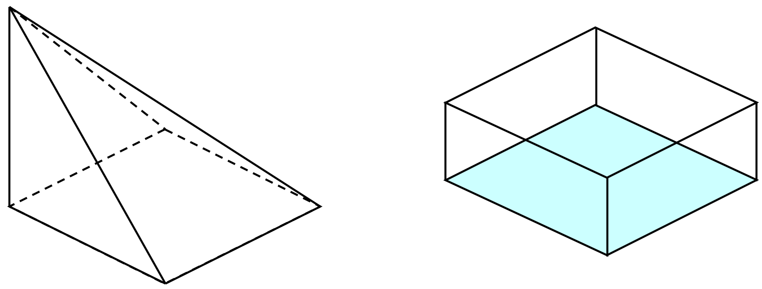


この授業では、$S\,(\frac{1}{3}h)$の見方について詳しく勉強します。

（陽馬と３分の１にした直方体を手に持って）陽馬の体積と高さを３分の１にした直方体の体積は同じでした。だとしたら、陽馬をいくつかに切って、うまく直方体の形に変身できないものでしょうか？

（2 つの立体を教卓の上に置く）

（教卓の状態）



考える前に、陽馬の形の特徴を考えて見ましょう。昨日作った陽馬を返しますから、班長さんは取りに来てください。
（班長に渡す。班長は配る）（教師は班長が配り終えたことを確認する）
手元にある自分の陽馬を見て、気のついたことを今から発表してもらいます。
1 分間ジーット見てください。
（しばらく待つ）
何かわかったことがある人？
（生徒をあてて発表させる）
（教師は生徒の発言内容を板書する）
（黒板の状態）

・左右対称
・辺の長さ
・面の合同

（全部出し終わったら、重要となる内容についてのみ確認として質問する）
どこで切ったら対称になっているのかなあ？
（生徒：真ん中で切る）
そうだね。（といいながら、教師用の立体でその面を確認する）
辺のどことどこが等しいのかなあ？
（生徒を当てて）自分の立体で示してくれるかなあ？
（生徒：自分の立体を持って説明をする）
教師は教師用の立体で生徒がいったことを確認する。
どの面とどの面が合同かなあ？
（生徒を当てて）自分の立体で示してくれるかなあ？
（生徒：自分の立体を持って説明をする）
教師は教師用の立体で生徒のいったことを確認する。
だいたいこんなもんかなあ。
［まとめ］

今日は、陽馬の体積も底面積×高さ×$\frac{1}{3}$で求められること。$\frac{1}{3}Sh$の式の見方には3通りあること。陽馬は左右対称な立体であることを学習しました。

明日は、陽馬の性質を利用して、陽馬をこの直方体に変身させることを考えます。

［後片付け］

もって帰りたい人はもって帰ってもかまいません。ただし、学校ではゴミにしないでください。いらない人は、袋に入れて返してください。

（前にゴミを持ってき終わってから）それでは今日の授業を終わります。

7. 第 3 時の授業のシナリオ（原案）

［導入］

昨日は、陽馬の体積も底面積×高さ×$\frac{1}{3}$で求められること。$\frac{1}{3}Sh$ の式の見方には 3 通りあること。陽馬は左右対称は立体であることを学習しました。

（黒板に「陽馬の体積：底面積×高さ×$\frac{1}{3}$」「$\frac{1}{3}Sh$ の式の見方：$\frac{1}{3}(Sh)$、 $(\frac{1}{3}S)h$ 、$S(\frac{1}{3}h)$」「陽馬は左右対称の立体」とかく）

（黒板の状態）

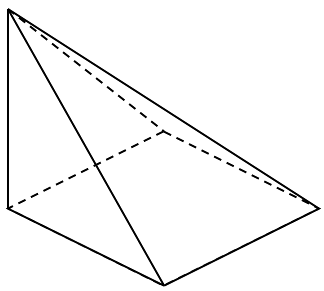
陽馬の体積：底面積×高さ×$\frac{1}{3}$

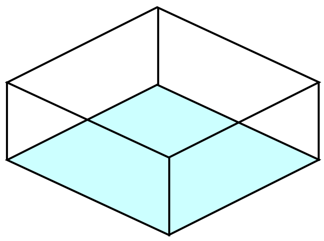
$\frac{1}{3}Sh$ の式の見方：$\frac{1}{3}(Sh)$、$(\frac{1}{3}S)h$ 、$S(\frac{1}{3}h)$

陽馬は左右対称の立体

今日は、昨日考えた陽馬の特徴を利用して、陽馬をこの直方体に変身させることを考えてみよか。（教卓に陽馬と直方体を置く）

（教卓の状態）

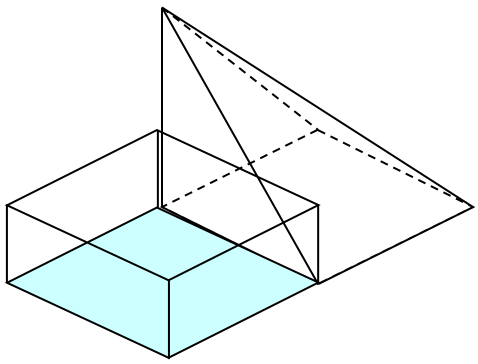




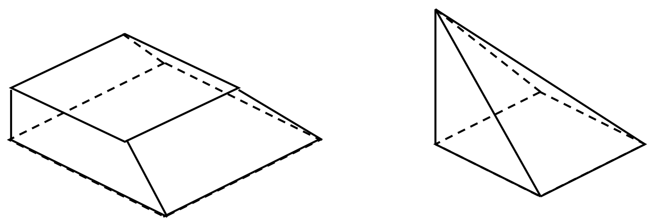
［展開］

陽馬をどのように切れば陽馬をこの直方体に変身させられるかなあ？（と、いいながら、3 分の 1 で切ることがでやすくなるように、2 つの立体を手に持ってゆっくりと近づけくっ付ける。）

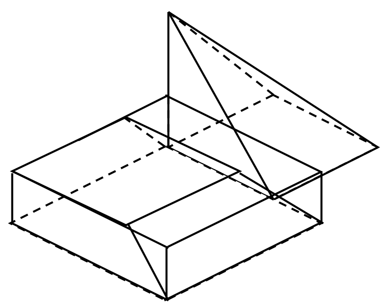
（教師の動作）



相談してもかまいません。
（1分ほど待つ）
さて、どんな意見が出ましたか。教えてください。手を挙げてください。（手を挙げている生徒をあてる）
生徒：出っ張ったところを切る。
では、切ってみます。
（すでに用意してきている教具を手に取って見せながら）
（教師の動作）

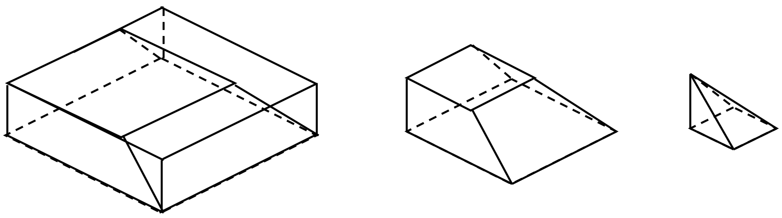


切るとこのような2つの部分に分かれますね。
下の立体は陽馬の高さのどれだけにあたりますか。
生徒：3分の1です。
下の立体を直方体の中に入れておきましょう。
出っ張ったところは陽馬の高さのどれだけにあたりますか。
生徒：3分の2です。
そうですね。下の立体は直方体の中にあるので、これ以上切る必要はありませんね。問題は出っ張った部分ですね。
（すでに作ってきた教師用の出っ張った部分の教具を持ち出して）
ここれは出っ張った部分です。小さくても陽馬です。
（出っ張った部分の陽馬を直方体の真横に持っていき）
（教師の動作）

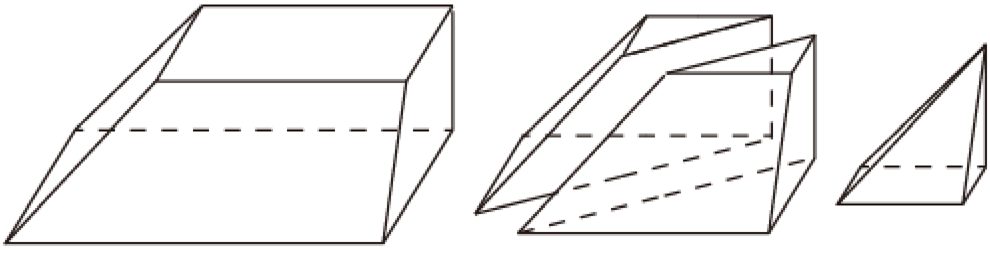


この出っ張った部分は、次にどうしたらいいですか？
生徒：直方体と同じ高さになるように切ったらいい。
そうやなあ。ここで切ったらええなあ。

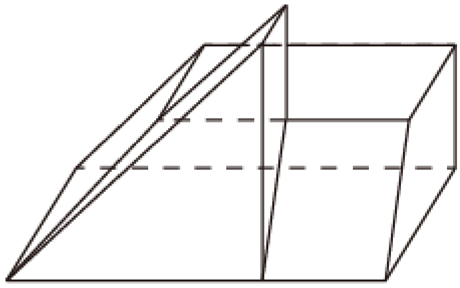
（教師用に準備した３つの部品を横に並べる）
（教卓の状態）



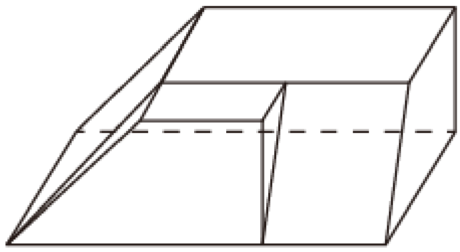
そしたら、ここからは自分たちで実際に立体を切りながら、考えて見ましょう。
2 人に 1 組ずつ渡します。渡す中身は、（１つ１つ取り上げながら）カッターと袋とです。袋には、予備の立体も入っています。
ただ、作業の前に注意が 3 つあります。
1 つは、カッターの使い方です。手を切らないように、また他のものを傷つけないように十分気をつけてください。
2 つ目は、ゴミは後で集めますから、机の上に固めておいてください。
3 つ目は、まずよく考えてから切ってみることです。
では、班長さんは前まで取りに来てください。
（班長が取りにきて 2 人に１組ずつ渡し終わるのを確認する）
では、袋から取り出して始めてください。
（机間巡視をして、どのようなことを生徒が考えているのかを観察する。3 分を限度として）
（もしよさそうな切り方があれば、「アッ！なかなかいい線いっているねえ！」と声をかけて褒めてあげる）
（もし何もできていないようであれば、全員にヒントを与える。）
上 3 分の 2 の陽馬はこの線で左右対称ですね。下 3 分の 1 の陽馬が入っている状態の直方体もこの対角線で左右対称ですね。
ということは、どう切ったらいい？
生徒：左右対称になるように切ったらええ。
そうですね。直方体の空いている部分も左右対称やからね。
（すでに教師用として作ってある教具をだして）左右対称に切るとこのようになりますね。
（教卓の状態）



では皆さん、切ってみて直方体の空いている部分に入れてみましょう。
（生徒は左右対称に切ってから、各部品を空いているところに埋め込もうとする）
（机間巡視をして、どのようなことを生徒が考えているのかを観察する。5 分を限度とする）
（しかし、生徒は埋め込めないんじゃないかと思いかけてくる。実際は埋め込むことが不可能である。）
（もしよさそうな埋め込み方があれば、「アッ！なかなかいい線いっているねえ！」と声をかけて褒めてあげる）
（そこで教師は、生徒のよさそうな例を見せてあげてそれをヒントとして出す）
（生徒を見渡して、ぜんぜんできていない場合は、教師から 1 個だけ入れたヒントを与える。）
（教卓の状態）



（子どもは逆も同じように入れるであろう。）
（教師は机間巡視し、様子を見る。3 分位を限度とする）
（子どもから、切ってええの？と聞いてきたら、切ってもいいよと勧める）
（切る様子が全くなかったら）
はみ出てますね。まだ切らなあかんのわかるか？
（子どもたちは切り始める。しばらく待つ）
ちょっとこちらを向いてください。
切ったらこんな形になるなあ。（すでに作ってきた教具をもって生徒に確認する）
（教卓の状態）



ではバラバラにしたこれらの立体を直方体の空いている部分に入れよう。

（教師は机間巡視し、様子を見る。3 分位を限度とする）
（うまく入れられた組は、評価をしてあげる。困っている組を助けてあげるように指示する）

（まとめとして）
それでは、誰か前で先生の教具を使ってやってください。
（生徒演示）
ありがとう。みなさん分かりましたか。

［まとめ］
今日は陽馬を直方体に変身することを学習しました。
［後片付け］
まずゴミを集めます。ゴミはこの袋に入れてください。カッターは班ごとにまとめて本数を確認して前の箱に戻してください。
（時間が余れば、感想を書いてもらう）

これで3日間の先生の授業を終わります。ありがとうございました。

第二回目の一身田中学校との打ち合わせは、1 月 22 日の 15:00 から一身田中学校で行った。先生方の助言のもと、授業内容の確認及び変更を行った。その結果、原案の 3 時元の指導案から、以下に示されているような 2 時限の指導案に変わった。

以下が修正された指導案、シナリオ及びプロトコルである。

２．指導案（改訂版）

1. 全体案

第３学年　数学科学習指導案

指導者　中村亮太

Ⅰ　単　元　空間図形

Ⅱ　目　標

観察、操作や実験などの活動を通して、空間図形についての理解を深めるとともに、図形の計量についての能力を伸ばす。

ア．空間における直線や平面の位置関係を知ること。

イ．空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されるものととらえたり、空間図形を平面上に表現して平面上の表現から空間図形の性質を読みとったりすること。

ウ．おうぎ形の弧の長さと面積並びに基本的な柱体、錐体及び球の表面積と体積を求めること。

エ．立体の式の見方からその立体がどのようになっているかを示すことができること。

Ⅲ　指導上の考察

1．教材について

本時の指導では、柱体・錐体の体積を対象とするので、そのことに関する教材についてのみ記述する。

小学校算数科では、立方体や直方体及び角柱や円柱の求積を扱っている。5 年生で直方体を立方体による空間充填によって体積を求めており、6 年生で底面積×高さの考え方で求めている。このことから、基本的な立体の求積はできているものと考えることができる。

中学校数学科では、小学校算数科で学習してきた求積について、角柱や円柱を、その底面の多角形や円が高さの分だけ平行に移動することによって構成される立体と見ることと関連させて理解を深めることができる。角錐の体積については、水の移し替えの実験を行い、感覚的に理解をさせている。

錐体の体積については、水を用いた感覚的な理解や合同な立体に分ける模型を使った学習方法などが主に使われている。また、そのような学習法を行う際に錐体の体積について、柱体の体積との関係を予想させ、その予想が正しいのかどうかを先の方法を用いて実感を伴って理解できるようにしている。しかし、この指導方法であると考え方が、同じ底面積と高さを持つ柱体の 1/3 の体積としか捉えられていない。このような見方ではなく、他にも 1/3 の高さと同じ底面積を持つ柱体や、1/3 の底面積と同じ高さを持つ柱体という見方を知ることで、柱体から錐体と考えるだけでなく、錐体から柱体へと考えることもでき、式の見方が広

がると考えられる。

2. 生徒について
略

3. 指導について
角錐の体積について水を利用した理解を行っているが、ここでは等積変形の操作を行うことを通して、よりしっかりと本質的に理解を促していく。
第1学年では、1/3Sh を合同な3つまたは6つの立体に分けることで確認しているか（立方体)、同じ底面で同じ高さの錐体と柱体を使い、水を利用した確認を行っている（角柱・円柱)。
この授業で立方体を取り上げる理由は、数研出版・学校図書で立方体と陽馬の関係について扱っているため、陽馬が立方体へ等積変形可能な立体であるためである。
第1時では、同底・同高の異なる2つの三角形の等積変形を行い、ヒルベルトの第3問題に触れ、等積変形を行う際に使う立体である陽馬の特徴について捉える。同底・同高の異なる2つの三角形の等積変形を導入として行い、今後行う等積変形について知る。ヒルベルトの第3問題は、立体の等積変形についての問題で、このことに触れることで生徒の興味を引く。最後に陽馬の展開図を組み立て、その特徴を捉えることで、2時限目に行う等積変形のヒントとする。
第2時では、式の見方と立体の等積変形を行う。式の見方を変えることで、立体の等積変形への基礎とし、式からどのように変形が行われているのかに気づく。底面積がそのままで高さがもとの三分の一の直方体への変換を行うことで、陽馬の体積が立方体の体積の三分の一であると、体験的に気づく。また、立体の等積変形は難しいと考えられるので、少しずつヒントを出していく。

2. 第１時指導案

中学校３年生数学科学習指導案（第１時）

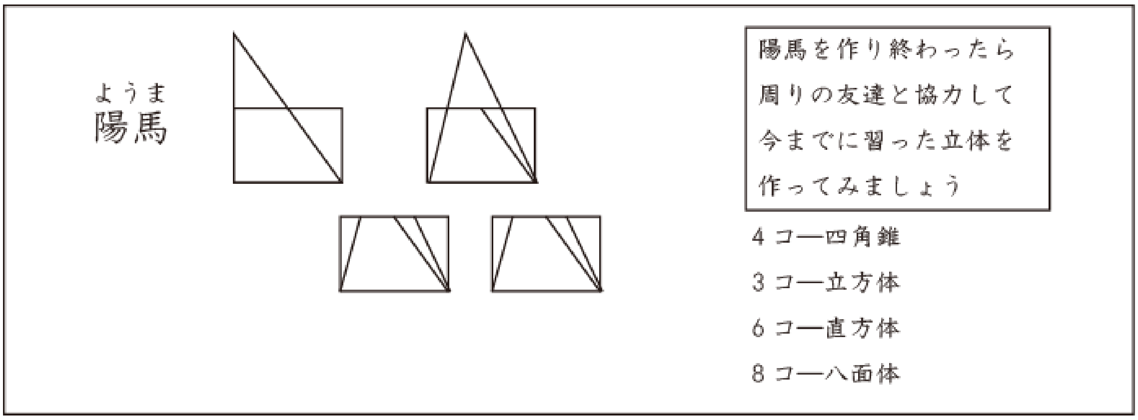
本時の指導

1. 題　　材　　立体の体積
2. 目　　標
   (1)　同底・同高の異なる二つの三角形の等積変形を考える。
   (2)　陽馬の作成を通して、その特徴を捉える。
3. 準備物　　指導者　三角形の合同変換指導用教具一式（厚紙８枚、透明シート４枚）
   　　　　　　　　　陽馬の展開図（40 枚）　定規　磁石　はさみ　テープ
   　　　　　　　　　立体（直・一般四角錐、陽馬）
   　　　　　生徒　　はさみ
4. 指導過程（50 分）

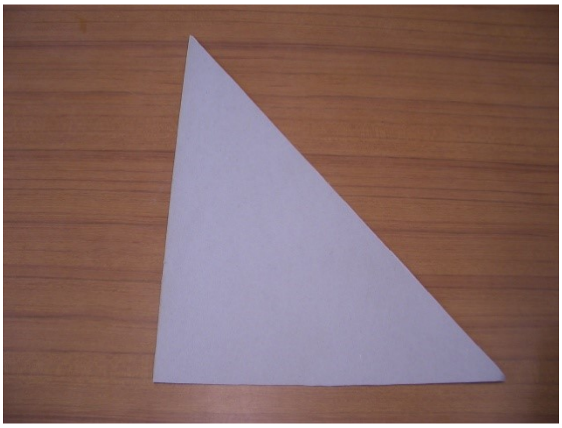
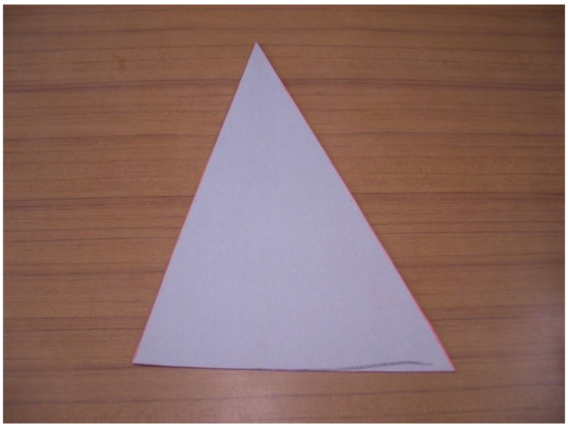
時間	学習事項	生徒の活動	指導上の留意点
0 分	・導入１ 平面の等積変形とヒルベルトの第３問題についての説明	・三角形の等積変形について教師に説明を受ける。 ・これからの授業で行うこととヒルベルトの第3問題について説明を受ける。	・教具を用いて、直角三角形から鋭角三角形への変換を行う。その際、まず説明なしに教師が行い、その後長方形に変換して合同変換を行っていることを説明する。 ・直角三角形と鋭角三角形に当たる四角錐を出し、直四角錐も出しながら、立体の名前を確認する。 ・平面と同様に立体でも合同変換ができるのかというヒルベルトの第３問題についての説明を行う。
20 分	・展開 陽馬の作成	【提示課題】 展開図を組み立ててください。 ・陽馬の展開図を受け取り、それを組み立てる。	・展開図を配布する前に折り目をつける際に鋏を使って折り目をつける方法を伝える。 ・7 割ほどできたら次の課題に移る。

35 分	・展開 陽馬の特徴について	【提示課題】 陽馬を2個以上組み合わせると何か立体はできますか？ 「予想される生徒の反応」 ・4 つ組み合わせると四角錐になる。 ・3 つ組み合わせると立方体になる。	・初めは 4 個組み合わせて四角錐と答えると思われる。そのように答えられたら、「3 個使って何かできませんか」と発問する。 ・3 つ組み合わせると立方体になることを必ず確認する。 ・時間が余ったら、陽馬の特徴について調べさせる。 「予想される生徒の反応」 ・面の形が同じものがある。 ・底面が正方形である。 ・側面が直角三角形である。 ・左右対称である。
45 分	・まとめ	・今回どのようなことを学習したのかを振り返り、次回行うことの説明を受ける。	・ゴミの片づけ方の指示を行う。 ・はさみ、テープの回収を行う。

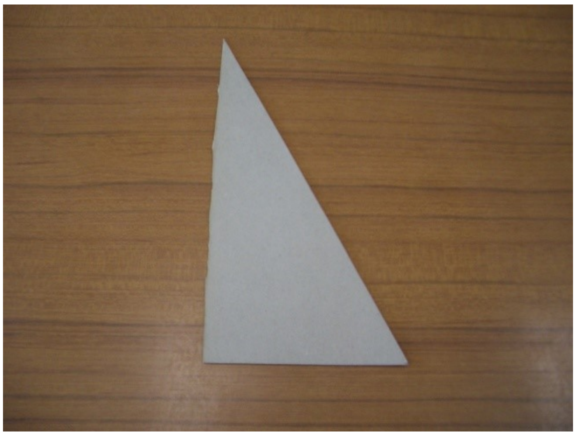
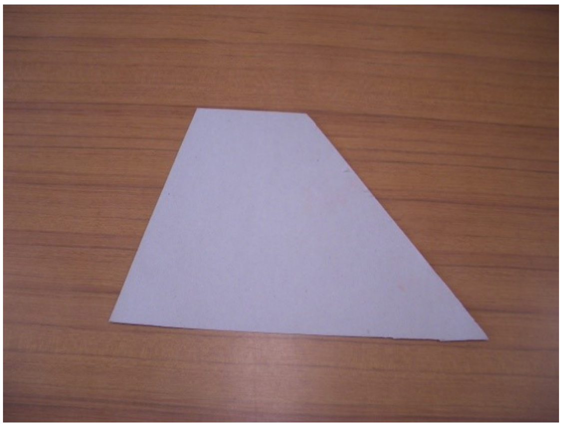
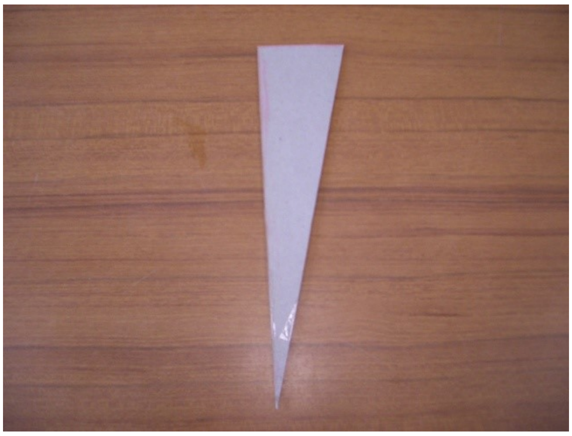
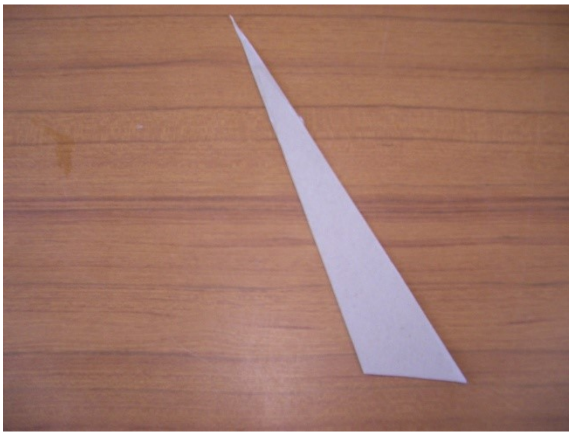
・板書計画



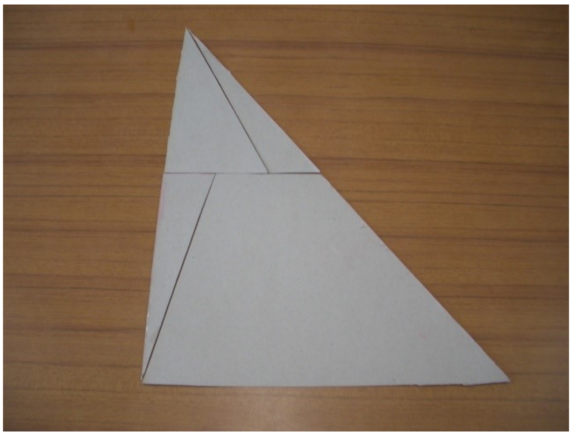
第１時間目使用教具
・左：直角三角形、右：鋭角三角形
材質：方眼紙
サイズ：30cm×40cm

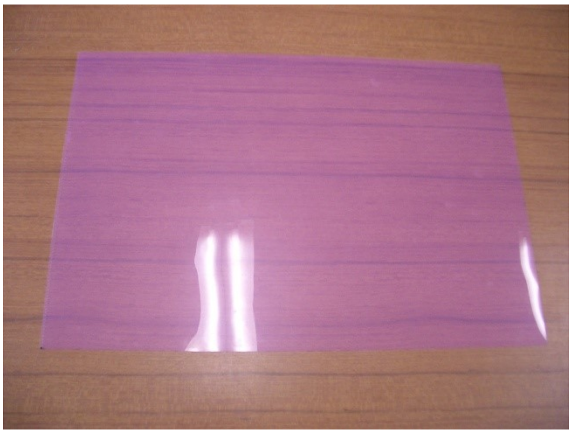
・直角三角形を切断した部分
材質：方眼紙

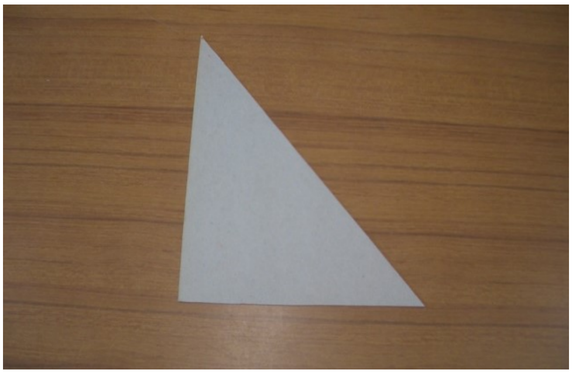
・切断した直角三角形の復元した状態
材質：方眼紙
サイズ：30cm×40cm



・三角形を変形する長方形
材質：カラ―ホルダー
サイズ：30cm×20cm



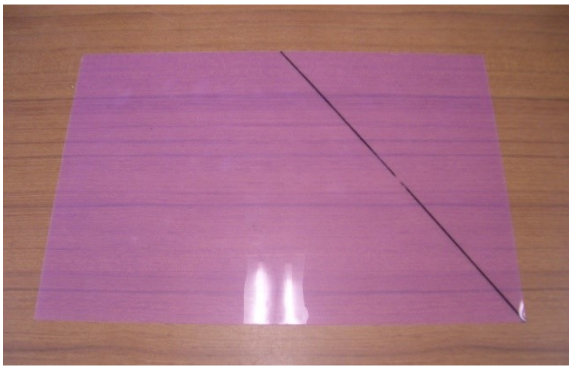
・直角三角形
材質：方眼紙
サイズ：30cm×20cm



・直角三角形を変形した長方形

材質：カラーホルダー

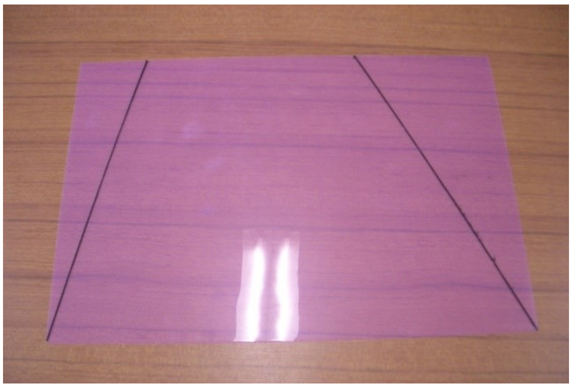
サイズ：30cm×20cm



・鋭角三角形を変形した長方形

材質：カラーホルダー

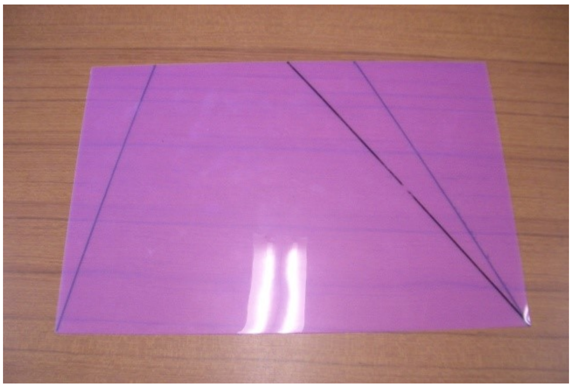
サイズ：30cm×20cm



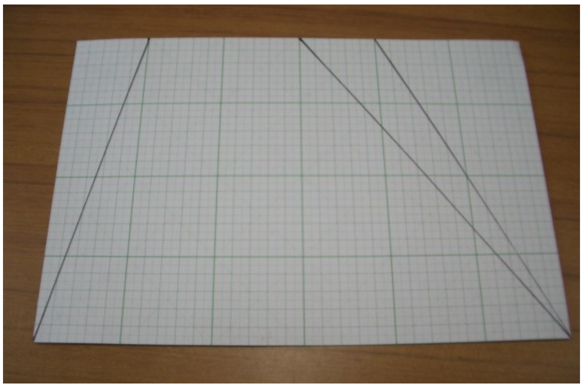
・上記二つを重ね合わせたもの

材質：カラーホルダー

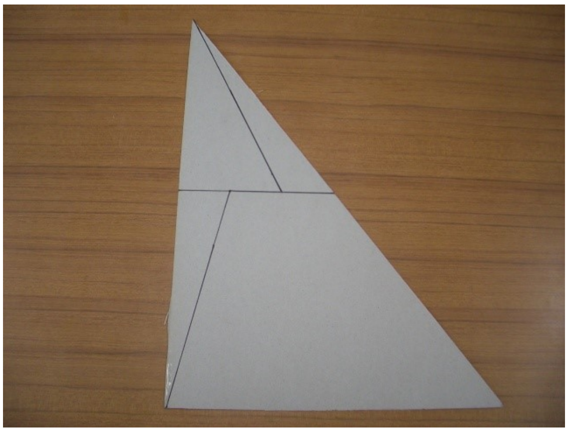
サイズ：30cm×20cm



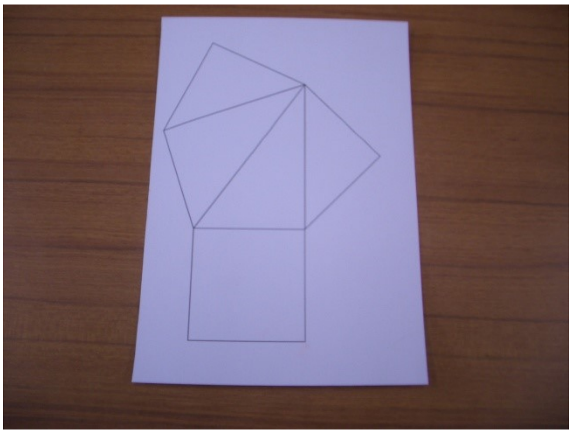
・上記のものを移した長方形
材質：方眼紙
サイズ：30cm×20cm



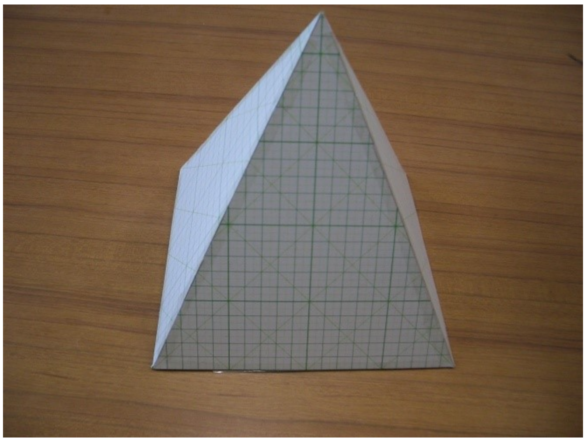
・切断線いり直角三角形
材質：方眼紙
サイズ：30cm×40cm



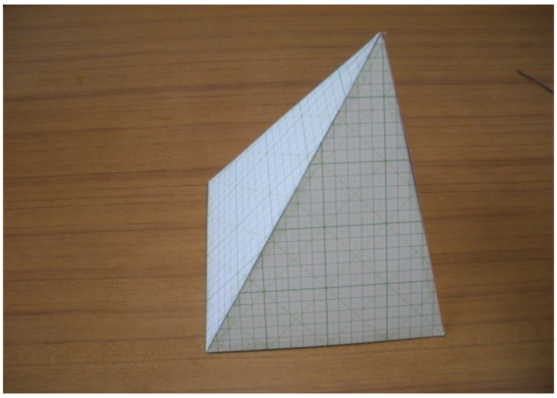
・生徒用陽馬の展開図
材質：画用紙
サイズ：約 A5



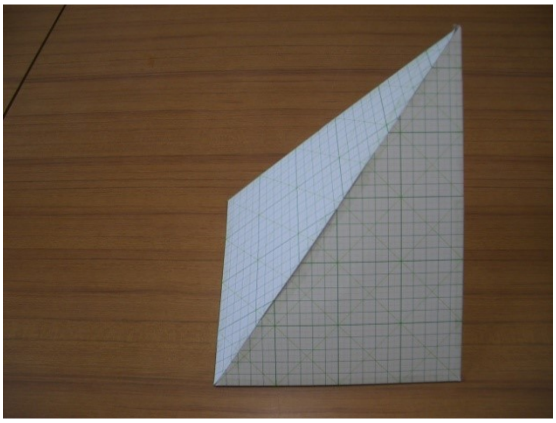
・正四角錐
材質：方眼紙
サイズ 20cm×20cm×20cm



・一般の四角錐
材質：方眼紙
サイズ 20cm×20cm×20cm

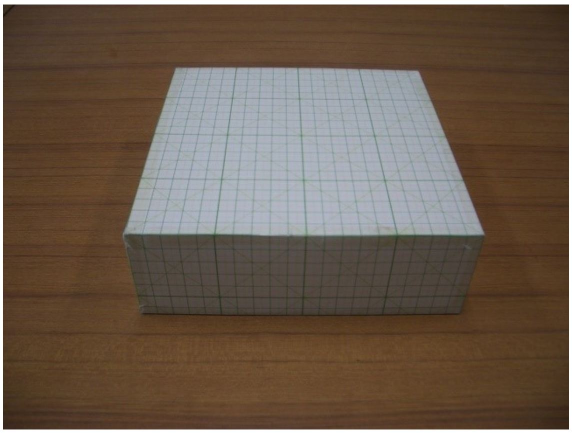


・陽馬
材質：方眼紙
サイズ 20cm×20cm×20cm



・直方体
材質：方眼紙

サイズ 20cm×20cm×$\frac{20}{3}$cm



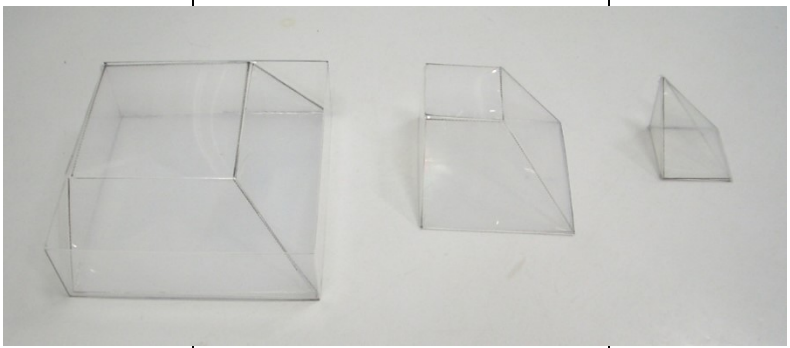
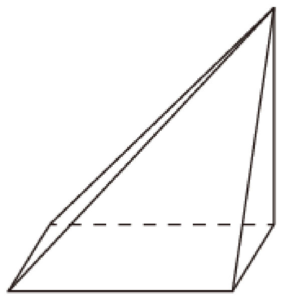
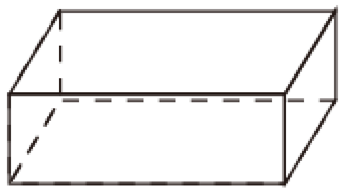
3. 第2時指導案

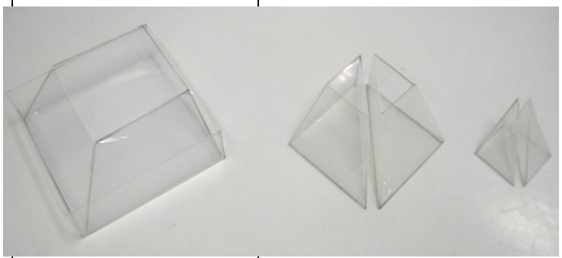
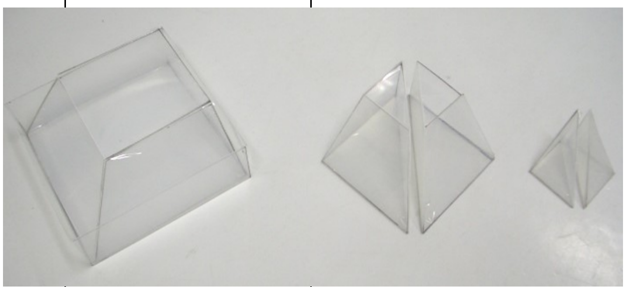
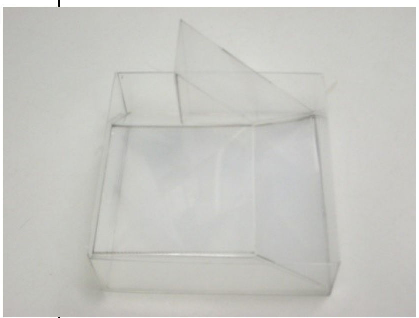
中学校3年生数学科学習指導案（第2時）

本時の指導

1. 題　　材　　立体の体積
2. 目　　標
   (1)　体積の公式の見方と立体の等積変形の関係を学ぶ。
3. 準備物　　指導者　立体（直・一般四角錐、陽馬）　切断用立体（教師用）
   切断用立体（生徒用）×20　カッター×20
   ビーズ　実験用立体
4. 指導過程（50分）

時間	学習事項	生徒の活動	指導上の留意点
0分	・導入 立体の体積の公式について確認する。	【質問1】 「陽馬の体積分かりますか。」 【質問2】 「四角錐の体積分かりますか。」 【予想される生徒の反応】 （底面積）×（高さ）×1/3	・陽馬→正四角錐の順に質問をしていく。 ・陽馬で解答をしたとしても、正四角錐で体積の確認をする。
5分	・導入2 式の見方について知る。	・生徒実験を行う。底面積と高さの等しい陽馬と立方体を使い、ビーズを用いた実験を行う。 ・ビーズの入った立方体のビーズの状態とそれをたてた状態の式を知る。 ・次に行う課題について知る。	・ビーズを使った生徒実験を行う。 ・立方体に入ったビーズを蓋で押さえて、(1/3S)h、S(1/3h)について伝える。その後、それぞれの形を式に直すとどのような形の式になるのかを伝える。 ・今回は、底面積が同じで高さが1/3の立体に変形させることを伝える。
15分	・展開 実際に立体の変形の操作を行ってみる。	・高さが1/3というところから、陽馬を水平に3等分することに気づく。	・生徒用教具の都合からすべての高さを 1/3h にそろえるように誘導する。 ・一つの行程を進めるごと

			に、それに対応した教具を提示する。
			
		「予想される生徒の反応」 ・面の形が同じものがある。 ・底面が正方形である。 ・側面が直角三角形である。 ・左右対称である。  もとの立体  目標の立体	・生徒用教材を配る前に陽馬の特徴を確認する。 ・高さを 1/3 にそろえることができたら、生徒用の教具を配り、生徒に試させる。 ・生徒が行う際に注意を行う。
		・生徒は配られた教材を用いて、自分たちで変形を行っていく。	・生徒が誰もわからないようなら 5 分おき程度に、気づいているようなら、気づくたびに全体に伝える。

	立体の切断方法  		・生徒に対称性について気づかせて、立体を対称的に切断すればよいことを気づかせる。 ・等しい長さの辺同士を合わせる。 ・はみ出ている部分は切断させる。  
35 分	展開 ・等積変形の一例を見せる。	・できている生徒のうちの一人が、前に出てどのようにして行ったのかを教師用教具を用いて説明する。	・時間が余った場合は、底面が 1/3 の場合を教師が実演する。
45 分	まとめ	今回、行ったことを振り返る。	

板書計画

陽馬の体積＝(立方体の体積) × $\frac{1}{3}$

横のビーズの直方体の体積＝(底面積) × (高さの $\frac{1}{3}$)

縦の 〃 ＝(底面積の $\frac{1}{3}$) × (高さ)

できたグループは前に名前を書いて下さい

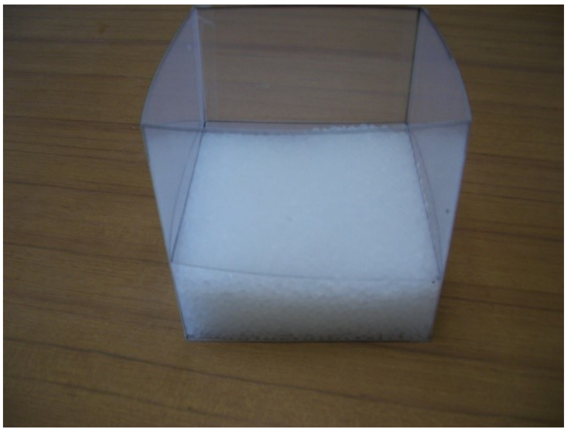
生徒の名前

第2時間目使用教具

・陽馬及び立方体

材質：手芸用ペレット、PP シート

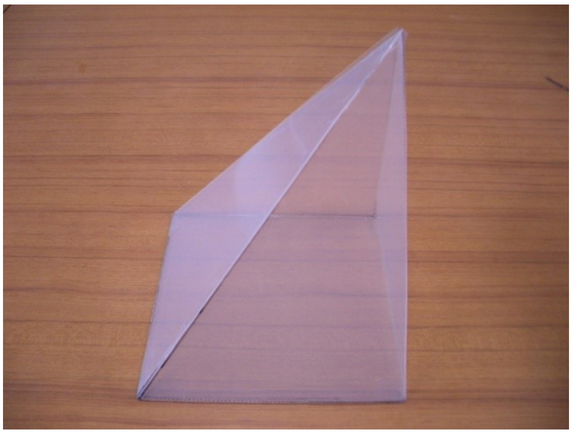
サイズ：12cm×12cm×12cm



・陽馬

材質：PP シート

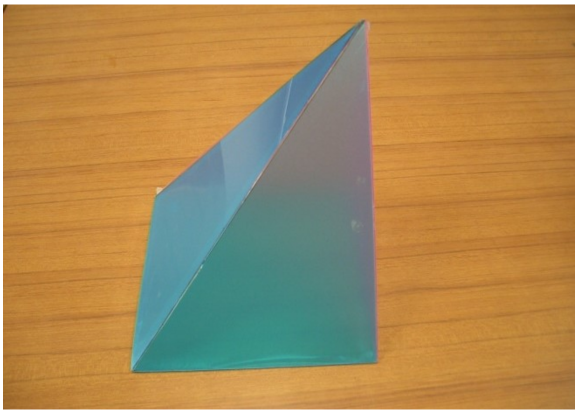
サイズ：18cm×18cm×18cm



・陽馬（色つき）

材質：PP シート（透明部分）、クリアファイル（表紙部分）（色つき部分）

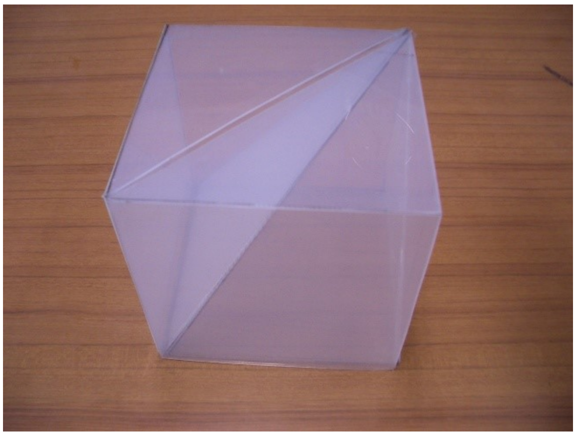
サイズ：18cm×18cm×18cm



・陽馬を 3 つ組み合わせた立方体

材質：PP シート

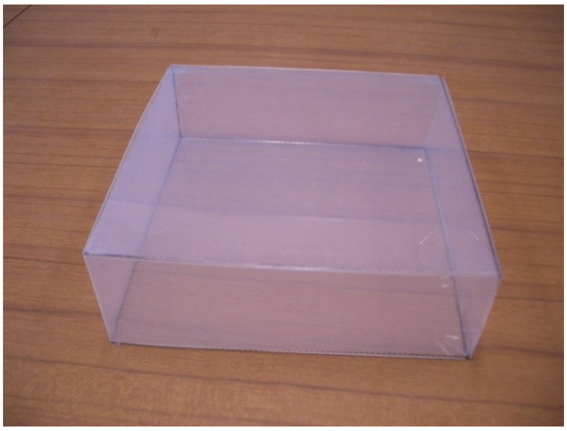
サイズ：18cm×18cm×18cm



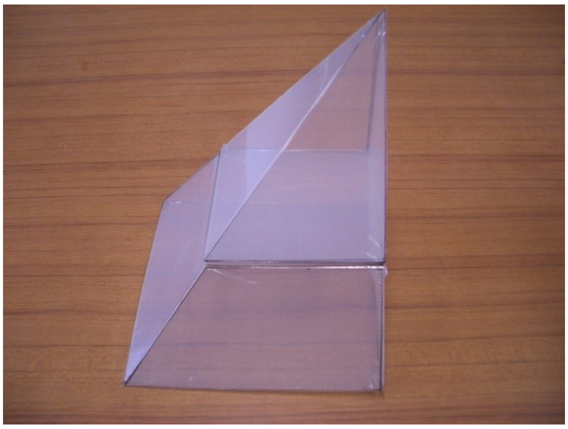
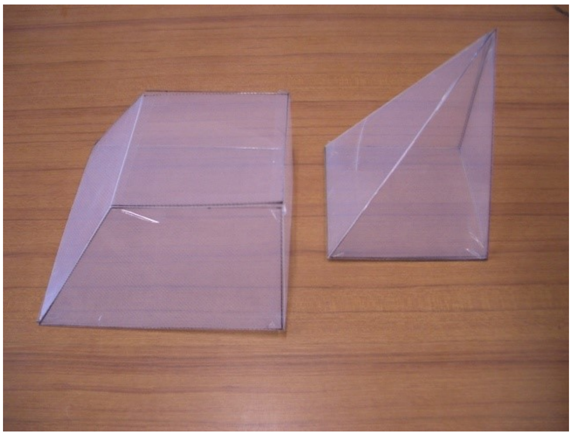
・直方体

材質：PP シート

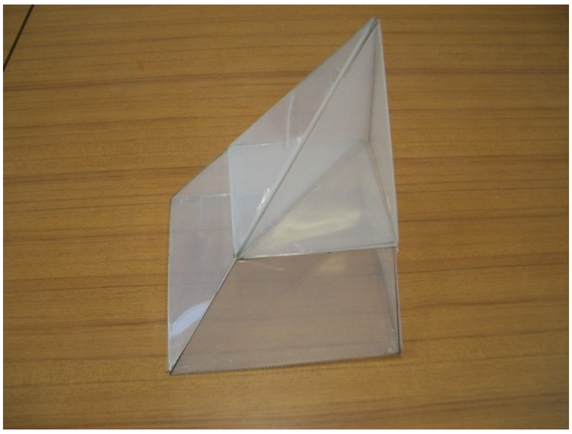
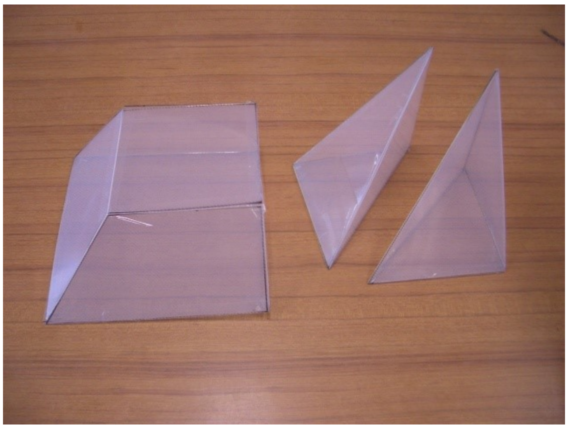
サイズ：18cm×18cm×6cm



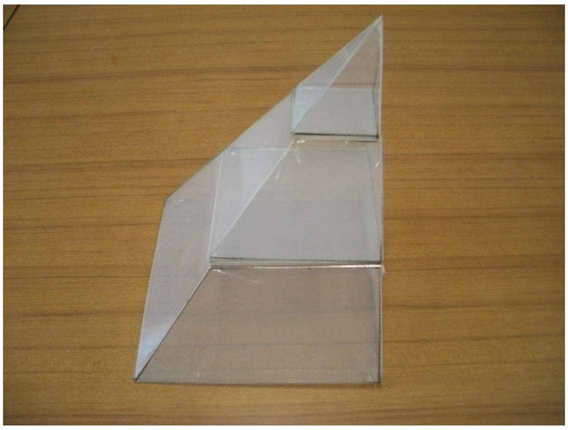
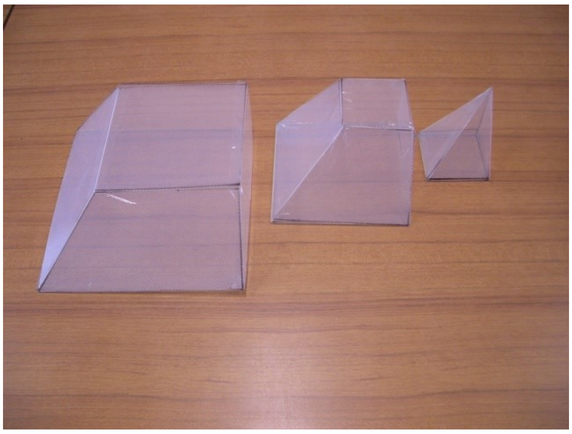
・陽馬の切断体
材質：PP シート
サイズ：　下：18cm×18cm×6cm、上 12cm×12cm×12cm

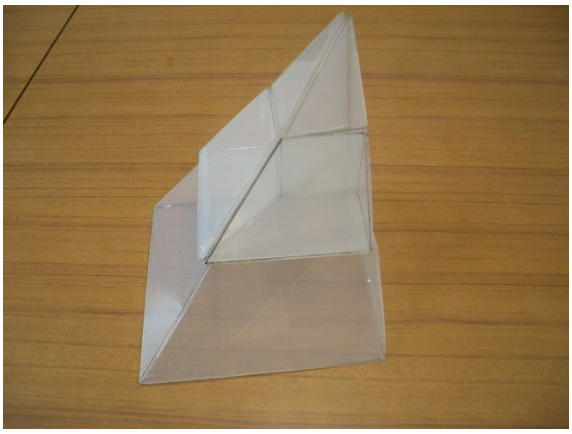
・陽馬の切断体
材質：PP シート
サイズ：　下：18cm×18cm×6cm、上 12cm×12cm×12cm

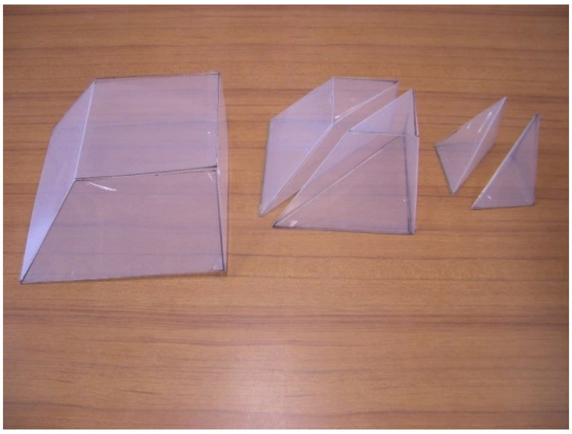



・陽馬の切断体
材質：PP シート
サイズ：下：18cm×18cm×6cm、中 12cm×12cm×6cm、上 6cm×6cm×6cm

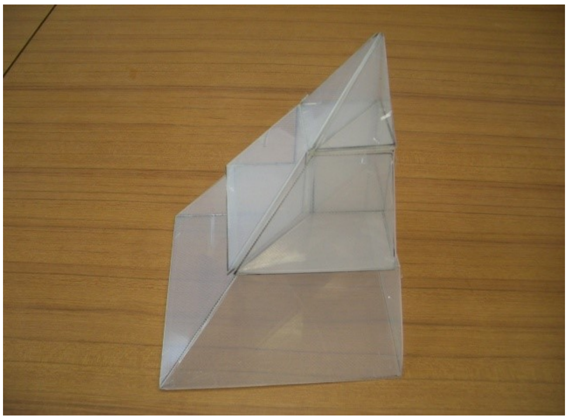



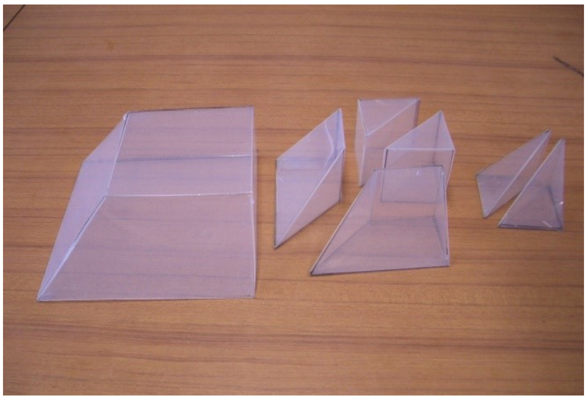
・陽馬の切断体
材質：PP シート
サイズ：下：18cm×18cm×6cm、中（左、右）12cm×12cm×6cm、
上（左、右）6cm×6cm×6cm



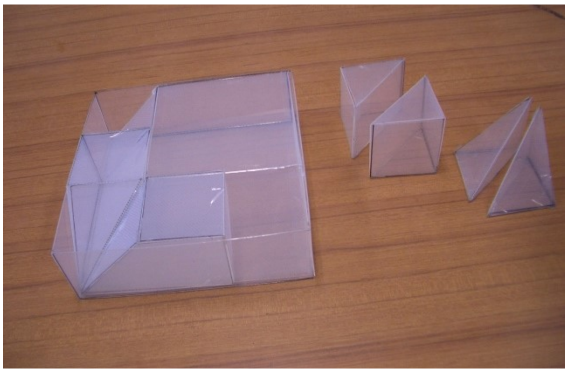


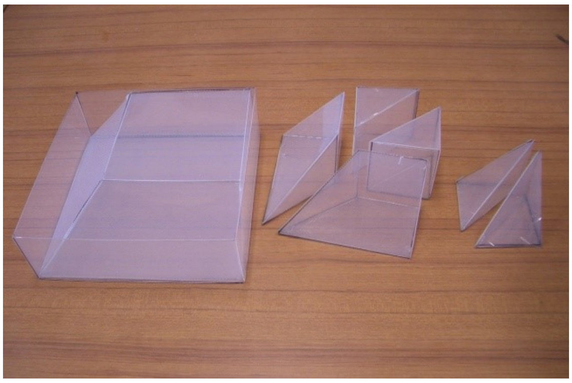
・陽馬の切断体
材質：PP シート
サイズ：下：18cm×18cm×6cm、中（左前、右前）12cm×6cm×6cm、
中（左後、右後）6cm×6cm×6cm、上（左、右）6cm×6cm×6cm

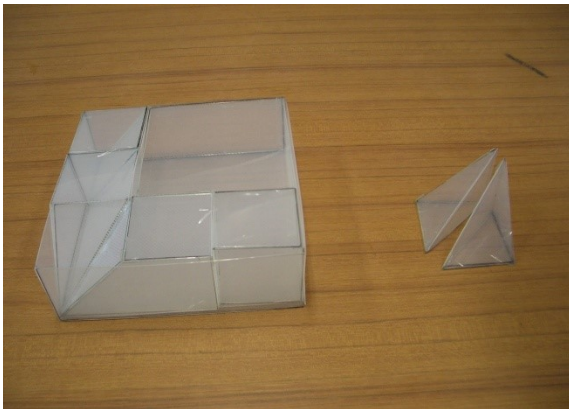




・上記の陽馬の切断体から直方体への変形（一例）
材質：PP シート





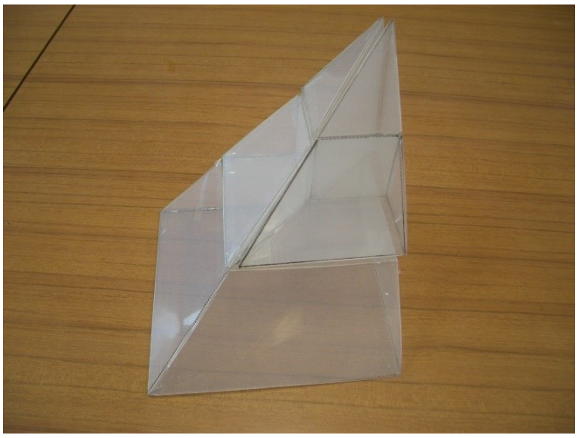
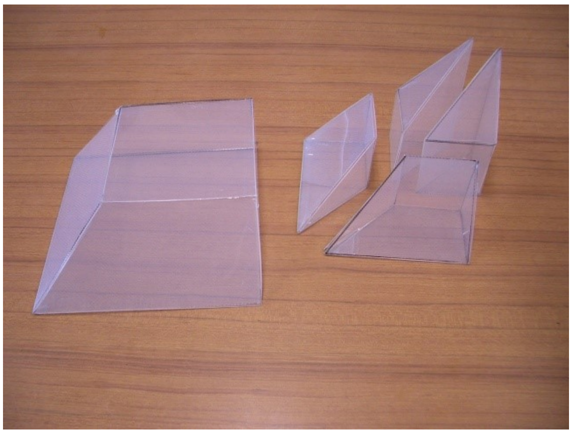



・陽馬の切断体

材質：PP シート

サイズ：下：18cm×18cm×6cm、上前（左、右）12cm×6cm×6cm、

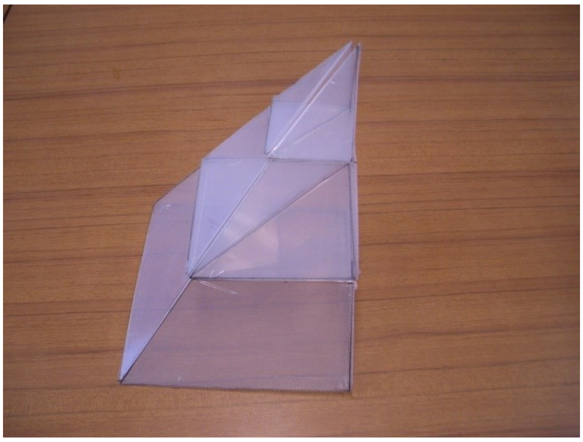
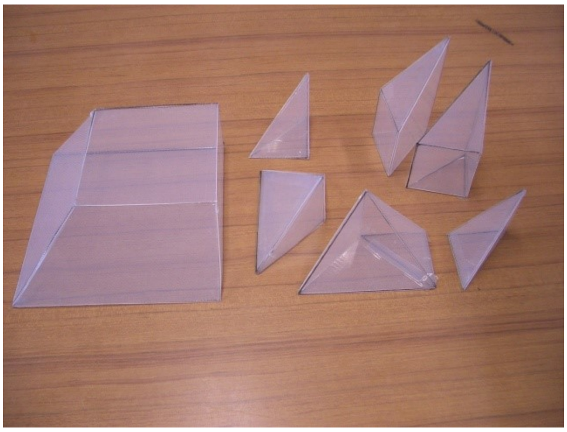
上後（左、右）6cm×6cm×12cm

・陽馬の切断体

材質：PP シート

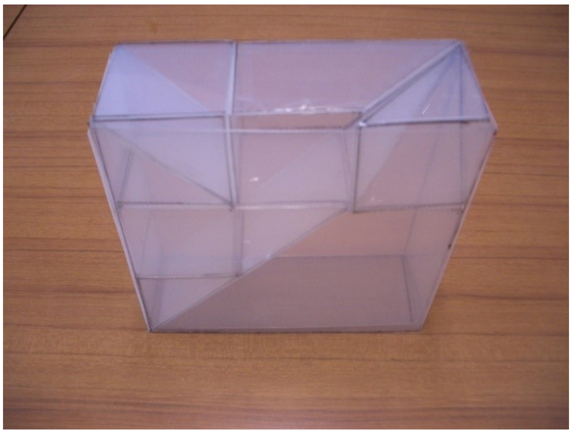
サイズ：上記立体の切断

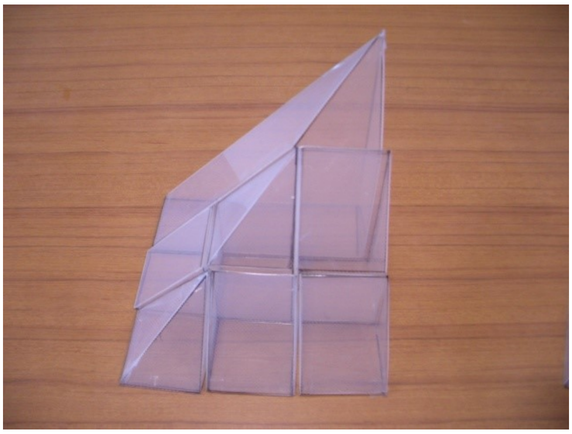



・陽馬から縦の直方体への変換

材質：PP シート

サイズ：直方体：18.5cm×6.5cm×18cm、陽馬：18cm×18cm×18cm





・縦の直方体の入れ物

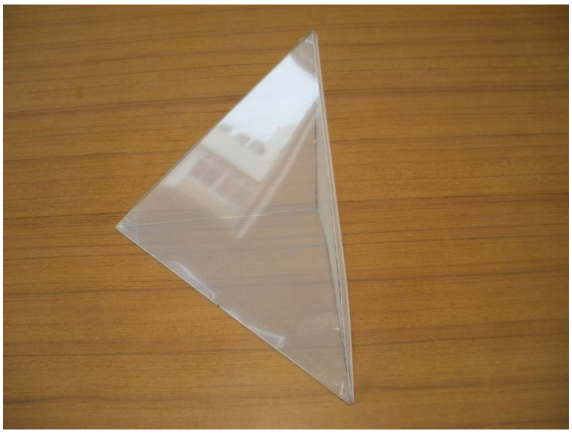
材質：PP シート

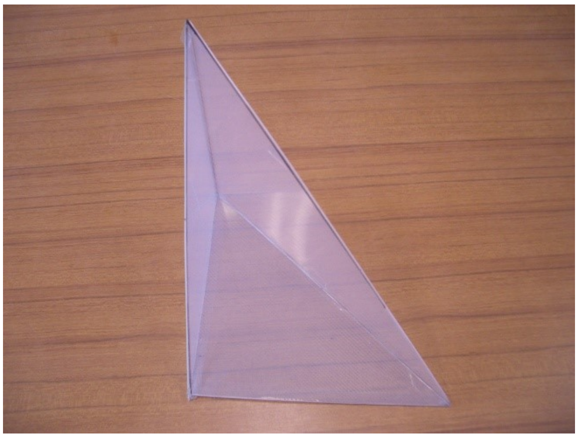
サイズ：18.5cm×6.5cm×18cm

・底面積と高さが同じで等積変形不可能な二つの四面体

材質：PP シート

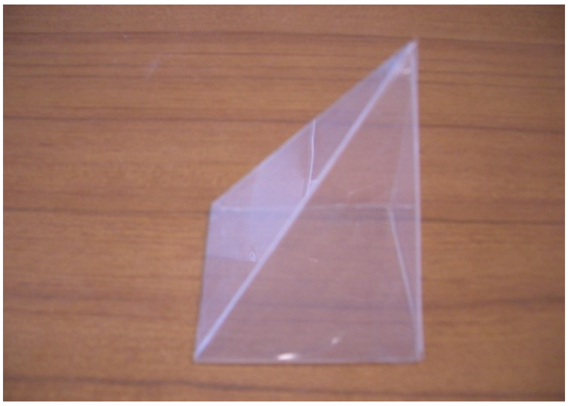
サイズ：18cm×18cm×18cm



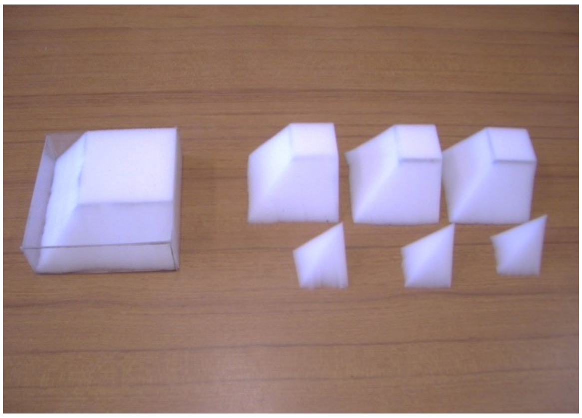


・直方体
材質：クリアホルダー
サイズ：20cm×15cm×5cm

・陽馬
材質：ハードカードケース
サイズ：6cm×6cm×6cm



・生徒用切断用陽馬
材質：メラミンスポンジ
サイズ：下：9cm×9cm×3cm、中：6cm×6cm×3cm、上：3cm×3cm×3cm




各教具使用物品金額

方眼紙　5 枚入り：105 円

カラ―ホルダー（A4）：10 枚　148 円

PP シート　565mm×980mm：965 円

クリアホルダー（A3　3 枚入り）：105 円

メラミンスポンジ　30.5cm×13.8cm×3.2cm：198 円

メラミンスポンジ　3cm×3cm×3cm：105 円

A4 画用紙：10 枚 105 円

手芸用ペレット 300g：630 円

カラーファイル：98 円

ハードカードケース：105 円

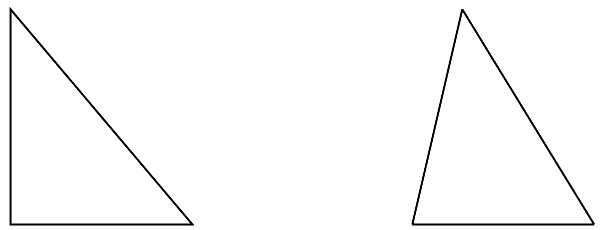
4. 第 1 時の授業のシナリオ（改訂版）

こんちは、私は三重大学に勤めている中村亮太といいます。今日を含めて 2 回授業をさせていただきます。よろしくお願いします。授業の内容は、教科書にはない図形の学習です。

［導入］

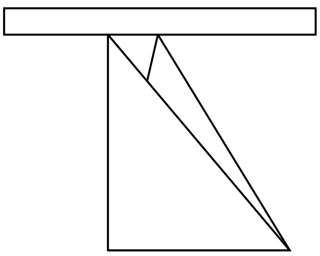
ちょっとこれを見てください（2 つの三角形を黒板に貼る。この 2 枚は裏に磁石を張っておく）。

（黒板の状態）

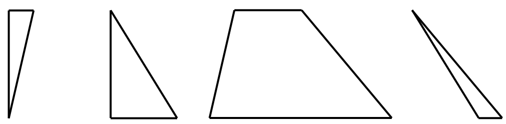


左の三角形の名前はなんですか？わかる人はいますか？（手を上げた生徒をあてて答えさせる）
そうですね。直角三角形です。
では右の三角形の名前はなんですか？（手を上げた生徒をあてて答えさせる）
そうですね。鋭角三角形です。
この 2 つの三角形は底辺も高さも同じ三角形です。（実際に底辺を重ねる。高さが同じであることを示すために、2 つの頂点の上に定規を置く）

（黒板の状態）

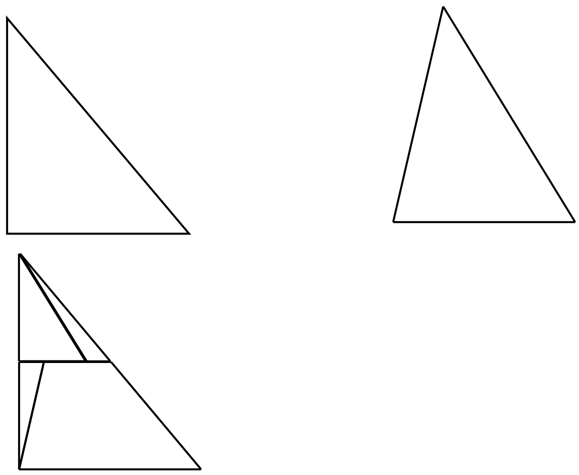


（確認が済んだら元に位置にもどす）
今から、左の直角三角形を切り取って右の鋭角三角形に変身させます。見ていてください。実はここにすでに切り取った部品があります。
（ばらばらな状態で 4 つの部品を黒板に貼って生徒に見せる。それぞれの部品には裏にマグネットが貼ってある）

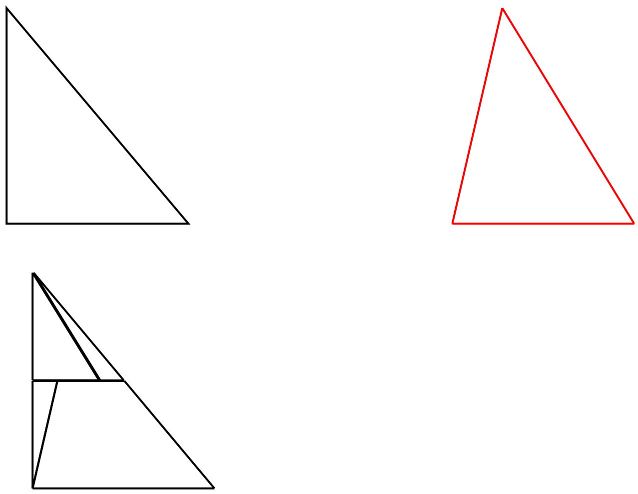


（本当に直角三角形の部品であることを示すために、直角三角形の真下に、部品を直角三角形

の形に並べて、直角三角形を切り取ったものであることを生徒に見せる。）
（黒板の状態）



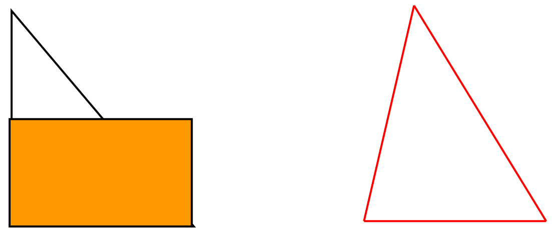
これを今から右の三角形に並び替えます。このままでは右の三角形の上に並べられないので、チョークで枠取りをします（色のチョークで枠取りをする）。
（黒板の状態）



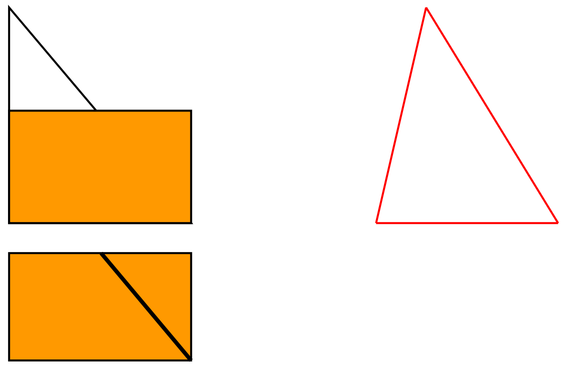
では見ていてください（4 つの部品をその枠の中にはめる）。
（黒板の状態）

なぜでしょうね？
では今からこの種明かしをします。
実はこの変身をするために、直接では無理なので、一度長方形に変身させました。どんな長方

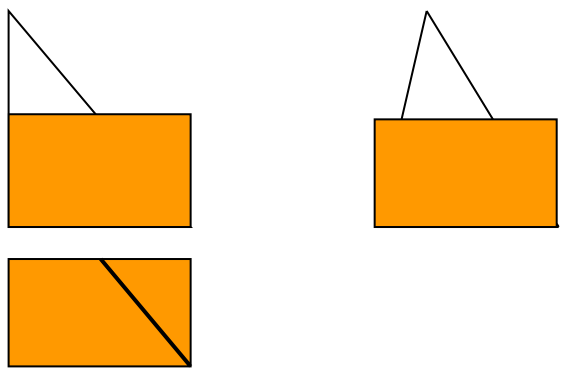
形かというと、底辺が同じ長さで、高さが半分の長方形です。
（長方形の薄い色のシートを持って、底辺を合わせて同じ長さであること、高さは二つ分であることを確認する）
（次に、シートの底辺と直角三角形の底辺を合わせて、マグネットで止めて重ね置く）
（黒板の状態）



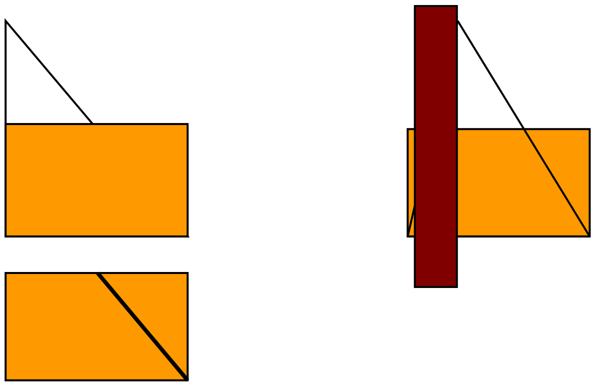
上に出ている小さい直角三角形と、右下にある小さい直角三角形は合同な三角形です。だから、元の直角三角形と、長方形の面積は同じです。
（線が引いてあるシートをこの図形の下に貼る）
（黒板の状態）



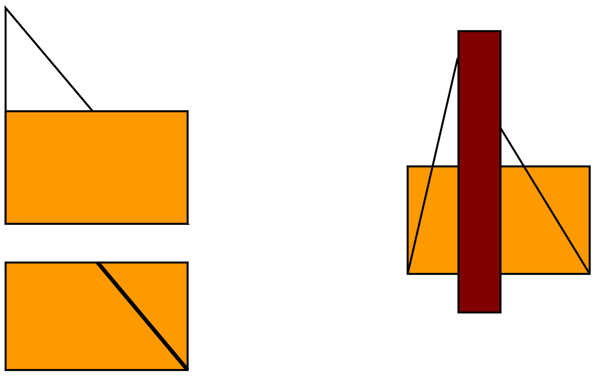
これと同じように、鋭角三角形も考えました。
（ここで、先にはずした厚紙の鋭角三角形を色チョークの三角形の中に戻す）
（鋭角三角形の上に長方形の薄いシートを、底辺を揃えて重ねて貼る）
（黒板の状態）



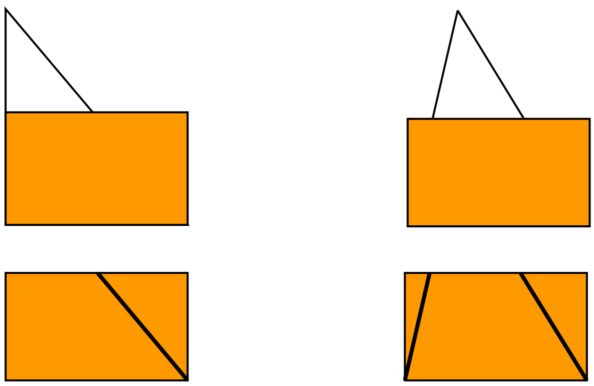
ここにこのように補助線を入れます。
（補助線はシートの上にはかきにくいので、定規を当てる）
（黒板の状態）



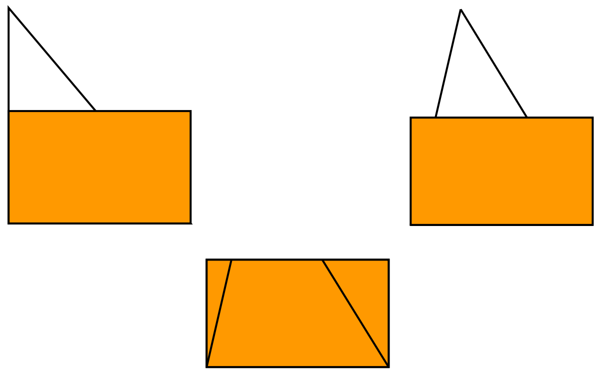
この右側だけ見てください。さっきと同じように、上に出ている小さい直角三角形と、右下にある小さい直角三角形は合同な三角形です。だから、右の直角三角形と、右の長方形の面積は同じです。
今度は左側を考えます。
（定規を右にずらす）
（黒板の状態）



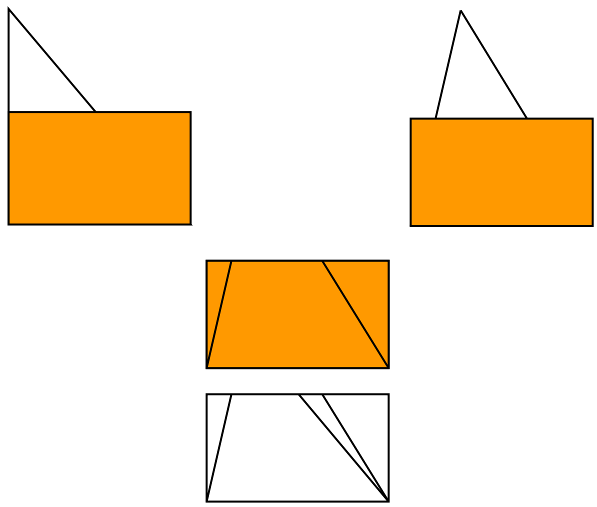
上に出ている小さい直角三角形と、左下にある小さい直角三角形は合同な三角形です。
だから、左の直角三角形と、左の長方形の面積は同じです。
（定規をはずす）
（黒板の状態）



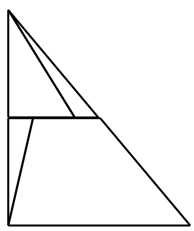
つまり、元の鋭角三角形と、長方形の面積は同じなわけです。
（線が引いてあるシートをこの図形の下に貼る）
この 2 枚のシートをこのように重ねます。
（2 枚のシートを重ねる）
（黒板の状態）



よく見てください。4 つの部品ができていますね。1 つに書くとこのようになります。
（4 つの部品の線を書き込んだ厚紙の長方形を 2 枚重ねているシートの下に貼る）
（黒板の状態）

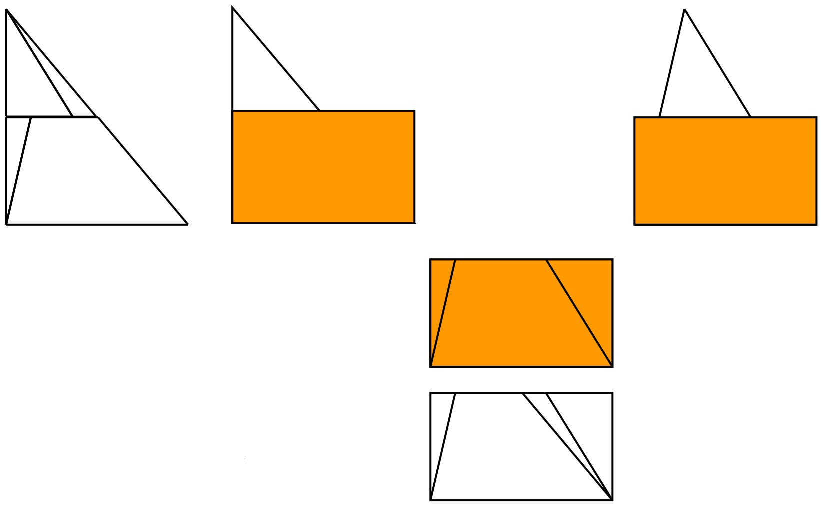


（すでにその線が書かれている厚紙の直角三角形を手にとって見せながら）この 4 つの部品を元の直角三角形の形に戻したものがこれです。



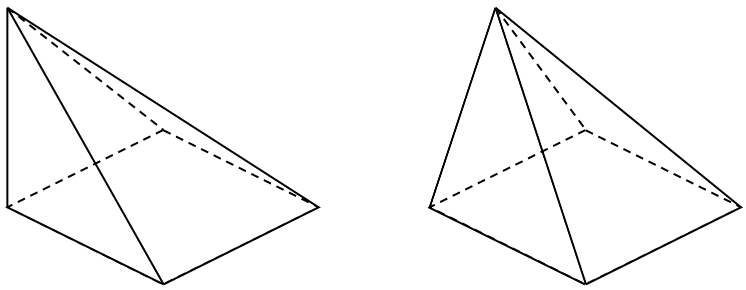
（手に持っている線が書かれている厚紙の直角三角形を黒板に貼る）

（黒板の状態）



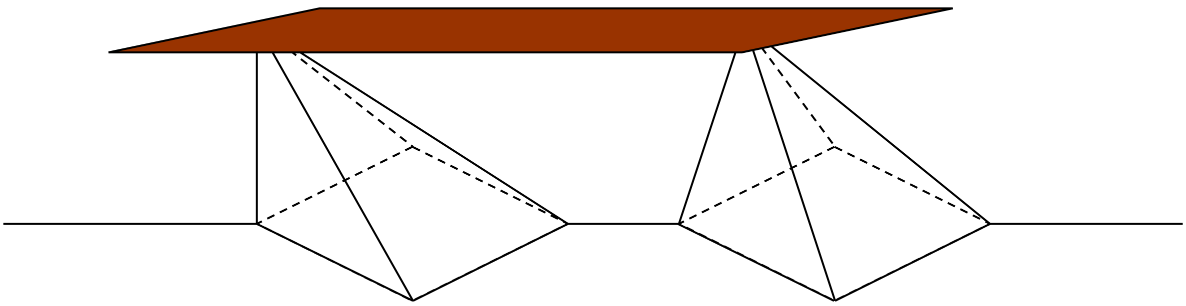
それぞれの部品と同じ形になっていますね。
（線がすでに書かれている厚紙の直角三角形に、4 つの部品の線を書き込んだ厚紙の長方形を各部品の横に持っていき確認をする）
種明かしはこれで終わります。

［展開］
ここまでは平面について考えてきました。これからは立体について考えます。
直角三角形に対応するのはこの立体です。
（子供から見て、教卓の左側に置く）
鋭角三角形に対応するのはこの立体です。
（子供から見て、教卓の右側に置く）



（正四角錐を持ち上げて）ちなみに、これは君たちが 1 年生で学習した立体です。
これらの立体の名前は何でしたか？（手を上げた子供を当てて、答えさせる）
そうです。四角錐ですね。
（持っている正四角錐は教卓の下にでも置く）
特に左の四角錐は特別な名前がつけられています。その名前は「陽馬」といいます。この名前

は古い中国でつけられました。
（黒板に「陽馬（ようま）」と書く）
この 2 つの立体は、底面が合同で高さも同じです。
（底面が合同であることを示すために、2 つの立体の底面どうしひっつける）
底面が合同であるということは、形も面積も同じということですね。
（高さが同じであることを示すために、2 つの立体を教卓の上に近づけて並べ、その頂点に定規をのせる）
（教卓の上の状態）



直角三角形を切って、鋭角三角形に変身させたように、左の陽馬を切って、右の四角錐に変身できるかどうかを考えます。この問題はヒルベルトの第 3 問題といわれています。
ヒルベルトは、陽馬ではなく、底面が合同で高さが同じである異なる 2 つの四角錐の変身を 1900 年に考えました。結論はできる場合とできない場合があるということでした。今日の場合はできない場合です。しかし、その答えを出した数学者はヒルベルトではなくて、弟子のデーンという人でした。その証明に用いた考え方が実は、直角三角形を鋭角三角形に変身させたときに長方形を間に入れた考え方を利用したものでした。すなわち、長方形の代わりに直方体を間に入れたのです。その直方体は底面が四角錐と合同で高さが 3 分の 1 のものでした。
その証明の中で、陽馬を直方体に変身させています。この授業は「陽馬を直方体に変身させる」部分を考えます。彼はどのように考えたのでしょう。
そのためには、陽馬の立体について知っておく必要があります。そこで今から、皆さんに陽馬を作ってもらおうと思います。
展開図がすでに書いてあるので、すぐに作れると思います。１人１個作ります。
きれいに作れるコツを教えます。先生のやり方を見ていてください。
（教師は見本を見せる）
注意は、折れ目にすこし鋏で線を入れます。あまり強く力を入れて引くと紙が切れてしまうので優しく引きます。そうするときれいにこのように折れます。
では各自に、展開図１枚を配ります。はさみとセロテープを机の上に出してください。忘れてきた人は前に取りに来てください。
では今から配ります。作ってください。
（しばらく机間巡視をしながら、7 割くらいの生徒が出来かけてきたら・・・約 15 分）

作り終わった人は、周りの友達と相談して、2 個以上の陽馬を合体させて、これまでに習ってきた立体を作ってみてください。どんな立体になりますか。
（しばらく様子を見て全員が作り終わったことを確認して）
どうですか？どんな立体ができましたか？　今作り終わった人も周りの友達と合体させて立体を作ってみて下さい。
どんな立体ができますか。
（おそらく生徒はまず、正四角錐をいうであろう）
それは、陽馬を何個くっつけましたか。
（生徒たちはそれぞれに 4 個と答えるだろう。）
そしたら、もう 1 つ少ない 3 個ではどんな立体ができるでしょうか。近くの人と 3 人で考えて見ましょう。
（しばらくしてから）
どんな立体ができましたか？
そうですね。立方体ができましたね。
（時間が余れば、ここで陽馬の特徴を扱う）
［まとめ］
今日は、陽馬を作りましたが、次の時間は陽馬を直方体に変身させる学習をします。作った陽馬は各自ローッカーに入れて次の時間まで持っていてください。
［後片付け］
それでは、時間がきたので、片付けに入ります。ゴミはこのナイロン袋へ入れてください。鋏とテープを借りた人は教卓まで各自持ってきてください。

5. 第 2 時の授業のシナリオ（改訂版）

［導入］

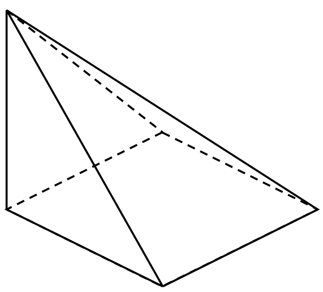
今日は昨日作った陽馬について学習します。

（教師用の陽馬を手に持って）この陽馬の体積の求め方がわかりますか？

（$\frac{1}{3}Sh$ と生徒が応えれば、よくできたと褒めてあげる。しかしそれが分からない生徒もいるので、正四角錐に話をもっていく）

（教卓の上に生徒から見て左側に陽馬を置く）

（教卓の上の状態）



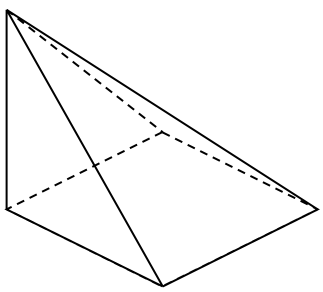
（今度は正四角錐を手に持って）では 1 年生の時に学習した正四角錐の体積を求める公式は何だったでしょうか？

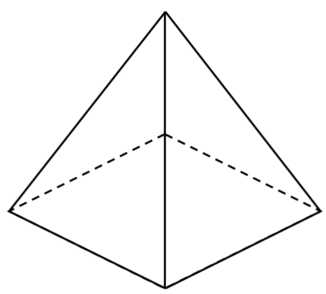
わかる人？（手を挙げた生徒をあてる）

（おそらく、(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ とことばの式で答えるであろう。）

（正四角錐を生徒から見て教卓の右側に置く）

（教卓の上の状態）





（黒板には「正四角錐の体積を求める公式：(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$」と板書する）

（黒板の状態）

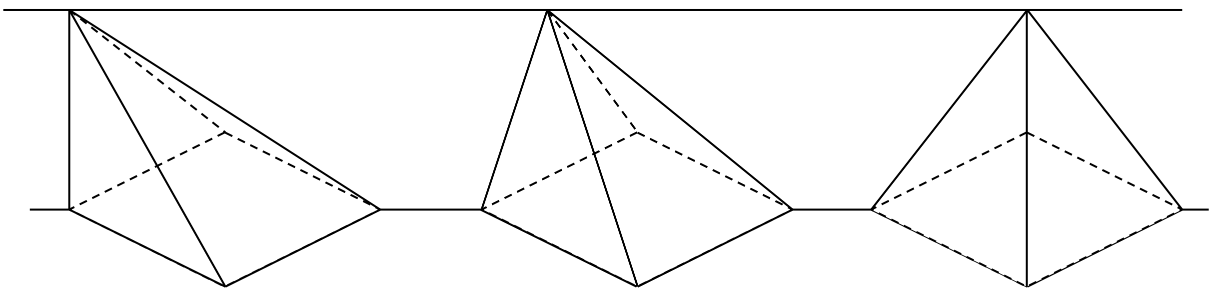
正四角錐の体積を求める公式：(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$

この公式を文字で書くと、(底面積)は S で、(高さ)は h でしたから、$\frac{1}{3}Sh$ ともかきます。(「$\frac{1}{3}$ Sh」とその下に板書する)
（黒板の状態）

正四角錐の体積を求める公式：(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}Sh$$

（一般の四角錐をもって）これはこの前見せた四角錐です。
（一般の四角錐を真ん中に置く）
この３つの四角錐は、底面が合同で高さが同じです。
（実際に等しいことを、底面どおしくっつけたり、頂点の上に長い物差しなどを置いて確認する）



正四角錐の体積を求める公式は(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$でしたが、他の２つも(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$で求められます。３つとも底面積も同じ、高さも同じなので、３つとも(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$を計算しても、もちろん同じ値になります。つまり、陽馬の体積も(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ということです。陽馬の体積も(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$であることを実験で確認してみましょう。
（立方体に陽馬を入れている状態にした教具を見せながら）
(底面積)×(高さ)は、立方体の体積になりますね。この$\frac{1}{3}$になるということですね。
水の代わりにビーズを使って、陽馬の体積が立方体の体積の$\frac{1}{3}$になっているかを確認します。
誰か、実験をしてくれる人はいませんか。２人必要です。(２人を当てる)
（１人の生徒は陽馬を持って、１人の生徒はビーズを陽馬に入れる。）
では、陽馬に入っているビーズを立方体の中にいれてもらいます。ではお願いします。

（2 人の生徒は注意深く実験を行う。）
（入れ終わったら、「ありがとう」といって席に戻す）
（用意してきている正方形の板を、立方体に入れて、だいたい$\frac{1}{3}$の高さまで入っていることを確認する）
この立方体のここには$\frac{1}{3}$の高さのところに印があります。ほぼ$\frac{1}{3}$の高さまで入っていることがわかりますね。
水ではないですが、陽馬の体積も(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$で求められることが分かりました。

［展開］

それではここで、(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$の式の見方を考えて見ましょう。
今はこのように$\frac{1}{3}$の高さのところまでビーズが入っています。直方体の体積は(底面積)×(高さ)でした。このビーズの直方体の体積は、何と何をかければ出るのでしょうか?
(底面を指さして)底面積に(高さを２本の指ではさむようにさして)この高さをかければいいわけですから、その式はというと？分かる人？
（手を挙げなければ)
この高さは立方体の高さのどれだけですか？（生徒を当てる）
そうですね。一辺の$\frac{1}{3}$ですね。だからビーズの直方体の体積は、(底面積)に(高さの$\frac{1}{3}$)をかけています。
（「ビーズの直方体の体積：(底面積)×(高さの$\frac{1}{3}$)」と板書する）
（黒板の状態）

正四角錐の体積を求める公式：(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}\ Sh$$

ビーズの直方体の体積：(底面積)×(高さの$\frac{1}{3}$)

では、みていてくださいね。
（中の板をしっかり押さえながら、縦に置きなおしてから）では、この直方体の体積は何に何をかければいいですか。わかる人？

（手を上げられないことを想定して）
この直方体の底面積は立方体の底面積のどれだけでしょうか？分かる人？
そうですね。$\frac{1}{3}$です。
高さは変わっていません。
だから、この直方体の体積は、底面積の$\frac{1}{3}$に高さをかければいいわけです。
（「縦にしたビーズの直方体の体積：(底面積の$\frac{1}{3}$)×(高さ)」と板書する。「横にした」もここで付け加える）
（黒板の状態）

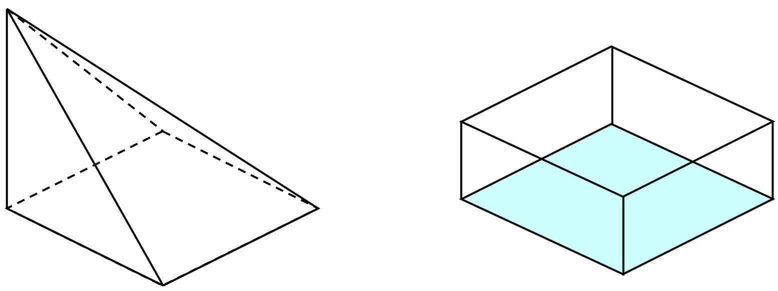
正四角錐の体積を求める公式：(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}\ Sh$$

横にしたビーズの直方体の体積：(底面積)×(高さの$\frac{1}{3}$)

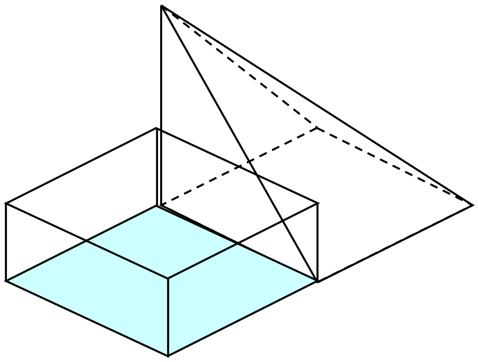
縦にしたビーズの直方体の体積：(底面積の$\frac{1}{3}$)×(高さ)

［展開］
今から、陽馬と横にした直方体について勉強します。
（2 つの立体を教卓の上に置く）
（教卓の状態）



（陽馬と 3 分の 1 にした直方体を手に持って）陽馬の体積と高さを 3 分の 1 にした直方体の体積は同じでしたね。そこで、陽馬をいくつかに切って、うまく直方体の形に変身することを考えます。
陽馬をどのように切ればこの直方体に変身させられるかなあ？（と、いいながら、3 分の 1 で切ることがでやすくなるように、2 つの立体を手に持ってゆっくりと近づけくっ付ける。）

（教師の動作）



相談してもかまいません。

（1分ほど待つ）

さて、どんな意見が出ましたか。教えてください。手を挙げてください。（手を挙げている生徒をあてる）

生徒：出っ張ったところを切る。

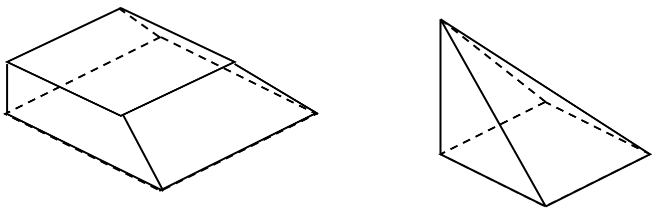
では、切ってみます。

（すでに用意してきている教具を手に取って）

切るとこのような2つの部分に分かれますね。

（その後切った形の教具を教卓に並べる）

（教卓の状態）

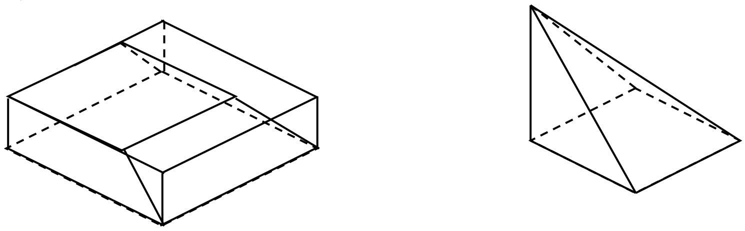


下の立体は陽馬の高さのどれだけにあたりますか。

生徒：3分の1です。

（直方体へ下3分の1を入れながら）下の立体を直方体の中にこのように入れておきましょう。

（教卓の状態）

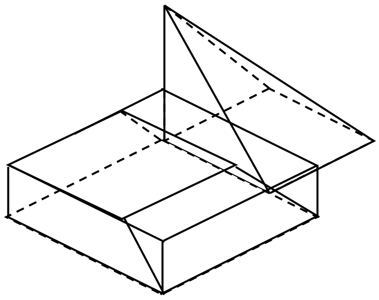


切り取った上の陽馬の高さは、もとの高さのどれだけですかね？小さくても陽馬です。

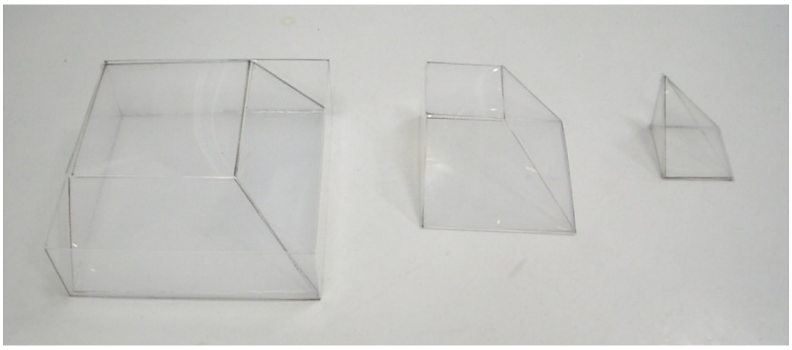
生徒：3分の2です。

そうですね。3分の2ですね。

下の立体は直方体の中にあるので、これ以上切る必要はありませんね。問題は上の出っ張った部分をどうするかですね。
（すでに作ってきた教師用の出っ張った部分の教具を持ち出して）
（出っ張った部分の陽馬を直方体の真横に持っていき）
（教師の動作）



次は、この陽馬のどこを切ればいいですか？
生徒：直方体と同じ高さになるように切ったらいい。
そうやなあ。ここで切ったらええなあ。
（すでに用意してきている教具を手に取って見せながら、教師用に準備した 3 つの部品を横に並べる）
（教卓の状態）



そしたら、ここからは自分たちで実際に立体を切りながら、考えてほしいのですが、やたら目ったらむちゃくちゃ切ってもいけないので、ちょっと陽馬の形の特徴を考えておきます。
（対称性が出やすいように、教師は陽馬の教具を手にもって）この立体の特徴は何でしょうか、見た目どのように見える立体ですか？何か気づいた人？
（生徒をあてて発表させる）
（教師は生徒の発言内容を板書する）
（黒板の状態）

・斜めの線で左右対称である。
・辺の長さが同じところがある。
・面の合同である。

そうなんです。陽馬は左右対称な立体なんです。この特徴を活かすように切ることがポイントです。

〔生徒の活動始まる〕

では、2 人に 1 組ずつ渡します。渡す中身は、（1つ1つ取り上げながら）カッターと袋とです。袋には、予備の立体も入っています。

ただ、作業の前に注意が 4 つあります。

1 つ目は、カッターの使い方です。手で持って切ると、一緒に手も切ってしまうかもしれないので、机の上に置いて手で押さえながら切ってください。

2 つ目は、ゆっくり切るのがコツです。早く切ると思うような方向に切れません。

3 つ目は、ゴミは後で集めますから、机の上に固めておいてください。

4 つ目は、まずよく考えてから切ってみることです。

では、班長さんは前まで取りに来てください。

（班長が取りにきて 2 人に 1 組ずつ渡し終わるのを確認する）

では、袋から取り出して始めてください。

〔作業〕

（机間巡視をして、どのようなことを生徒が考えているのかを観察する。3 分を限度として）

（もし対称面で切っているものがあれば、「アッ！なかなかいい線いっているねえ！」と声をかけて褒めてあげる）

（もし何もできていないようであれば、全員にヒントを与える。）

〔ヒント〕

上 3 分の 2 の陽馬はこの線で左右対称ですね。（下 3 分の 1 の陽馬が入っている直方体をもって）この直方体もこの対角線で左右対称ですね。

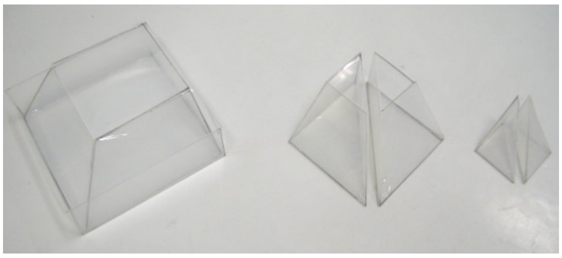
ということは、どう切ったらいい？

生徒：左右対称になるように切ったらええ。

そうですね。（下 3 分の 1 が入っている教具を生徒に見えるように）それに直方体の空いている部分もこのように左右対称やからね。

（すでに教師用として作ってある教具をだして）左右対称に切るとこのようになりますね。

（教卓の状態）

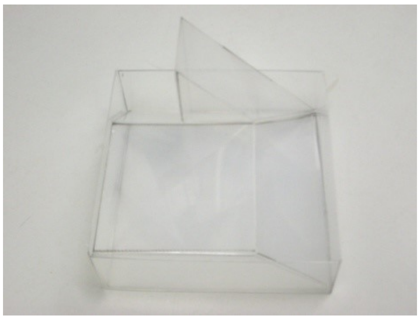


〔ヒントおわり〕

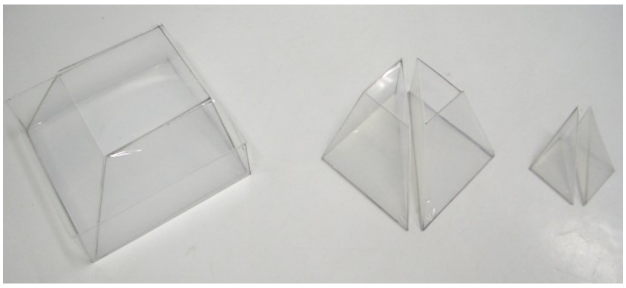
では皆さん、切ってみて、直方体の空いている部分に入れてみましょう。

（生徒は左右対称に切ってから、各部品を空いているところに埋め込もうとしている）

（机間巡視をして、どのようなことを生徒が考えているのかを観察する。2 分を限度とする）
（しかし、生徒は埋め込めないんじゃないかと思いかけてくる。実際、まだ埋め込むことが不可能な段階である。）
（もしよさそうなヒントとなる埋め込み方があれば、「アッ！なかなかいい線いっているねえ！」と声をかけ褒めて、他の生徒に宣伝する）
（そこで教師は、生徒が考えたよさそうな例を他の生徒に見せて、それをヒントとして出す）
（生徒を見渡して、ぜんぜんできていない場合は、教師から 1 個だけ入れたヒントを与える。）
皆さん、ヒントを言いますから、注目してください。これはここに入れます。
（ヒントの状態）



（子どもは逆も同じように入れるであろう。）
（子どもから、切ってええの？と聞いてきたら、切ってもいいよと勧める）
（切る様子が全くなかったら）
はみ出てますね。まだ切らなあかんのわかるかなあ？
どこをきればいいですか？
そうですね。はみ出ている部分を来ればいいのですね。
切ったらこんな形になるなあ。（すでに作ってきた教具をもって、生徒に見せて確認する。確認終われば教卓の上に置いておく）
（教卓の状態）



では自分たちのを切って、やってみてください。
（生徒たちは切り始める。）
（しばらく待つ）
（生徒がバラバラにしたこれらの立体を直方体の空いている部分に入れていくのを見守る）
（教師は机間巡視し、様子を見る。3 分位を限度とする）

（うまく入れられた組は、評価をしてあげる。困っている組を助けてあげるように指示する）
（時間を気にしながら、まだできていない組は答えを教える）
（まとめとして）
それでは、誰か前で先生の教具を使ってやってください。
（生徒演示）
ありがとう。みなさん分かりましたか。
［まとめ］
今日は陽馬を直方体に変身することを学習しました。
［後片付け］
まずゴミを集めます。ゴミはこの袋に入れてください。カッターは班ごとにまとめて本数を確認して前の箱に戻してください。

これで2日間の先生の授業を終わります。ありがとうございました。

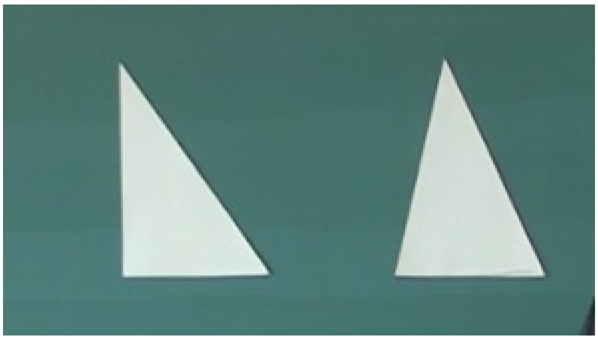
第２節　実際の授業展開（プロトコル）

１．１限目　２月 20 日（木曜日）４限目：３年５組

プロトコル

T：今から授業を始めます。

S：起立、礼



T：この二つの三角形を見てください。左の三角形の名前は分かりますか？

S1：直角三角形

T：直角三角形ですね。こちら（右）の三角形の名前は分かりますか？

S1：二等辺三角形

T：あれ？２辺の長さは一緒ですか？

S1：あれ？違うの？

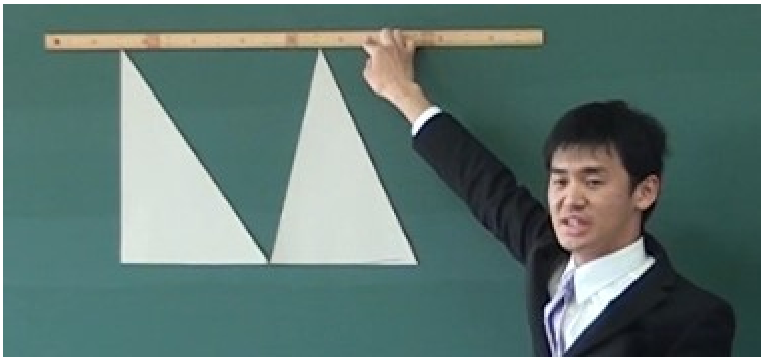
T：（教師の目の前に座っている生徒に聞く）辺の長さは一緒ですか？ちょっと違いますよね。じゃあ何でしょうか？

S2：三角形

T：さっきちょっとそのあたりで言っていたと思いますが、言ってもらえますか？

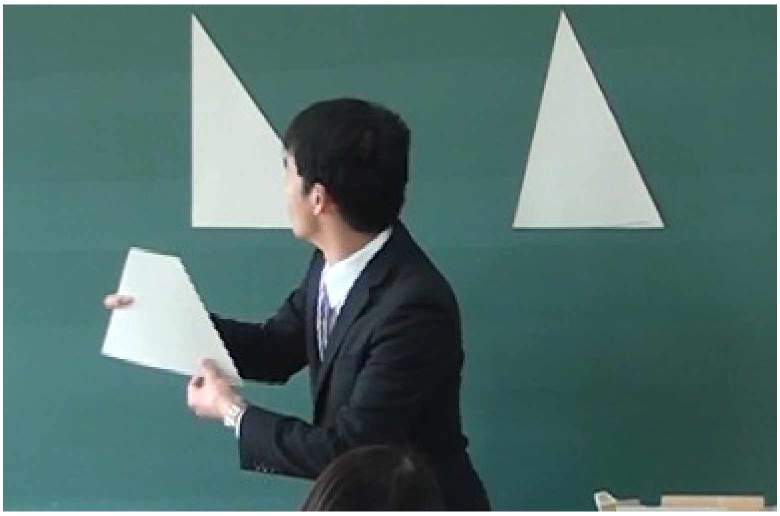
S3：鋭角三角形

T：そうですね鋭角三角形ですね。全部の角が 90 度未満だから鋭角三角形ですよね。今この直角三角形と鋭角三角形、（底辺を重ねて確認する）底辺の長さがちょうど等しいですね。これ底辺が同じ長さで、（定規を当てて高さが等しいことを確認する）



高さも同じだから、ふたつの三角形の面積は等しいですね。今から直角三角形から鋭角三角形へ直角三角形を切って変形させたいと思います。とはいえ、今から直角三角形を切っていると時間が足らないので、すでに切ってきています。

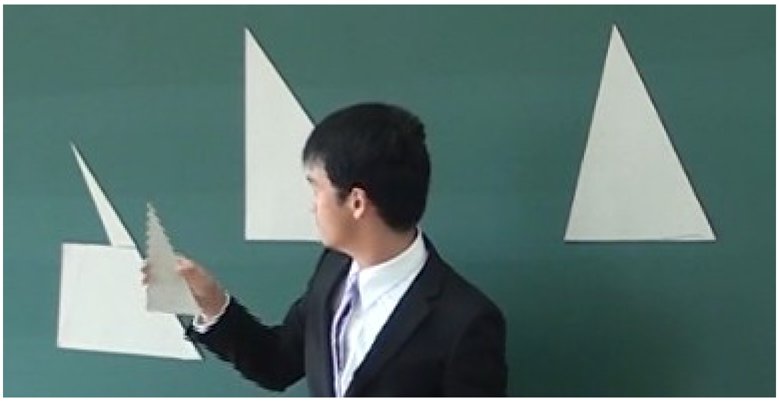
一つ目はこのようなパーツ、



二つ目はこのようなパーツ、

三つ目はこのようなパーツ、

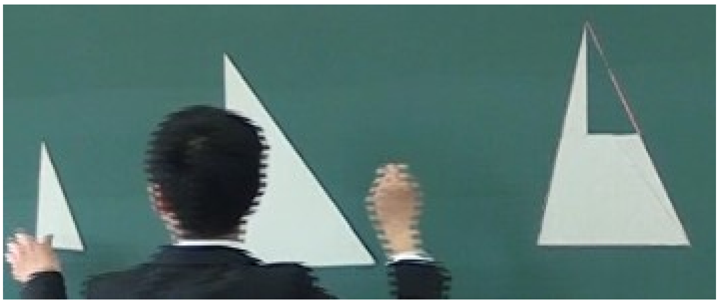
四つ目はこのようなパーツ。



このような順番に貼ると元の直角三角形とこの直角三角形が同じ形になります。

これは奇麗に同じように重なります。だから同じ三角形、この直角三角形を切ったものということを確認できました。このままだと貼りずらいので、右の鋭角三角形を枠撮りします。今から直角三角形から鋭角三角形に変形させていきます。いきますよ。

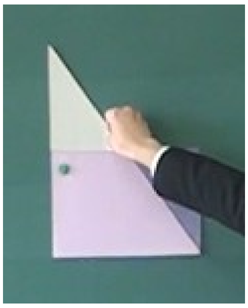
（変形中）

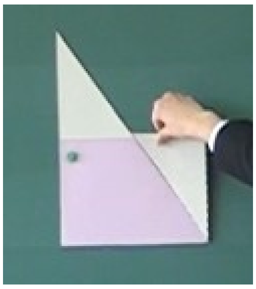


このように先ほどの直角三角形から鋭角三角形へと変形させることができました。なぜ変形できるか分かりますか？今から、なぜこれが変形できるのか説明していきます。

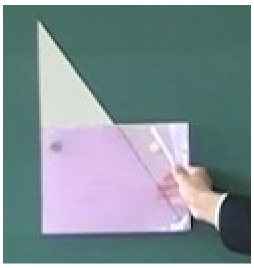
しかし、いきなり直角三角形から鋭角三角形に変形できないので、間に一つこの図形（長方形）を使います。これはどのような形か分かりますか？

S4：クリアファイル。
T：あっていますが、もう一度言いなおしましょう。
S4：長方形
T：よく材質わかりましたね。そうです、長方形ですね。クリアファイルを切りぬいたものですね。よくわかりましたね。この長方形は直角三角形の底辺と長方形の一辺が同じ長さで、もう一辺が直角三角形の高さの半分になるような長方形を使います。この直角三角形と長方形の面積の関係はわかりますか？
S5：等しい
T：そうですよね。左上の小さい直角三角形と右下の直角三角形が同じ形ですから、動かすと綺麗に重なるということですよね。

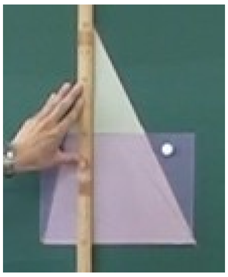




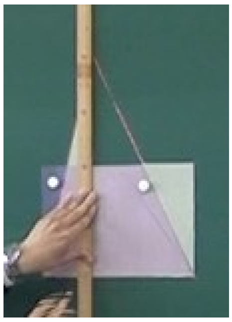
今から動かしていきますよ。このようにはめると綺麗にはまりますよね。だから、直角三角形と長方形の面積が等しくなります。どのように長方形に変形させたのかを忘れないように、下においておきます。



同じように鋭角三角形でも考えていきます。鋭角三角形でも長方形を使って考えます。このままだとどのようにすればよいのか分かりにくいので、一つ補助線を引きます。この頂点から垂線を下ろすと、向かって右側が直角三角形になります。

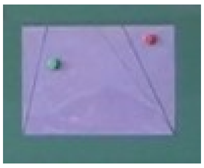


そうすると、先ほどの直角三角形と同じように左上の直角三角形と右下の直角三角形が同じ形ですね。実際に動かしてみると、このように綺麗にはまりますよね。



だから、右側の直角三角形と小さい長方形の面積が等しくなります。（定規を右にずらして）次は、左側の直角三角形と左側の小さい長方形でも同じように考えられますね。右上の直角三角形を動かすとこのようにはめることができます。

だから、小さい長方形と左側の直角三角形の面積が等しくなります。だから、これ（補助線の代わりに使用していた定規）をはずして考えると、鋭角三角形と元の長方形の面積が等しいことが確認できました。これも忘れないように、下に取っておきます。いま、直角三角形と鋭角三角形が同じ長方形に変形できました。
今からこの二つの長方形を重ねます。三本の線が入っているのが見えますか？



ここに三本の線が入って、この長方形は四つの部分にわかれていることが分かります。ちょっと見づらいので、別のものにかいてきました。これは、同じ図です。

つまり、このように切れば、直角三角形から長方形に、長方形から鋭角三角形へと変形することができて、直角三角形から鋭角三角形に変形できるわけです。最初の直角三角形を切断した

ものが、長方形の分割と同じ形になっているか確認します。まず、これを移動します。これはここに綺麗に入りますよね。

これはそのまま下に行けばいいですよね。

この大きい部分（直角三角形の切断したものの中で一番大きい部分）も（長方形の）大きい部分ですよね。

最後にこれもこのように綺麗にはまります。

このような方法で直角三角形から鋭角三角形に変形させていました。これで種明かしを終わります。
ここまで平面で考えましたが、この後立体で考えていきます。そこで立体も作ってきてあります。平面の直角三角形に当たる立体は、この立体です。

丁度この部分が直角になっていますよね。これが平面の直角三角形に当たる立体です。次は鋭角三角形に当たる立体です。それはこれになります。

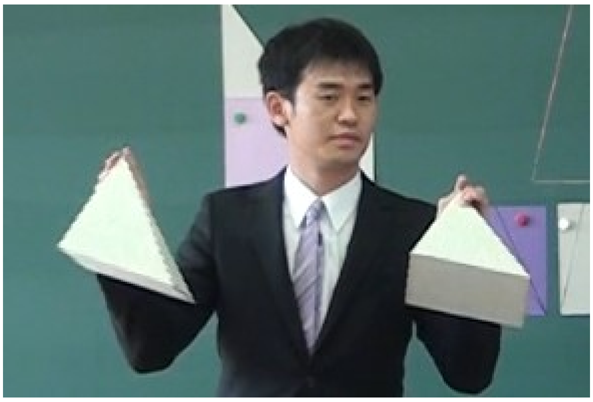
側面が直角三角形でも、二等辺三角形でもない、頂点が少しずれてる三角形になります。これ

が平面の鋭角三角形に当たる立体です。このような立体の名前はわかりますか？底面はこのように正方形なっています。

S5：正四角錐

T：正四角錐というのは、一番上の頂点が、このように見た時ちょうど中心にあるものを正四角錐といいます。

こういうのとかは四角錐といいます。



学校で習った四角錐は正四角錐だけで、このようなものは一度も習ったことないと思いますが覚えておいてください。先ほど平面では、底辺と高さが同じでしたので、立体でも同じ条件でないと確かめられませんよね。この二つの立体をよく見てください。

底面は合同です。

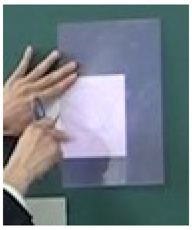
（2 つの四角錐を机の上にのせて頂点に定規をのせる）机と定規が平行になっています。

だから高さも等しいです。底面積と高さが同じであったら、四角錐の体積は等しくなりますね。

この後この立体（直角三角形に当たる立体）をよく使います。この立体は陽馬という名前があります。字としては、このように陽馬と書きます。（黒板に陽馬と書く）これは、古代の中国でつけられた名前で、どうしてこのような名前が付いたかよくわかりません。これ馬にでも見えたのですかね。馬ってついているくらいですから馬に見えたのですよね。これは私の授業でよく使うので覚えておいてください。
平面において、直角三角形から鋭角三角形に変形させたように、立体でも陽馬からこちら（右）の四角錐に変形できないかと考えた問題があります。この問題をヒルベルトの第3問題といいます。このヒルベルトさん、実際は陽馬のような特殊な形ではなく、このような一般的な四角錐から別の一般的な四角錐への変換を考えました。この問題、実はもう答えが分かっています。どのような立体がきても変形できると思う人はどのくらいいますか？切り刻んでもう一度つけなおせば、こちらの立体からこちらの立体へ変形できると思う人はどれくらいいますか？予想でいいので挙げてみてください。変形できるという人。（生徒に挙手させる）まあぼつぼついますね。逆に変形できないと思う人はどのくらいいますか？（生徒に挙手させる）こっちもぼつぼつ。分からない人いますか？（生徒に挙手させる）そんなのわかるわけないだろって人、いますか？いますね。先ほど答えがもうでているといいましたが、実はできる場合とできない場合があるのが答えなんですよ。今回この二つの立体に関しては、変形することができない立体なんですよ。この答えを考えたのは、先ほど言ったヒルベルトさんではなく、ヒルベルトの弟子であるデーンという人が考えました。デーンの考え方は先ほど行った平面の場合の考え方を使っているんですよ。直角三角形から長方形を経て鋭角三角形にするように、この陽馬から長方形に当たる立体を経てこちらの四角錐にしようと考えたのですが、長方形に当たる立体は何か分かりますか？
S6：立方体
T：立方体は正方形ですね。平面の正方形に当たる立体が立方体になります。長方形はどのような立体でしょうか？立方体を少し横に伸ばしたらいいんですけど、どのような名前でしょうか。ちょうどこういう感じ。

S1：直方体
T：そうですね直方体ですね。このような直方体で考えました。これはちょうど底面積が等しくて高さがもとの四角錐の三分の一の直方体です。今回は陽馬から直方体への変形はできることが分かっているので、このことについて考えていきます。まず切る前に陽馬の特徴について分かっていたほうがよいので、今から陽馬の展開図を配りますので、それを組み立てていきます。展開図を配る前に展開図を組み立てるときのテクニックを教えます。実際に作るときは切った後にやればいいんですが、折り曲げるとき、このような厚紙を折り曲げるとき、普通に折り曲げると綺麗におれないので、折り曲げる所に定規を当てて、軽くはさみ当ててスーッと引

いてください。



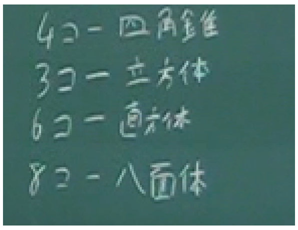
このように綺麗に曲がります。

では今から、班長さんに、はさみとテープを班員分取りに来てもらいますので、班長さん取りに来てください。その間に展開図を配ります。道具が来た人から始めてください。
（作業開始）

T：筋をつけるのは折るところだけでいいですよ。切るところは別にやらなくても大丈夫ですからね。
T：筋つけるのは折るところだけでいいですよ。切るところは筋つけたところで変わらないんですからね。
T：作れたら周りの人と協力して、今まで習った立体や他の立体を作ってみてください。
（しばらくの間生徒は作業している）

（作業終了）
T：じゃあ一度席についてください。何が作れたのかみんなに聞きます。陽馬を何個使って何ができましたか？教えてくれる人いませんか？
S7：4つで四角錐
T：なるほど。他に何かできた人いますか？
S1：3個で立方体
T：3個で立方体ができたのですね。なるほど。他に何かできた人いますか？
S8：6個で直方体。
T：6個で直方体ができたのですね。他に何かできた人いますか？
S8：8個で八面体
T：8個で八面体ができたのですね。他に何かできましたか？これで全部でましたか？

（板書）



4 コ―四角錐
3 コ―立方体
6 コ―直方体
8 コ―八面体

3 個で立方体ができたということは、陽馬の体積はこのことからわかりますよね。陽馬の体積って立方体の体積のどれくらいですか。

S5：三分の一

T：そうですよね。三個で立方体ができているから、立方体から見るとちょうど体積が三分の一にならないとおかしいですよね。だから、陽馬の体積は立方体の体積の三分の一になります。今から陽馬の特徴を考えてほしいのですが、陽馬にはどのような特徴がありますか？特徴というのは、辺、面、頂点などに対してです。

S9：（生徒が陽馬を持って）こういうふうに二つの面が見えて、二つの面の面積が等しい。

T：二つの面の面積が等しいですか。ここところかな（$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ の直角三角形を指しながら）。このこっちからこう見た時、等しくなっていますよね。他に何かあるかな。

S1：三つで立方体をつくったときに、この辺が対角線になる。

T：そうですね、すごくいいこと言ってくれたのですけど、数が足らないので別の立体を使いますが、この 3 つ重なった部分、ここが立方体の頂点から逆側の頂点、つまり真逆の頂点を結んでいる線分になってるので、対角線になっています。他に何か特徴とかありましたか？

S10：三角形が全部直角

T：そうですね。ここの 4 つの三角形、全部直角三角形ですね。他に何か気付くことありますか？ちょうどこうやってみた時何か気付くことありますか？

最初にここところ（$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ の直角三角形のこと）の面積が等しいことに気づいたのと、合わしたりしてるから形が合同ですよね。

S11：二等辺三角形

T：どこが二等辺三角形になってますか。二等辺三角形は見える所にはないですね。見えないところだったら見つけられるんですけど。これ、さ（左）、さ（左）、さゆ（左右）

S12：左右対称

T：そうですね、左右対称ですよね。ここを基準にすると左右対称になっていますよね。

陽馬は、ちょうど左右対称になってるんですよ。陽馬が、左右対称の立体ということを最後に確認したということで授業終わります。

S：起立、礼

２．２限目　２月 21 日（金曜日）２限目：３年３組

プロトコル

T：授業を始めます。号令お願いします。

S：起立、礼

T：昨日の授業では陽馬を組み立てて、陽馬を何個か組み合わせていろいろな立体を作りましたね。その中で３個組み合わせて立方体ができることから、陽馬の体積について質問しましたね。陽馬の体積は立方体のどれだけでしたか？

S1：三分の一

T：そうですよね。（板書）昨日の最後に陽馬の体積が立方体の体積の三分の一になることを確認しましたよね。今日は最初にそのことを実験を行うことによって、確認してみたいと思います。水の実験では、このような教具を使いませんでしたか？このようなものを用いて、こちらの角錐に水を注いでこちらの角柱に移し替える実験をしたと思います。

今回、角錐が陽馬になります。陽馬に対応する角柱ですから、立方体を使います。わかりますよね？今から陽馬に、手芸用ペレットというビーズを使ってやってみます。どなたかに手伝ってほしいので、二人ほどやってみたいという人いませんか。

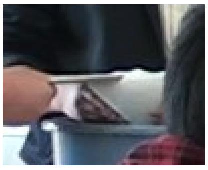
S2：手ぶらでいいの？

T：大丈夫ですよ。どちらか一人が陽馬をバケツの上で持ってください。ビーズを陽馬に山盛りいっぱい入れてください。山盛り入れた後ですりきってください。

（陽馬にビーズを入れる作業）

すりきるタイミングでは、こぼしても大丈夫ですよ。

（すりきる作業）



S2：（陽馬のビーズを立方体に）全部入れるんですか？

T：少しこぼしても問題ないですよ。
（すりきるのは）大体そのような感じですね。次はこちらの立方体に、入れてください。なるべくこぼさないように頑張って下さいね。
（陽馬のビーズを立方体に移し替える作業）

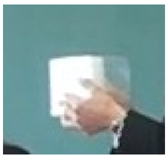
T：これで作業終わりです。二人とも、ありがとう。これで分かりやすいように蓋をします。

この立方体にはちょうど三分の一の高さに印がついています。分かりますか？（前方の生徒に確認してもらう）三分の一のところまでビーズが入っていることを確認してもらったので、陽馬の体積が立方体の体積の三分の一ということが分かりましたね。では、このビーズの立体の名前が分かりますか？

S4：ビーズの形が？
T：そう。今ビーズは、立方体の中に入っています。どのような形になっているでしょうか？
S4：円柱
T：円ですか？底面は正方形になっていますよ。
S4　：直方体。
T：そうですね直方体ですよね。直方体の体積の求め方は、みなさん覚えていますよね。
S5：わからん
T：あれ？分からないですか？では誰か助けてあげてください。
S2：えっ、直方体っすか。
T：直方体です。
S2：三分の一って使いますか？
T：直方体の体積の求め方は使わないですね。
S2：底辺かける高さ
T：底辺ですか？底…

S2：面

T：そうですね。底面ですよね。直方体の体積の求め方は、底面積かける高さです。分かりますか？底面の面積かける高さで直方体の体積が求めることができます。覚えておいてくださいね。今この直方体、もとの立方体から見た時、底面積は一緒ですね。

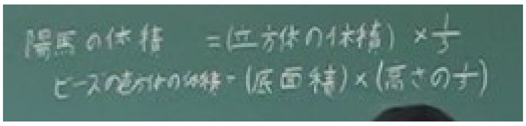


この直方体の高さというのは、もとの立方体の高さのどのくらいですか？

S5：三分の一

T：そうですね。直方体の高さは、元の立方体の高さの三分の一ですよね。だから、この直方体の体積は、（板書）、底面積に高さの三分の一をかけているということになりますよね。

（板書）



陽馬の体積　＝（立方体の体積）$\times\frac{1}{3}$

ビーズの直方体の体積＝（底面積）×（高さの$\frac{1}{3}$）

では、この直方体を縦にするとこうなります。体積は何に何をかけていますか？

これは横の直方体を縦に直しただけですから、体積は変わりませんよね。さきほど横の直方体の言い方で言うと何に何をかけていることになりますか？

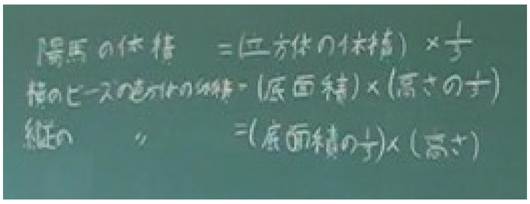
S6：わかんないです。

T：今のは、手を挙げたのかな。

S7：底面積の三分の一かける高さ

T：そうですよね。これ縦に三つありますから、底面積がもとの立方体の三分の一になっていて、高さはもとの立方体と変わりませんよね。横にした状態だと底面積がここになりますから。だから、（板書）、さきほどのビーズの直方体の体積はこういう形になりますよね。

（板書）



陽馬の体積　　　　　　＝（立方体の体積）×$\frac{1}{3}$

横のビーズの直方体の体積＝（底面積）×（高さの$\frac{1}{3}$）

縦の　　　　〃　　　　＝（底面積の$\frac{1}{3}$）×（高さ）

で、これ今 3 つとも、陽馬から移したものでなので、この体積はすべて等しいわけですよね。今から陽馬から、直方体へ変形させることができるのか確かめていきたいと思います。この直方体がちょうど底面積が陽馬と同じで、高さが陽馬の三分の一の直方体です。今から陽馬から直方体への変形を考えます。

切ったものを並べていくよりも、直方体の中に、しきつめていった方が分かりやすいので、直方体は、底面が同じで、高さが同じで上だけ開いている直方体を使います。

今から陽馬を切って、直方体の中に埋めていくわけですが、まず最初にできる限り大きく切ってこの中に入れます。どのように切ればいいと思いますか？

S8：高さはそこ（三分の一の高さで切る）

T：ここですか？（三分の一の高さを手で示しながら）

S8：横に（底面と平行に切る）

T：底面積と平行に切るんですね。三分の一の高さで底面と平行になるように切ると、綺麗にすっぽりはまりますよね。切ったもの用意していますからそれに変えます。高さが三分の一のところで切るとこうなりますよね。

今これ下の立体は、綺麗にはまっているので、直方体におさまってこのような形になります。

この上の三分の二の陽馬、最初の陽馬よりも小さいですけど同じ形ですから陽馬ですよね。これもまだ、もう少し切りたいですね。これをどのように切ればいいですか?

S9：あいとるとこに、適当に入れる。

T：そうですよね。確かにあいているとこに適当に入れてけばいいけど、これどうやって入れても、確実にはみ出ますよね。はみ出ないためにはどのようにすればいいですか?

S10：適当に

T：適当に、そうか適当に切るのがいいですか。はみ出ているところを切った方がいいですよね。このように横に置いただけでも、この部分がはみ出ているので、ここを切った方がよくないかと考えられますよね。だから、ここを切ってみます。上三分の一を切ると、最初の状態から考えるとこのような形になりました。

ここまでは前でやりましたが、今からみなさんに教具を渡してやってもらおうと思います。今から配るものに入っているのは、この一番底のこの部分、

これが一つと、上三分の二の陽馬を切断したもの、この部分が三セット入っています。

一回の敷き詰めに使えるのは、一セットだけです。

今回、カッターを使うので怪我だけには十分気をつけてください。切るときは、カッターの刃を長めにだして、ゆっくり切るときれいに切れやすいので、そのことを意識して切って下さい。では、二人組を作って、前にこれ一セット一袋と、

カッターとカッター用の下敷きを取りに来て、二人組になってから始めてください。
（先生方が二人組の指示、机を動かす指示を出していただく）
S2：先生これがカッター用の下敷きですか？
T：そうですね。カッター用の下敷きがないと机に傷がつくといけないので、カッター用の下敷きを使ってください。
（以下作業）

（生徒はしばらく作業していた）

（作業終わり）
T：はい、机はそのままでいいので前を向いてください。これで全グループが、底面積がそのままで高さが三分の一の直方体に変形できましたね。一応こっち（底面積が三分の一で高さがそのままの直方体への変換）もできるんですよ。底面積が三分の一にして、高さがそのままの直方体はこの形になっています。

これをもとの陽馬の形に復元できたら、陽馬から変形ができるということになります。戻すことができたら、逆をたどれば直方体へ変形することができるわけですからね。今から先生さささっとやってみます。では、見ていてください。
（教室内からどよめきの声があがる）
T：このような形で、この中に綺麗におさまっていたものを陽馬の形に復元することできました。

このことから、底面積が三分の一で高さがそのままの直方体への変換もできることが分かりました。
ではいまから片づけるのですけど、切ったものはもとの袋に入れて前に持ってきてください。
カッターはもとの袋に入れて、カッターとカッターの下敷きも前に持ってきてください。（子どもたちが前に返しに来る）
S：起立、礼

第 3 節　授業のまとめ

1 時限目は、平面での等積変形を行ってから、立体についての説明、その後、陽馬の特徴についての確認を行った。

平面の等積変形は、本授業の導入部分でもあり、ヒルベルトの第 3 問題の基本的な考え方との関わりもあり、教師からの説明を重視した。そのため一方的な説明とならざるを得なかった。内容は、小学校の既習内容の応用であったので、理解はある程度できていたと考えられる。1 の「同底・同高の異なる二つの三角形の等積変形を考える」という目標は、生徒が個々に考える時間というのは特に設けてはいなかったが、教師が順序立てて説明を行うことにより、生徒は次の方法を推測することができたので、達成することができた。

陽馬の展開図を組み立てるときは、作業を伴うので、徐々に積極的な参加となっていった。ただ、事前に説明を行っていたにもかかわらず、間違えて行動している生徒が何人か見受けられた。生徒への注意は、机間巡視の際に行った。生徒は、すぐに理解し修正していった。

特に、陽馬をいくつかあわせて、既習の立体を作る際には、自分の席の周りの友達と陽馬を合体させるためにコミュニケーションを図り、様々な立体を考え、作っていた。すべてのクラスで出ていた意見としては、3 個で立方体、4 個で正四角錐、6 個で直方体、8 個で八面体の 4 つがでていた。他には、2 個で八面体（生徒は説明時、組み合わせ方を間違えて六面体を作っていた）12 個で直方体などがでていた。生徒同士が協力して組み合わせるということで活動を行っている反面、友だちに陽馬を貸してしまった生徒は、少し手持無沙汰となっていた。2 の「陽馬の作成を通して、その特徴を捉える」という目標は、組み合わせて既習の立体を作成することや特徴の確認を行うことにより、達成することができた。

2 時限目は、体積の見方と立体の等積変形を行った。

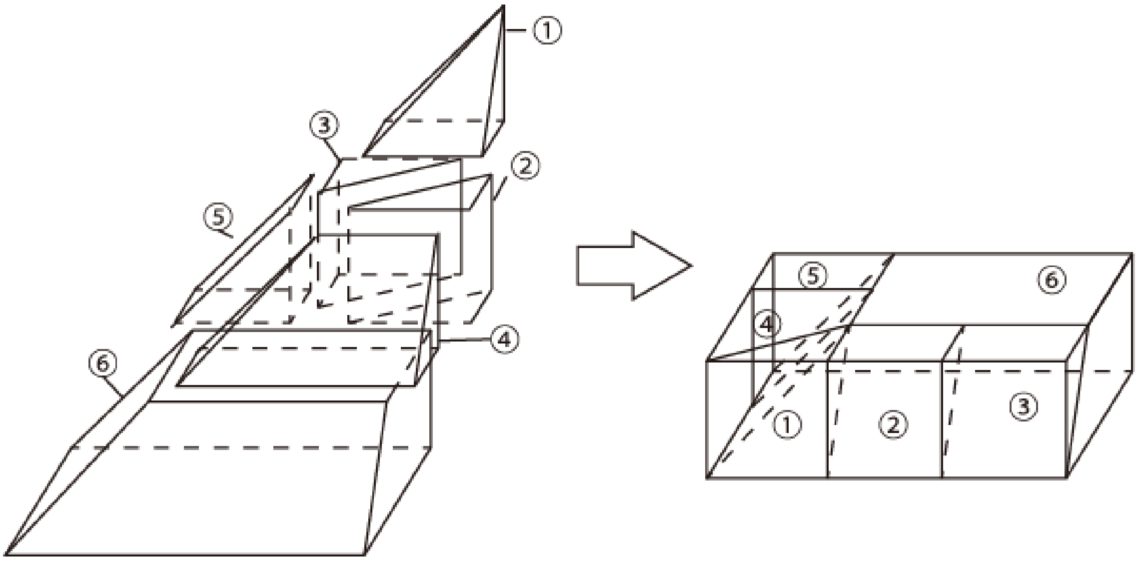
体積の見方を説明するときに、まず最初にビーズによる陽馬から立方体へと移し替える実験を行った。少し不手際な点があった生徒二人ではあるが、移し替えには成功していた。

体積の見方（公式の見方）は、初めてのことであったためか、生徒自身式の見方を考えることの意義が理解しにくいようであった。質問に対しての解答は少し誘導しながら導いたので、生徒だけによる説明とはならなかった。

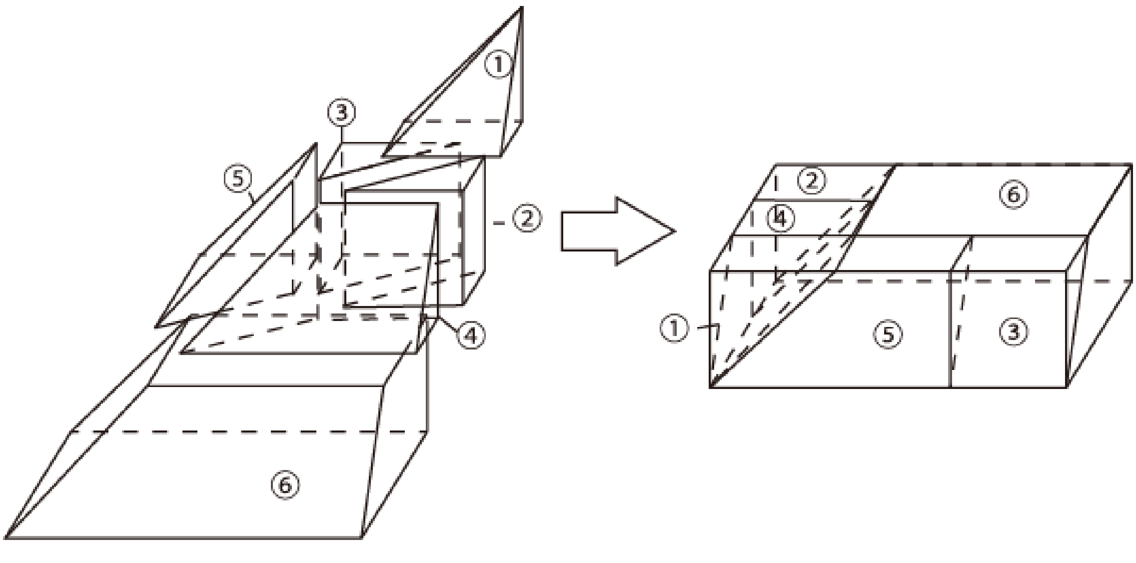
立体の等積変形では、前半部分の説明は、教師の教具だけで対応しなければならなかったので、分かりづらい生徒が多かったようである。しかし、後半、生徒自身が実験を行うと、実際に手にとって操作活動ができたので、生徒自身の考えを確認しながら試行していた。その行為が、理解を促進した。また、困っている生徒に対しても、教師や生徒が説明する際には実際に目の前にある立体を動かしながら説明を行ったため、困っている生徒が容易に理解できた。

生徒が陽馬を切断していた方法は、大きく分けて 2 パターンあった。

（ア）横三分の一への変換（陽馬 3 つで立方体になることを用いた方法）



（イ）横三分の一への変換（左右対称性を用いた方法）

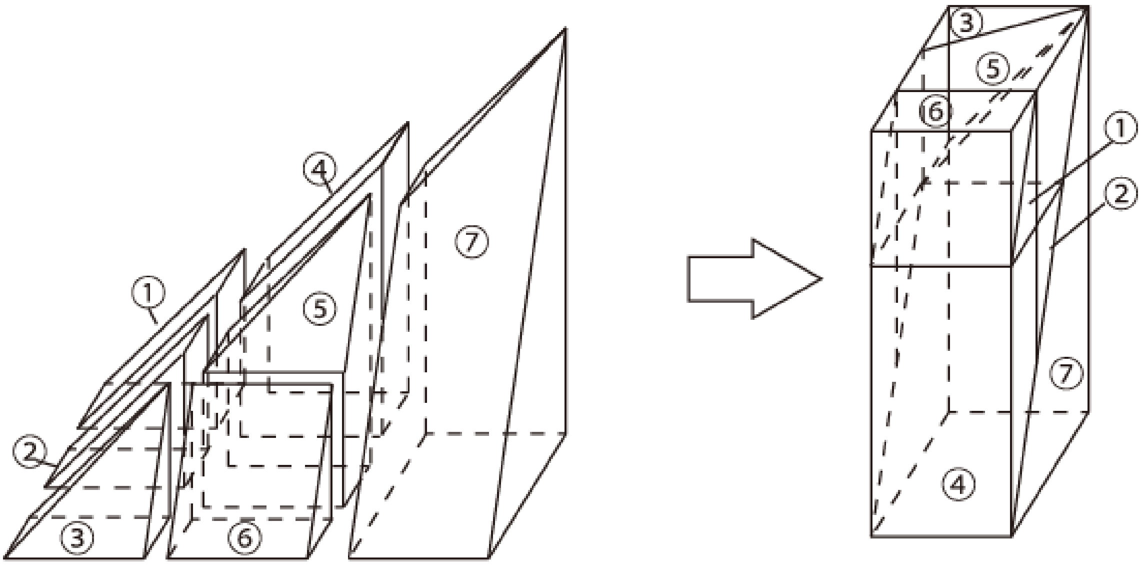


基本的には、（ア）のパターンで行っていた生徒が多かった。生徒にはすでにもとの陽馬を高さ三分の一ずつカットされたものを配布していたが、実際に生徒がさらに切断したのは、主に真ん中の三分の一の部分のみで、上三分の一の部分は切らずにそのまま使っていた。試行錯誤的に切ってはめ込んでいたが、結果的には切る必要のない部分を切断しているペアもあった。

生徒たちは想像していた以上に柔軟な発想を持って活動をしており、生徒同士が協力して活動を行っていた。

生徒の等積変形は、底面積がそのままで高さが三分の一の直方体への変換だけを扱ったが、授業の最後には、底面積が三分の一で高さがそのままの直方体への変換も扱った。

（ウ）縦三分の一への変換



「体積の公式の見方と立体の等積変形の関係を学ぶ」という目標は、等積変形による高さが三分の一の直方体への変換は生徒全員ができたが、このことで、錐体の体積が柱体の体積の三分の一ということを再確認することができていたのかというと少し疑問が残る。なぜなら、式の見方を変える説明では、あまり反応の良くない生徒が何人かいたからである。

終章

第1節　本研究より得たもの

成果は以下の4点ある。

1点目は、明治から戦前の数学の教科書における角錐の体積を求める方法を6通りに整理できたこと。

2点目は、現在使用されている教科書における面積・体積の指導法を俯瞰し、その整理を行ったこと。

3点目は、古代中国における体積の求め方におけるべつどうの分割、再構成、ヒルベルトの第3問題におけるデーンの解法の立体の分割、再構成の2つをヒントとして実践化したこと。

4点目は、実践を試みた結果、分割、再構成の考え方を利用した角錐の体積の公式の理解を生徒から得られたこと。

第2節　今後の課題

実践において$\left(\frac{1}{3}S\right)h$の指導する時間がほとんど取れず、不十分な指導になった。$\left(\frac{1}{3}S\right)h$の指導法が有効かどうかを検証することが今後の課題である。

謝　辞

本論文を書くにあたって、論文の内容全般にわたって、三重大学の中西正治先生にご教授いただきました。理論的研究のヒルベルトの第 3 問題では、同大学の蟹江幸博先生にご教授いただきました。また実践的研究では、三重県津市立一身田中学校山本佳弘校長先生はじめ数学科の細江加代先生、飯田祐也先生には、大変お世話になりました。研究授業を行うにあたり、3 回の打ち合わせをしていただき、さらには他クラスで同授業もしていただくという全面的な支援をいただきました。ここに謹んでお礼を申し上げます。